தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை முதலாம் ஆண்டு

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல்

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு - *2018*

திருத்திய பதிப்பு - *2019, 2020, 2021, 2022*

(புதிய பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்ட நூல்)

பாடநூல் உருவாக்கமும் தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல் பணிகள் கழகம்

www.textbooksonline.tn.nic.in

இந்நூலைக் கையாள்வதற்கான வழிகாட்டி

வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்	வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாயப்புகளின் பட்டியல்.
கற்றலின் நோக்கங்கள்	மாணவர்கள் ஒவ்வொரு அத்தியாயம் , பாடம் அல்லது ஆண்டு இறுதியில் அடைந்திருக்கவேண்டிய கற்றல் இலக்குகளைக் குறிக்கிறது,
குறிப்பு	பாடத்தின் கூடுதல் கருத்துக்களை தருபவை.
உங்களுக்கு தெரியுமா?	மாணவர்களின் கணித சிந்தனைகளை வளர்க்கும் வியத்தகு உண்மைகள், கருத்துக்கள் போன்றவை.
பயிற்சி	மாணவர்களின் நினைவாற்றல் ,சிந்தித்தல் மற்றும் புரிதலை மேம்படுத்த பயிற்சி அளித்தல்.
இணையச் செயல்பாடு	மாணவர்களின் கணினி சார் அறிவுத்திறனை மேம்படுத்துதல்.
இணைய இணைப்புகள்	கணினி வழி மூலங்களுக்கான பட்டியல்.
உடனடி பதில் வினைக் குறியீடு	மாணவர்கள் பாடங்கள் தொடர்பான கருத்துக்களை மேலும் அறிந்துகொள்ள மெய்நிகர் கற்றல் உலகத்துக்கு அழைத்து செல்லும் வழி.
இதர கணக்குகள்	மாணவர்களுக்கான கற்றலை மேம்படுத்த கூடுதல் கணக்குகள்.
கலைச் சொற்கள்	கணித தமிழ் வழிச் சொற்களுக்கான ஆங்கில மொழியாக்கம்
பார்வை நூல்கள்	பாடத் தலைப்போடு தொடர்புடைய மேலும் விவரங்களை அறிந்து கொள்வதற்கான துணைநூற்களின் பட்டியல்

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் பயிலும் மாணவர்களுக்கான வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்

வணிகவியல் பாடத்திட்டத்தில் வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியலை ஒரு பாடமாக கொண்ட பிரிவில் பயிலும் மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்கள், தங்களது மேற்படிப்புக்கு, BCA, B.Com மற்றும் B.Sc. புள்ளியியல் ஆகிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம்.

வணிக பிரிவு மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்களுக்கு, வங்கி மற்றும், நிதி நிறுவனங்களிலும் வேலை வாய்ப்புகள் சிறப்பாக உள்ளன. கணினியை ஒரு சிறந்த பாடமாகக் கொண்ட B.Com பிரிவை பெரும்பாலான மாணவர்கள் தேர்வு செய்கின்றனர்.

தொழில் முறை மேற்படிப்புக்களான CA, ICAI முதலிய படிப்புகளை தேர்ந்தெடுத்து வெற்றி பெறுவதன் மூலம், பட்டயகணக்காளர் (Chartered Accountant) நிறுவனச் செயலர் (Company Secretary) போன்ற சிறந்த பதவிகளை பெற முடியும். மேலும் B.Com பட்டதாரிகள், M.Com, P.h.D மற்றும் M.Phil போன்ற மேற்படிப்பு வகுப்புகளை தொடரலாம். B.Com பட்டதாரிகளுக்கு பெருமளவில் வேலை வாய்ப்புகள் காத்திருக்கின்றன.

பட்டப்படிப்பு முடித்த பிறகு, MBA,MA பொருளியல் MA செயல்முறை மற்றும் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சி பட்ட மேற்படிப்பு முதலிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம். இவற்றை தவிர, எண்ணற்ற பட்டய படிப்பு, சான்றிதழ் படிப்பு மற்றும் தொழிற் பயிற்சிக் கல்விகள் முதலியனவற்றை மேற்கொள்வதன் மூலம் ஆரம்ப கால வேலை வாய்ப்புகளை பெறலாம்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாய்ப்புகளின் பட்டியல்.

படிப்புகள்	கல்வி நிறுவனங்கள்	மேற்படிப்பிற்கான வாய்ப்புகள்
இளங்கலை வணிகவியல் (B.Com.) / B.Com (Computer) **இளங்கலை வியாபார நிர்வாகம்** (B.B.A.), **இளங்கலை வணிக மேலாண்மை** (B.B.M.), **இளங்கலை கணினி பயன்பாடுகள்** (B.C.A.), **இளங்கலை கலை** (B.A.)	• அனைத்து அரசினர் கலை மற்றும் அறிவியல் கல்லூரிகள், அரசு நிதி உதவிபெறும் கல்லூரிகள், சுயநிதி கல்லூரிகள் • ஸ்ரீராம் வணிகவியல் கல்லூரி (SRCC), புதுடெல்லி. • கூட்டுவாழ்வு சமுதாய கலை மற்றும் வணிகவியல் கல்லூரி, பூனே (Symbiosis Society's College of Arts & Commerce, Pune). • புனித சூசையப்பர் கல்லூரி, பெங்களுரூ	C.A., I.C.W.A, C.S.
இளங்கலை அறிவியல் புள்ளியியல் (B.Sc Statistics)	• மாநில கல்லூரி சேப்பாக்கம், சென்னை. • டாக்டர். அம்பேத்கர் அரசு கலை கல்லூரி, வியாசர்பாடி, சென்னை – 39 • அரசு கலை கல்லூரி, திண்டிவனம், விழுப்புரம் மற்றும் நாகர்கோயில். • சென்னை கிறித்தவ கல்லூரி, தாம்பரம் • லயோலா கல்லூரி, சென்னை • D.R.B.C.C இந்து கல்லூரி பட்டாபிராம், சென்னை.	M.Sc., Statistics
5 வருட ஒருங்கிணைந்த வியாபார நிர்வாகம், வணிகம் மற்றும் சட்ட படிப்புகள் (Five years integrated Course) B.B.A., LLB, B.A., LLB, B.Com., LL.B.	• அனைத்து அரசு சட்ட கல்லூரிகள். • டாக்டர் அம்பேத்கர் சட்ட பல்கலைகழகத்தின் கீழ் இணைக்கப்பட்ட சிறப்பு சட்டக் கல்வி நிறுவனங்கள்	M.L.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த முதுகலை பொருளியல் படிப்புகள் M.A. Economics (Integrated Five Year course) – Admission based on All India Entrance Examination	• சென்னை பொருளியல் கல்லூரி, கோட்டூர்புரம், சென்னை	Ph.D.,
இளங்கலை சமூகப்பணி (B.S.W.)	• சென்னை சமூகப்பணி கல்லூரி, எழும்பூர், சென்னை.	M.S.W

பொருளடக்கம்

இந்த புத்தகத்தில் உள்ள புள்ளியியல் பகுதிகளில் எண் சார்ந்த கணக்கீடுகளை கொண்டிருப்பதால், வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் மாணவர்கள் அக்கணக்குகளின் தீர்வுகளுக்கு கணிப்பானைப் (கால்குலேட்டரை) பயன்படுத்த அறிவுறுத்தப்படுகிறார்கள்.

D2W79

மின்னூல்

QMYVI

மதிப்பீடு

அத்தியாயம் 1

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துக்கொள்ள இயலும்

- அணி மற்றும் அணிக்கோவைகளின் வரையறை
- அணிக்கோவைகளின் பண்புகள்
- சேர்ப்பு அணியின் கருத்துரு
- நேர்மாறு அணியின் கருத்துரு
- ஒருங்கமை நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்
- உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு

செகி கொவா

1.1 அணிக்கோவைகள் (Determinants)

அறிமுகம்

பழமைவாய்ந்த சீன முறையில் ஒருங்கமைசமன்பாடுகளின்கெழுக்கள்மூங்கில் குச்சிகளைக் கொண்டு கணக்கிடும் நோக்கில் சீரமைக்கப்படும் நேரத்தில் செகி கொவா (1683) என்கிற ஜப்பானிய கணிதவியலாளர் அணிக்கோவைகள் பற்றிய கருத்தை உருவாக்கினார் என்று நம்பப்படுகிறது. பின்னர் காட்ஃபிரைட் வில்கெம் வான் லெபனைட்ஸ் என்கிற ஜெர்மானிய கணிதவியலாளர் அணிக் கோவைகளை முறையாக மேம்படுத்தினார். ஆர்தர் கெய்லே (1841) என்பவர் நிகழ்காலத்தில் அல்லது தற்போது பயன்படுத்தப்படுகின்ற செங்குத்துக்கோடு குறியீட்டை அறிமுகப்படுத்தினார். ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதற்கான விதிகளை 1750ஆம் ஆண்டு வெளியிட்டவர் என்று அறியபட்ட கிராமர் என்பவரால் அணிகோவை அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

பத்தாம் வகுப்பில் அணிகள் மற்றும் அதன் இயற்கணித பண்புகள் பற்றி படித்துள்ளோம். மேலும் இயற்கணித சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை அணிவடிவில் எழுதலாம் எனவும் படித்துள்ளோம். (x_1, y_1) (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) உச்சிகளை கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பானது,

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

என நாம் அறிந்துள்ளோம். இவ்வகை அமைப்பினை நினைவுக்கூர்வதில் கடினத்தன்மையைக் குறைக்கும் விதமாக கணிதவியலாளர்கள் இவற்றை அணிக்கோவை அமைப்பில் விவரிக்கும் முறையை உருவாக்கினார்கள். எனவே மேற்கண்ட அமைப்பை

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ என எழுதலாம்.}$$

ஆகையால் ஒரு அணிக்கோவை என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விரிவாக்கத்தை எளிய வழியில் எழுத உதவும் அமைப்பு ஆகும். அவைகள் சதுரவடிவில் இரு குத்துக்கோடுகளுக்கிடையே வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளதை காண்க. இப்பாடப்பகுதியில் மெய்யெண்களை மூலகங்களாக கொண்ட மூன்று வரிசை

வரையுள்ள அணிக்கோவைகளைப் பற்றி படிப்போம். மேலும் அணிக்கோவைகளின் பல்வேறு பண்புகள் (நிரூபணமின்றி), சிற்றணிக்கோவைகள், இணைக்காரணிகள், சேர்ப்பு அணி, சதுர அணியின் நேர்மாறு மற்றும் அணிக்கோவைகளின் வணிக பயன்பாடு ஆகியவற்றை கற்கலாம்.

முந்தைய வகுப்புகளில் அணிகளைப் பற்றி கற்றுக் கொண்டோம். அணிகள் மற்றும் அவற்றின் செயல்பாடுகள் பற்றி நினைவு கூறலாம்.

1.1.1 நினைவு கூறுதல்

அணி (Matrix)

வரையறை 1.1

உறுப்புகளைச் செவ்வக வடிவில் நிரைகள் மற்றும் நிரல்களைக் கொண்டு ஒரு அடைப்புக் குறிக்குள் அமைப்பது அணியாகும்.

அணிகளை A, B, C, ...என்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

உதாரணமாக , $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணம் (Order of a matrix)

ஓர் அணி A இல் m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் இருந்தால் அந்த அணி A இன் வரிசை $m \times n$ ஆகும்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் A இன் வரிசை 2×3

அணியின் பொதுவடிவம் (General form of matrix)

பொதுவாக $m \times n$ வரிசையுள்ள அணி A பின்வருமாறு அமையும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2i} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \cdots & a_{mi} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

இதனை சுருக்கமாக $[a_{ij}]_{mxn}$ $i = 1,2,......m;$ $j = 1,2,\ldots n$ எனவும் எழுதலாம். இங்கு a_{ij} என்ற உறுப்பு நிரை i மற்றும் நிரல் j–இல் உள்ள உறுப்பு ஆகும்.

அணியின் வகைகள்

நிரை அணி (Row matrix)

ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே கொண்ட அணி நிரை அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக,

$$A = [\, a_{11}\ a_{12}\ a_{13} .... a_{1i} .... a_{1n}]_{1\times n};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}_{1 X 2}$$

நிரல் அணி (Column matrix)

ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே கொண்ட அணி நிரல் அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

பூச்சிய அணி அல்லது இன்மை அணி (சுழி அணி) (Zero matrix)

ஓர் அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அவ்வணி பூச்சிய அணி எனப்படும்

உதாரணமாக,

$$\mathrm{O} = [0],\ \mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்பன பூச்சிய அணிகளாகும்.

குறிப்பு

பூச்சிய அணியின் வரிசை எந்த வரிசையாகவும் அமையலாம்.

சதுர அணி (Square matrix)

ஓர் அணியின் நிரை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவ்வணி ஒரு சதுர அணியாகும்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ வரிசை 2-ஐ உடைய சதுர அணி ஆகும்

$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 \\ 2 & \frac{3}{5} & -4 \end{bmatrix}$ வரிசை 3-ஐ உடைய சதுர அணி ஆகும்.

குறிப்பு

ஒரு சதுர அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் கூடுதல் அணியின் சுவடு ஆகும்.

முக்கோண அணி (Triangular matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேல் அல்லது கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் அவ்வணி முக்கோண அணியாகும்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

மூலைவிட்ட அணி (Diagonal matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில் அவ்வணி மூலைவிட்ட அணியாகும்.

உதாரணமாக,

$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3–ஐ உடைய மூலைவிட்ட அணியாகும்.

திசையிலி அணி (Scalar matrix)

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் சமமாக இருந்தால் அது திசையிலி அணி ஆகும்.

உதாரணமாக,

$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3 உடைய திசையிலி அணியாகும்.

அலகு அணி அல்லது சமனி அணி (Unit matrix)

ஒரு திசையிலி அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் "எண் ஒன்று" எனில் அவ்வணி சமனி அணி அல்லது அலகு அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக,

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 2 உடைய அலகு அணியாகும்.

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3 உடைய அலகு அணியாகும்.

அணியின் திசையிலி பெருக்கல் (Multiplication of matrix by scalar)

$A = [a_{ij}]$ என்ற அணியின் அனைத்து உறுப்புகளையும் k என்ற திசையிலியால் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் அணி $kA = [ka_{ij}]$ (i, j –ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்).

மாறாக ஓர் அணி A-யை மாறிலி k ஆல் பெருக்குவது என்பது அணி A இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் k ஆல் பெருக்க கிடைக்கும் அணியாகும்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ எனில், $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & -4 & 16 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

அணியின் எதிர்மறை (Negative of a matrix)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு அணி என்க. A இன் கூட்டல் எதிர்மறை $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ ஆனது அனைத்து உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ எனில், $-A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

சம அணிகள் (Equality of matrices)

A, B என்ற இரு அணிகள்

(i) ஒரே வரிசை உடையனவாகவும்

(ii) அவற்றின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகவும் இருந்தால் அவை சம அணிகள் எனப்படும்.

அணிகளின் கூட்டலும், கழித்தலும் (Addition and subtraction of matrices)

இரு அணிகள் A, B என்பன ஒரே வரிசையாக அமையும்போது மட்டும் அவற்றின் கூட்டல், கழித்தல் வரையறுக்கப்படுகிறது. இவற்றின் கூடுதல் $A + B$ ஆனது A, B இன் ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுவதாகும். குறியீட்டு முறையில்

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ எனில், $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

இதே போன்று $A - B = A + (-B) = [a_{ij}]_{m\times n} + [-b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$ என்பதாகும்.

அணிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of matrices)

A, B என்ற இரு அணிகளில் A இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B –ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் இவ்வணிகள் பெருக்கத்தக்கவை எனப்படும். அணி A இன் ஒவ்வொரு நிரையிலுள்ள உறுப்புகளையும் அணி B இன் ஒவ்வொரு நிரலின் ஒத்த உறுப்புகளுடன் பெருக்கி கூட்டுவதன் மூலம் AB என்ற பெருக்கல் அணி கிடைக்கிறது.

$A = [a_{ij}]$ என்பது $m \times p$ வரிசையுடைய அணி மற்றும் $B = [b_{ij}]$ என்பது $p \times n$ வரிசையுடைய அணி எனில் AB யின் பெருக்கல் அணி $C = [c_{ij}]$ என்பது $m \times n$ வரிசையுடைய அணி ஆகும்.

நிரை நிரல் மாற்று அணி (Transpose Matrix)

$A = [a_{ij}]$ என்பது $m \times n$ வரிசையுடைய ஒரு அணி என்க. அணி A இன் நிரைகளை நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் அணி A இன் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். அந்த அணியை A^T என்று குறிக்கலாம். இங்கு A^T இன் வரிசை $n \times m$ ஆகும்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ எனில் } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு

மேற்கூறியக் கருத்துகள், மாணவர்கள் நன்கு அறிந்தவை என நம்பப்படுகிறது. நமது தற்போதைய பாடத்திட்டத்தினை கீழ்வரும் பிரிவுகளிலிருந்து தொடங்குவோம்.

வரையறை 1.2

மெய்யெண்கள் அல்லது கலப்பெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட n வரிசையுள்ள ஒவ்வொரு சதுர அணி A யுடன் நாம் ஓர் எண்ணை தொடர்புபடுத்த முடியுமானால், இதனை அணி A இன் அணிக்கோவை என்கிறோம். இதனை $|A|$ அல்லது $\det(A)$ அல்லது Δ எனகுறிக்கலாம்.

சதுர அணி A இன் உறுப்புகளை கொண்டு ஓர் அணிக்கோவையை வடிவமைத்தால் இதனை அணி A இன் அணிக்கோவை எனலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ எனில்}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.1

மதிப்பிடுக : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-1)4$$

$$= 8+4 = 12$$

மூன்று அல்லது அதற்கு மேல் வரிசையுடைய அணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதற்கு நாம் சிற்றணி மற்றும் இணைகாரணிகளை வரையறுக்க வேண்டும்.

1.1.2 சிற்றணிக்கோவை (Minor)

$|A| = |[a_{ij}]|$ என்பது n வரிசையுடைய அணிக்கோவை என்க. ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு a_{ij} இன் சிற்றணிக்கோவையானது a_{ij} அமைந்த நிரை மற்றும் நிரலை நீக்குவதால் பெறப்படும் அணிக்கோவையாகும். a_{ij} யின் சிற்றணிக்கோவையானது M_{ij} எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

1.1.3 இணைக்காரணிகள் (Cofactors)

தகுந்த குறியுடன் கூடிய சிற்றணிக்கோவைகள் இணைக்காரணிகள் ஆகும். a_{ij} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி A_{ij} எனில்

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

மூன்றாம் வரிசை அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ இன் உறுப்புகளான a_{11}, a_{12}, a_{13} இவற்றின் சிற்றணிக்கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) a_{11} இன் சிற்றணிக்கோவை

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

a_{11} இன் இணைக்காரணி

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

(ii) a_{12} இன் சிற்றணிக்கோவை

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

a_{12} இன் இணைக்காரணி

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

(iii) a_{13} இன் சிற்றணிக்கோவை

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

a_{13} இன் இணைக்காரணி

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில் உள்ள உறுப்புக்களுக்கு சிற்றணிக்கோவை மற்றும் இணைக்காரணிகள் காண்க.

தீர்வு

1 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{11} = 3$

-2 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{12} = 4$

4 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{21} = -2$

3 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{22} = 1$

1 இன் இணைக்காரணி $= A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3$

-2 இன் இணைக்காரணி $=$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -4$$

4 இன் இணைக்காரணி $= A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 2$

3 இன் இணைக்காரணி $= A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பின் சிற்றணிக்கோவை மற்றும் இணைக்காரணிகள் காண்க.

தீர்வு

3 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{11} =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

1 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{12} =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$$

2 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{13} =

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2-8=-6$$

2 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{21} =

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-2=-2$$

2 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{22} =

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0-8=-8$$

5 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{23} =

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3-4=-1$$

4 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{31} =

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-4=1$$

1 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{32} =

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15-4=11$$

0 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{33} =

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6-2=4$$

3 இன் இணைக்காரணி A_{11} =

$$(-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = -5$$

1 இன் இணைக்காரணி A_{12} =

$$(-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = 20$$

2 இன் இணைக்காரணி A_{13} =

$$(-1)^{1+3}M_{13} = M_{13} = -6$$

2 இன் இணைக்காரணி A_{21} =

$$(-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21} = 2$$

2 இன் இணைக்காரணி A_{22} =

$$(-1)^{2+2}M_{22} = M_{22} = -8$$

5 இன் இணைக்காரணி A_{23} =

$$(-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23} = 1$$

4 இன் இணைக்காரணி A_{31} =

$$(-1)^{3+1}M_{31} = M_{31} = 1$$

1 இன் இணைக்காரணி A_{32} =

$$(-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32} = -11$$

0 இன் இணைக்காரணி A_{33} =

$$(-1)^{3+3}M_{33} = M_{33} = 4$$

ஒரு அணிக்கோவையை எந்தவொரு நிரை அல்லது நிரல் வழியாகவும் மதிப்பிடலாம்.

உதாரணமாக,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ (அல்லது)
$a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$ (R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த)

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ (அல்லது)
$a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$ (C_1 வழியாக விரிவுபடுத்த)

எடுத்துக்காட்டு 1.4

மதிப்பு காண்க: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\ (1\text{இன் சிற்றணிக்கோவை}) - 2\ (2 \text{ இன் சிற்றணிக்கோவை}) + 4(4 \text{ இன் சிற்றணிக்கோவை})$$

$$= 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 - 52 = -52.$$

1.1.4 அணிக்கோவைகளின் பண்புகள் (நிரூபணமின்றி)

1. ஓர் அணிக்கோவையின் நிரை, நிரல்களை பரிமாற்றம் செய்தால், அதன் மதிப்பு மாறாது.
2. ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) தமக்குள் பரிமாற்றம் செய்யப்படின் அணிக்கோவை மதிப்பின் குறிமட்டுமே மாறும்.
3. ஓர் அணிக்கோவையில் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வசமம் எனில் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

4. ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு மாறிலி k ஆல் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு k ஆல் பெருக்கப்படும்.

5. ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்போடும் மற்ற நிரைகளில் (நிரல்களில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளைக் குறிப்பிட்ட மாறிலிகளால் முறையாக பெருக்கிக் கூட்டுவதால் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

6. ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) விகித சமத்தில் இருப்பின் அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

7. ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்கும் எனில் அவ்வணிக்கோவையை அதே வரிசையுடைய இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிக்கோவைகளின் கூட்டல் பலனாக எழுத இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+2a & 2y+2b & 2z+2c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+2a & 2y+2b & 2z+2c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x^2-(x-1)(x+1)$$

$$= x^2-(x^2-1)$$

$$= x^2-x^2+1 = 1$$

குறிப்பு

முக்கோணம் அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு என்பது அணியின் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கல் பலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

தீர்க்க $$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 1, x = 2, x = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 102 & 18 & 36 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 102 & 18 & 36 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \; (\because R_2 \equiv R_3)$$

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-b & (a-b)(a+b) \\ 0 & b-c & (b-c)(b+c) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)[0-0+\{b+c-(a+b)\}]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

பயிற்சி 1.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கோவைகளின் அனைத்து உறுப்புகளின் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகளைக் காண்க.

   (i) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு காண்க

3. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில் $|AB|$ யைக் காண்க.

5. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 11 \\ -3 & 5 & x \\ -x & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

6. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு காண்க

7. $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & bc & b+c \\ \frac{1}{b} & ca & c+a \\ \frac{1}{c} & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

8. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ என நிறுவுக.

1.2 அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a matrix)

1.2.1 பூச்சியக்கோவை அணி (Singular matrix)

A என்ற ஒரு சதுர அணியின், $|A| = 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியக்கோவை அணி எனப்படும்.

1.2.2 பூச்சியமற்ற கோவை அணி (Non–singular matrix)

A என்ற ஒரு சதுர அணியின், $|A| \neq 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ –ஐ பூச்சியக்கோவை அணி எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$\therefore$ A என்பது பூச்சிய கோவை அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ –ஐ பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 8 = 16$$

$$\neq 0$$

$\therefore$ A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகும்

உங்களுக்கு தெரியுமா?

A மற்றும் B என்பன சம வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில் AB மற்றும் BA முறையே சம வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகளாக இருக்கும்.

1.2.3 சேர்ப்பு அணி (Adjoint of matrix)

A என்ற அணியின் இணைக்காரணிகளால் பதிலீடு செய்து பெறப்படும் அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி, A யின் சேர்ப்பு அணி ஆகும். இதனை adj A என எழுதலாம்

அதாவது adj $A = [A_{ij}]^T$. $[A_{ij}]$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியின் இணைக்காரணி அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் adj A காண்க.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு

(i) $|adjA| = |A|^{n-1}$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(ii) $|kA| = k^n|A|$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(iii) $adj(kA) = k^{n-1}adjA$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(iv) $A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|I$

(v) $AdjI = I$, I என்பது ஓர் அலகு அணி.

(vi) adj (AB) = (adj B)(adj A)

(vii) $|AB| = |A|\ |B|$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில் adj A காண்க

தீர்வு

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0-(-4) = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(0-(-3)) = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-12 = -12$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-8) = 7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0-(-3) = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0-0 = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & -12 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.4 நேர்மாறு அணி

A என்பது வரிசை n உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி என்க. $AB=BA=I$ (I என்பது n வரிசை அலகு அணி) எனுமாறு ஒரு அணி B –ஐ காண முடிந்தால் B ஆனது A இன் நேர்மாறு அணி எனப்படும். A இன் நேர்மாறு அணியை A^{-1} என எழுதலாம்.

இப்போது, $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\,\text{I}$

$$\Longrightarrow \quad A\left(\frac{1}{|A|} adj\ A\right) = \left(\frac{1}{|A|} adj\ A\right) A = I$$

$$\Longrightarrow \quad AB = BA = I \text{ இங்கு } B = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

குறிப்பு

(i) B என்பது A இன் நேர்மாறு எனில் A என்பது B இன் நேர்மாறு ஆகும்
அதாவது $B = A^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}$

(ii) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(iii) ஓர் அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால் அது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாகும். அதாவது எந்த அணிக்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மாறுகள் இருக்காது

(iv) A^{-1} –ன் வரிசையும், A –ன் வரிசையும் சமமாக இருக்கும்.

(v) $I^{-1} = I$, இங்கு I என்பது அலகு அணியாகும்.

(vi) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (vii) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்

$$A^2 = I \Leftrightarrow A = A^{-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \neq 0$$

A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகையால், A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.15

$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

A என்பது பூச்சியக்கோவை அணி. எனவே A^{-1} யைக் காணஇயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(15-20) - 4(6-8) + 4(10-10)$$

$= 2(-5) - 4(-2) + 4(0)$

$= -10 + 8 + 0 = -2 \neq 0$

A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகையால், A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$A_{11} = -5;\ A_{21} = 8;\ A_{31} = -4$

$A_{12} = 2;\ A_{22} = -2;\ A_{32} = 0$

$A_{13} = 0;\ A_{23} = -2;\ A_{33} = 2$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 8 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.17

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் $A^2 - kA + I_2 = O$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் k –ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

தரவு $A^2 - kA + I_2 = O$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7-2k+1 & 12-3k+0 \\ 4-k+0 & 7-2k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8-2k & 12-3k \\ 4-k & 8-2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4 - k = 0$$

$$\Rightarrow k = 4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 3 = 1 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.18

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில்,

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ எனக் காட்டுக

தீர்வு

தரவு $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ யைக் காணஇயலும்.

$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$

B^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \neq 0$$

$(AB)^{-1}$ யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj}(AB) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} adj(AB)$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} adjB$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix}$ என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{35}\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 25 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{35}{35}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 25 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} = \frac{35}{35}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$AB = BA = \mathrm{I}$$

ஆகையால் A மற்றும் B அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் A இன் சேர்ப்பு அணி காண்க.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் $A(adj\ A) = |A|\ I$ என்பதை சரிபார்க்க, மேலும் A^{-1} காண்க.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணி காண்க.

   (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 12 08-12-2021 20:53:55

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $adj\ (AB) = (adj\ B)(adj\ A)$ என்பதை சரிபார்க்க

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், $(adj\ A)A = O$ எனக் காட்டுக.

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், A இன் நேர்மாறு அணி A எனக் காட்டுக.

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், A ஐக் காண்க.

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும் எனக் காட்டுக.

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதை சரிபார்க்க.

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 9 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இல்லை எனில் λ இன் மதிப்பு காண்க.

11. $X = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & p & q \end{bmatrix}$ மற்றும், $Y = X^{-1}$ எனில் p,q –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

1.2.5 நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் நேரிய சமன்பாடு தொகுப்பின் தீர்வு காணல்

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவை மதிப்பிட வேண்டிய n மாறிகள் என்க. இம் மாறிகளில் அமைந்த அசமபடித்தான n நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

இதனை $\begin{bmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$

என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

இவ்வாறாக $AX = B$ … (1) என்கிற அணி சமன்பாட்டை அடைகிறோம்.

$A = \begin{bmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$

சமன்பாடு (1) லிருந்து

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

நேர்மாறு அணி முறையில் தீர்க்க:

$2x + 5y = 1$

$3x + 2y = 7$

தீர்வு

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ என எழுதலாம்

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -11 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x = 3, y = -1$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க:

$3x - 2y + 3z = 8;\ 2x + y - z = 1;$
$4x - 3y + 2z = 4$

தீர்வு

தரவு $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

இதனை $AX = B$ என்று எழுதலாம்

$X = A^{-1}B$

இங்கு $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -17 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$A_{11} = -1 \quad A_{12} = -8 \quad A_{13} = -10$

$A_{21} = -5 \quad A_{22} = -6 \quad A_{23} = 1$

$A_{31} = -1 \quad A_{32} = 9 \quad A_{33} = 7$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ -5 & -6 & 1 \\ -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 1, y = 2$ மற்றும் $z = 3$

எடுத்துக்காட்டு 1.22

4 கிலோ வெங்காயம், 3 கிலோ கோதுமை மற்றும் 2 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹320, 2 கிலோ வெங்காயம், 4 கிலோ கோதுமை, 6 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹560, 6 கிலோ வெங்காயம், 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 3 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹380 எனில், நேர்மாறு அணி முறையில் ஒரு கிலோவிற்கான பொருள்களின் விலையை காண்க.

தீர்வு

ஒரு கிலோ வெங்காயம், கோதுமை, அரிசியின் விலைகள் முறையே x, y, z என்க.

$$4x + 3y + 2z = 320$$

$$2x + 4y + 6z = 560$$

$$6x + 2y + 3z = 380$$

இதனை

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$ என எழுதலாம்.

$$AX = B$$

இங்கு, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$A_{11} = 0 \qquad A_{12} = 30 \qquad A_{13} = -20$

$A_{21} = -5 \qquad A_{22} = 0 \qquad A_{23} = 10$

$A_{31} = 10 \qquad A_{32} = -20 \qquad A_{33} = 10$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 30 & -20 \\ -5 & 0 & 10 \\ 10 & -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 56 \\ 38 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 - 280 + 380 \\ 960 + 0 - 760 \\ -640 + 560 + 380 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$x = 20, \; y = 40, \; z = 60$$

ஒரு கிலோ வெங்காயத்தின் விலை = ₹20

ஒரு கிலோ கோதுமையின் விலை = ₹40

ஒரு கிலோ அரிசியின் விலை = ₹60

பயிற்சி 1.3

1. நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க:
   $2x + 3y - 5 = 0 \; ; \; x - 2y + 1 = 0$
2. நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க:
   (i) $3x - y + 2z = 13; \; 2x + y - z = 3;$
   $x + 3y - 5z = -8$
   (ii) $x - y + 2z = 3; \; 2x + z = 1;$
   $3x + 2y + z = 4$
   (iii) $2x - z = 0 \; ; \; 5x + y = 4 \; ; \; y + 3z = 5$
3. இரவி என்கிற விற்பனையாளர் வெவ்வேறு தரகு வீதங்களையுடைய A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களை 2009 ஆண்டின் சனவரி, பிப்ரவரி மற்றும் மார்ச் மாதங்களில் விற்பனை செய்ததற்கான விவரங்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

மாதங்கள்	விற்பனை செய்த அலகுகள்			பெற்ற மொத்த தரகு (ரூபாயில்)
	A	B	C	
சனவரி	9	10	2	800
பிப்ரவரி	15	5	4	900
மார்ச்	6	10	3	850

A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களுக்கான தரகு வீதத்தை நேர்மாறு அணி முறையில் காண்க.

4. A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களின் விலையை ஒரு அலகிற்கு முறையே x, y மற்றும் z என்க. P என்பவர் 4 அலகு C–யை வாங்குகிறார். 3 அலகு A மற்றும் 5 அலகு B யை விற்பனை செய்கிறார். Q என்பவர் 3 அலகு B யை வாங்குகிறார். மேலும் 2 அலகு A யையும் 1 அலகு C யையும் விற்பனை செய்கிறார். R என்பவர் 1 அலகு A யை வாங்குகிறார். மேலும் 4 அலகு B யையும் 6 அலகு C யையும் விற்பனை செய்கிறார். மேற்கண்டவற்றில் P,Q,R என்பவர்கள் முறையே ஈட்டியத் தொகை ₹6,000, ₹5,000, ₹13,000 எனில் A,B மற்றும் C ன் ஒரு அலகிற்கான விலையைக் நேர்மாறு அணி முறையில் காண்க.

5. மூன்று எண்களின் கூடுதல் 20. முதல் எண்ணை 2 ஆல் பெருக்கி, இரண்டாவது எண்ணைக் கூட்டி, மூன்றாவது எண்ணைக் கழிக்க, கிடைக்கும் மதிப்பு 23 ஆகும். முதல் எண்ணை மூன்றால் பெருக்கி வரும் மதிப்புடன் இரண்டு மற்றும் மூன்றாம் எண்களைக் கூட்ட கிடைக்கும் மதிப்பு 46 எனில் அந்த எண்களை நேர்மாறு அணிமுறையில் காண்க.

6. ஒரு அலுவலகத்தில் மூன்று வாரங்களில் செலவுகள் செய்ததற்கான விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. மூன்று வாரங்களுக்கு வெவ்வேறு தரப்பினரின் ஊதியங்கள் மாறாமல் இருப்பதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தரப்பினரின் ஊதியத்தையும் நேர்மாறு அணி முறையில் கணக்கிடுக.

வாரங்கள்	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை			வாரத்திற்கு மொத்த செலவு (₹)
	A	B	C	
1 வது வாரம்	4	2	3	4900
2 வது வாரம்	3	3	2	4500
3 வது வாரம்	4	3	4	5800

1.3 உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு (Input – Output Analysis)

பேராசிரியர் வேஸ்லி W. லியோன்டிப் என்பவரால் உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு என்ற உத்தி கண்டறியப்பட்டது. உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு என்பது பொருளாதாரப் பிரிவுகளுக்கு இடையேயான இணைச் சார்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட பொருளாதார பகுப்பாய்வு அமைப்பாகும். இந்த முறையானது பெரும்பாலும் நேரிடை அல்லது எதிரிடை பொருளாதார அதிர்வுகளின் விளைவுகளை கணக்கிட பயன்படுகிறது. மேலும் பொருளாதாரம் முழுவதிலும் ஏற்படகூடிய சிற்றலை விளைவுகளை பகுப்பாய்வு செய்ய பயன்படுகிறது.

உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு உள்ளீடு–வெளியீடு அட்டவணைகளை அடிப்படையாகக்கொண்டதாகும். பொருளாதார கட்டமைப்பில் உள்ள தொழிற்சாலைகளுக்கு சுழற்சி முறையில் அளிக்கப்படும் விவரங்கள் நிரை மற்றும் நிரல்களாக அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரல்களின் தலைப்பில் தொழிற்சாலைகள் வகைப்படுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள விவரம் தொழிற்சாலை உற்பத்தியில் பயன்படுத்தக்கூடிய உள்ளீடுகளின் அளவினை தொடர்புப்படுத்துகிறது. உதாரணத்திற்கு மோட்டார் உற்பத்தியில், நிரல், மோட்டார் கட்டமைப்பிற்கு தேவையான வளங்களை குறிக்கிறது. (அதாவது இரும்பு, அலுமினியம், பிளாஸ்டிக், மின்னணுக்கள் மற்றும் பல) உள்ளீடு மற்றும் வெளியீடு மாதிரிகள் ஒரு ரூபாய் முதலீடு அல்லது உற்பத்திக்கு தேவையான உழைப்பின் அளவை குறிப்பதற்குத் தனியாக அட்டவணைகளைக் கொண்டிருக்கும்.

A_1 மற்றும் A_2 என்ற இரு தொழிற்சாலைகளைக் கொண்ட எளிமையான பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஒன்றை கருதுவோம். அந்த தொழிற்சாலைகள்

ஒவ்வொன்றும் ஒரே விதமான பொருளை மட்டுமே உற்பத்திச் செய்வதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையும் தனது செயல்பாட்டிற்கு, தன் உற்பத்தியில் ஒரு பகுதியையும், ஏனையவற்றிற்கு மற்ற தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியையும் பயன்படுத்திக் கொள்கிறது. இவ்விதமாக அவை ஒன்றையொன்று சார்ந்து செயல்படுகின்றன. மேலும் உற்பத்தி முழுவதும் நுகரப்படுவதாகக் கொள்வோம். அதாவது ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையில் மொத்த உற்பத்தியும் அதன் தேவையும், மற்ற தொழிற்சாலைகளின் தேவையையும், வெளியாரின் தேவை அதாவது இறுதித் தேவையையும் சரியாக நிறைவு செய்யுமாறு அமைவதாகக் கொள்வோம்.

பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு மாறாதிருக்கும் போது இரு தொழிற்சாலைகளின் தற்போதைய உற்பத்தி அளவுகளின் விவரங்கள் அடிப்படையில், வெளியாரின் தேவையின் மாற்றத்திற்கு ஏற்றபடி உற்பத்தி அளவுகள் எந்த அளவில் இருக்க வேண்டும் என்பதைக் காணுவதே நமது நோக்கமாகும்.

a_{ij} என்பது A_j ஆல் பயன்படுத்தப்படும் A_i இன் உற்பத்தியின் ரூபாய் மதிப்பு என்க. இதில் $i, j = 1, 2$

x_1 மற்றும் x_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் தற்போதைய உற்பத்திகளின் ரூபாய் மதிப்புகள் என்க.

d_1 மற்றும் d_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் உற்பத்திக்கான இறுதித் தேவைகளின் ரூபாய் மதிப்புகள் என்க.

இவற்றின் வாயிலாக நாம் அமைக்கும் சமன்பாடுகள்

$$a_{11} + a_{12} + d_1 = x_1; \quad a_{21} + a_{22} + d_2 = x_2 \ldots (1)$$

மேலும் $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{x_j}$ $i, j = 1, 2$ என்க

அதாவது

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1}; \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2}; \quad b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1}; \quad b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2}$$

எனவே சமன்பாடுகள் (1) யை கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + d_1 = x_1$$

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + d_2 = x_2$$

இவற்றைக் கீழ்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$(1 - b_{11})x_1 - b_{12}x_2 = d_1$$

$$-b_{21}x_1 + (1 - b_{22})x_2 = d_2$$

இவற்றின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1-b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & 1-b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$(I - B)X = D$ ஆகும்

இங்கு $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = (I - B)^{-1}D}$$

இங்கு அணி B என்பது தொழில்நுட்ப அணி [Technology Matrix] எனப்படும்.

1.3.1 ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகள்

பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் இருக்க ஹாக்கின்–சைமன் என்பவர்களது கீழ்க்கண்ட இரு நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்.

B என்பது தொழில்நுட்ப அணி எனில்,

(i) $I - B$ அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகை எண்களாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) $|I - B|$ மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

இரு தொழிற்சாலைகளையுடைய பொருளாதார அமைப்பின் தொழில்நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி அது செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என்று கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு

$$B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$|I - B| = \begin{vmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.9 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$= (0.2)(0.3)-(-0.2)(-0.9)$$

$$= 0.06 - 0.18$$

$$= -0.12 < 0$$

$|I - B|$ என்பது குறை எண்.

∴ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் [Hawkins-simon] நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்படவில்லை. எனவே பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

2016 ஆம் ஆண்டின் இரண்டு தொழிற்சாலைகளின் பரிவர்த்தனைகளின், பொருளாதாரக் கட்டமைப்பின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொழிற்சாலை	1	2	இறுதி தேவை	மொத்த உற்பத்தி
1	500	1,600	400	2,500
2	1,750	1,600	4,650	8,000
தொழிலாளர்கள்	250	4,800	-	-

தொழில்நுட்ப அணியைக் கண்டுபிடித்து, இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின் படி செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என சரிபார்க்க.

தீர்வு

$a_{11} = 500 \quad a_{12} = 1600 \quad x_1 = 2500$

$a_{21} = 1750 \quad a_{22} = 1600 \quad x_2 = 8000$

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{500}{2500} = 0.20;$$

$$b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{1600}{8000} = 0.20$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{1750}{2500} = 0.70;$$

$$b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{1600}{8000} = 0.20$$

தொழில்நுட்ப அணி $= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது

இப்பொழுது, $|I - B| = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.7 & 0.8 \end{vmatrix}$

$$= (0.8)(0.8)-(-0.7)(-0.2)$$

$$= 0.64 - 0.14$$

$$= 0.50 > 0$$

$|I - B|$ இன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது. மேலும் $|I-B|$ என்பது மிகை. ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் (Hawkins-simon) இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளது. எனவே இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

ஒரு பொருளாதார அமைப்பில் P_1 மற்றும் P_2 என்ற இரு தொழிற்சாலைகள் உள்ளன. அவற்றின் தேவை மற்றும் அளிப்பு நிலவரம் (ரூபாய் கோடிகளில்) கீழ்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தியாளர் பிரிவு	உபயோகிப்போர் பிரிவு P_1	P_2	இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
P_1	10	25	15	50
P_2	20	30	10	60

P_1 –ன் இறுதித் தேவையானது 35க்கும் P_2 –ன் இறுதித் தேவை 42 க்கும் மாறும்போது உற்பத்திகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$a_{11} = 10 \quad a_{12} = 25 \quad x_1 = 50$

$a_{21} = 20 \quad a_{22} = 30 \quad x_2 = 60$

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}; \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}; \quad b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

தொழில்நுட்ப அணி, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது.

$$|I - B| = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{7}{30} > 0$$

$(I - B)$ இன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது. மேலும் $|I - B|$ யும் மிகையாக உள்ளது. ஹாக்கின்ஸ் – சைமன் இரு நிபந்தைனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளன. எனவே பொருளாதார கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

$$adj\ (I–B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$(I–B)^{-1} = \frac{1}{|I-B|} adj(I-B)$$

($|I-B| \neq 0$, என்பதால் $(I-B)^{-1}$ கிடைக்கப்பெறும்)

$$= \frac{1}{\frac{7}{30}} adj(I-B)$$

$$= \frac{30}{7}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

தீர்வு $= X = (I–B)^{-1}D$, இங்கு $D = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 204 \end{bmatrix}$$

P_1 –ன் உற்பத்தி ₹150 கோடியாகவும், P_2 –ன் உற்பத்தி ₹204 கோடியாகவும் இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

ஒரு பொருளாதார கட்டமைப்பில் நிலக்கரி மற்றும் இரும்பு உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. இரண்டு பொருட்களும் ஒவ்வொன்றின் உற்பத்தியில் இடைஉள்ளீடாக பயன்படுகிறது. ஒரு டன் இரும்பு உற்பத்திக்கு 0.4 டன் இரும்பு மற்றும் 0.7 டன் நிலக்கரி தேவைப்படுகிறது. இவ்வாறே ஒரு டன் நிலக்கரி உற்பத்திக்கு 0.1 டன் இரும்பு மற்றும் 0.6 டன் நிலக்கரி தேவைப்படுகிறது. எந்த ஒரு உள்ளீடு மூலதனமும் தேவைப்படவில்லை. இந்த அமைப்பு செயல்படும் நிலையில் உள்ளதாக நீங்கள் கருதுகிறீர்களா? ஒரு டன் இரும்பு மற்றும் ஒரு டன் நிலக்கரி உற்பத்தி செய்யத் தேவைப்படும் வேலை நாட்கள் முறையே 5 மற்றும் 2. பொருளாதார கட்டமைப்பில் 100 டன் நிலக்கரியும் 50 டன் இரும்பும் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும் எனில் மொத்த உற்பத்தி செய்யத் தேவைப்படும் தொழிலாளர் நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

	இரும்பு	நிலக்கரி	இறுதி தேவை
இரும்பு	0.4	0.1	50
நிலக்கரி	0.7	0.6	100
தொழிலாளர் நாட்கள்	5	2	-

தொழில்நுட்ப அணி $B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$|I - B| = \begin{vmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.7 & 0.4 \end{vmatrix}$$

$$= (0.6)(0.4) - (-0.7)(-0.1)$$

$$= 0.24 - 0.07 = 0.17$$

ஹாக்கின்ஸ்–சைமனின் இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளது. எனவே இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

$$\text{adj}\ (I-B) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$(I-B)^{-1} = \frac{1}{|I - B|} adj(I - B)$$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$X = (I-B)^{-1}\text{D}$, இங்கு $\text{D} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 30 \\ 95 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 176.5 \\ 558.8 \end{bmatrix}$$

இரும்பு வெளியீடு $= 176.5$ டன்கள்

நிலக்கரி வெளியீடு $= 558.8$ டன்கள்

மொத்த தொழிலாளர்களின் வேலை நாட்கள்

$= 5$(இரும்பு வெளியீடு) $+ 2$(நிலக்கரி வெளியீடு)

$= 5(176.5) + 2(558.8)$

$= 882.5 + 1117.6 = 2000.1$

$\simeq 2000$ தொழிலாளர் நாட்கள்.

பயிற்சி 1.4

1. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.30 \\ 0.41 & 0.33 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு சாத்தியமானதா என சரிபார்க்க.

2. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு சாத்தியமானாதா என சரிபார்க்க

3. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 \\ 0.40 & 0.67 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு உள்ளதா என ஆராய்க.

4. A மற்றும் B ஆகிய இரு பொருட்கள் உற்பத்தி செய்யப்படுகிறது 0.4 டன் A மற்றும் 0.7 டன் B ஆகியவைகள் 1 டன் A உற்பத்தி செய்ய தேவைப்படுகிறது. அதேபோன்று 0.1 டன் A மற்றும் 0.7 டன் B ஆகியவைகள் 1 டன் B உற்பத்தி செய்ய தேவைப்படுகிறது. தொழில் நுட்ப அணியை எழுதவும். 68 டன்கள் A மற்றும் 10.2 டன்கள் B ஆகியவை தேவைப்படும் எனில் இரண்டையும் உற்பத்தி செய்வதற்கு தேவையான மொத்த அளவு காண்க.

5. இரு தொழிற்சாலைகளுக்கிடையே உள்ள உற்பத்தி பரிமாற்றம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தி பிரிவு	நுகர்வோர் பிரிவு		உள்நாட்டு தேவை	மொத்த வெளியீடு
	X	Y		
X	30	40	50	120
Y	20	10	30	60

தொழில் நுட்ப அணியை கண்டுபிடிக்க மற்றும் ஹாக்கின்ஸ் – சைமன்

நிபந்தனைகளின்படி அமைப்பின் சாத்தியத்தை சோதிக்கவும், உள் தேவை மாற்றங்கள் முறையே 80 மற்றும் 40 அலகு எனில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் புது தேவையை பூர்த்தி செய்வதற்கான மொத்த வெளியீடு என்ன?

6. இரு பொருளாதார பிரிவிற்கான பரிவர்த்தனை அணி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிரிவு	விற்பனை		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	1	2		
1	4	3	13	20
2	5	4	3	12

(i) தொழில் நுட்ப அணியை எழுதுக

(ii) பிரிவு 1–ன்இறுதித்தேவையானது 23 அலகுகள் அதிகரிக்கும் போது உற்பத்திகளைக் காண்க.

7. ஒரு தொழிற்சாலை உற்பத்திப் பரிமாற்றத்தின் இரு பிரிவு X மற்றும் Y கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்திப் பிரிவு	நுகர்வோர் பிரிவு		உள்நாட்டு தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	X	Y		
X	15	10	10	35
Y	20	30	15	65

X –ன் உள்நாட்டு தேவை 12 க்கும் Y –ன் உள்நாட்டு தேவை 18 க்கும் மாறும் போது மொத்த உற்பத்தி காண்க.

பயிற்சி 1.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ எனில் x –ன் மதிப்புகள் காண்க

(a) 0, –1 (b) 0, 1

(c) –1, 1 (d) –1, –1

2. $\begin{vmatrix} 2x+y & x & y \\ 2y+z & y & z \\ 2z+x & z & x \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பு

(a) $x\,y\,z$ (b) $x+y+z$

(c) $2x+2y+2z$ (d) 0

3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ இல் –7 இன் இணைக் காரணி

(a) –18 (b) 18

(c) –7 (d) 7

4. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ எனில், $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ –ன்மதிப்பு

(a) Δ (b) $-\Delta$

(c) 3Δ (d) -3Δ

5. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}^2$ என்றஅணிக்கோவையின் மதிப்பு

(a) abc (b) 0

(c) $a^2\,b^2\,c^2$ (d) $-abc$

6. A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி எனில் $|kA|$ என்பது

(a) $k|A|$ (b) $-k|A|$

(c) $k^3|A|$ (d) $-k^3|A|$

7. $adj(AB) =$

(a) $adjA\ adjB$ (b) $adjA^T\ adjB^T$

(c) $adjB\ adjA$ (d) $adjB^T\ adjA^T$

8. $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு

(a) $\frac{7}{30}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (b) $\frac{7}{30}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(c) $\frac{30}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (d) $\frac{30}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ மேலும் $ad-bc\neq 0$ எனில், A^{-1} என்பது

(a) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(d) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$

8RSB7

10. உள்ளீடு–வெளியீடு பகுப்பாய்வு செயல்படும் வாய்ப்பிற்கான ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 2

11. உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வை அறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) சர். பிரான்சிஸ் கால்டன்

(b) பிஷர்

(c) பேராசிரியர் வேஸ்லி. W. லியோன்டிப்

(d) ஆர்தர் கேய்லி

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகளில் எதற்கு நேர்மாறு அணி இல்லை?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு அணி

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ எனில் $A(adjA)$ என்பது

(a) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

15. A, B என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது தவறு?

(a) $A^2=I \Rightarrow A^{-1}=A$

(b) $I^{-1}=I$

(c) $AX=B$ எனில், $X=B^{-1}A$

(d) A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி எனில் $|adj\ A|=|A|^2$

16. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4x & 4y & 4z \\ -3x & -3y & -3z \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பு

(a) 5 (b) 4 (c) 0 (d) –3

17. நேர்மாறு அணி உடைய வரிசை 2 கொண்ட அணி A எனில், $det(A^{-1})$ என்பது

(a) $det(A)$ (b) $\frac{1}{det(A)}$

(c) 1 (d) 0

18. A என்பது 3×3 வரிசை உடைய அணி மற்றும் $|A|=4$ எனில், $|A^{-1}|$ என்பது

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{16}$

(c) 2 (d) 4

19. A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி மற்றும் $|A|=3$ எனில், $|adjA|$ என்பது

(a) 81 (b) 27 (c) 3 (d) 9

20. $\begin{vmatrix} x & x^2-yz & 1 \\ y & y^2-zx & 1 \\ z & z^2-xy & 1 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 0 (c) –1 (d) $-xyz$

21. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ எனில், $|2A|$ என்பது

(a) $4\cos 2\theta$ (b) 4
(c) 2 (d) 1

22. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ மற்றும் A_{ij} என்பது a_{ij}, இன் இணைக்காரணி எனில் Δ ன் மதிப்பு

(a) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$
(b) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$
(c) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$
(d) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

23. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 0$ எனில் x –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{-5}{6}$ (b) $\frac{5}{6}$
(c) $\frac{-16}{5}$ (d) $\frac{16}{5}$

24. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$ எனில், $\begin{vmatrix} 20 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு

(a) –5 (b) –125 (c) –25 (d) 0

25. ஓர் அணிக் கோவையில் மூன்று நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வ சமம் எனில் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 3

இதர கணக்குகள்

1. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

2. மதிப்பிடுக $\begin{vmatrix} 10041 & 10042 & 10043 \\ 10045 & 10046 & 10047 \\ 10049 & 10050 & 10051 \end{vmatrix}$

3. விரிவுபடுத்தாமல் அணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியம் என நிறுவுக $\begin{vmatrix} 5 & 5^2 & 5^3 \\ 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 5^4 & 5^5 & 5^6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3$ என நிறுவுக.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில்
$A(adjA) = (adjA)(A) = |A|I_3$
என்பதை சரிபார்க்க.

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ –ன் நேர்மாறு காண்க

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 4A + 5I_2 = O$ என நிறுவுக மற்றும் A^{-1} காண்க.

8. நேர்மாறு அணி முறையில் தீர்க்க:
$x - y + z = 2, 2x - y = 0, 2y - z = 1.$

9. 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ சர்க்கரையின் மொத்த விலை ₹70. ஒரு கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹70. 3 கிலோ கோதுமை, 2 கிலோ சர்க்கரை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹170. எனில் நேர்மாறு அணி முறையில் ஒவ்வொரு பொருட்களின் ஒரு கிலோவிற்கான விலையைக் காண்க.

10. A மற்றும் B என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் விவரங்கள் (ரூபாய் கோடிகளில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர் A	உபயோகிப்போர் B	இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
A	50	75	75	200
B	100	50	50	200

A –ன் இறுதித் தேவை 300 ஆகவும் B இன் இறுதித் தேவை 600 ஆகவும் மாறும்போது அவற்றின் உற்பத்தி அளவுகளைக் காண்க

தொகுப்புரை

- ஒரு சதுர அணிக்கு தொடர்புடைய அணிக்கோவையின் மதிப்பு ஓர் எண்ணாக அமையும்.
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் அணிக் கோவை மதிப்பு $|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$
- A என்ற அணிக்கோவையின் a_{ij} என்ற ஓர் உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவை என்பது, Aயிலிருந்து a_{ij} உள்ள நிரை, நிரல்களை விடுவித்துப் பெறப்படும் அணிக்கோவை ஆகும். இதனை M_{ij} எனக் குறிப்போம்.
- தகுந்த குறியுடன் கூடிய சிற்றணிக்கோவை இணைக்காரணி ஆகும். a_{ij} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி A_{ij} எனில் $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.
- $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ எனில்,

  $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ அல்லது $a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$
- adj A = $\left[A_{ij}\right]^T$ இங்கு $\left[A_{ij}\right]$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியின் இணைக்காரணி அணி.
- $|adjA| = |A|^{n-1}$, இங்கு n என்பது A என்ற அணியின் வரிசை.
- $A(adjA) = (adjA)(A) = |A|I$.
- $adjI = I$, I என்பது அலகு அணி ஆகும்.
- adj$(AB) = (adj\ B)(adj\ A)$.
- A என்ற ஒரு சதுர அணியில் $|A| = 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியக்கோவை அணி எனப்படும்.
- A என்ற ஒரு சதுர அணியில் $|A| \neq 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.
- A என்பது n ஆம் வரிசை பூச்சியமற்றக்கோவை அணி என்க. $AB = BA = I$ எனுமாறு ஒரு அணி B –ஐ காண முடிந்தால் B ஆனது A இன் நேர்மாறு அணி எனப்படும். A இன் நேர்மாறு அணியை A^{-1} என எழுதலாம்.
- A இன் நேர்மாறு $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adjA$.
- ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் (Hawkkins - Simon) நிபந்தனைகளின்படி உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என உறுதிப்படுத்த

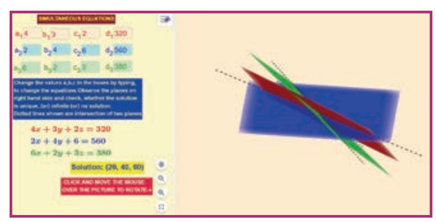
  (i) $I - B$ அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகை எண்களாக இருக்க வேண்டும்.

  (ii) $|I - B|$ மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
அணிக்கோவை	Determinant
இணைக் காரணி	Cofactor
உள்ளீடு	Input
சிற்றணிக் கோவைகள்	Minors
சேர்ப்பு அணி	Adjoint Matrix
திசையிலி	Scalar
நிரை நிரல் மாற்று அணி	Transpose of a Matrix
நேர்மாறு அணி	Inverse Matrix
பகுப்பாய்வு	Analysis
பூச்சியக் கோவை அணி	Singular Matrix
பூச்சியமற்றக் கோவை அணி	Non-Singular Matrix
முக்கோண அணி	Triangular Matrix
மூலை விட்ட அணி	Digonal Matrix
வெளியீடு	Output

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Simultaneous Equations"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

படி - 2

தேர்வுப்பெட்டியில் தேவையான ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளுக்கான அளவுருக்களை உள்ளீட்டுப்பெட்டியில் தட்டச்சு செய்யவும். நீங்களாக தீர்வைக் கண்டுபிடித்துக் கீழே காணும் தீர்வைச் சரி பார்க்கவும். வலப் பக்கத்தில் சமன்பாடுகளுக்கான தளங்களும் அவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியும்(தீர்வு) காணப்படும். மூன்று தளங்களும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டாவிடில் தீர்வு இல்லை என்று பொருள் படும்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 25 08-12-2021 20:54:25

அத்தியாயம் 2

இயற்கணிதம்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- பகுதி பின்னங்களின் வரையறை
- பகுதி பின்னங்களை பிரித்தலின் பல்வேறு உத்திகள்.
- வார்த்தைகள் அமைத்தல் போன்ற பல்வேறு வகையான வரிசை மாற்றங்கள்.
- குழுக்கள் அமைத்தல் போன்ற பல்வேறு வகையான சேர்வு
- வரிசைமாற்றங்கள் மற்றும் சேர்வுகள் ஆகியவற்றிற்கு இடையேயான வேறுபாடு
- கணிதத் தொகுத்தறிதலின் கொள்கை மற்றும் கருத்துருக்கள்.
- ஈருறுப்பு விரிவாக்கத்தின் உத்திகள்.

அல்–குவாரிஷ்மி

முன்னுரை

இயற்கணிதம் என்பது கணித கருத்துருக்களை ஒருங்கிணைப்பதற்கு பயன்படக் கூடிய முக்கியமான கணித கூற்றாகும். இயற்கணிதம் என்பது எண்களோடு தொடர்புடைய வடிவியல் மற்றும் தரவு பகுப்பாய்வோடு கூடிய செயல்கள் மீது உருவாக்கப்பட்டிருக்கிறது. "Algebra" என்பது "al-Jabr" என்ற அரேபிய வார்த்தையிலிருந்து தருவிக்கப்பட்டதாகும். "அல்–குவாரிஷ்மி " (Al-Khwarizm) என்ற அரபு கணிதவியலாளர் இயற்கணிதத்தின் தந்தை என்று பாரம்பரியமாக அறியப்படுகிறார். ஏதாவது ஒரு சமதள உருவத்தின் சுற்றளவு, பரப்பளவு மற்றும் திண்ம பொருள்களின் கனஅளவு, வளைதள பரப்பு ஆகியவற்றை கண்டுபிடிப்பதற்கு இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது.

XOQKZ

2.1 பகுதிப் பின்னங்கள் (Partial Fractions)

விகிதமுறு கோவை (Rational Expression)

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},[q(x)\neq 0]$$

என்ற வடிவத்தில் எழுதப்படும் கோவை விகிதமுறு கோவை எனப்படும்.

ஒரு விகிதமுறு கோவையில் தொகுதியின் படியானது, பகுதியின் படியை விட குறைவாக இருந்தால், அது விகிதமுறு தகு பின்னக் கோவை என்று அழைக்கப்படும். தொகுதியின் படியானது பகுதியின் படிக்குச் சமமாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருந்தால், அது விகிதமுறு தகாப் பின்னக் கோவை என்றழைக்கப்படும்.

ஒரு தகா பின்ன வடிவில் உள்ள விகிதமுறு கோவையை பல்லுறுப்பு கோவை மற்றும் தகு பின்ன வடிவில் விகிதமுறு

கோவை ஆகியவற்றின் கூடுதல் ஆக விவரிக்க முடியும்.

அதாவது, $\dfrac{p(x)}{q(x)} = f(x)+\dfrac{r(x)}{q(x)}$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = 1 - \frac{x}{x^2+2x+1}$$

பகுதிப்பின்னங்கள் – (Partial Fractions)

$\dfrac{3}{x-1}$ மற்றும் $\dfrac{2}{x-2}$ என்ற விகிதமுறு கோவைகளை கூடுதல் அல்லது கழித்தல் விகிதங்களின் மூலம் ஒரே ஒரு விகிதமுறு கோவையாக மாற்றி எழுதலாம்.

ஆகவே,

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2} = \frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}$$

ஆகவே,

$$\frac{5x-8}{(x-1)(x-2)} = \frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}$$

ஒரு விகிதமுறு கோவையை இரண்டு அல்லது மூன்று எளிய விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் அமைப்பில் எழுதும் முறையே பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தல் எனப்படும்.

பொதுவாக $p(x)$ மற்றும் $q(x)$ என்பன x –ல் அமைந்த இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில் $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ என்றவிகிதமுறுகோவையினை சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு எளிய விகிதமுறு கோவைகளின் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாக மாற்றி எழுதும் முறைக்கு பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல் என்று பெயர்.

2.1.1 ஒரு படி காரணிகள் (ஒரே காரணி மீண்டும் வராமை)

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ என்ற விகிதமுறு கோவையின் பகுதி $q(x)$ ஆனது மீண்டும் வராத ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கு தொகையாக, $(ax+b)(cx+d)$ என்ற வடிவத்தில் இருந்தால் அவற்றினை $\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{cx+d}$ என்று பிரித்து எழுதலாம். இங்கு A மற்றும் B யின் மதிப்புகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

உதாரணமாக

$$\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$$

என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$$\frac{1}{(x^2-1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

என்பனவற்றில் A, B மதிப்புகளைக் காண்க

தீர்வு

$$\frac{1}{(x^2-1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \text{ என்க}$$

இருபுறமும் $(x-1)(x+1)$ ஆல் பெருக்க

$$1 = A(x+1)+B(x-1) \qquad \dots (1)$$

$x=1$ எனில், $1 = A(2)$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

$x=-1$ எனில், $1 = A(0)+B(-2)$

$$\therefore B = -\frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2

$\dfrac{7x-1}{x^2-5x+6}$ –ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)} \text{ என்க} \qquad \dots(1)$$

இருபுறமும் $(x-2)(x-3)$, ஆல் பெருக்க

$$7x-1 = A(x-3)+B(x-2) \qquad \dots (2)$$

$x = 3$ என சமன்பாடு (2) –ல் பிரதியிட

$$21 - 1 = B(1)$$

$$\Rightarrow \quad B = 20$$

$x = 2$ என சமன்பாடு (2) –ல் பிரதியிட

$$14-1 = A(-1)$$

$$\Rightarrow \quad A = -13$$

A மற்றும் B யின் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{-13}{(x-2)} + \frac{20}{(x-3)}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} =$$

$$\frac{1}{(x-2)}\left[\frac{(7x-1)}{(x-3)}\right]_{x=2} + \frac{1}{(x-3)}\left[\frac{(7x-1)}{(x-2)}\right]_{x=3}$$

$$= \frac{-13}{(x-2)} + \frac{20}{(x-3)}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

$\dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$ –ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

பகுதியை ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கங்களாக எழுதுக

$$(x^2-4)(x+1) = (x-2)(x+2)(x+1)$$

$$\therefore \frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+1)} \text{ என்க } \quad ...(1)$$

இருபுறமும் $(x-2)(x+2)(x+1)$ ஆல் பெருக்க

$$x+4 = A(x+2)(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)(x+2) \quad ...(2)$$

$x = -2$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$-2+4 = A(0) + B(-4)(-1) + C(0)$$

$$\therefore \quad B = \frac{1}{2}$$

$x = 2$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$2 + 4 = A(4)(3) + B(0) + C(0)$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}$$

$x = -1$ என (2) ல் பிரதியிட

$$-1+4 = A(0) + B(0) + C(-3)(1)$$

$$\therefore \quad C = -1$$

$$\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{x+1}$$

2.1.2 பகுதியில் ஒரு படிக் காரணிகள் (n–முறை திரும்பத் திரும்ப வருவது)

கொடுக்கப்பட்ட $\dfrac{p(x)}{q(x)}$,என்றபின்னத்தில் பகுதி $q(x)$–ல் $(ax+b)$ என்ற ஒருபடிக் காரணியானது n முறை திரும்பத் திரும்ப வருமாயின், $(ax+b)^n$ வடிவத்தில் இருந்தால் அதற்குரிய எளிய பின்னம் பின்வருமாறு

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

உதாரணமாக,

$$\frac{9x+7}{(x+4)(x+1)^2} = \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.4

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

எனில் A, B மற்றும் C ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) ...(1)$$

$x = 1$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$1 = A(1+1)^2 + B(0) + C(0)$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}$$

$x = -1$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$-1 = A(0) + B(0) + C(-1-1)$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

சமன்பாடு (1) –ல் மாறிலிகளின் கெழுக்களை சமன்படுத்த

$$A - B - C = 0$$
$$\Rightarrow B = A - C$$
$$\therefore B = -\frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)}$ –ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x+3)} \quad \ldots (1)$$

$(x-2)^2(x+3)$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க

$$x+1 = A(x-2)(x+3) + B(x+3) + C(x-2)^2 \quad \ldots(2)$$

$x = 2$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$2+1 = A(0) + B(5) + C(0)$$
$$\therefore B = \frac{3}{5}$$

$x = -3$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$-3+1 = A(0) + B(0) + C(-3-2)^2$$
$$\therefore \ C = \frac{-2}{25}$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) –ல் இருபுறமும் சமன்படுத்த

$$0 = A + C$$
$$A = -C$$
$$\therefore A = \frac{2}{25}$$

A, B மற்றும் C –ன் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட,

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{2}{25(x-2)} + \frac{3}{5(x-2)^2} - \frac{2}{25(x+3)}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6

$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}$ –ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} \ldots (1)$$

$(x-1)(x+2)^2$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க

$$\therefore 9 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) \quad \ldots (2)$$

$x = -2$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$9 = A(0) + B(0) + C(-2-1)$$
$$\therefore C = -3$$

$x = 1$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$9 = A(3)^2 + B(0) + C(0)$$
$$\therefore A = 1$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) –ல் இருபுறமும் சமன்படுத்த

$$0 = A + B$$
$$B = -A$$
$$\therefore B = -1$$

A, B மற்றும் C –ன் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

2.1.3 ஒரு படி காரணிகளாக, காரணிப் படுத்தமுடியாத இரு படிக் காரணிகளை உள்ளடக்கிய பகுதி

$\frac{p(x)}{q(x)}$, என்கிற விகிதமுறு கோவையில், $q(x)$ இன் ஒரு பகுதியானது $ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடிக் காரணி கோவையை ஒருபடிக் காரணிக்கோவைகளின் பெருக்கலாக

மாற்ற இயலாது எனில், $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்பதன் ஒரு பகுதிப்பிரிப்பாக $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ யை எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ என்பதனை பகுதி பின்னங்களாக பிரிக்க.

தீர்வு

இங்கு (x^2+1) யை ஒரு படி காரணிகளாக காரணி படுத்த முடியாது. எனவே

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+1} \text{ என்க ... (1)}$$

இருபுறமும் $(x-1)(x^2+1)$ ஆல் பெருக்குக

$$2x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1) \text{ ... (2)}$$

$x = 1$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$2+1 = A(1+1)+0$$

$$\therefore A = \frac{3}{2}$$

$x = 0$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$0+1 = A(0+1)+(0+C)(-1)$$

$$1 = A - C$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) இன் இருபுறமும் சமன்படுத்த,

$$A+B = 0$$

$$B = -A$$

$$\therefore B = \frac{-3}{2}$$

A, B மற்றும் C –ன் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-3}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3x-1}{2(x^2+1)}$$

பயிற்சி 2.1

கீழ்காணும் பின்னங்களை பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக:

1. $\frac{3x+7}{x^2-3x+2}$
2. $\frac{4x+1}{(x-2)(x+1)}$
3. $\frac{1}{(x-1)(x+2)^2}$
4. $\frac{1}{x^2-1}$
5. $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)^2}$
6. $\frac{2x^2-5x-7}{(x-2)^3}$
7. $\frac{x^2-6x+2}{x^2(x+2)}$
8. $\frac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}$
9. $\frac{x+2}{(x-1)(x+3)^2}$
10. $\frac{1}{(x^2+4)(x+1)}$

2.2 வரிசை மாற்றங்கள்

2.2.1 காரணீயப் பெருக்கம்

ஏதேனும் இயல் எண் n ற்கு, n – ன் காரணீயப் பெருக்கல் என்பது, முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்குத்தொகை என வரையறுக்க படுகிறது. இது குறியீட்டில் $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

> n, என்கிற இயல் எண்ணிற்கு
> $n! = n(n-1)(n-2) \ \ldots \ 3\times2\times1$

எடுத்துக்காட்டாக,

$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

$3! = 3\times2\times1 = 6$

$2! = 2\times1 = 2$

$1! = 1$

குறிப்பு

$0! = 1$

ஏதேனும் இயல் எண் n க்கு

$$n! = n(n-1)(n-2) \ \ldots \ 3\times2\times1$$

$$= n(n-1)!$$

$$= n(n-1)(n-2)!$$

குறிப்பாக, $8! = 8\times(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)$

$= 8\times7!$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

கீழ்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:

(i) $\frac{7!}{6!}$ (ii) $\frac{8!}{5!}$ (iii) $\frac{9!}{6!3!}$

தீர்வு

(i) $\frac{7!}{6!} = \frac{7\times 6!}{6!} = 7$

(ii) $\frac{8!}{5!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!} = 336$

(iii) $\frac{9!}{6!3!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6!}{6!\times 3!} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 84$

எடுத்துக்காட்டு 2.9

$7!$ –ஐ $5!$ –ன் காரணீயப் பெருக்கலாக மாற்றி எழுதுக.

தீர்வு

$7! = 7\times6!$

$= 7\times6\times5! = 42\times5!$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$ எனில் n –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!} = \frac{n}{11!}$$

$$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10\times 9!} = \frac{n}{11!}$$

$$\frac{1}{9!}\left[1+\frac{1}{10}\right] = \frac{n}{11!}$$

$$\frac{1}{9!}\times\frac{11}{10} = \frac{n}{11!}$$

$$n = \frac{11!\times 11}{9!\times 10}$$

$$= \frac{11!\times 11}{10!}$$

$$= \frac{11\times 10!\times 11}{10!}$$

$$n = 121$$

2.2.2 எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள்

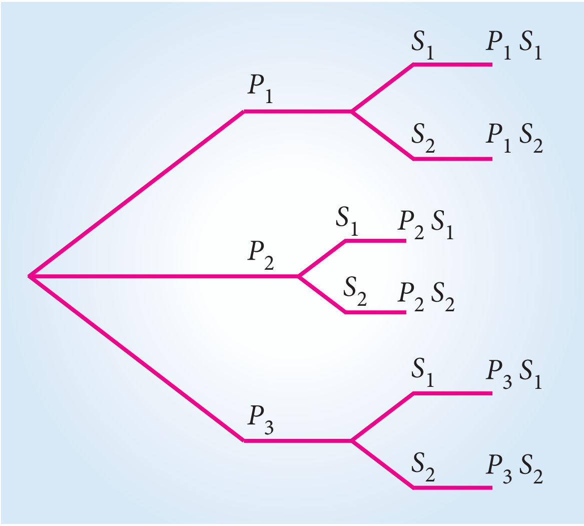
பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கை:

மூன்று நுழைவாயில்களும், வெளியேறுவதற்கு இரண்டு வாயில்களும் உள்ள விழா மண்டபத்தை கருத்தில் கொள்வோம். வரும் ஒரு நபர் எத்தனை வழிகளில் விழா மண்டபத்திற்கு உள்ளே சென்று வெளியேறலாம் என்பதற்கான விடையைக் காண்பது நமது நோக்கமாகும்.

இந்த கணக்கில், மண்டபத்தின் மூன்று நுழைவாயில்களை முறையே P_1, P_2 மற்றும் P_3 எனக் கொள்வோம். விழா மண்டபத்தை விட்டு வெளியேறும் வழிகளை S_1 மற்றும் S_2 எனக் கொள்வோம்.

விழா மண்டபத்திற்கு வரும், ஒரு நபர் P_1 அல்லது P_2 அல்லது P_3 என்ற ஏதேனும் ஒரு நுழைவாயில் வழியாக, 3 வழிகளில் உள்ளே செல்லலாம். மண்டபத்திற்குள் சென்றவுடன், S_1 அல்லது S_2 என்ற ஏதேனும் ஒரு வாயில் வழியாக, (இரு வழிகளில்) வெளியேறலாம். விழா மண்டபத்திற்கு சென்று வெளியேறும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை $3\times 2 = 6$ வழிகள்

மேற்காணும் சூழ்நிலைப் போன்று நடைமுறை வாழ்க்கையில் பல்வகை கணக்குகளின், தீர்வு காண, நாம் பயன்படுத்தும் கொள்கையே, பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கையாகும்.



படம் 2.1

வரையறை 2.1

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளில் ஒன்றை m வழிகளிலும் மற்றொன்றை n வழிகளிலும் செய்யமுடியும் எனில், இரு பணிகளையும் ஒருங்கே, தொடர்ந்து $m \times n$ வழிகளில் செய்ய முடியும் என்பதே பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.11

'NOTE' என்ற ஆங்கிலச் சொல்லில் உள்ள நான்கு எழுத்துக்களைக் கொண்டு, எழுத்துக்கள் மீண்டும் வராதவாறு, அர்த்தமற்ற அல்லது அர்த்தம் உடைய வார்த்தைகள் எத்தனை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட ஆங்கில வார்த்தை 'NOTE' –ல் உள்ள நான்கு எழுத்துக்களை, கீழ்கண்டவாறு நான்கு காலியிடங்களை கொண்டு குறிப்பிோம்

1	2	3	4

படம் 2.2

முதல் காலியிடத்தை, நான்கு எழுத்துக்களை கொண்டு, நான்கு வழிகளில் நிரப்பலாம். எழுத்துக்களை மீண்டும் ஒருமுறை பயன்படுத்த முடியாததால், இரண்டாம் காலியிடத்தை 3 முறைகளிலும் மூன்றாம் காலியிடத்தை இரண்டு வழிகளிலும், கடைசி இடத்தை ஒரு வழியிலும் நிரப்பலாம். பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி உருவாக்கப்படும் மொத்த வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ வார்த்தைகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.12

ஒவ்வொரு குறிக்கோள் வினாவும் நான்கு வாய்ப்புகளை பெற்றிருப்பின், நான்கு வினாக்களுக்கு, மொத்தம் எத்தனை வழிகளில் விடையளிக்கலாம்?

தீர்வு

ஒவ்வொரு வினாவிற்கும், 4 விடைகள் உண்டு, ஆதலால், ஒவ்வொரு வினாவையும் நான்கு வழிகளில் விடையளிக்கலாம். எனவே, நான்கு வினாக்களுக்கு $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ வழிகளில் விடையளிக்கலாம்

எடுத்துக்காட்டு 2.13

இலக்கங்களை மீண்டும் பயன்படுத்தாமல் எத்தனை மூன்று இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம் ?

தீர்வு

ஒரு மூன்று இலக்க எண்ணின் மூன்று இலக்கங்களை மூன்று காலியிடங்களைக் கொண்டு குறிப்போம்.

100வது இடம்	10வது இடம்	ஒன்றாவது இடம்
1	2	3

படம் 2.3

எந்த ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணையும் பூச்சியத்தில் தொடங்க இயலாது. ஆதலால், நூறாவது இலக்கத்தினை 1லிருந்து 9 வரை உள்ள இலக்கங்களை பயன்படுத்தி 9 வழிகளில் நிரப்பலாம்.இலக்கங்களை மீண்டும் பயன்படுத்த இயலாது.ஆதலால் 10 வது இலக்கத்தினை, 0 உட்பட மீதம் உள்ள இலக்கங்களை கொண்டு 9 வழிகளில் பூர்த்தி செய்யலாம். இவ்வாறே ஒன்றாவது இலக்கத்தினை 8 வழிகளில் பூர்த்தி செய்யலாம்.

பெருக்கல் அடிப்படைக் கொள்கைப்படி, மொத்த மூன்றிலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை $= 9 \times 9 \times 8 = 648$ எண்கள் ஆகும்.

2.2.3 கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை

இக்கொள்கையை விளக்குவதற்கு, மற்றுமொரு சூழ்நிலையைக் கருதுவோம். ஒரு வகுப்பில் 10 மாணவர்களும், 8 மாணவிகளும் உள்ளனர். மேற்கண்ட மாணவர்களின் வகுப்பாசிரியர், அந்த வகுப்பின் சார்பாக ஒரு மாணவன் அல்லது ஒரு மாணவியை ஒரு விழாவிற்கு அனுப்ப விரும்புகிறார்.எத்தனை வழிகளில் இருபாலரில் ஒருவரைத் தேர்வு செய்து அனுப்பலாம் என்பதற்கான தீர்வைக் காண்போம்.

கீழ்கண்ட இரு வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றை வகுப்பாசிரியர் தேர்வு செய்யலாம்.

(i) 10 மாணவர்களில் இருந்து ஒருவரை பத்து வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் (அல்லது)

(ii) 8 மாணவிகளில் இருந்து ஒருவரை எட்டு வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்

10 மாணவர்களிலிருந்து ஒருவரை 10 வழிகளிலும், 8 மாணவிகளிலிருந்து ஒருவரை 8 வழிகளிலிருந்தும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். விழாவிற்கு ஒருவரை தேர்ந்தெடுக்கும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை $10+8 = 18$ வழிகள்.

இவ்வகை கணக்குகளை, தீர்ப்பதற்கான கொள்கை "கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை" எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளைத் தனித்தனியாக, சார்பற்ற முறையில், முறையே m, n வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியுமானால், இரண்டு பணிகளையும் $(m+n)$ வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியும். இதுவே கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை எனப்படும்.

வரையறை 2.2

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளைத் தனித்தனியாக, சார்பற்ற முறையில், முறையே m, n வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியுமானால், இரண்டு பணிகளையும் $(m+n)$ வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியும். இதுவே **கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.14

புத்தக விற்பனை கடையில், 6 வணிகவியல் புத்தகமும், 5 கணக்குப்பதிவியல் புத்தகமும் உள்ளன. புத்தகம் வாங்க விரும்பும் ஒரு மாணவன் புத்தகங்களில் ஏதேனும் ஒன்றை எத்தனை வழிகளில் வாங்கலாம்?

தீர்வு

6 வணிகவியல் புத்தகங்களில் ஒன்றை 6 வழிகளில் வாங்கலாம்.

5 கணக்குப் பதிவியல் புத்தகங்களில் ஒன்றை 5 வழிகளில் வாங்கலாம். கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கைப்படி இவ்விரு பாடபுத்தகங்களில் ஏதேனும் ஒன்றை $5+6=11$ வழிகளில் வாங்கலாம்.

பயிற்சி 2.2

1. $\dfrac{1}{6!}+\dfrac{1}{7!}=\dfrac{x}{8!}$ எனில் x– ன் மதிப்பைக் காண்க

2. $n = 5$ மற்றும் $r = 2$ எனும்பொழுது $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ – ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. $(n+2)! = 60[(n-1)!]$, எனில் n – ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. 0 முதல் 9 வரை உள்ள இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி 67 என்ற எண்ணில் தொடங்குமாறு எந்த இலக்கமும் ஒரு தடவைக்கு மேல் திரும்ப தோன்றாமல், எத்தனை 5 இலக்க தொலைபேசி எண்களை உருவாக்க முடியும்?

5. 5, 6, 7, 8 மற்றும் 9 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு. இலக்கங்கள் திரும்ப வராதவாறு, 1000க்கும் குறைவான எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

2.2.4 வரிசை மாற்றங்களின் வரையறை (Permutations)

ஓர் உதாரணத்திற்கு, "ஆப்பிள், திராட்சை, மற்றும் வாழைப்பழங்கள்" ஆகிய கனிகளால் உருவாக்கப்பட்ட "கனித்துண்டுகளின் கலவை" (Fruit salad) எடுத்துக்கொள்வோம். கனித்துண்டுகளின் கலவையில் பழத்துண்டுகள் எந்த வரிசையில் சேர்க்கப்படுகின்றன என்பது முக்கியமல்ல. எந்த வரிசையில் இப்பழத்துண்டுகள் சேர்க்கப்பட்டாலும் நாம் ஒரே மாதிரி சுவையுள்ள கனித்துண்டுகளின் கலவையையே பெறுவோம்.

ஆனால், எண்குறியீடு 395 உள்ள ஒரு எண் பூட்டை (number lock) எடுத்துக் கொள்வோம்.எண்குறியீட்டை மூன்று முறைக்கு மேல் தவறாக முயற்சித்தால்,

02_11th_BM-STAT_Ch-2-TM.indd 33 13-12-2021 11:24:48

பூட்டானது நிரந்தரமாக பூட்டிக்கொள்ளும். இச்சூழ்நிலையில், 395 என்ற எண்குறியீட்டின் வரிசை மிகவும் முக்கியமானது.

395 என்ற குறியீட்டிற்கு பதிலாக, 3 – 5 – 9 அல்லது 9-5-3 என்று இலக்கங்களின் வரிசையை மாற்றி உள்ளீடு செய்தால் பூட்டைத் திறக்க முடியாது. எண்குறியீட்டை மிகச் சரியாக 3 - 9 - 5 என உள்ளீடு செய்தால் மட்டுமே, எண் பூட்டை திறக்க முடியும்.

நடைமுறை வாழ்க்கையில், மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளை போன்ற சூழ்நிலைகளை எதிர்கொள்ள **வரிசைமாற்றங்கள்** (permutations) பற்றி அறிந்துகொள்வோம்.

வரையறை 2.3

n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் விதங்களின் எண்ணிக்கையை n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும் **வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை** எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 1, 2, 3 என்ற மூன்று இலக்கங்களைக்கொண்டு உருவாக்கப்படும் மூன்று இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். அவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட மூன்றிலக்க எண்கள் பின்வருமாறு

123, 132, 231, 213, 312, 321

குறியீடு: $n \geq 1,\ 0 \leq r \leq n$, எனுமாறு உள்ள n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $P(n,r)$ (அல்லது) nP_r என குறிக்கப்படுகிறது.

நிரூபணமின்றி கீழ்கண்ட தேற்றத்தை நாம் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் : $$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.15

$5P_3$ மற்றும் $P(8,\ 5)$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

$$5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

$$\begin{aligned} P(8,5) &= 8P_5 \\ &= \frac{8!}{(8-5)!} \\ &= \frac{8!}{3!} \\ &= \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3!}{3!} = 6720 \end{aligned}$$

முடிவுகள்

(i) $0! = 1$

(ii) $np_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

(iii) $np_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

(iv) $np_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

(v) $np_r = n(n-1)\,(n-2) \ldots [n-(r-1)]$

எடுத்துக்காட்டு 2.16

மதிப்பு காண்க : (i) $8P_3$ (ii) $5P_4$

தீர்வு

(i) $8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336.$

(ii) $5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

சுவற்றின் மீதுள்ள 5 ஆணிகளில் 7 படங்களை எத்தனை வழிகளில் பொருத்தலாம்?

தீர்வு

சுவற்றின் மீதுள்ள 5 ஆணிகளில் 7 படங்களை பொருத்துவது என்பது, ஏழு படங்களில் ஒரே நேரத்தில் ஐந்து படங்களை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 7P_5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$$ வழிகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.18

“LOGARITHMS” என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி, (எழுத்துக்களை மீண்டும் இடம்பெறாதவாறு

அர்த்தம் உள்ள அல்லது அர்த்தமற்ற) 4 எழுத்து வார்த்தைகள் எத்தனை அமைக்கலாம் ?

தீர்வு

LOGARITHMS என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை 10

எனவே $n = 10$

4 எழுத்து வார்த்தைகளை நாம் காணவேண்டி உள்ளதால், $r = 4$

எனவே தேவையான வார்த்தைகள்

$$np_r = 10\,p_4$$
$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7$$
$$= 5040$$

எடுத்துக்காட்டு 2.19

$nP_r = 360$, எனில் n, r–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$nP_r = 360 = 36 \times 10$$
$$= 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2$$
$$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 6P_4$$

எனவே $n = 6$ மற்றும் $r = 4$

மீண்டும், மீண்டும் வருகின்ற பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள்:

n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களினை தேர்ந்தெடுக்கும்போது பொருட்களை மீண்டும் இடம்பெற அனுமதிக்கும்பொழுது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை n^r ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.20

1, 2, 3, … , 9 வரையுள்ள ஒன்பது இலக்கங்களைக் கொண்டு, இலக்கங்கள் திரும்ப இடம்பெறுமாறு எத்தனை மூன்றிலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?

தீர்வு

இங்கு இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை 9

எனவே $n = 9$ மற்றும் $r = 3$

தேவைப்படும் மூன்றிலக்க எண்கள் $= n^r$

$= 9^3 = 729$ எண்கள்

பலமுறை வரும் வெவ்வேறு பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள்:

n பொருட்களில் p பொருட்கள் ஒருவகையாகவும், q பொருட்கள் மற்றொரு வகையாகவும் உள்ளன எனக் கொள்வோம். இங்கு $p + q = n$ எனில் n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் அனைத்தையும் தேர்ந்தெடுக்கும்போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n!}{p!\,q!}$

பொதுவாக n பொருட்களில் p_1 பொருட்கள் முதல் வகையாகவும், p_2 பொருள்கள் இரண்டாம் வகையாகவும், p_3 பொருள்கள் மூன்றாம் வகையாகவும், … p_k பொருள்கள் k ஆவது வகையாகவும் இருப்பதாக கொள்வோம். மேலும் $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$. எனில், அனைத்து பொருள்களையும் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}$.

எடுத்துக்காட்டு 2.21

(i) MISSISSIPPI (ii) MATHEMATICS என்ற வார்த்தைகளில் உள்ள அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி, எத்தனை வார்த்தைகள் அமைக்கலாம் ?

தீர்வு

(i) MISSISSIPPI என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை = 11

இந்த வார்த்தையில்

M என்ற எழுத்து ஒருமுறையும்

I என்ற எழுத்து 4 முறையும்

S என்ற எழுத்து 4 முறையும்

P என்ற எழுத்து 2 முறையும் இடம்பெறுகிறது.

அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

$$n = \frac{11!}{4!\,4!\,2!}$$

(ii) MATHEMATICS என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை = 11

M என்ற எழுத்து 2 முறையும்

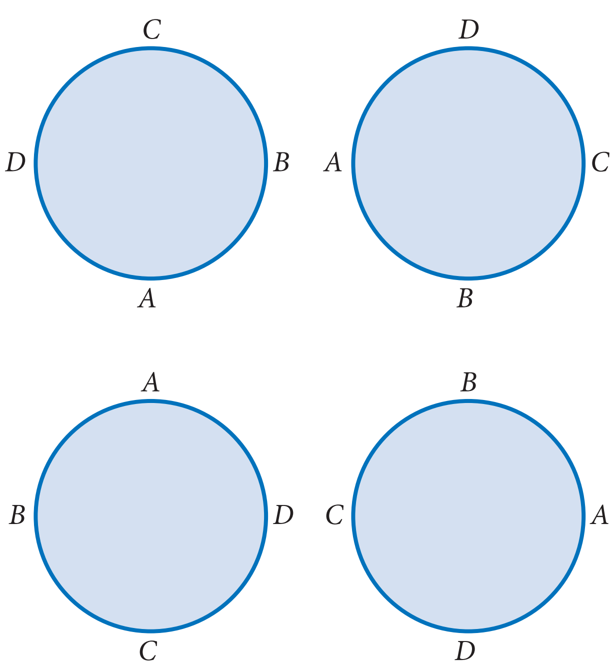
T என்ற எழுத்து 2 முறையும்

A என்ற எழுத்து 2 முறையும் மீதமுள்ள எழுத்துக்கள் தலா ஒரு முறையும் இடம்பொறுகிறது.

எனவே அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை = $\dfrac{11!}{2!\,2!\,2!}$

2.2.5 வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் (Circular permutation)

சென்ற பிரிவில், நேர்கோட்டின் மீதான n பொருள்களின் வரிசை மாற்றங்களை பற்றிய விவரங்களை பயின்றோம். அவைகள் நேரிய வரிசை மாற்றங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றது. தற்பொழுது n பொருட்களின், வட்டத்தின் மீதான வரிசை மாற்றங்களைக் காண்போம். இவை வட்ட வரிசை மாற்றம் எனப்படுகிறது.



படம் 2.4

A, B, C, D என்ற நான்கு எழுத்துக்களை கருதுவோம். இந்த நான்கு எழுத்துக்களின் நேர் கோட்டின் மீதான வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 4! ஆகும். இந்த 4! வரிசைமாற்றங்களில் கீழ்கண்ட நேர்கோட்டின் மீதான நான்கு வரிசைப்படுத்துதலைக் கருதுக, ABCD, BCDA, CDAB, DABC என்பனவற்றை வட்டத்தின் மீது வரிசைப்படுத்தினால் இவை அனைத்தும் ஒரே வரிசைப் படுத்துதலை குறிக்கும் என்பதை கீழ்கண்ட படத்தின்மூலம் காணலாம்.

எனவே, '4' பொருள்களின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{4!}{4} = 3!$

பொதுவாக, n வெவ்வேறு பொருள்களின் அனைத்து பொருள்களையும் ஒரே நேரத்தில் எடுத்துக்கொண்டால், அமைக்கப்படும் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = $(n-1)!$ ஆகும்

குறிப்பு

வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் வலச்சுற்று, இடச்சுற்று வேறுபாடின்றி இருப்பின் பொருள்களின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{(n-1)!}{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.22

8 மாணவர்களை எத்தனை வழிகளில்

(i) நேர்க்கோட்டின் மீது வரிசைப்படுத்தலாம்

(ii) வட்டவடிவில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

தீர்வு

(i) 8 மாணவர்களின் நேர்கோட்டின் மீதான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = $8P_8 = 8!$ வழிகள்

(ii) மாணவர்கள், வட்டத்தின் மீதான வரிசை படுத்தும்போது வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(8-1)! = 7!$ (இங்கு வலச்சுற்றுக்கும், இடச்சுற்றுக்கும் வேறுபாடு காண இயலும்)

எடுத்துக்காட்டு 2.23

ஒரே மாதிரியான 10 சாவிகளை, ஒரு வளையத்தில் எத்தனை வகைகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்?

தீர்வு

சாவிகள் அனைத்தும் ஒரே மாதிரியானது. ஆதலால் வளையத்தில் வரிசைப்படுத்தும் பொழுது, வலச்சுற்றுக்கும் இடச்சுற்றிற்கும் வேறுபாடுகளை காண இயலாது. எனவே, சாவிகளின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$\frac{(n-1)!}{2} = \frac{(10-1)!}{2} = \frac{9!}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

ஆங்கில அகராதியில் உள்ள 'RANK' என்ற வார்த்தையின் தரம் காண்க.

தீர்வு

'RANK' என்ற ஆங்கில வார்த்தையைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும், வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 4!

இந்த வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களை அகர வரிசையில் A, K, N, R என வரிசைப்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

அகராதியில் உள்ள வார்த்தையின் தரம்

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு ஆங்கில வார்த்தையின், தரம் காண்பதற்கு, ஆங்கில வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களை அகர வரிசையில் வரிசைப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும். தரம் காணும்பொழுது உருவாக்கப்படும் வார்த்தைகள் அர்த்தம் உள்ளதாகவோ, அர்த்தமற்றதாகவோ இருக்கலாம்

A-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= 3! = 6$

K-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= 3! = 6$

N-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= 3! = 6$

RAKஎனத் தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= 1! = 1$

RANK என்ற வார்த்தை $= 0! = 1$

$\therefore$ கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கைப்படி RANK என்ற வார்த்தையின் தரம்

$$6 + 6 + 6 + 1 + 1 = 20$$

பயிற்சி 2.3

1. $nP_4 = 12(nP_2)$, எனில், n–ன் மதிப்பு காண்க,
2. இரண்டு சிறுமிகள் சேர்ந்து அமராதவாறு, 5 சிறுவர்கள் மற்றும் 3 சிறுமிகளை ஒரு வரிசையில் எத்தனை வழிகளில் அமரவைக்கலாம் ?
3. 0 முதல் 9 வரை உள்ள 10 இலக்கங்களைக் கொண்டு, 35 என்ற எண்ணில் தொடங்கும், 6 இலக்க தொலைபேசி எண்களில், இலக்கங்கள் மீண்டும் இடம்பெறாதவாறு, எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?
4. "ASSASSINATION" என்ற வார்த்தையில் உள்ள அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி எத்தனை வார்த்தைகளை உருவாக்கலாம் ?
5. (a) ஒரே வகையான 8 மணிகளை எத்தனை வழிகளில், ஆபரண மாலையில் கோர்க்கலாம்?

   (b) 8 சிறுவர்களைக் கொண்டு எத்தனை வளையங்களை உருவாக்கலாம்?
6. ஆங்கில அகராதியில் 'CHAT' என்ற வார்த்தையின் தரத்தைக் காண்க

2.3 சேர்வுகள் (Combinations)

சேர்வுகள் என்பது தேர்ந்தெடுக்கும் வரிசையை கணக்கில் கொள்ளாமல் பொருட்களை ஒரு தொகுப்பிலிருந்து தேர்ந்தெடுப்பதாகும். அதாவது பொருட்களின் வரிசையை பொருட்படுத்தாமல் பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும் செயலாகும். நான்கு நபர்கள் A, B, C மற்றும் D என்க. இவர்களில் A மற்றும் B யைத் தேர்ந்தெடுப்பதும், B மற்றும் A யைத் தேர்ந்தெடுப்பதும் இரு வேறு தேர்வாக கருத முடியாது. தேர்வு செய்யப்படும் நபர்களின் வரிசை முக்கியமல்ல. கொடுக்கப்பட்ட நான்கு

நபர்களில் 2 அலுவலக ஊழியர்களை 6 வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். அவை AB, AC, AD, BC, BD, CD என்பனவாகும். மேற்கண்டவாறு செயல்படுத்தப்படும் பல்வேறு தேர்வுகளில் செயல்முடிவுகள் சேர்வுகள் எனப்படும். அதாவது, $4C_2 = \frac{4\times3}{1\times2} = 6$

திரும்பத் திரும்ப வராத பல்வேறு தேர்வுகளின் முறை என்பது சேர்வுகள் என வழங்கப்படும்

வரையறை 2.4

சேர்வுகள் என்பது n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை ஒரே நேரத்தில் திரும்பத் திரும்ப வராமல் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையாகும்.

n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை nC_r வழிகளில் தேர்ந்து எடுக்கலாம். இங்கு $n \neq 0$ ஆனால் $r = 0$ ஆக இருக்கலாம்.

nC_r –ன் மதிப்பு

$$nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ ,\ n \geq 1, 0 \leq r \leq n$$

உதாரணத்திற்கு 5 பந்துகளில் இருந்து 3 பந்துகளை $5C_3$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$$5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \left(\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}\right)$$

$= 10$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.25

$8C_2$ –ன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

$$8C_2 = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

வரிசை மாற்றங்கள் என்பது பட்டியல் படுத்துவது (வரிசை அவசியம்)

சேர்வுகள் என்பது குழுவிற்கானது (வரிசை அவசியம் அற்றது))

பண்புகள்

(i) $nC_0 = nc_n = 1$

(ii) $nC_1 = n$

(iii) $nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$

(iv) $nC_x = nC_y$, எனில் $x = y$ அல்லது $x + y = n$

(v) $nC_r = nC_{n-r}$

(vi) $nC_r + nC_{r-1} = (n+1)C_r$

(vii) $nC_r = \frac{np_r}{r!}$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

$nC_4 = nC_6$ எனில் $12C_n$ –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$nC_x = nC_y$, எனில் $x + y = n$ என்ற பண்பின்படி

$nC_4 = nC_6$ எனில்,

$$n = 4 + 6 = 10$$

$$\begin{aligned} 12C_n &= 12C_{10} \\ &= 12C_2 \\ &= \frac{12\times11}{1\times2} = 66 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.27

$nP_r = 720$ மற்றும் $nC_r = 120$ எனில் r –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$nC_r = \frac{nP_r}{r!}$ என்ற தொடர்பின்படி

$$120 = \frac{720}{r!}$$

$$r! = \frac{720}{120} = 6 = 3!$$

$$\Longrightarrow r = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 2.28

$15C_{3r} = 15C_{r+3}$ எனில் r –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$15C_{3r} = 15C_{r+3}$$

$$nC_x = nC_y \implies x + y = n,$$

என்ற பண்பிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$3r + r + 3 = 15$$

$$\implies \quad r = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 2.29

32 மாணவர்களை கொண்ட ஒரு வகுப்பிலிருந்து நான்கு மாணவர்கள், ஒரு போட்டித் தேர்வில் பங்கேற்க தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார்கள். இவர்களை எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

தீர்வு

32 மாணவர்களிலிருந்து 4 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= 32C_4$$

$$= \frac{32!}{4!\,(32-4)!}$$

$$= \frac{32!}{4!\,(28)!}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.30

ஒரு வினாத்தாளில் பிரிவு (அ), பிரிவு (ஆ) என்ற இரு பிரிவுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் 10 வினாக்கள் உள்ளன. வினாத்தாளுக்கு விடையளிக்கும் ஒரு மாணவன், பகுதி (அ) –விலிருந்து 8 வினாக்களுக்கும், பகுதி (ஆ) –விலிருந்து 5 வினாக்களுக்கும் விடையளிக்க வேண்டும் எனில், எத்தனை வழிகளில், அம்மாணவர், வினாக்களைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

தீர்வு

வினாத்தாளில் பகுதி (அ) –விலிருந்து 8 வினாக்களை $10C_8$ வழிகளிலும். பகுதி (ஆ)–வில் உள்ள 10 வினாக்களிலிருந்து 5 வினாக்களை $10C_5$ வழிகளிலும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். எனவே பெருக்கல் கொள்கை விதிப்படி மொத்த தேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$10C_8 \times 10C_5 = 10C_2 \times 10C_5$$

$$= \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$= 11340$ வழிகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.31

4 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர்கள் (wicket keeper) உள்ளடக்கிய 16 கிரிக்கெட் விளையாட்டு வீரர்கள் குழுவிலிருந்து குறைந்தது 11 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் அணி உருவாக்கப்படுகிறது. குறைந்தது 3 பந்து வீச்சாளர்கள் மற்றும் குறைந்தது ஒரு இலக்கு நிலை காப்பாளர் கொண்ட 11 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்?

தீர்வு

11 விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய கிரிக்கெட் குழுவை கீழ்க்கண்ட வழிகளில் அமைக்கலாம்.

(i) 3 பந்து வீச்சாளர்கள், 1 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 7 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு $4C_3 \times 2C_1 \times 10C_7$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

$$4C_3 \times 2C_1 \times 10C_7 = 4C_1 \times 2C_1 \times 10C_3$$

$= 960$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(ii) 3 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர்கள் மற்றும் 6 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு $4C_1 \times 2C_2 \times 10C_6$

$$4C_1 \times 2C_2 \times 10C_6 = 4C_1 \times 2C_2 \times 10C_4$$

$= 840$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(iii) 4 பந்து வீச்சாளர்கள், 1 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 6 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு $4C_4 \times 2C_1 \times 10C_6$

$$4C_4 \times 2C_1 \times 10C_4$$

$= 420$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(iv) 4 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 5 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு

$4C_4 \times 2C_2 \times 10C_5$

$4C_4 \times 2C_2 \times 10C_5$

$= 252$ வழிகளில் அமைக்கலாம்.

கூட்டலின் எண்ணுதல் கொள்கைப்படி, கிரிக்கெட் குழுவை அமைக்கும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை

$= 960+840+420+ 252$

$= 2472$ வழிகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.32

$4(nC_2)=(n+2)C_3$, எனில் n–ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned}
4(nC_2) &= (n+2)C_3 \\
4\frac{n(n-1)}{1\times 2} &= \frac{(n+2)(n+1)(n)}{1\times 2\times 3} \\
12(n-1) &= (n+2)\,(n+1) \\
12(n-1) &= (n^2+3n+2) \\
n^2-9n+14 &= 0 \\
(n-2)(n-7) &= 0 \Rightarrow n=2, n=7
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.33

$(n+2)C_n = 45$ எனில் n – ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned}
(n+2)C_n &= 45 \\
(n+2)C_{n+2-n} &= 45 \\
(n+2)C_2 &= 45 \\
\frac{(n+2)(n+1)}{2} &= 45 \\
n^2+3n-88 &= 0 \\
(n+11)(n-8) &= 0 \\
n &= -11, 8
\end{aligned}$$

n, குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$\therefore n = 8$

பயிற்சி 2.4

1. $nP_r = 1680$, $nC_r = 70$ எனில் n மற்றும் r –ன் மதிப்பைக் காண்க.
2. $8C_4 + 8C_3 = 9C_4$ என்பதை சரிபார்.
3. வட்டத்தின் மீதுள்ள 21 புள்ளிகள் வழியாக எத்தனை நாண்கள் வரையலாம்?
4. ஓர் அறுகோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளை இணைத்து எத்தனை முக்கோணங்கள் வரையலாம்?
5. 7 ஆங்கில மெய்யெழுத்துகள் மற்றும் 4 ஆங்கில உயிரெழுத்துகளிலிருந்து, 3 மெய்யெழுத்துகள் மற்றும் இரண்டு உயிரெழுத்துகளை தேர்ந்தெடுத்து, எத்தனை வார்த்தைகள் உருவாக்கலாம்?
6. 4 பகடைகள் உருட்டப்படுகிறது எனில் குறைந்தபட்சம் ஒரு பகடையாவது 2 என்ற எண் தோன்றுமாறு கிடைக்கபெறும் அனைத்துவிதமான சாத்தியக்கூறுகளின் எண்ணிக்கை யாது?
7. ஒரு விருந்தில் 18 விருந்தினர்கள் கலந்து கொள்கிறார்கள். ஒரு நீண்ட மேசையில் இருபுறமும், பக்கத்திற்கு 9 பேர் வீதம் அமரவைக்கப்படுகிறார்கள், அவர்களில் குறிப்பிட்ட 3 பேர் ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கத்திலும், மேலும் இரண்டு பேர் மேசையின் மற்றொரு பக்கத்திலும் அமர விரும்புகிறார்கள் எனில் எத்தனை வழிகளில் விருந்தினர்களை அமர வைக்கலாம்?
8. ஒரு பலகோணம் 44 மூலை விட்டங்களைப் பெற்றிருப்பின் அப்பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி?
9. 15 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் விளையாட்டு வீரர்கள் குழுவில் இருந்து 11 பேர் அடங்கிய குழுவை கீழ்க்கண்டவாறு எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?
   (i) வீரர்களை தேர்வு செய்வதில் எந்த வித நிபந்தனைகளும் இல்லை.

(ii) ஒரு குறிப்பிட்ட வீரர் எப்பொழுதும் குழுவில் இடம் பெறுவார்.

(iii) ஒரு குறிப்பிட்ட வீரர் எப்பொழுதும் குழுவில் இடம் பெறமாட்டார்.

10. 6 ஆண்கள் மற்றும் 4 பெண்களிலிருந்து 5 பேர் அடங்கிய குழு, கீழ்க்கண்டவாறு

(i) குழுவில் குறைந்தது இரண்டு பெண்கள் இடம் பெறுமாறும்

(ii) குழுவில் அதிகபட்சம் இரண்டு பெண்கள் இடம் பெறுமாறும்

எத்தனை வகைகளில் அமைக்கலாம்.

2.4 கணிதத் தொகுத்தறிதல் (Mathematical induction)

n என்ற மிகை முழுக்கள் எண்களைக் கொண்டு அமைக்கும் பல்வேறு கணிதக் கூற்றினை நிரூபிக்கப் பயன்படும் ஒரு உத்தியே கணிதத் தொகுத்தறிதல் எனப்படும்.

இயற்கணிதம், வடிவியல், மற்றும் பகுப்பாய்வு ஆகியவற்றின் கூட்டுதலின் உண்மை தன்மையை நிறுவ, கணித்ததொகுத்தறிதல் முறை பயன்படுகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறிதலின் முதன்மைக் கொள்கை:

ஒவ்வொரு இயல் எண் n – க்கும் தகுந்த ஒரு கூற்றினை $P(n)$ என்க.

(i) **ஆரம்பநிலை:** $n=1$ எனும்பொழுது $P(1)$ என்பது உண்மையாகும். (ஏதேனும் நிலையான இயல் எண்களுக்கும் உண்மையாகும்) மற்றும்

(ii) **தொகுத்தறிதல் நிலை:** $n = k$ எனும்பொழுது கூற்று உண்மையெனில் (இங்கு k என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட, ஆனால் தன்னிச்சையான இயல் எண்) $n = k + 1$ என்பதற்கும் இக்கூற்று உண்மையாகும். அதாவது, கூற்று $P(k)$ உண்மை எனில் $P(k+1)$ –ம் உண்மையாக இருக்கும். ஆகவே $P(n)$ என்பது அனைத்து இயல் எண்களுக்கும் உண்மையாகும் என்பது கணிதத் தொகுத்தறிதலின் முதன்மைக் கொள்கையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.34

கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, (அனைத்து $n\in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்ற கூற்று கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

$$n\in N \text{ க்கு } P(n) = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ என்க.}$$

படி 1: $n=1$ என பிரதியிடவும்

$$\mathrm{P}(1) \text{ –ன் LHS} = 1$$

$$\mathrm{P}(1) \text{ –ன் RHS} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ P(1) என்பது உண்மையாகும்.

படி 2: $n = k$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

i.e., $\mathrm{P}(k)$ என்பது உண்மையாகும்.

$$\mathrm{P}(k) = 1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$ என்பது உண்மையாகும்.

படி 3: $P(k+1)$ என்பது உண்மையென நிரூபிக்க

$$\begin{aligned}P(k+1) &= 1+2+3+\ldots+k+(k+1)\\ &= P(k)+k+1\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

$\therefore P(k+1)$ என்பது உண்மையாகும்.

இவ்வாறாக $P(k)$ என்பது உண்மையெனில் $P(k+1)$ என்பது உண்மையாகும்.

$\therefore P(n)$ என்பது அனைத்து $n\in N$ க்கும் உண்மையாகும்.

ஆகவே $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, n\in N$ என்ற கூற்று உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.35

கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$(அனைத்து $n \in N$) என நிரூபி.

தீர்வு

$P(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ என்க.

$n = 1$ எனும் பொழுது

$\mathrm{P}(1)$ –ன் LHS = 1

$\mathrm{P}(1)$ –ன் RHS = 1^2

$= 1$

LHS = RHS

$\therefore$ $P(1)$ உண்மையாகும்.

$P(k)$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

$P(k) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$

எனவே $P(k+1)$ என்பது உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$P(k+1)$ –ன்

$$\text{LHS} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1)$$
$$= P(k) + (2k+1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k+1)^2 = \text{RHS}$$

$P(k)$ உண்மையெனில் $P(k+1)$ உண்மையாகும்.

$\therefore$ தொகுத்தறிதலின் விதிப்படி n –ன் எல்லா இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.36

கணிதத் தொகுத்தறிதலின் படி

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(அனைத்து $n \in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்பது குறிக்கும் கூற்று :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

என்க

$n = 1$ என பிரதியிட

$P(1)$–ன் LHS $= 1^2$

$= 1$

$$P(1)\text{–ன் RHS} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

$= 1$

LHS = RHS

$\therefore$ $P(1)$ உண்மையாகும்.

$P(k)$ என்பதை உண்மை என எடுத்துக்கொள்க

$$P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$P(k+1)$ –ன்

$$\text{LHS} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$$
$$= p(k) + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \text{RHS}$$

$\therefore$ $P(k)$ உண்மையென்றால் $P(k+1)$ உண்மையாகும்.

$\therefore$ அனைத்து இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.37

$2^{3n}-1$ என்பது "7 ஆல் வகுபடும்" (அனைத்து $n \in N$) என நிரூபி.

தீர்வு

$P(n) = 2^{3n}-1$ என்க

படி 1: $n = 1$ என பிரதியிட

$\therefore$ $P(1) = 2^3-1$

$= 7$ (7 ஆல் வகுபடும் எண்)

$P(1)$ உண்மை ஆகும்.

படி 2: $n = k$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

$P(k) = 2^{3k}-1$,7 ஆல் வகுபடும் எண் என்க.

ஏதேனும் ஒரு $m \in N$ க்கு

$2^{3k}-1 = 7m$ என்க. ... (1)

படி 3: $P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்

$$P(k+1) = 2^{3(k+1)}-1$$
$$= 2^{(3k+3)}-1$$
$$= 2^{3k}\cdot 2^3-1$$
$$= 2^{3k}\cdot 8-1$$
$$= 2^{3k}\cdot(7+1)-1$$
$$= 2^{3k}\cdot 7+(2^{3k}-1)$$
$$= 2^{3k}\cdot 7+7m = 7(2^{3k}+m)$$

$\Rightarrow$ 7 ஆல் வகுபடும் எண்

எனவே, $P(k+1)$ –ம் உண்மை ஆகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறிதல் விதிப்படி $P(k)$ உண்மை எனில் $P(k+1)$ –ம் உண்மை ஆகிறது.

$\therefore$ n –ன் அனைத்து இயல் மதிப்புகளுக்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.38

கணிதத் தொகுத்தறிதல் விதிப்படி n^2+n ஒரு "இரட்டைப்படை எண்" (அனைத்து $n \in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்பது n^2+n என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$n = 1$ என பிதியிடவும்

$P(1) = 1^2+1 = 1+1 = 2$,

ஒரு இரட்டைப்படை எண்.

$P(k)$ என்பது உண்மை என்க.

$P(k) = k^2+k$ ஒர் "இரட்டை படை எண்" என்பது உண்மையாகும்

$\therefore P(k) = k^2+k = 2m,\ m \in N$ ...(1)

$P(k+1)$ உண்மை என நிரூபிக்க

$$P(k+1) = (k+1)^2+(k+1)$$
$$= k^2+2k+1+k+1$$
$$= k^2+k+2k+2$$
$$= 2m+2(k+1) \text{ by } (1)$$
$$= 2(m+k+1) \text{ (ஒர் இரட்டை படை எண்)}$$

$\therefore$ $(k+1)^2+(k+1)$ ஒர் இரட்டைப் படை எண்

$\therefore$ $P(k)$ உண்மை எனில் $P(k+1)$ உண்மை ஆகிறது.

$\therefore$ n –ன் எல்லா இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகிறது.

பயிற்சி 2.5

கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் அனைத்து $n \in N$ க்கும் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக

1. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. $1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
3. $4+8+12+\ldots+4n = 2n(n+1)$.
4. $1+4+7+\ldots+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.
5. $3^{2n}-1$ என்பது 8ஆல் வகுபடும்.
6. a^n-b^n என்பது $a-b$ ஆல் வகுபடும்.
7. $5^{2n}-1$ என்பது 24 ஆல் வகுபடும்.
8. $n(n+1)(n+2)$என்பது 6 ஆல் வகுபடும்.
9. அனைத்து இயல் எண்களுக்கும் $2^n > n$.

2.5 ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial theorem)

கூடுதல் அல்லது கழித்தல் என்ற செயலிகளால் இணைக்கப்பட்ட இரண்டு உறுப்புகளைக் கொண்ட இயற்கணிதக்

கோவையானது ஒரு ஈருறுப்புக்கோவை (Binomial) என அழைக்கப்படுகிறது.

$(x+y), (5a-2b), \left(x+\frac{1}{y}\right), \left(p+\frac{5}{p}\right),$ $\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{y^2}\right)$ என்பன ஈருறுப்புக் கோவைக்கான எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

ஈருறுப்பு அடுக்குகளை விரிவாக்குதல் என்பது ஈருறுப்புத் தேற்றம் அல்லது ஈருறுப்பு கோவை எனப்படும்.

$(x + y)^n$ என்பதனை ax^by^c என்ற அமைப்பில் உள்ள உறுப்புகளின் கூடுதலாக விரிவாக்கம் செய்ய முடியும். இங்கு b மற்றும் c என்ற அடுக்குகள் $b + c = n$ எனுமாறு உள்ள மிகைமுழுக்களாகும். ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள a என்ற மிகை முழுக்கெழு என்பது ஈருறுப்புக் கெழு என வழங்கப்படும்.

கிரேக்ககணிதமேதையூக்ளிட்என்பரால் பொ.ஆ.மு. 4 ஆம் நூற்றாண்டில் $(x + a)^2$ –ன் விரிவு வழங்கப்பட்டுள்ளது. பொ.ஆ.மு. 6 ஆம் நூற்றாண்டில் $(x+a)^3$ –ன் விரிவு இந்தியாவில் அறியப்பட்டதற்கான ஆதாரம் உள்ளது. 1544– ஆம் ஆண்டு ‘மைக்கேல் ஸ்டிபெல்’ (Michael Stifle) என்பவரால் ‘ஈருறுப்புக் கெழு’ என்ற பதம் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

பிளேஸ் பாஸ்கல் (Blaise Pascal) (19 ஜுன் 1623 – 19 ஆகஸ்ட் 1662) என்பவர் பிரான்ஸ் நாட்டு கணித மேதை, இயற்பியலாளர், எழுத்தாளர் மற்றும் கத்தோலிக்க இறையியலாளர். இவர் 1652 ஆம் ஆண்டு வெளியிடப்பட்ட “எண்கணித முக்கோணம்” என்ற பதிவில் ஈருறுப்புக் கெழுக்களை முக்கோண வடிவில் வடிவமைத்துள்ளார். இதுவே தற்பொழுது பாஸ்கலின் முக்கோணம் எனப்படுகிறது.

ஈருறுப்புத் தேற்றம் $(x + a)^n$ –ன் விரிவை, அனைத்து விகிதமுறு எண் 'n' க்கும் உகந்ததாக மாற்றி பொதுவாக அமைத்தவர் சர் ஐசக் நியூட்டன் அவர்கள்.

தேற்றம் (நிரூபணமின்றி)

$(x+a)^n$ $n \in N$ ற்கான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை இங்கு நாம் காண்போம் (நிரூபணமின்றி)

x, 'a' என்பன இரு மெய்யெண்கள் எனில், அனைத்து $n \in N$ க்கும் $(x+a)^n$ –ன் விரிவு

$$(x+a)^n = nC_0x^na^0 + nC_1x^{n-1}a^1$$
$$nC_2x^{n-2}a^2 + ... + nC_rx^{n-r}a^r + ...$$
$$+nC_{n-1}x^1a^{n-1} + nC_nx^0a^n = \sum_{r=0}^{n} nC_rx^{n-r}a^r$$

குறிப்பு

$n = 0$ எனில் $(x+a)^0 = 1$

$n = 1$ எனில்

$$(x+a) = 1C_0x + 1C_1a = x + a$$

$n = 2$ எனில்

$$(x+a)^2 = 2C_0x^2 + 2C_1x^a + 2C_2a^2$$
$$= x^2 + 2xa + a^2$$

$n = 3$ எனில்

$$(x+a)^3 = 3C_0x^3 + 3C_1x^2a + 3C_2xa^2 + 3C_3a^3$$
$$= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 \quad ...$$

$(x+a)^n$ –ன் விரிவில் உள்ள ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் முக்கோண வடிவில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. இதுவே பாஸ்கலின் முக்கோணம் எனப்படுகிறது.

$n = 0$ 1
$n = 1$ 1   1
$n = 2$ 1   2   1
$n = 3$ 1   3   3   1
$n = 4$ 1   4   6   4   1
$n = 5$ 1   5   10   10   5   1

படம் 2.5

குறிப்பு

(i) $(x + a)^n$ என்பதன் விரிவில் $n+1$ உறுப்புகள் உள்ளன.

(ii) $(x + a)^n$ –ன் விரிவில், ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள x மற்றும் a –ன் அடுக்குகளின் கூடுதல் n ஆகும்

(iii) $nC_0, nC_1, nC_2, nC_3, \ldots nC_r, \ldots nC_n$ என்பன ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் எனப்படும். இவைகள் $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_r, \ldots, C_n$, எனவும் குறிக்கப்படும்.

(iv) $(x+a)^n$ –ன் விரிவில் உள்ள பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$

(v) $nC_r = nC_{n-r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ ஆகிவற்றிற்கான பண்பின்படி $(x + a)^n$–ன் விரிவில் இருபுறத்திலிருந்தும் சம தூரத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமமாக இருக்கும்.

(vi) ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2^n$

(vii) $(1+x)^n$, என்பதன் விரிவாக்கத்தில் ஒற்றைப்படை உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் = இரட்டைப்படை உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2^{n-1}$

$(x + a)^n$ ன் நடு உறுப்பு காணுதல்

வகை (i) $(x+a)^n$ –ன் விரிவில் n – இரட்டைப்படை எனில் ($n+1$ ஒற்றைப்படை ஆகும்) இந்த விரிவில் உள்ள ஒரே நடு உறுப்பு $t_{\frac{n}{2}+1}$ ஆகும்.

வகை (ii) $(x+a)^n$–ல் n ஒற்றைப்படை எனில் ($n+1$ இரட்டைப்படை ஆகும்) இதன் விரிவில் இரண்டு நடு உறுப்புகள் இருக்கும். அவை $t_{\frac{n+1}{2}}$ மற்றும் $t_{\frac{n+3}{2}}$ ஆகும்.

சில வேளைகளில் $(x + a)^n$ – ன் விரிவாக்கத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு தேவைப்படுகிறது. இதற்கு நாம் முதலில் t_{r+1} என்ற பொது உறுப்பை எழுத வேண்டும். t_{r+1} என்கிற தேவையான உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு r –ன் மதிப்பை காண முடியும். x –ன் தனி உறுப்பை காண்பதற்கு t_{r+1} என்ற பொது உறுப்பின் x –ன் அடுக்கை பூச்சியத்துடன் சமன்செய்து கிடைக்கும் r –ன் மதிப்பை t_{r+1} பிரதியிட x –ன் தனிமதிப்பை நாம் பெறமுடியும்.

குறிப்பு

$$(x+a)^n = nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + a^n \ldots (1)$$

(i) $(x-a)^n$ –ல், a க்கு பதில் $-a$ யை பிரதியிட

$$\begin{aligned}(x-a)^n &= nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1}(-a) + nC_2 x^{n-2}(-a)^2 + \ldots + nC_r x^{n-r}(-a)^r + \ldots + (-a)^n \\ &= nC_0 x^n a^0 - nC_1 x^{n-1}(a) + nC_2 x^{n-2}(a)^2 + \ldots + (-1)^r nC_r x^{n-r}(a)^r + \ldots + (-1)^n (a)^n \quad \ldots(2)\end{aligned}$$

மேற்கண்ட விரிவாக்கத்திலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் குறிகள் மிகை அல்லது குறையாக மாறி மாறி இருக்கும்.

(ii) $a = 1$ என்று (1) –ல் பிரதியிட

$$(1+x)^n = 1 + nC_1 x + nC_2 x^2 + \ldots + nC_r x^r + \ldots + nC_n x^n \quad \ldots(3)$$

(iii) $x = -x$ என்று (3) –ல் பிரதியிட

$$(1-x)^n = 1 - nC_1 x + nC_2 x^2 + \ldots + nC_r(-1)^r x^r + \ldots + nC_n(-1)^n x^n$$

எடுத்துக்காட்டு 2.39

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(2x + 3y)^5$ –ன் விரிவுக் காண்க.

தீர்வு

$$(x+a)^n = nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + nC_{n-1} x^1 a^{n-1} + nC_n x^0 a^n$$

$$(2x+3y)^5 = 5C_0(2x)^5 + 5C_1(2x)^4(3y) + 5C_2(2x)^3(3y)^2 + 5C_3(2x)^2(3y)^3 + 5C_4(2x)(3y)^4 + 5C_5(3y)^5$$

$$= 32x^5 + 5(16)x^4(3y) + \frac{5\times4}{2\times1}(8x^3)(9y^2) + 5(2x)81y^4 + 243y^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2.40

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4$ –ன் விரிவுக் காண்க.

தீர்வு

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4 = (x^2)^4 + 4C_1(x^2)^3\frac{1}{x^2} + 4C_2(x^2)^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 4C_3(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + 4C_4\left(\frac{1}{x^2}\right)^4$$

$$= x^8 + 4x^4 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^8}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.41

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(101)^5$ –ன் விரிவு காண்க.

தீர்வு

$$(101)^5 = (100+1)^5$$

$$= (100)^5 + 5C_1(100)^4 + 5C_2(100)^3 + 5C_3(100)^2 + 5C_4(100) + 5C_5$$

$$= 10000000000 + 5(100000000) + 10(1000000) + 10(10000) + 5(100) + 1$$

$$= 10000000000 + 500000000 + 10000000 + 100000 + 500 + 1$$

$$= 10510100501$$

எடுத்துக்காட்டு 2.42

$\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ என்பதன் விரிவில் 5வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r}a^r$ ஆகும். ... (1)

$\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ –ன் 5வது உறுப்பைக் காண சமன்பாடு (1) –ல் n க்கு 10 –யும் r க்கு 4 –யும் பிரதியிட

$$t_{4+1} = t_5 = 10C_4(x)^6\left(-\frac{3}{x^2}\right)^4$$

(இங்கு $n = 10$, $x = x$, $a = -\frac{3}{x^2}$)

$$= 10C_4(x)^6\frac{3^4}{x^8}$$

$$= \frac{17010}{x^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.43

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$ –ன் விரிவில் நடு உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r}a^r$ ஆகும். ... (1)

நடு உறுப்பைக் காண

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிட

$n = 10,\ x = x^2,\ a = -\frac{2}{x}$ மற்றும்

$r = 5$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$t_{5+1} = t_6 = 10C_5(x^2)^5\left(\frac{-2}{x}\right)^5$$

$$= 10C_5 x^{10}\frac{(-2)^5}{x^5}$$

$$= -8064x^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2.44

$\left(\frac{x}{3}+9y\right)^9$ –ன் விரிவில் நடுஉறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$\left(\frac{x}{3}+9y\right)^9$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிடுக. $n = 9$ எனில் பத்து உறுப்புகளை (இரட்டை படை) நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ இதன் விரிவில் உள்ள இரண்டு நடு உறுப்புகள் முறையே

$\therefore\ t_{\frac{n+1}{2}},\ t_{\frac{n+3}{2}}$ அதாவது $t_{\frac{9+1}{2}},\ t_{\frac{9+3}{2}}$ ஆகும்.

ஆகவே, t_5 மற்றும் t_6 என்பன நடு உறுப்புகளாகும்.

$(x + a)^n$ –ன் விரிவில் பொது உறுப்பு

$$t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r \qquad (1)$$

$r = 4$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} t_{4+1} = t_5 &= 9C_4\left(\frac{x}{3}\right)^5\cdot(9y)^4 \\ &= 9C_4\frac{x^5}{3^5}\cdot 9^4 y^4 \\ &= \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\cdot\frac{x^5}{3^5}\cdot 9^4y^4 \\ &= 3402\ x^5y^4 \end{aligned}$$

$r = 5$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} t_{5+1} = t_6 &= 9C_5\left(\frac{x}{3}\right)^4\cdot(9y)^5 \\ &= 9C_5\frac{x^4}{3^4}\cdot 9^5y^5 \\ &= 91854\ x^4y^5 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.45

$\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{11}$ –ன் விரிவில் x^{10}–ன் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு

$(x + a)^n$– ன் விரிவில் பொது உறுப்பு

$$t_{r+1} = nC_r x^{n-r}a^r \qquad \ldots (1)$$

$\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{11}$ என்பதனை $(x + a)^n$ உடன் ஒப்பிடுக

$$\begin{aligned} t_{r+1} &= 11C_r(2x^2)^{11-r}\left(\frac{-3}{x}\right)^r \\ &= 11C_r2^{11-r}x^{2(11-r)}(-3)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r \\ &= 11C_r2^{11-r}(-1)^r\cdot3^rx^{22-3r} \end{aligned}$$

x^{10}–ன் கெழுவைக்காண $22-3r = 10$ என்க.

$\Rightarrow r = 4$

$r = 4$ என (1) –ல் பிரதியிட,

$$t_5 = 11C_4 2^{11-4}3^4x^{10} = 11C_4\cdot2^73^4x^{10}$$

$\therefore\ x^{10}$ – ன் கெழு $11C_4 2^7 3^4$.

எடுத்துக்காட்டு 2.46

$\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ – ன் விரிவில் x யைச் சாராத உறுப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

$(x + a)^n$ – ன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r}a^r$

$\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ என்பதனை $(x + a)^n$ உடன் ஒப்பிடுக.

$$\begin{aligned} \therefore\ t_{r+1} &= 9C_r(2x)^{9-r}\left(\frac{1}{3x^2}\right)^r \\ &= 9C_r2^{9-r}x^{9-r}\frac{1}{3^r}x^{-2r} \\ t_{r+1} &= 9C_r\frac{2^{9-r}}{3^r}\cdot x^{9-3r} \qquad \ldots (1) \end{aligned}$$

x – யை சாராத உறுப்பைக் காண x –ன் அடுக்கை ‘0’ விற்கு சமன்படுத்த

$$9 - 3r = 0$$

$$\therefore\ r = 3$$

$r = 3$ –ஐ (1) –ல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} t_{3+1} &= 9C_3\frac{2^{9-3}}{3^5}\cdot x^0 \\ &= 9C_3\frac{2^6}{3^5} = 1792 \end{aligned}$$

பயிற்சி 2.6

1. ஈருறுப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்துக.

(i) $(2a-3b)^4$ (ii) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^7$

(iii) $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$

2. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க:

   (i) $(101)^4$ (ii) $(999)^5$

3. $(x-2y)^{13}$என்பதன் விரிவில் 5வது உறுப்பைக் காண்க.

4. கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவில் நடு உறுப்பைக் காண்க.

   (i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{11}$ (ii) $\left(3x+\frac{x^2}{2}\right)^{8}$

   (iii) $\left(2x^2-\frac{3}{x^3}\right)^{10}$

5. கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவில் x–ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க

   (i) $\left(x^2-\frac{2}{3x}\right)^{9}$ (ii) $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$

   (iii) $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ –ன் விரிவில் x – ஐச் சாராத உறுப்பு $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)2^n}{n!}$ என நிறுவுக.

7. $(1+x)^{2n}$ – ன் விரிவில் நடு உறுப்பு $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)2^n x^n}{n!}$ எனக் காண்பி.

பயிற்சி 2.7

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

1. $nC_3 = nC_2$ எனில் nc_4 –ன் மதிப்பு

   (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

2. $np_2 = 20$ எனும் பொழுது n – ன் மதிப்பு

   (a) 3 (b) 6 (c) 5 (d) 4

3. 5 விளையாட்டு வீரர்களிலிருந்து நான்கு 4 பேரை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

   (a) 4! (b) 20 (c) 25 (d) 5

4. $nP_r = 720(nC_r)$, எனில் r–ன் மதிப்பு

   (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

5. ஒரு நாணயம், ஐந்துமுறை சுண்டப்படும்பொழுது கிடைக்கும் அனைத்து சாத்திய கூறுகளின் எண்ணிக்கை

   (a) 2^5 (b) 5^2 (c) 10 (d) $\frac{5}{2}$

6. n – பக்கங்களைக் கொண்ட பலகோணத்தின் மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கை

   (a) nC_2 (b) nC_2-2

   (c) nC_2-n (d) nC_2-1

7. அனைத்து $n\in N$ க்கு $n(n+1)(n+2)(n+3)$– ஐ வகுக்கக்கூடிய மிகப்பெரிய மிகை முழு எண் ஆனது

   (a) 2 (b) 6 (c) 20 (d) 24

8. n என்ற மிகைமுழுவிற்கு $(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

   (a) n (b) $n+1$

   (c) $n-1$ (d) $2n$

9. n என்ற மிகைமுழுவிற்கு $nC_1+nC_2+nC_3+\ldots+nC_n$ –ன் மதிப்பு

   (a) 2^n (b) 2^n-1

   (c) n^2 (d) n^2-1

10. $(x-2y)^7$ என்பதன் விரிவில், x^3 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?

   (a) 3வது (b) 4வது

   (c) 5வது (d) 6வது

11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ என்பதன் விரிவின் நடு உறுப்பு ஆனது

   (a) $10C_4\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $10C_5$

   (c) $10C_6$ (d) $10C_7x^4$

12. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$ –ன் விரிவின் மாறிலி உறுப்பு

(a) 156 (b) 165

(c) 162 (d) 160

13. $(3+\sqrt{2})^8$ என்பதன் விரிவின் கடைசி உறுப்பு

(a) 81 (b) 16

(c) $8\sqrt{2}$ (d) $27\sqrt{3}$

14. $\frac{kx}{(x+4)(2x-1)} = \frac{4}{x+4} + \frac{1}{2x-1}$ எனில் k –ன் மதிப்பு

(a) 9 (b) 11 (c) 5 (d) 7

15. எழுத்துக்களை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம் என்ற வகையில் NUMBER என்ற வார்த்தையிலிருந்து அமைக்கப்படும் மூன்று எழுத்து வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 206 (b) 133

(c) 216 (d) 300

16. நான்கு இணை கோடுகள், மற்றொரு மூன்று இணை கோடுகளோடு வெட்டிக் கொள்ளும் தொகுப்பிலிருந்து உருவாக்கப்படும் இணைகரங்களின் எண்ணிக்கை

(a) 18 (b) 12 (c) 9 (d) 6

17. ஒரு தேர்வின் வினாத்தாளின் சரியா அல்லது தவறா என்ற வகையில் 10 வினாக்கள் உள்ளன. அவை விடையளிக்கப்படும் வழிகள்

(a) 240 (b) 120

(c) 1024 (d) 100

18. $(5C_0+5C_1)+(5C_1+5C_2)+(5C_2+5C_3)+(5C_3+5C_4)+(5C_4+5C_5)$ –ன் மதிப்பு

(a) 2^6-2 (b) 2^5-1

(c) 2^8 (d) 2^7

19. வெவ்வேறு இலக்கங்களை உடைய 9 இலக்க எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

(a) 10! (b) 9!

(c) $9 \times 9!$ (d) $10 \times 10!$

20. "CHEESE" என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துக்களை கொண்டு அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 120 (b) 240 (c) 720 (d) 6

21. 13 விருந்தினர்கள் ஓர் இரவு விருந்தில் கலந்து கொள்கிறார்கள், அவ்விருந்தில் நடைபெறும் கைக்குலுக்குதலின் எண்ணிக்கை

(a) 715 (b) 78

(c) 286 (d) 13

22. எழுத்துக்கள் திரும்ப வராத நிலையில் " EQUATION " , என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி உருவாக்கப்படும், பொருள்படும் (அல்லது) பொருள்படா வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 7! (b) 3! (c) 8! (d) 5!

23. ஒரு குறிப்பிட்ட விரிவாக்கத்தின் ஈருறுப்பு கெழுக்களின் கூடுதல் 256 எனில், அவ்விரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(a) 8 (b) 7 (c) 6 (d) 9

24. பொருட்களை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம் என்ற வகையில், வெவ்வேறான n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை ஒரே நேரத்தில் தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

(a) r^n (b) n^r

(c) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (d) $\frac{n!}{(n+r)!}$

25. ஈருறுப்பு கெழுக்களின் கூடுதல்

(a) 2^n (b) n^2

(c) $2n$ (d) $n+17$

இதர கணக்குகள்

1. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)}$

2. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\frac{x-4}{x^2-3x+2}$

3. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக :
$$\frac{6x^2-14x-27}{(x+2)(x-3)^2}$$

4. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக :
$$\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}$$

5. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளை காண்க

(i) $\frac{3!\times 0!+0!}{2!}$ (ii) $\frac{3!+1!}{(2^2)!}$

(iii) $\frac{(3!)!\times 2!}{5!}$

6. A, B, C, D, E, F என்ற 6 எழுத்துகளிலிருந்து 5 எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வகை குறியீடுகளை அமைக்க முடியும்? a) திரும்பி வராமை b) திரும்பி வரக்கூடியவை c) திரும்பி வராமை ஆனால் E என்ற எழுத்திலிருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும் d) திரும்பி வராமை ஆனால் $C\ A\ B$ –ல் முடிவடைய வேண்டும்.

7. 20 பரிசு சீட்டுகள் கொண்ட தொப்பியிலிருந்து, 4 சீட்டுகள் வரிசையாக தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. முதல் சீட்டை எடுப்பவர் காரைப் பரிசாகப் பெறுகிறார். இரண்டாவது சீட்டுக்கு இரு சக்கர வாகனமும், மூன்றாவது சீட்டுக்கு மிதிவண்டியும் மற்றும் நான்காவது சீட்டுக்கு இரு சக்கரங்களை கொண்ட உந்து வண்டி பரிசாக கிடைக்கிறது. இந்த பரிசுகள் எத்தனை வழிகளில் வழங்கப்படுகிறது?

8. 9 கணிதம், 8 பொருளாதாரம் மற்றும் 7 வரலாற்று புத்தகங்களின் தொகுப்பில் இருந்து எத்தனை வழிகளில் 2 கணிதம், 2 பொருளாதாரம் மற்றும் 2 வரலாற்று புத்தகங்களைத் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

9. 3 சிவப்பு, 2 மஞ்சள் மற்றும் 2 பச்சை நிற சமிக்ஞை (signal) கொடிகள் உள்ளன. செங்குத்தான கொடிக்கம்பத்தில் கொடிகளைப் பயன்படுத்தி நாம் விரும்பும் எத்தனை வகையான பல்வேறு சமிக்ஞைகளை பெற முடியும்?

10. $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{17}$ என்ற விரிவாக்கத்தில் x^{11} –ன் கெழுவைக் காண்க.

தொகுப்புரை

- ஏதேனும் இயல் எண் n ற்கு, n – ன் காரணீயப் பெருக்கம் என்பது, முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்குத் தொகையாகும். இது குறியீட்டில் $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ என குறிக்கப்படுகிறது.
- n என்ற இயல் எண்ணுக்கு $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1$
- $0!=1$
- இரண்டு பணிகளில் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனி m மற்றும் n வழிகளில் செயல்படுத்தப்படுகிறது எனில் இரண்டு பணிகளும் $(m+n)$ வழிகளில் செயல்படுத்த முடியும்.
- n பொருள்களின் r என்ற பொருள்களை ஒரே நேரத்தில் எடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வழிகளின் எண்ணிக்கை என்பது வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையாகும்.
- $np_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- $np_o = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

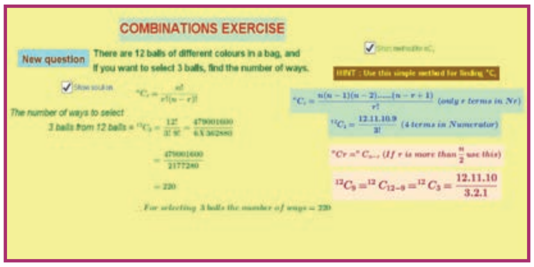
- $np_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$
- $np_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$
- $np_r = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]$
- n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும்போது பொருட்களை மீண்டும் இடம்பெற அனுமதிக்கும் பொழுது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை n^r ஆகும்
- $\frac{n!}{p!\,q!}$ என்பது n பொருட்களில் p பொருட்கள் ஒருவகையாகவும், q பொருட்கள் மற்றொரு வகையாகவும் உள்ளன எனக் கொள்வோம்.இங்கு $p+q=n$ எனில் n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் அனைத்தையும் தேர்ந்தெடுக்கும்போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை.
- வட்ட வரிசை மாற்றத்தில் வலச்சுற்று (clock wise) இடச்சுற்று (anti-clockwise) ஆகியவற்றிற்கான வேறுபாடு காணமுடிந்தால், பொருள்களிள் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(n\text{-}1)!$ ஆகும்
- வட்ட வரிசைமாற்றங்கள் வலச்சுற்று, இடச்சுற்று வேறுபாடின்றி இருப்பின் பொருள்களில் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{(n-1)!}{2}$ ஆகும்.
- n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்வு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை சேர்வுகள் ஆகும்.
- n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகள் nc_r ஆகும்.
- $nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ n \geq 1, 0 \leq r \leq n$
- $nC_n = 1 = nC_0$
- $nC_1 = n$
- $nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$
- $nC_x = nC_y$, எனில் $x = y$ அல்லது $x + y = n$.
- $nC_r = nC_{n-r}$
- $nC_r + nC_{r-1} = (n+1)C_r$
- $(x+a)^n = nC_o x^n a^o + nC_1 x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + nC_{n-1} x^1 a^{n-1}$ $+ nC_n x^0 a^n = \sum_{r=0}^{n} nC_r x^{n-r} a^r$
- $(x+a)^n$ என்ற விரிவில் $n+1$ என்ற உறுப்புகள் இருக்கும்.
- இந்த விரிவாக்கத்தில் ஒவ்வொரு உறுப்புகளில் உள்ள x மற்றும் a –ன் அடுக்குகளின் கூடுதல் n ஆகும்.

- $nC_0, nC_1, nC_2, nC_3 \ldots\ldots nC_r \ldots nC_n$ ஆகியவைகள் $C_0, C_1, C_2, C_3 \ldots C_r \ldots C_n$ எனவும் குறிக்கப்படும். அவைகள் ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் எனப்படும்.
- $r = 0,\ 1,\ 2,\ldots n$ ஆகியவற்றிற்கு $nC_r = nC_{n-r}$, எனவே $(x+a)^n$ என்ற விரிவாக்கத்தின் இரு முனைகளிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் சமமானவையாகும். மேலும் , $nC_0 = nC_n, nC_1 = nC_{n-1}, nC_2 = nC_{n-2}$
- ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் 2^n ஆகும்.
- ஒற்றைப்படை ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் = இரட்டை படை ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் = 2^{n-1}
- $(x+a)^n$ என்ற விரிவாக்கத்தின் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$.

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
ஈருறுப்பு	Binomial
எண்ணுதலின் கொள்கை	Principle of counting
எண்ணுதலின் பெருக்கல் கொள்கை	Multiplication Principle of counting
ஒரு படிக்காரணி	Linear factor
கணிதத் தொகுத்தறிதல்	Mathematical Induction
காரணீயப் பெருக்கம்	Factorial
கெழு	Coefficient
சாரா உறுப்பு	Independent term
சேர்வு	Combination
பகுதிப் பின்னங்கள்	Partial fractions
பாஸ்கலின் முக்கோணம்	Pascal’s Triangle
மைய உறுப்பு	Middle term
வட்ட வரிசை மாற்றம்	Circular Permutation
வரிசை மாற்றங்கள்	Permutations
விகிதமுறு கோவை	Rational Expression

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Combination Exercise"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

படி - 2

நீங்களாக தீர்வைக் கண்டு பிடித்து "Show solution" பெட்டியைச் சொடுக்கி கீழே காணும் தீர்வைச் சரி பார்க்கவும். மேலும் "Short method" பெட்டியைச் சொடுக்கி எளிய முறையினைக் காண்க.

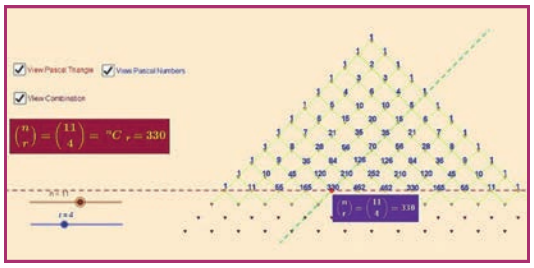
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

FVM35

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Pascal's Triangle"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

படி - 2

"Pascal's Triangle" க்கான பணித்தாளில், "View Pascal Triangle" மற்றும் "View Pascal's Numbers" பெட்டிகளைச் சொடுக்கி பாஸ்கல் எண்களைக் கவனிக்கவும், இப்பொழுது "view Combination" பெட்டியைச் சொடுக்கினால் nCr–இன் மதிப்பு தோன்றும். கணக்கீடு செய்து ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் ஒப்பீடு செய்க.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

MOSUF

அத்தியாயம்

3

பகுமுறை வடிவியல்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- இயங்குவரை
- இருகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்
- ஒருபுள்ளி வழிக்கோடுகளின் கருத்துரு
- இரட்டை நேர்க்கோடுகள்
- ஒருவட்டத்தின் பொதுவடிவ மற்றும் துணையலகு சமன்பாடுகள்
- வட்டத்தின் பொதுவான சமன்பாட்டின் மையம் மற்றும் ஆரம்
- ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் கொடுக்கப்படின் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணுதல்
- ஒரு வட்டத்திற்கு, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு
- கூம்புவெட்டியின் வகைகளை அறிதல்
- பரவளையத்தின் திட்டச்சமன்பாடு, குவியம், இயக்குவரை பரவளையத்தின் செவ்வகலம் மற்றும் வணிகப் பயன்பாடுகள்

ரானே டெகார்டே
(1596-1650)

அறிமுகம்

"Geometry" என்ற சொல்லானது கிரேக்க மொழியின் "geo" மற்றும் "metron" என்ற சொற்களிலிருந்து வருவிக்கப்பட்டது. "geo" என்றால் பூமி என்றும், "metron" என்றால் அளப்பது என்றும் பொருளாகும்.

வடிவியல் என்பது புள்ளிகள், கோடுகள், வளைவுகள், மேற்பரப்பு போன்றவைகளையும், அவைகளின் பண்புகளையும் பற்றியப் படிப்பாகும். வடிவியல் வளைவரைகளுக்கும், இயற்கணித சமன்பாடுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பை வலியுறுத்துவது, பகுமுறை வடிவியலின் முக்கியப் பங்காகும்.

புகழ்பெற்ற பிரெஞ்சு தத்துவ மேதையும், கணித மேதையுமான, ரானே டெகார்டே (1596-1650), இயற்கணிதத்தை பயன்படுத்தி, வடிவியலை கற்பது தொடர்பான, முறையான கற்றலை முதன்முதலில் தன்னுடைய நூலான "la Geometry" –ல் 1637-ல் பிரசுரித்தார். இயற்கணிதம் மற்றும் வடிவியலின் சேர்வு, தற்போது பகுமுறை வடிவியல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதனால் அவர் பகுமுறை வடிவியலின் தந்தை எனக் கருதப்படுகிறார்.

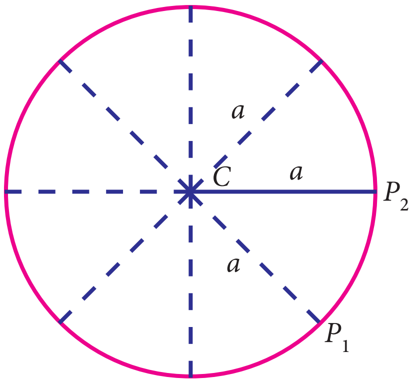
விமானம் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலையில் பகுமுறை வடிவியல் பெருமளவில் பயன்படுகிறது. குறிப்பாக விமானப் பாகங்களின் வடிவங்கள் சார்ந்த துறையில் பெருமளவில் பயன்படுகிறது.

3.1 நியமப்பாதை அல்லது இயங்குவரை (Locus)

வரையறை 3.1

ஒரு குறிப்பிட்ட வடிவ கணித விதியின் அல்லது விதிகளின் அடிப்படையில் இயங்கும் புள்ளியின் பாதை அதன் இயங்குவரை அல்லது நியமப்பாதை எனப்படும்.

3.1.1 இயங்குவரையின் சமன்பாடு (Equation of a locus)



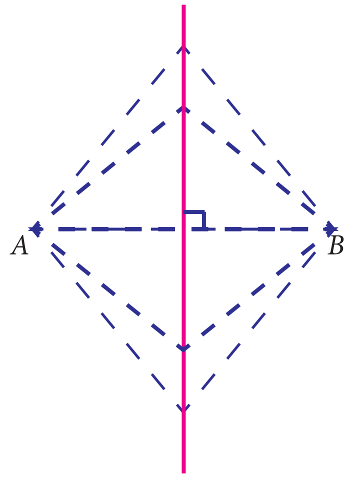
படம் 3.1

இயங்குவரையில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவுகளால் ஈடு செய்யப்படும் $x, y-$ல் உள்ள எந்த ஒரு தொடர்பும் இயங்குவரைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்,

(i) $C(h, k)$ என்ற நிலையானபுள்ளியிலிருந்து, எப்பொழுதும் சமதூரத்தில் உள்ள $P(x, y)$ என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை, அப்புள்ளியை மையமாக உடைய வட்டமாகும். நிலையான புள்ளி c –ஐ வட்டத்தின் மையம் என்போம்.

(ii) A, B என்ற இரு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள புள்ளியின் இயங்குவரை AB க்கு மையக் குத்துக்கோடாகும்.



படம் 3.2

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒரே நேர் திசையில் நகரும் ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நேர்கோடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

ஒரு தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி ஆதியிலிருந்து உள்ள தொலைவு அப்புள்ளியின் y-அச்சிலிருந்து அதன் தொலைவைப் போல் மூன்று மடங்கெனில் அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

தீர்வு

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து y-அச்சிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி A என்க.

$\mathrm{OP} = 3\ \mathrm{AP}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\mathrm{OP}^2 = 9\mathrm{AP}^2$$

$$(x_1-0)^2+(y_1-0)^2 = 9x_1^2$$

$$x_1^2+y_1^2 = 9x_1^2$$

$$8x_1^2-y_1^2 = 0$$

$\therefore P(x_1, y_1)$ –ன் இயங்குவரை $8x^2-y^2=0$

எடுத்துக்காட்டு 3.2

$(2, -3)$ மற்றும் $(3, -4)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலிருக்கும் ஒரு நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளை $A(2, -3)$ மற்றும் $B(3, -4)$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$PA = PB$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$PA^2 = PB^2$$

$$(x_1-2)^2+(y_1+3)^2 = (x_1-3)^2+(y_1+4)^2$$

$$x_1^2-4x_1+4+y_1^2+6y_1+9$$
$$= x_1^2-6x_1+9+y_1^2+8y_1+16$$

$$2x_1-2y_1-12 = 0$$

$$x_1-y_1-6 = 0$$

$P(x_1, y_1)$ −ன் இயங்குவரை $x-y-6 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

$(-5, 1)$ மற்றும் $(3, 2)$ என்ற புள்ளிகளுடன் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் வகையில் நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(-5, 1)$ மற்றும் $B(3, 2)$ என்க.

$P(x_1, y_1)$ என்பது இயங்குவரையின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$\angle APB = 90^o$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அதாவது ΔAPB ஓர் செங்கோண முக்கோணமாகும்

$$BA^2 = PA^2+PB^2$$

$$(3+5)^2 + (2-1)^2 = (x_1+5)^2$$
$$+(y_1-1)^2+(x_1-3)^2+(y_1-2)^2$$

$$65 = x_1^2+10x_1+25+y_1^2-2y_1+1$$
$$+x_1^2-6x_1+9+y_1^2-4y_1+4$$

அதாவது $2x_1^2+2y_1^2+4x_1-6y_1+39-65 = 0$

அதாவது $x_1^2+y_1^2+2x_1-3y_1-13 = 0$

எனவே $P(x_1, y_1)$ −ன் இயங்குவரை $x^2+y^2+2x-3y-13=0$

பயிற்சி 3.1

1. $(1, 3)$ என்ற புள்ளிக்கும், x-அச்சுக்கும், சமதொலைவில் உள்ளவாறு நகரும் ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

2. $(3, -2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, எப்பொழுதும் 4 அலகு தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

3. ஒரு நகரும் புள்ளி, $(2,1)$ மற்றும் $(1,2)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து உள்ள தொலைவுகள் 2:1 என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு நகருகிறதெனில், அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

4. $(7, -6)$ மற்றும் $(3,4)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு சமதூரத்தில், x - அச்சின் மீதமைந்த ஒரு புள்ளியைக் காண்க.

5. $A(-1, 1)$ மற்றும் $B(2, 3)$ என்பன இரு நிலைப்புள்ளிகள் எனில் முக்கோணம் APB −ன் பரப்பளவு 8 ச.அலகுகள் என்றவாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் நியமப் பாதையைக் காண்க.

3.2 நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு (System of straight lines)

3.2.1 நினைவு கூறுதல் – நேர்க்கோடுகள்

முந்தைய வகுப்புகளில், பகுமுறை வடிவியல் பற்றிய அடிப்படை கருத்துருக்களை, அறிந்துள்ளோம். தூர வாய்பாடு, பிரிவு வாய்பாடு, முக்கோணத்தின் பரப்பு காணும் வாய்பாடு மற்றும் கோடுகளின் சாய்வு முதலியனவற்றை கீழ்வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். நேர்கோடுகளின் பலவகை சமன்பாடுகளை, 10 ஆம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம். 11 ஆம் வகுப்பின் புதிய கருத்துக்களையும், புதிய வரையறைகளையும் நன்கு புரிந்து கொள்ள, நினைவு கூறுதல் அவசியமாகிறது.

நேர்க்கோடுகளின் பல்வேறு வடிவங்கள்:

(i) சாய்வு– வெட்டுதுண்டுவடிவம்

சாய்வு m மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு c உடைய நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx+c$ ஆகும்

(ii) புள்ளி– சாய்வு வடிவம்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $P(x_1,y_1)$ வழிச் செல்வதும் சாய்வு m உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

(iii) இருபுள்ளிகள் வடிவம்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ ஆகும்.

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு அணிக்கோவை வடிவில்

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

(iv) வெட்டுதுண்டு வடிவம்

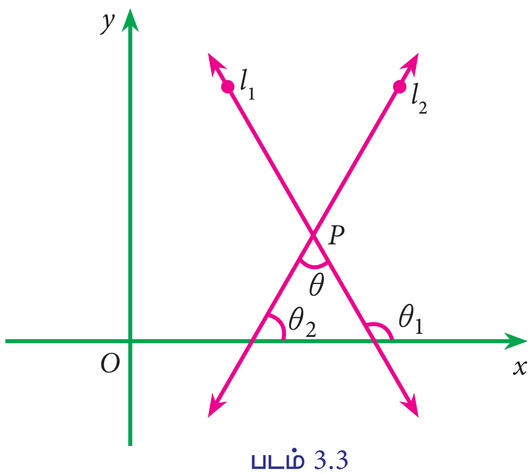
x-அச்சு வெட்டுதுண்டு a மற்றும் y-அச்சு வெட்டுத்துண்டு b எனில், நேர்க்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ ஆகும்.}$$

(v) பொதுவடிவம்

நேர்க்கோட்டின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு $ax+by+c=0$ ஆகும். இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள். மேலும் a, b என்பன ஒரே சமயத்தில் பூச்சியமற்ற மாறிலிகள் ஆகும்.

3.2.2 இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்கள் (Angle between two straight lines)



படம் 3.3

l_1 மற்றும் l_2 என்பன, P-யில் வெட்டிக் கொள்ளும் $l_1: y=m_1x+c_1$ மற்றும் $l_2: y=m_2x+c_2$ என்ற சமன்பாடுகளால் குறிக்கப்படும் இருகோடுகள் என்க.

θ_1 மற்றும் θ_2 என்பன l_1 மற்றும் l_2 கோடுகளால் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தப்படும் கோணங்கள் என்க. எனவே கோடுகளின் சாய்வுகள் $m_1=\tan\theta_1$ மற்றும் $m_2=\tan\theta_2$ என்க.

கோடுகள் l_1 மற்றும் l_2 களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta=\theta_1-\theta_2$ (படம் 3.3).

$$\therefore \tan\theta = |\tan(\theta_1-\theta_2)|$$

$$= \left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|\right]$$

குறிப்பு

(i) இங்கு $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ என்பது மிகை (>0)எனில், l_1 மற்றும் l_2 களுக்கு இடைபட்ட கோணம் θ என்பது குறுங்கோணமாகும். $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ –ன் மதிப்பு குறை (<0) எனில், θ என்பது விரிகோணமாக இருக்கும்.

(ii) இருகோடுகள் இணையாக இருப்பதற்கான தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு அவற்றின் சாய்வுகள் சமம். அதாவது $m_1=m_2$.

(iii) இருகோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதற்கான, தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு, அந்தக் கோடுகளின் சாய்வுகளின் பெருக்குத் தொகை -1 ஆக இருக்க வேண்டும், அதாவது $m_1\ m_2=-1$. (இங்கு m_1 மற்றும் m_2 என்பன முடிவுறு எண்ணாகும்)

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு ஆகிய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து, ஆனால் இவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்குத் தொகை $m_1 m_2 = -1$ என்பது உண்மையல்ல. ஏனெனில் x-அச்சின் சாய்வு $m_1=0$, y- அச்சின் சாய்வு m_2 முடிவிலி.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

$2x - y + 3 = 0$ மற்றும் $x + y + 2 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

m_1 மற்றும் m_2 என்பன $2x - y + 3 = 0$ மற்றும் $x + y + 2 = 0$ என்ற நேர்க் கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

இங்கு $m_1 = 2,\ m_2 = -1$

θ என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{2+1}{1+2(-1)}\right| = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}(3)$$

3.2.3 ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தொலைவு (Distance of a point from a line)

(i) $P(l,\ m)$ என்ற புள்ளியிருந்து $ax + by + c = 0$ –ன் செங்குத்து தூரம் $d = \left|\dfrac{al + bm + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

(ii) ஆதி $(0,\ 0)$ லிருந்து $ax + by + c = 0$ –ன் செங்குத்து தொலைவு $d = \left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

எடுத்துக்காட்டு 3.5

$x - y + 5 = 0$ என்ற கோடு ஆதியிலிருந்தும் $P(2,\ 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்தும் சம தொலைவில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோடு $x - y + 5 = 0$

$P(2,\ 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து உள்ள செங்குத்து தொலைவு

$$= \left|\frac{2-2+5}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$(0,\ 0)$ லிருந்து உள்ள தொலைவு

$$= \left|\frac{5}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

கொடுக்கப்பட்ட கோடு $(0, 0)$ மற்றும் $(2, 2)$ புள்ளிகளிலிருந்து சம தொலைவில் உள்ளது

எடுத்துக்காட்டு 3.6

இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{4}$, மேலும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு 3, எனில் மற்றொரு கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு

m_1 மற்றும் m_2 ஆகியவகைளை சாய்வுகளாக உடைய நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

இங்கு $m_1 = 3$, மற்றும் $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{3 - m_2}{1 + 3m_2}\right|$$

$$1 = \left(\frac{3 - m_2}{1 + 3m_2}\right)$$

$$1 + 3m_2 = 3 - m_2$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{1}{2}$$

மற்றோர் கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{2}$.

3.2.4 ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் (Concurrence of lines)

l_1 மற்றும் l_2 என்ற கோடுகள் சந்திக்கும் பொதுவான புள்ளி 'P' எனில், P என்பது கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி எனப்படும். கோடுகள் l_1 மற்றும் l_2 களின் சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதன் மூலம், வெட்டும் புள்ளியைக் காணலாம்.

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடுகள் ஒரு பொதுவான புள்ளியை பெற்றிருக்கும் எனில், அக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனப்படும். அந்த பொதுவான புள்ளி, கோடுகளின் ஒருங்கமைப் புள்ளி எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் புள்ளி வழிக் கோடுகளாக இருப்பதற்கான கட்டுப்பாடு

$$a_1x+b_1y+c_1 = 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2 = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3 = 0 \quad \rightarrow (3)$$

என்பன கொடுக்கப்பட்ட மூன்று கோடுகள் என்க. இக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாக இருப்பதற்கான கட்டுப்பாடு

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.7

$3x-4y-13=0, 8x-11y=33$ மற்றும் $2x-3y-7=0$ என்பன ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் எனக்காட்டுக. மேலும் அக்கோடுகளின் ஒருங்கமை புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$$3x-4y-13 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$8x-11y = 33 \quad \ldots (2)$$

$$2x-3y-7 = 0 \quad \ldots (3)$$

புள்ளி வழிக் கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -13 \\ 8 & -11 & -33 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(77-99) + 4(-56+66) - 13(-24+22)$$

$$= -66 + 40 + 26 = 0$$

$\Rightarrow$ கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் ஆகும்.

ஒருங்கமைப் புள்ளியைக் காண

சமன்பாடு $(1) \times 2 \quad \Rightarrow \quad 6x-8y = 26$

சமன்பாடு $(3) \times 3 \quad \Rightarrow \quad 6x-9y = 21$

$$y = 5$$

$y = 5$ எனும்பொழுது சமன்பாடு (2) லிருந்து $8x = 88$

$x = 11$

$\therefore$ ஒருங்கமைப் புள்ளி $(11, 5)$

எடுத்துக்காட்டு 3.8

$3x - 5y - 11 = 0$, $5x + 3y - 7 = 0$ மற்றும் $x+ky=0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனில், k-ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு

புள்ளி வழிக் கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -11 \\ 5 & 3 & -7 \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$1(35+33) - k(-21+55) = 0$$

$$\Rightarrow 34k = 68. \ \therefore k = 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

ஒரு தனியார் நிறுவனம், 2012 ஆம் ஆண்டு ஒரு எழுத்தரை ₹20,000/– ஊதியத்திற்கு, பணியில் அமர்த்துகிறது. 2017 ஆம் ஆண்டு அவரது ஊதியம் ₹25,000 ஆக உயர்த்தப்படுகிறது. எனில்,

(i) மேற்பட்ட விவரங்களை y-எழுத்தரின் ஊதியம் மற்றும் x-அவரது பணி ஆண்டாக கொண்டு x, y-ல் ஒருபடிச் சமன்பாடாக எழுதுக.

(ii) 2020 ஆம் ஆண்டு அவரது ஊதியத்தை கணக்கிடுக.

தீர்வு

இங்கு y என்பது எழுத்தரின் ஊதியம் எனவும், x-யை எழுத்தரின் பணி ஆண்டு எனவும் கொள்க.

ஆண்டு (x)	ஊதியம் (y)
$2012(x_1)$	$20{,}000(y_1)$
$2017(x_2)$	$25{,}000(y_2)$
2020	?

மேற்பட்ட விவரங்களிலிருந்து x, y- ன் ஒரு படிச்சமன்பாடானது

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-20{,}000}{25{,}000-20{,}000} = \frac{x-2012}{2017-2012}$$

$$\frac{y-20{,}000}{5000} = \frac{x-2012}{5}$$

$$y = 1000x - 2012000+20{,}000$$

$$y = 1000x - 19{,}92{,}000$$

2020 ஆம் ஆண்டு அவரது சம்பளம்

$$y = 1000(2020)-19{,}92{,}000$$

$$y = ₹28000$$

பயிற்சி 3.2

1. சாய்வுகள் $\frac{1}{2}$ மற்றும் 3 உடைய நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

2. (4, 1) என்ற புள்ளியிலிருந்து $3x-4y+12=0$ என்ற கோடு உள்ள செங்குத்து தூரத்தைக் காண்க.

3. $x+y-4=0, 3x+2=0$ மற்றும் $3x-3y+16=0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனக்காட்டு.

4. $3x+4y=13; 2x-7y=-1$ மற்றும் $ax-y-14=0$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனில் 'a' –ன் மதிப்புக் காண்க.

5. ஒரு தனியார் உற்பத்தி நிறுவனம் 80 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை, ₹2,20,000 க்கு உற்பத்தி செய்கிறது. மேலும் 125 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை ₹2,87,500 க்கு உற்பத்தி செய்கிறது என்க. செலவு–வளைவரை ஒரு நேர்கோடு எனில், மேற்பட்ட விவரங்களுக்கான செலவு–வளைவரையைக் காண்க. மேலும் 95 தொலைக்காட்சி பெட்டிகளை தயாரிப்பதற்கான செலவை கணக்கிடுக.

3.3 இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of straight lines)

3.3.1 இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு (Combined equation of the pair of straight lines)

$l_1x+m_1y+n_1=0$ மற்றும் $l_2x+m_2y+n_2=0$ என்பன இரு தனித்த நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் என்க.

அந்த நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

$$(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)=0$$

$$l_1l_2x^2+(l_1m_2+l_2m_1)xy+m_1m_2y^2 +(l_1n_2+l_2n_1)x+(m_1n_2+m_2n_1)y +n_1n_2=0$$

இது,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

என்ற இருபடி பொதுவடிவ சமன்பாட்டின் அமைப்பில் உள்ளது. (இங்கு a, b, c, f, g, h மாறிலிகள்) எனவே இதனை இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

3.3.2 ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of straight lines passing through the origin)

x, y –ன் இரண்டாம் படி சமபடித்தான சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \dots (1)$$

ஆனது ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

ஆதிவழிச் செல்லும் இரு நேர்க்கோடுகளின் தனித்த சமன்பாடுகள்

$y = m_1 x$ மற்றும் $y = m_2 x$ என்க.

அவற்றின் சேர்ப்பு சமன்பாடானது

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 m_2 x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 = 0 \quad \dots (2)$$

(1), (2) ஆகியவை ஒரே இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கின்றன.

$$\therefore \quad \frac{a}{m_1 m_2} = \frac{2h}{-(m_1 + m_2)} = \frac{b}{1}$$

$\Rightarrow \quad m_1 m_2 = \frac{a}{b}$ அதாவது சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் $= \frac{a}{b}$

$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ அதாவது சாய்வுகளின் கூடுதல் $= -\frac{2h}{b}$

3.3.3 ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between pair of straight lines passing through the origin)

ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

இதன் தனித்த கோடுகளின் சாய்வுகள் m_1, m_2 என்க.

$\therefore m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ மற்றும் $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$

இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

'θ' –ஐ ஒரு குறுங்கோணமாக எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|\right]$$

குறிப்பு

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்,

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|\right]$$

(ii) நேர்க்கோடுகள் இணையானவை எனில் $h^2 = ab$.

(iii) நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை எனில், $a + b = 0$

அதாவது x^2 –ன் கெழு + y^2 –ன் கெழு = 0

3.3.4 பொதுவான இருபடிச் சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு (The condition for general second degree equation to represent the pair of straight lines)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்ற இருபடி பொதுச் சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கானக் கட்டுப்பாடு

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

குறிப்பு

இதனை அணிக்கோவை வடிவில்

$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

$2x+y-1=0,\ x+2y-5=0$ என்ற தனித்தனி சமன்பாடுகளைக் கொண்ட இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாட்டினைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு

$$(2x+y-1)(x+2y-5)=0$$

அதாவது

$$2x^2+xy-x+4xy+2y^2-2y-10x-5y+5=0$$

$$2x^2+5xy+2y^2-11x-7y+5=0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

$2x^2+5xy+3y^2+6x+7y+4=0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$2x^2+5xy+3y^2+6x+7y+4=0$$

இதனை

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

உடன் ஒப்பிடும்போது

$$a=2,\ b=3,\ h=\frac{5}{2},\ g=3,\ f=\frac{7}{2}$$

மற்றும் $c=4$

இரட்டை நேர்க்கோட்டிற்கான கட்டுப்பாடு

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=$$

$$24+\frac{105}{2}-\frac{49}{2}-27-25=0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்

இரட்டை நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ‘θ’ என்க.

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sqrt{\frac{25}{4}-6}}{5}\right]$$

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒன்றின் சாய்வு மற்றதின் சாய்வைப்போல இரண்டு மடங்கு எனில் $8h^2=9ab$ என நிறுவுக.

தீர்வு

m_1, m_2 என்பன

$ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

$$\therefore\ m_1+m_2=-\frac{2h}{b} \text{ மற்றும் } m_1m_2=\frac{a}{b}$$

கணக்கின்படி $m_2=2m_1$

$$\therefore\ m_1+2m_1=-\frac{2h}{b} \text{ மற்றும் } m_1\cdot 2m_1=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\ m_1=-\frac{2h}{3b} \text{ மற்றும் } 2m_1^2=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow\quad 2\left(-\frac{2h}{3b}\right)^2=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{8h^2}{9b^2}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow\quad 8h^2=9ab$$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2=0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2=0$ இதனை

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

உடன் ஒப்பிடும்போது

$$a=2,\ b=3,\ h=\frac{7}{2},\ g=\frac{5}{2},\ f=\frac{5}{2},\ c=2$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(6-\frac{25}{4}\right)-\frac{7}{2}\left(7-\frac{25}{4}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{35}{4}-\frac{15}{2}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{21}{8}+\frac{25}{8} = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்

$$2x^2+7xy+3y^2 = 2x^2+6xy+xy+3y^2$$
$$= 2x(x+3y)+y(x+3y)$$
$$= (x+3y)(2x+y)$$

$2x^2+7xy+3y^2+5x+5y+2$
$= (x+3y+l)(2x+y+m)$ என்க.

x –ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த,

$$2l + m = 5 \qquad (1)$$

y –ன் கெழுக்களை சமன்படுத்த,

$$l + 3m = 5 \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2) –ஐ தீர்க்க நமக்கு கிடைப்பது $m = 1$ மற்றும் $l = 2$

எனவே, இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடு

$x+3y+2=0$ மற்றும் $2x+y+1=0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையான இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8=0$

இங்கு $a = 4, b = 9, h = -6$

$$h^2-ab = 36-36 = 0$$

எனவே இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையாகும்.

$$4x^2-12xy+9y^2 = (2x-3y)^2$$

$4x^2-12xy+9y^2+18x-27y+8 = 0$ என்பதை

$\Rightarrow \quad (2x-3y)^2+9(2x-3y)+8 = 0$ என எழுதலாம்.

$2x-3y = z$ என்க.

$$z^2+9z+8 = 0$$
$$(z+1)(z+8) = 0$$

$z+1 = 0$	$z+8 = 0$
$2x-3y+1 = 0$	$2x-3y+8 = 0$

எனவே இரட்டை இணை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி சமன்பாடுகள்

$2x-3y+1 = 0$ மற்றும் $2x-3y+8 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

$x^2+4xy+y^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2+4xy+y^2=0$

இங்கு $a = 1, b = 1$ மற்றும் $h = 2$.

இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 'θ' என்க

$$\theta = \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|\right]$$
$$= \tan^{-1}\left[\left|\frac{2\sqrt{4-1}}{2}\right|\right]$$
$$= \tan^{-1}(\sqrt{3})$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

k-ன் எம்மதிப்பிற்கு $2x^2+5xy+2y^2+15x+18y+k=0$ என்பது இரட்டை நேர்க் கோடுகளைக் குறிக்கும்?

தீர்வு

இங்கு $a = 2$, $b = 2$, $h = \frac{5}{2}$, $g = \frac{15}{2}$, $f = 9$, $c = k$.

கொடுக்கப்பட்ட கோடு இரட்டை நேர்க்கோடுகளை குறிப்பதால்,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

அதாவது, $4k + \frac{675}{2} - 162 - \frac{225}{2} - \frac{25}{4}k = 0$

$$\Rightarrow 16k + 1350 - 648 - 450 - 25k = 0$$

$$\Rightarrow 9k = 252 \quad \therefore k = 28$$

பயிற்சி 3.3

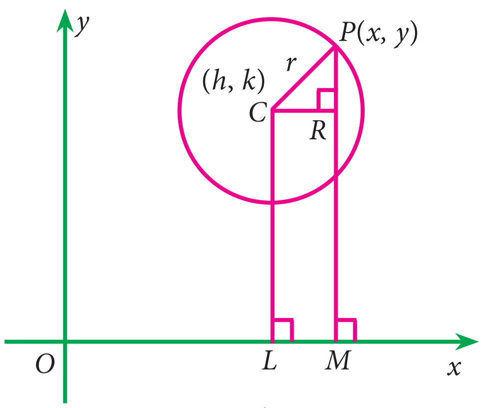
1. $ax^2 + 5xy - 6y^2 + 12x + 5y + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும் நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் a மற்றும் c -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
2. $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 14x - 5y + 2 = 0$ என்பது இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.
3. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 9y + 2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையான இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் இக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.
4. $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 10 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

3.4 வட்டங்கள் (Circles)

வரையறை 3.2

ஒரு நிலையானப் புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் மாறாத தூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை வட்டம் எனப்படும். நிலையான புள்ளியை வட்டத்தின் மையம் எனவும், மாறாத தூரத்தை அதன் ஆரம் எனவும் கூறுவர்.

3.4.1 மையம், ஆரம் கொடுக்கப்படின் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணல் (The equation of a circle when the centre and radius are given)



படம் 3.4

வட்டத்தின் மையம் $C(h, k)$ எனவும், ஆரம் 'r' எனவும் கொள்க.

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$$CP = r$$

$$CP^2 = r^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

இதுவே வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பாக மையம் ஆதி எனில் $x^2 + y^2 = r^2$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

மையம் $(3, -1)$ மற்றும் ஆரம் 4 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

இங்கு $(h, k) = (3, -1)$ மேலும் $r = 4$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.18

ஆதியை மையமாகவும், ஆரம் 3 உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

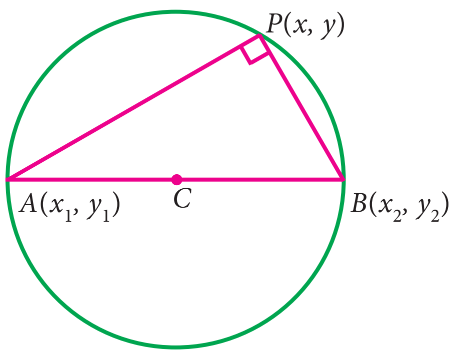
தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$

இங்கு $r = 3$

ஆகவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = 9$

3.4.2 இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல் (Equation of a circle when the end points of a diameter are given)



படம் 3.5

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்பன விட்டத்தின் இரு முனைப்புள்ளிகள் என்க

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம் $\underline{|APB} = 90°$

$\therefore$ (AP ன் சாய்வு) (BP ன் சாய்வு) $= -1$

$$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\times\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$$

$$(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

இதுவே தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

$(2, 4), (3, -2)$ என்பன ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

இங்கு $(x_1, y_1) = (2, 4)$ மற்றும்
$(x_2, y_2) = (3, -2)$

$$\therefore (x-2)(x-3)+(y-4)(y+2) = 0$$

$$x^2+y^2-5x-2y-2 = 0$$

3.4.3 வட்டத்தின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு (General equation of a circle)

வட்டத்தின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்பதாகும்,

இங்கு g, f, c என்பன மாறிலிகள்.

$$x^2+y^2+2gx+2fy = -c$$

$$x^2+2gx+g^2-g^2+y^2+2fy+f^2-f^2 = -c$$

$$(x+g)^2-g^2+(y+f)^2-f^2 = -c$$

$$(x+g)^2+(y+f)^2 = g^2+f^2-c$$

$$[x-(-g)]^2+[y-(-f)]^2 = \left[\sqrt{g^2+f^2-c}\right]^2$$

இதனை $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும்போது

வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$ என்றும், ஆரம் $\sqrt{g^2+f^2-c}$ என்றும் கிடைக்கும்.

குறிப்பு

பொது வடிவ இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ ஒரு வட்டத்தை குறிப்பதற்கு கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்

(i) $a = b$ (அதாவது) x^2 –ன் கெழு $= y^2$ –ன் கெழு.

(ii) $h = 0$ (அதாவது) xy-ன் கெழு $=0$
(xy உறுப்பு கிடையாது).

எடுத்துக்காட்டு 3.20

$x^2+y^2-8x+6y-24=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2-8x+6y-24=0$$

இங்கு $g=-4, f=3, c=-24$

மையம் $= C(-g,-f)=C(4,-3)$

ஆரம் $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$=\sqrt{16+9+24}=7$ அலகு.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

a, b களின் எம்மதிப்புகளுக்கு $(a-2)x^2+by^2+(b-2)xy+4x+4y-1=0$ எனும் சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிக்கும்? வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் எழுதுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$(a-2)x^2+by^2+(b-2)xy+4x+4y-1=0$

கட்டுப்பாட்டின்படி,

(i) xy –ன் கெழு $=0 \Rightarrow b-2=0$

$\therefore b=2$

(ii) x^2 –ன் கெழு $=y^2$ –ன் கெழு

$\Rightarrow a-2=b$

$a-2=2 \Rightarrow a=4$

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$2x^2+2y^2+4x+4y-1=0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.22

$x^2+y^2+ax+by=0$ என்ற வட்டமானது $(1, 2)$ மற்றும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது எனில் 'a' மற்றும் 'b'-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$x^2+y^2+ax+by=0$ என்ற வட்டமானது $(1, 2)$ மற்றும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதால்

$1+4+a+2b=0$ மற்றும்

$1+1+a+b=0$

$\Rightarrow \quad a+2b=-5 \quad (1)$

மற்றும் $\quad a+b=-2 \quad (2)$

(1) மற்றும் (2) –ஐ தீர்ப்பதன் மூலம் நமக்கு கிடைப்பது $a=1, b, =-3$.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

$x^2+y^2+2x-6y+1=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $ax+2y+2=0$ என்ற கோட்டின் மீது அமையுமெனில் 'a'-ன் மதிப்பு காண்.

தீர்வு

வட்ட மையம் $C(-1, 3)$

இது $ax+2y+2=0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மேல் உள்ளது.

எனவே $-a+6+2=0$

$a=8$

எடுத்துக்காட்டு 3.24

$x^2+y^2-6x+4y-12=0$ என்ற வட்டம் $(7, -5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக்காட்டு. மேலும் இப்புள்ளி வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனையைக் காண்க.

தீர்வு

$A(7, -5)$ என்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2-6x+4y-12=0$

$(7, -5)$ –ஐ பிரதியிட

$x^2+y^2-6x+4y-12=$

$7^2+(-5)^2-6(7)+4(-5)-12$

$=49+25-42-20-12=0$

$\therefore$ $(7, -5)$ ஆனது வட்டத்தின் மேல் அமைகிறது

இங்கு $g=-3$ மற்றும் $f=2$

$\therefore$ மையம் $=C(3, -2)$

விட்டத்தின் மறுமுனை $B\,(x, y)$ என்க.

$$AB\text{-ன் மையம்} = \left(\frac{x+7}{2}, \frac{y-5}{2}\right) = C(3,-2)$$

$\frac{x+7}{2} = 3$	$\frac{y-5}{2} = -2$
$x+7 = 6$	$y-5 = -4$
$x = -1$	$y = 1$

$\therefore$ விட்டத்தின் மறுமுனை $(-1, 1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

$(0,0)$, $(1,\ 2)$ மற்றும் $(2,\ 0)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

வட்டமானது $(0, 0)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$c = 0 \qquad \ldots (1)$$

வட்டமானது $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$1^2 + 2^2 + 2g(1) + 2f(2) + c = 0$$

$$2g + 4f + c = -5 \ \ldots (2)$$

வட்டமானது $(2, 0)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$$2^2 + 0 + 2g(2) + 2f(0) + c = 0$$

$$4g + c = -4 \quad \ldots (3)$$

(1) –ஐ (3) –ல் பிரதியிட

$4g = -4 \ \Rightarrow \ g = -1$

சமன்பாடுகள் (1), (2) மற்றும் (3) –ஐ தீர்க்க, நமக்குக் கிடைப்பது

$$g = -1, \quad f = -\frac{3}{4}, \ c = 0$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

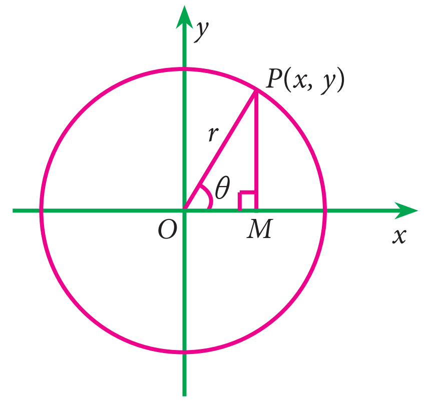
$$x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2\left(\frac{-3}{4}\right)y + 0 = 0$$

அதாவது, $\quad 2x^2 + 2y^2 - 4x - 3y = 0$

3.4.4 வட்டத்தின் துணையலகு வடிவம் (Parametric form of a circle)

ஆதியை மையமாகவும் r –ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். $P(x,y)$ வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. x-அச்சின் மிகை திசையோடு OP என்ற நேர்க்கோடு θ என்ற கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது என்க.

x -அச்சுக்கு செங்குத்தாக PM ஐ வரைக.



படம் 3.6

படத்திலிருந்து,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ என்ற சமன்பாடுகள் $x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் ஆகும். இங்கு 'θ' என்பது துணையலகு மற்றும் $0 \le \theta \le 2\pi$.

எடுத்துக்காட்டு 3.26

$x^2 + y^2 = 25$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு $r^2 = 25 \ \Rightarrow \ r = 5$

வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள்

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\Rightarrow \ x = 5\cos\theta, \ y = 5\sin\theta, \ 0 \le \theta \le 2\pi$

பயிற்சி 3.4

1. பின்வரும் வட்டங்களின் சமன்பாடு காண்க.
   (i) மையம் (3,5) மற்றும் ஆரம் 5 அலகுகள்
   (ii) மையம் (0, 0) மற்றும் ஆரம் 2 அலகுகள்

2. பின்வரும் வட்டங்களின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க
   (i) $x^2+y^2 = 16$
   (ii) $x^2+y^2-22x-4y+25=0$
   (iii) $5x^2+5y^2+4x-8y-16=0$
   (iv) $(x+2)(x-5)+(y-2)(y-1)=0$

3. 16π அலகினை சுற்றளவாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மையம் (–3, –2) எனில் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

4. (1,4) என்ற புள்ளியின் வழியாகவும் (2,3) –ஐ மையமாகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

5. (0,1),(4,3) மற்றும் (1, –1) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லக்கூடிய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

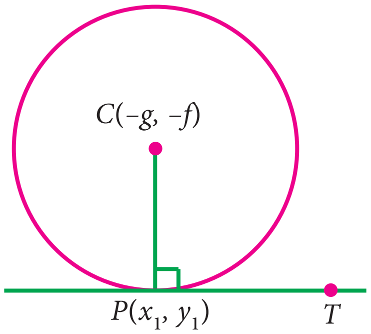
6. (1, 0), (0, 1) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகவும் $x+y = 1$ என்ற கோட்டின் மேல் மையத்தையும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. $x+y=6$ மற்றும் $x+2y = 4$ ஆகியவற்றை விட்டங்களாகக் கொண்டதும் (2, 6) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

8. (4, 7) மற்றும் (–2, 5) என்பன ஒரு விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

9. $x = 3\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ என்பன ஒரு வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் எனில், வட்டத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு காண்க.

3.4.5 தொடுகோடுகள் (Tangents)



படம் 3.7

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்தில் $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

ஆகும்.

கிளைமுடிவு:

$x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$ ஆகும்

குறிப்பு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ –ல் x^2 –ஐ xx_1 எனவும், y^2 –ஐ yy_1 எனவும் x –ஐ $\frac{x+x_1}{2}$ எனவும் மேலும் y –ஐ $\frac{y+y_1}{2}$ எனவும் பிரதியிட (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து தொடுகோட்டின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.27

(–2, 5) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2+y^2+3x-8y+17 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

(x_1,y_1) என்ற புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+3\times\frac{1}{2}(x+x_1)-8\times\frac{1}{2}(y+y_1)+17 = 0$$

இங்கு $(x_1, y_1) = (-2, 5)$

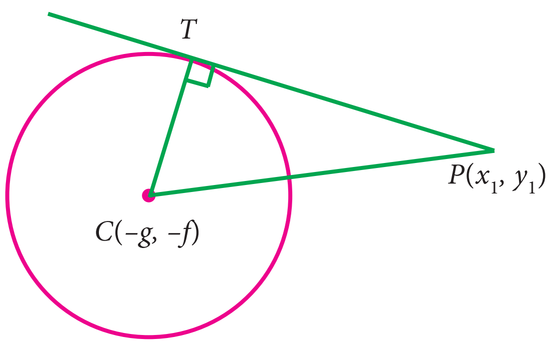
$$-2x + 5y + \frac{3}{2}(x-2) - 4(y+5) + 17 = 0$$
$$-2x + 5y + \frac{3}{2}x - 3 - 4y - 20 + 17 = 0$$
$$-4x + 10y + 3x - 6 - 8y - 40 + 34 = 0$$

தேவையான தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $x - 2y + 12 = 0$ ஆகும்.

வட்டத்திற்கான தொடுகோட்டின் நீளம் (Length of the tangent to the circle)

$P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம்

$$PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$



படம் 3.8

குறிப்பு

(i) P என்ற புள்ளி வட்டப் பரிதியின் மேல் இருந்தால் $PT^2 = 0$

(ii) P என்ற புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே இருந்தால், $PT^2 > 0$

(iii) $PT^2 < 0$ எனில் P யானது வட்டத்திற்கு உள்ளே அமையும்

எடுத்துக்காட்டு 3.28

$x^2 + y^2 + 8x + 4y + 8 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு (2, 3) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

அதாவது தொடுகோட்டின் நீளம்

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 8x_1 + 4y_1 + 8}$$
$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 8(2) + 4(3) + 8}$$

[இங்கு $(x_1, y_1) = (2, 3)$]

$$= \sqrt{49}$$

தொடுகோட்டின் நீளம் = 7 அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.29

$P(0,1), Q(5,9), R(-2,3)$ மற்றும் $S(2,2)$ என்ற புள்ளிகள் $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்டத்தின் மேல் அல்லது வட்டத்தினுள் அமையுமா என தீர்மானிக்க?

தீர்வு

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$$
$$PT^2 = x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 + 4y_1 - 8$$

$P(0, 1)$ என்ற புள்ளியில்

$$PT^2 = 0 + 1 + 0 + 4 - 8 = -3 < 0$$

$Q(5, 9)$ என்ற புள்ளியில்

$$QT^2 = 25 + 81 - 20 + 36 - 8 = 114 > 0$$

$R(-2, 3)$ என்ற புள்ளியில்

$$RT^2 = 4 + 9 + 8 + 12 - 8 = 25 > 0$$

$S(2, 2)$ என்ற புள்ளியில்

$$ST^2 = 4 + 4 - 8 + 8 - 8 = 0$$

எனவே P என்பது வட்டத்திற்கு உள்ளேயும், Q மற்றும் R என்பன வட்டத்திற்கு வெளியேயும், S வட்டத்தின் மேலேயும் அமைகிறது.

முடிவு	$y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய தேவையானக் கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1 + m^2)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.30

$3x+4y-k=0$ என்ற கோடானது $x^2+y^2-64=0$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடு எனில் k –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள்

$x^2+y^2-64=0$ மற்றும் $3x+4y-k=0$

தொடுகோடாவதற்குரிய கட்டுப்பாடு $c^2=a^2(1+m^2)$

இங்கு $a^2=64,\ m=\dfrac{-3}{4},\ c=\dfrac{k}{4}$

$$c^2=a^2(1+m^2)\Rightarrow \frac{k^2}{16}=64\left(1+\frac{9}{16}\right)$$

$$k^2=64\times 25$$

$$k=\pm 40$$

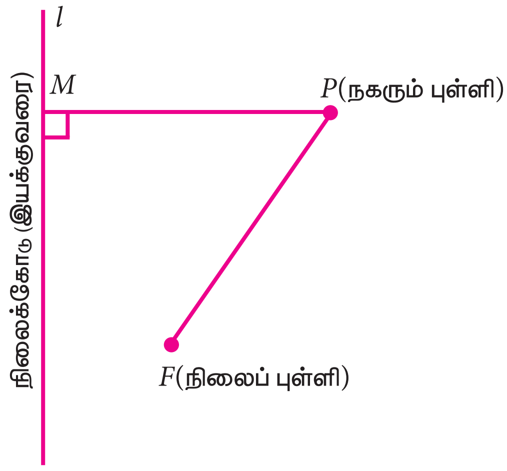
பயிற்சி 3.5

1. $(-2,\ -2)$ என்ற புள்ளியிடத்து $x^2+y^2-4x+4y-8=0$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடு காண்க.
2. $P(1,\ 0),\ Q(2,\ 1)$ மற்றும் $R(2,\ 3)$ என்ற புள்ளிகள் $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்டத்தின் மேல் அல்லது வட்டத்தினுள் அமையுமா என தீர்மானிக்க?
3. $(1,2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-2x+4y+9=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.
4. $3x+4y-P=0$ என்ற கோடு $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு எனில் P யின் மதிப்புக் காண்க.

3.5 கூம்புவெட்டுமுகவளைவரைகள் (Conics)

வரையறை 3.3

ஒரு தளத்தில், நகரும் புள்ளியானது, நிலையானக் கோட்டிலிருந்து அப்புள்ளியின் செங்குத்து தூரமும், நிலையான புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரமும் மாறாத விகிதத்தில் இருக்குமாறு நகருமாயின், அப்புள்ளியின் இயங்கு பாதை கூம்பு வெட்டு முக **வளைவரை** எனப்படும்.



படம் 3.9

படத்தில் நிலையானப் புள்ளி F என்பது குவியம் எனப்படும். நிலையான கோடு l என்பது இயக்குவரை எனப்படும். P என்பது நகரும் புள்ளி எனில், $\dfrac{FP}{PM}=e$, மாறிலி எனுமாறு இயங்கும் P–ன் இயங்குபாதை கூம்பு வெட்டுமுக வளைவரை எனப்படும். இங்கு 'e' என்பது மையத் தொலைத் தகவு எனப்படும்.

மையத் தொலைத்தகவின் மதிப்பின் அடிப்படையில் கூம்பு வெட்டு முக வளைவரையை கீழ்கண்டவாறு வகைப்படுத்தலாம்,

a) $e=1$, எனில், கூம்பு வெட்டுமுக வளைவரை பரவளையம் எனப்படும்

b) $e<1$, எனில், இவ்வளைவரை நீள்வட்டம் எனப்படும்.

c) $e>1$, எனில், இவ்வளைவரை அதிபரவளையம் எனப்படும்.

பொதுவான இருபடிச் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

என்பது,

(i) இரட்டைக் கோடுகளை குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ ஆகும்.

(ii) வட்டத்தை குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாடு $a=b$ மற்றும் $h=0$ ஆகும்.

மேற்கண்ட இரு கட்டுப்பாடுகள், நிறைவு செய்யப்படவில்லை எனில்,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில்

(i) $h^2 - ab = 0$ எனில், ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

(ii) $h^2 - ab < 0$ எனில், ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

(iii) $h^2 - ab > 0$ எனில், ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

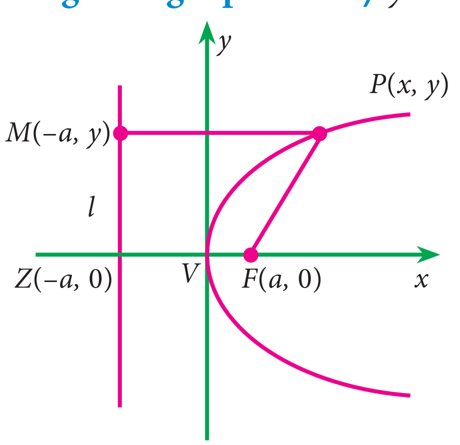
3.5.1 பரவளையம் (Parabola)

வரையறை 3.4

ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்தும், நிலையானக் கோட்டிலிருந்தும் சம தூரத்தில் இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளியின் இயங்குவரை, பரவளையம் எனப்படும்.

$y^2 = 4ax$ என்பது பரவளையத்தின் திட்ட வடிவச் சமன்பாடு ஆகும். இது வலப்பக்கம் திறப்புடையது.

3.5.2 பரவளையத்துடன் தொடர்புடைய வரையறைகள் (Definitions regarding a parabola) $y^2 = 4ax$



படம் 3.10

குவியம்	பரவளையம் வரைவதற்கு பயன்படும் நிலையானப் புள்ளி F என்பது குவியம் எனப்படும். இங்கு $F(a,0)$ என்பது குவியம் ஆகும்.

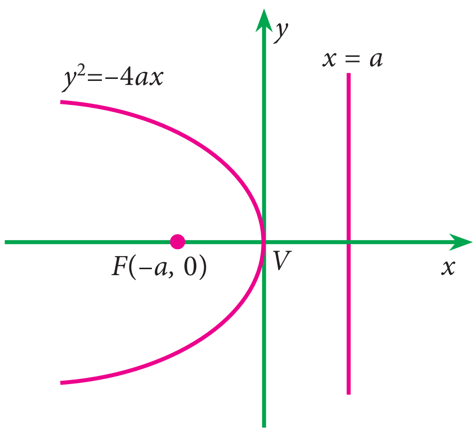
இயக்குவரை	பரவளையம் வரைவதற்கு பயன்படும் நிலையானக் கோடு l என்பது இயக்குவரை எனப்படும். இங்கு இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = -a$.
அச்சு	பரவளையத்தின் அச்சானது பரவளையத்தின் சமச்சீர் அச்சாகும். $y^2 = 4ax$ வளைவரை x -அச்சை பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது. எனவே x -அச்சு அல்லது $y = 0$ என்பது $y^2 = 4ax$ பரவளையத்தின் அச்சு ஆகும்.
முனை	பரவளையம், அதன் அச்சை வெட்டும் புள்ளி, பரவளையத்தின் முனை எனப்படும். இங்கு $V(0,0)$ என்பது பரவளையத்தின் முனை எனப்படும்.
குவியதூரம்	பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி, அதன் குவியத்தில் இருந்து உள்ள தொலைவு, குவிய தூரம் எனப்படும்.
குவிய நாண்	ஒரு பரவளையத்தின் குவியம் வழிச் செல்லும் நாண். குவிய நாண் எனப்படும்.
செவ்வகலம்	பரவளையத்தின், அச்சுக்கு செங்குத்தான குவியநாண், செவ்வகலம் எனப்படும். இங்கு செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு $x = a$. செவ்வகலத்தின் நீளம் $4a$

3.5.3 பரவளையத்தின் பிற திட்ட வடிவங்கள் (Other standard parabolas)

1. இடப்புறம் திறப்புடைய பரவளையம்:

$y^2 = -4ax$ ெa 2 0ெ

$x > 0$, எனும் பொழுது, y ஆனது கற்பனையாகிறது. எனவே $x \le 0$ க்கு மட்டும் வளைவரை அமையும்.

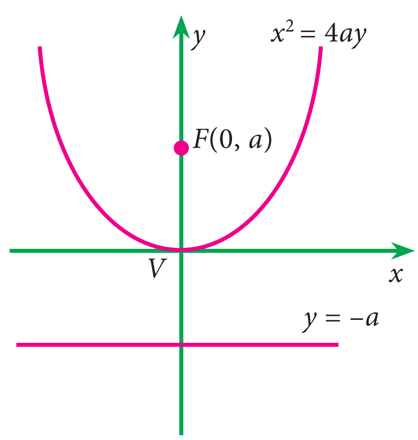


படம் 3.11

சமன்பாடுகள்	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
அச்சு	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
முனை	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$	$V(0, 0)$
குவியம்	$F(a, 0)$	$F(-a, 0)$	$F(0, a)$	$F(0, -a)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
செவ்வகலத்தின் நீளம்	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$
செவ்வகலத்தின் சமன்பாடு	$x = a$	$x = -a$	$y = a$	$y = -a$

2. மேல்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் : $x^2 = 4ay$ (a > 0)

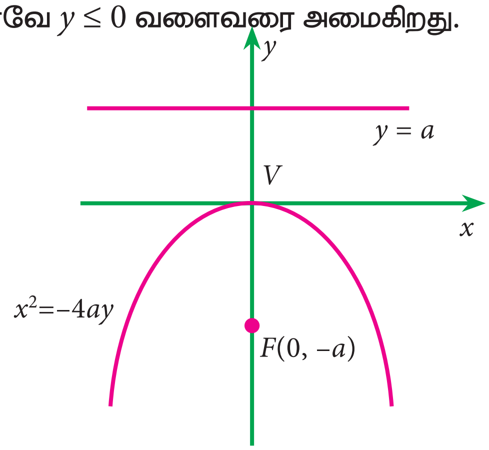
$y < 0$ எனும் பொழுது x ஆனது கற்பனையாகிறது. எனவே $y \geq 0$ க்கு மட்டும் வளைவரை அமையும்.



படம் 3.12

3. கீழ்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் : $x^2 = -4ay$ (a > 0)

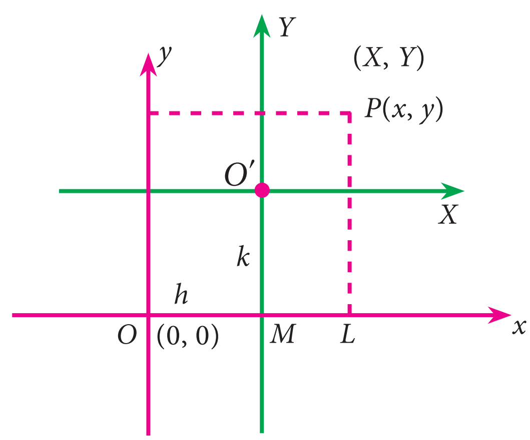
$y > 0$ எனும் பொழுது, x கற்பனை ஆகிறது. எனவே $y \leq 0$ வளைவரை அமைகிறது.



படம் 3.13

ஆதியை இடமாற்றம் செய்தல் அல்லது அச்சுக்களை இடப்பெயர்ச்சி செய்யும் முறை (The process of shifting the origin or translation of axes)

xoy அமைப்பில் x –அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு வரைக. (X-அச்சு என்க) மற்றும் y-அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு வரைக (Y- அச்சு என்க). $P(x,y)$ என்ற புள்ளியை xoy அமைப்பில் எடுத்துக்கொள்க. அதே புள்ளி $XO'Y$ அமைப்பில் $P(X, Y)$ என்க.



படம் 3.14

xoy -இன் அமைப்பில் O' -ன் அச்சுத்தூரங்கள் (h, k) என்க.

xoy அமைப்பில் P-ன் புதிய அச்சுத் தூரங்கள் :

$$OL = OM + ML$$

$$= h + X$$

அதாவது, $x = X + h$

இதே போல் $y = Y + k$

$\therefore$ $XO'Y$ அமைப்பில் P -ன் புதிய ஆய அச்சுத் தூரங்கள்.

$X = x-h$ மற்றும் $Y = y-k$

குறிப்பு

முனை (h, k) எனில், பொது வடிவம் பெற x-ஐ $x-h$ ஆகவும் மற்றும் y-ஐ $y-k$ ஆகவும் மாற்றம் செய்க.

3.5.4 பரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் – வலது புறம் திறப்புடையது (அதாவது முனை ஆதியில் அமையாதது) (General form of the standard equation of a parabola, which is open rightward (i.e., the vertex other than origin) :

XOY அமைப்பில் முனை $V(0, 0)$ இருக்குமாறு ஒரு பரவளையத்தை எடுத்துக் கொள்வோம், இதன் அச்சுத் தூரம் xoy அமைப்பில் (h, k) என்க.

இந்த பரவளையம் XOY அமைப்பில் வலதுபுறம் திறப்புடையது. எனவே இதன் சமன்பாடு $Y^2 = 4aX$ ஆகும்.

ஆதியை இடமாற்றம் செய்வதால் $X = x - h$ மற்றும் $Y = y - k$ என மாறுகிறது. xoy அமைப்பில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(y-k)^2 = 4a(x-h)$.

இதுவே வலதுபுறம் திறப்புடைய பரவளையத்தின் திட்ட சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் ஆகும். இதேபோல் மற்ற பொது வடிவங்கள்

$(y-k)^2 = -4a(x-h)$ (இடதுபக்கம் திறப்புடையது)

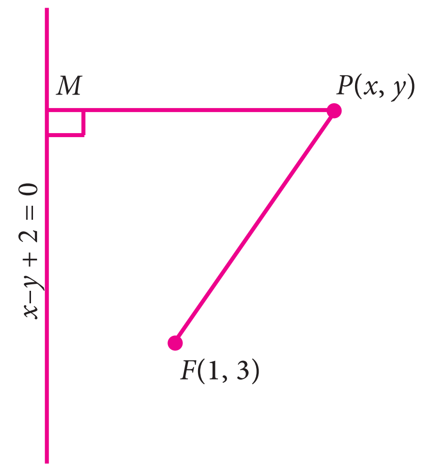
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$ (மேல்பக்கம் திறப்புடையது)

$(x-h)^2 = -4a(y-k)$ (கீழ்பக்கம் திறப்புடையது)

எடுத்துக்காட்டு 3.31

$x-y+2=0$ என்ற இயக்குவரையும் $(1, 3)$ என்ற குவியத்தையும் உடைய பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு



படம் 3.15

கணக்கின்படி குவியம் $F(1, 3)$ மற்றும்

இயக்குவரை $x-y+2=0$

$x-y+2=0$

$P(x,y)$ என்பது பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி என்க.

பரவளையத்தின் வரையறைப்படி

$$FP = PM$$

$$FP^2 = (x-1)^2+(y-3)^2$$

$$= x^2-2x+1+y^2-6y+9$$

$$= x^2+y^2-2x-6y+10$$

$$PM = \pm\frac{(x-y+2)}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \pm\frac{(x-y+2)}{\sqrt{2}}$$

$$PM^2 = \frac{(x-y+2)^2}{2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+4-2xy-4y+4x}{2}$$

$$FP^2 = PM^2$$

$$2x^2+2y^2-4x-12y+20 = x^2+y^2-2xy-4y+4x+4$$

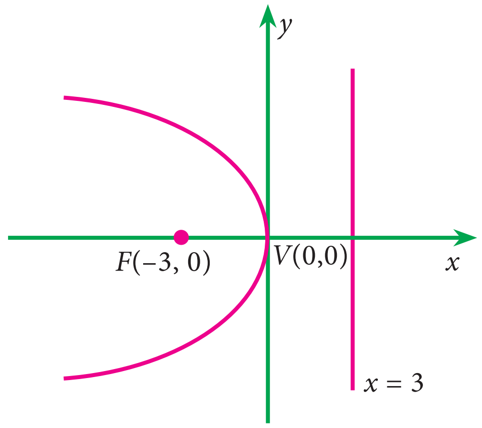
பரவளையத்தின் தேவையான சமன்பாடு

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy-8x-8y+16=0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.32

$y^2=-12x$ என்ற பரவளையத்தின், குவியம், முனை, இயக்குவரையின் சமன்பாடு, அச்சு செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு



படம் 3.16

கொடுக்கப்பட்ட பரவளையம் $y^2=-4ax$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது

இங்கு $4a=12,\quad a=3.$

பரவளையம் இடப்புறம் திறப்புடையது. எனவே குவியம்

$F(-a,o)=F(-3,0)$

முனை $V(h,k)=V(0,0)$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x=a$

அதாவது, $x=3$

பரவளையத்தின் அச்சு x-அச்சு இதன் சமன்பாடு $y=0$.

செவ்வகலத்தின் நீளம் $=4a=12$

எடுத்துக்காட்டு 3.33

$x=10p-20-p^2$ என்ற தேவைச் சார்பு ஒரு பரவளையம் எனக்காட்டு. மேலும் விலையானது பரவளையத்தின் முனையில் உச்சத்தை அடையும் எனக்காட்டு.

தீர்வு

$$x=10p-20-p^2$$
$$=-p^2-20+10p+5-5$$
$$x-5=-p^2+10p-25$$
$$=-\left(p^2-10p+25\right)$$
$$=-(p-5)^2$$

$X=x-5$ மற்றும் $P=p-5$ என்க.

$X=-P^2$ அதாவது $P^2=-X$

இது கீழ்ப்புறம் திறப்புடைய பரவளையம்.

$\therefore$ மேலும் $x=5$ எனில் விலை $p=5$ அதாவது பரவளையத்தின் முனையில் விலை உச்சமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.34

$x^2+6x-4y+21=0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க

தீர்வு

$$4y=x^2+6x+21$$
$$4y=(x^2+6x+9)+12$$
$$4y-12=(x+3)^2$$
$$(x+3)^2=4(y-3)$$
$$X=x+3,\ Y=y-3$$

$x=X-3$ மற்றும் $y=Y+3$

$$X^2=4Y$$

$X^2=4aY$ உடன் ஒப்பிட $4a=4$

$$a=1$$

	(X, Y) –ஐ பொறுத்து	(x, y) –ஐ பொறுத்து $x=X-3,\ y=Y+3$
அச்சு $y=0$	$Y=0$	$y=3$
முனை $V(0,0)$	$V(0,0)$	$V(-3,3)$
குவியம் $F(0, a)$	$F(0, 1)$	$F(-3, 4)$
இயக்குவரையின் சமன்பாடு $(y=-a)$	$Y=-1$	$y=2$
செவ்வகலத்தின் நீளம் $(4a)$	$4(1)=4$	4

எடுத்துக்காட்டு 3.35

பொருளின் அளிப்புக்கும், விலைக்கும் உள்ள தொடர்பு $x = \sqrt{5P - 15}$ என கொடுக்கப்படுகிறது. அந்த அளிப்பு வளைவரை ஒரு பரவளையம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

அளிப்பு விலை தொடர்பானது $x^2 = 5p - 15$

$= 5(p - 3)$

$\Rightarrow \quad X^2 = 4aP$ இங்கு $X = x, \; P = p - 3$

$\therefore$ அளிப்பு வளைவரை ஒரு பரவளையம் இதன் முனை $(X = 0, P = 0)$

இங்கு $V(0, 3)$ என்பது முனையாகும்.

பயிற்சி 3.6

1. $F(-1,-2)$ என்ற குவியத்தையும், $4x - 3y + 2 = 0$ என்ற இயங்குவரையையும் உடைய பரவளையத்தைக் காண்க.
2. $y^2 = kx$ என்ற பரவளையம் $(4,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது எனில் பரவளையத்தின் குவியம் மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் காண்க.
3. $y^2 - 8y - 8x + 24 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் முனை, குவியம், அச்சு, இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.
4. கீழ்காணும் பரவளையங்களின் முனை, குவியம், அச்சு, இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றை காண்க.

   (a) $y^2 = 20x$

   (b) $x^2 = 8y$

   (c) $x^2 = -16y$

5. விலை மதிப்பு மிக்க உலோகத்தை தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனத்தின் ஒருமாத உற்பத்தி x டன்களின் சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு $\frac{1}{5}x^2 - 6x + 100$ என கொடுக்கப்படுகிறது, எனில் சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு ஒரு பரவளையம் எனக் காட்டு. மேலும் பரவளையத்தின் முனையில், உற்பத்தியின் அளவு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.
6. x மாதங்களில் ஈட்டப்பட்ட இலாபம் ₹y (ஆயிரங்களில்) என்க. மேலும் $y = -x^2 + 10x - 15$ எனில், செயல்திட்டத்தை, முடிப்பதற்கான மிகச் சிறந்த காலத்தைக் காண்க.

பயிற்சி 3.7

சரியானவிடையைத்தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் m_1, m_2 எனில், $m_1 + m_2$ –ன் மதிப்பு

   (a) $\frac{2h}{b}$ (b) $-\frac{2h}{b}$

   (c) $\frac{2h}{a}$ (d) $-\frac{2h}{a}$

2. $x^2 - 7xy + 4y^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

   (a) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

   (c) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{33}}{5}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{33}}\right)$

3. $2x - 3y - 5 = 0$ மற்றும் $3x - 4y - 7 = 0$ என்ற கோடுகள் ஒரு வட்டத்தின் விட்டங்கள் எனில், அவ்வட்டத்தின் மையம்

   (a) $(-1, 1)$ (b) $(1,1)$

   (c) $(1, -1)$ (d) $(-1, -1)$

4. $3x + 2y - 1 = 0$ என்ற கோட்டின் x-வெட்டுத்துண்டு

   (a) 3 (b) 2 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

5. $7x + 5y - 8 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு

   (a) $\frac{7}{5}$ (b) $-\frac{7}{5}$ (c) $\frac{5}{7}$ (d) $-\frac{5}{7}$

03_11th_BM-STAT_Ch-3-TM.indd 75 08-12-2021 20:59:50

6. ஆய அச்சுகளிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை

(a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = -x$

(c) $y = x$ (d) $y = \frac{-1}{x}$

7. $x + 2y + 7 = 0$ என்ற கோட்டிலிருந்து, எப்பொழுதும் சமதொலைவில் இருக்குமாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் இயங்குவரை

(a) $x + 2y + 2 = 0$ (b) $x - 2y + 1 = 0$

(c) $2x - y + 2 = 0$ (d) $3x + y + 1 = 0$

8. $kx^2 + 3xy - 2y^2 = 0$ என்பது செங்குத்து இரட்டை நேர்க்கோடுகளை குறிக்குமெனில் $k =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) –2

9. $x^2 + y^2 + ax + by - 4 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $(1, -2)$ எனில் அதன் ஆரம்

(a) 3 (b) 2 (c) 4 (d) 1

10. $(4, 5)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்

(a) 4 (b) 5 (c) 16 (d) 25

11. $x^2 = 16y$ என்ற பரவளையத்தின் குவியம்

(a) (4 ,0) (b) (–4 , 0)

(c) (0, 4) (d) (0, –4)

12. $y^2 = -25x$ பரவளையத்தின் செவ்வகலத்தின் நீளம்.

(a) 25 (b) –5 (c) 5 (d) –25

13. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம்

(a) (1 ,1) (b) (–1, –1)

(c) (–1,1) (d) (1, –1)

14. ஆதிவழிச் செல்வதும், x -அச்சின் மீது மையத்தை கொண்டதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $x^2 - 2ax + y^2 = 0$

(b) $y^2 - 2ay + x^2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 = a^2$

(d) $x^2 - 2ay + y^2 = 0$

15. வட்டத்தின் மையம் $(-a, -b)$ மற்றும் ஆரம் $\sqrt{a^2 - b^2}$ எனில் வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2b^2 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2b^2 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2b^2 = 0$

16. ஆய அச்சுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

(a) $x^2 - y^2 = 0$ (b) $x^2 + y^2 = 0$

(c) $xy = c$ (d) $xy = 0$

17. $ax^2 + 4xy + 2y^2 = 0$ என்ற சமன்பாடு இணையான இரட்டைக் கோடுகளை குறிக்குமெனில் 'a' –ன் மதிப்பு

(a) 2 (b) –2 (c) 4 (d) –4

18. $x^2 + y^2 = 16$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டின், y வெட்டுத்துண்டு(கள்)

(a) 4 (b)16 (c) ±4 (d) ±16

19. ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு 8π அலகுகள் மற்றும்மையம் $(2,2)$ எனில்அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

(b) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$

(c) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$

(d) $x^2 + y^2 = 4$

20. $(3, -4)$ –ஐ மையமாக கொண்ட வட்டம் x –அச்சைத் தொடுமானால் வட்டத்தின் சமன்பாடு

(a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$

(b) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$

(c) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$

(d) $x^2 + y^2 = 16$

21. ஒரு வட்டம், x-அச்சு, y-அச்சு மற்றும் $x=6$ என்ற நேர்க்கோடு ஆகியவற்றைத் தொடுகிறது எனில், அவ்வட்டத்தின் விட்டத்தின் நீளம்

(a) 6 (b)3 (c) 12 (d) 4

22. பரவளையத்தின் மையத்தொலைத்தகவு

(a) 3 (b) 2 (c) 0 (d) 1

23. குவியம் வழிச் செல்லும் இரட்டைக் குத்தாயம் என்பது

(a) குவியநாண் (b) செவ்வகலம்
(c) இயக்குவரை (d) அச்சு

24. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் இயக்குவரைக்கும் குவியத்திற்கும் இடைப்பட்டத் தூரம்

(a) a (b) $2a$ (c) $4a$ (d) $3a$

25. $y^2 = -x$ என்ற பரவளையத்தின் இயக்குவரையின் சமன்பாடு

(a) $4x+1=0$ (b) $4x-1=0$
(c) $x-4=0$ (d) $x+4=0$

இதர கணக்குகள்

1. நகரும் புள்ளி P, $(2,3)$ மற்றும் $(1, 5)$ ஆகியவை ஒரு கோடமை புள்ளிகள் எனில் P இன் நியமப்பாதை காண்க

2. உற்பத்தி பொருட்களின் எண்ணிக்கை 500 லிருந்து 1000 ஆக உயரும்போது உற்பத்தி செலவு ₹6000 லிருந்து ₹9000 ஆக உயருகிறது. x, y க்கு இடைப்பட்ட தொடர்பு ஓர் ஒருபடிச் சார்பெனில் செலவு (y) மற்றும் தயாரிக்கப்படும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை (x)இவற்றுக்கிடைப்பட்ட தொடர்பினை காண்க.

3. $4x+3y=10$, $3x-4y=-5$ மற்றும் $5x+y=7$ என்பன ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என நிறுவுக.

4. $8px+(2-3p)y+1=0$ மற்றும் $px+8y-7=0$ என்ற கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் p யின் மதிப்பைக் காண்க

5. $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் ஒன்றின் சாய்வு மற்றொன்று போல் 3 மடங்கு எனில் $3h^2 = 4ab$ என நிறுவுக

6. $(a-1)x^2+by^2+(b-8)xy+4x+4y-1=0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனில் a, b யின் மதிப்பு காண்க

7. $(-1,-2)$, $(1, 0)$ மற்றும் $(-3, -4)$ என்ற புள்ளிகள் $3x+2y+7=0$ என்ற கோட்டிற்கு மேல், கீழ் அல்லது கோட்டின் மீது உள்ளதா என தீர்மானிக்க

8. $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ என்ற வட்டத்தின் விட்டத்தின் ஒரு முனை $(4, 1)$ எனில் மற்றொரு முனை காண்க.

9. x-அச்சை பொறுத்து சமச்சீரான பரவளையம் $(-2, -3)$ வழிச் செல்கிறது எனில் அதன் சமன்பாட்டை காண்க.

10. $(y-2)^2 = 4(x-1)$ என்ற பரவளையத்திற்கு அச்சு, முனை, குவியம் இயக்குவரையின் சமன்பாடு, செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

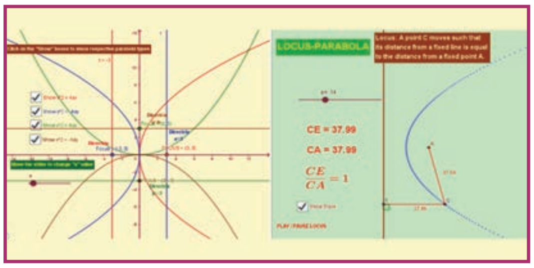
தொகுப்புரை

- $y = m_1 x + c_1$ மற்றும் $y = m_2 x + c_2$ என்ற வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta = \tan^{-1}\left[\left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|\right]$
- $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ மற்றும் $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதற்கான கட்டுப்பாடு $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
- x, y–ல் பொதுவான ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கானக் கட்டுப்பாடு $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ என்பதாகும்.
- $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஆனது ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.
- $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் எனில் சாய்வுகளின் பெருக்கல் பலன் = $\dfrac{a}{b}$ சாய்வுகளின் கூடுதல் பலன் = $\dfrac{-2h}{b}$.
- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta = \tan^{-1}\left[\left|\dfrac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|\right]$.
- மையம் (h,k), ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
- மையம் ஆதிப்புள்ளி, ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$.
- (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை முனைகளாக உடைய விட்டத்தைக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு : $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.
- $x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு சமன்பாடுகள் $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $0 \le \theta \le 2\pi$
- (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ ஆகும். (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிடத்து $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் = $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$.
- $y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு தொடுகோடாக அமைய தேவையான கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1 + m^2)$.
- பரவளையத்தின் திட்ட வடிவம் $y^2 = 4ax$

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
ஆதி	Origin
ஆரம்	Radius
இணை கோடுகள்	Parallel lines
இயக்குவரை	Directix
இரட்டை நேர்க்கோடுகள்	Pair of straight lines
ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்	Concurrent Lines
ஒருங்கமை புள்ளி	Point of concurrency
குவியத்தூரம்	Focal distance
குவியம்	Focus
கூம்பு வெட்டிகள்	Conics
சமன்பாடு	Equation
செங்குத்துக் கோடு	Perpendicular line
செவ்வகலம்	Latus rectum
துணையலகு	Parameter
தொடுகோடு	Tangent
தொடுகோட்டின் நீளம்	Length of the tangent
நாண்	Chord
நியமப்பாதை அல்லது இயங்குவரை	Locus
நேர்க்கோடு	Straight line
பரவளையம்	Parabola
முனை	Vertex
மையம்	Centre
வட்டம்	Circle
விட்டம்	Diameter
வெட்டும் புள்ளி	Point of intersection

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

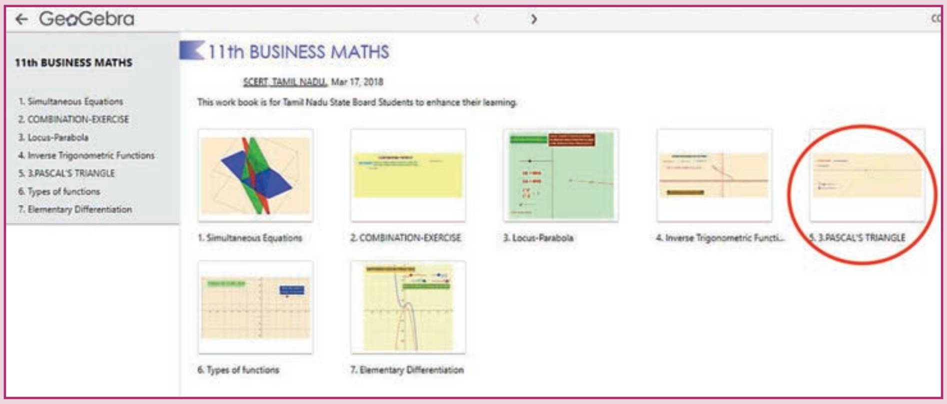
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Locus-Parabola"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

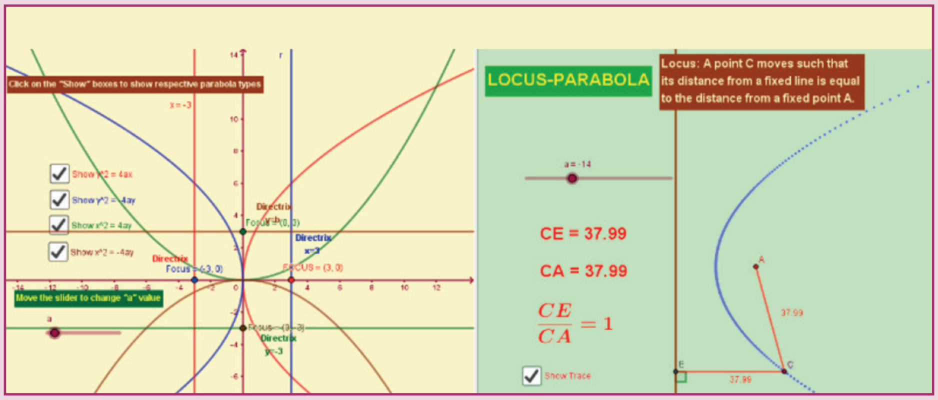
படி - 2

"Locus-Parabola" க்கான பணித்தாளில் இடப்பக்கம் உள்ள தேர்வுப்பெட்டிகளில் தேவையான பரவளையைத் தேர்வு செய்து 4 வகையான பரவளை, இயக்குவரை மற்றும் குவியம் ஆகியவற்றை ஆராய்ந்து பார்க்கவும். இடப் பக்கம் கீழே உள்ள நழுவலை நகர்த்தி "a" இன் மதிப்பை மாற்றலாம். மேலும் வலப் பக்கத்தில் பரவளையின் நியமபாதையையும் வரையறை நிபந்தனையையும் காண play/pause பொத்தானைச் சொடுக்கவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

அத்தியாயம் 4

திரிகோணமிதி

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்த பின்பு மாணாக்கர்கள் பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களைப் புரிந்து கொள்ள இயலும்

UEJNK

- திரிகோணமிதியின் கோண விகிதங்கள்
- கூட்டல் சூத்திரம், பெருக்கல் மற்றும் உட்பெருக்கல் கோணங்கள்
- கூடுதல், பெருக்கலாக உருமாற்றம் மற்றும் மறுதலை
- நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகளின் அடிப்படைக் கருத்துக்கள்
- நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகளின் பண்புகள்

பிரம்மகுப்தா

அறிமுகம்

திரிகோணமிதி என்ற வார்த்தை கிரேக்க வார்த்தைகளான டிரிகோணா (trigona) மற்றும் மெட்ரான் (metron) என்ற வார்த்தைகளிலிருந்து உருவாக்கப்பட்டது. உண்மையிலேயே திரிகோணமிதி என்பது ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் மற்றும் கோணங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்ப்பு பற்றி அறிவது ஆகும். ஏறத்தாழ இரண்டாம் நூற்றாண்டில் A.D. ஜார்ஜ் ரீடீகஸ் என்பவர் முதன்முதலில் செங்கோணங்களைப் பொறுத்து திரிகோணமிதி சார்புகளை வரையறுத்தார். பழங்கால இந்தியாவின் கணிதவியலாளர்கள் ஆரியபட்டா, பிரம்மகுப்தா, பாஸ்கரா–I மற்றும் பாஸ்கரா–II ஆகியோர், திரிகோணமிதி சம்பந்தமான சில முக்கியமான முடிவுகளை அளித்தார்கள். பாஸ்கரா–I என்பவர் 90 பாகைக் கோணங்களுக்கு அதிகமான மதிப்புகளின் sine விகிதங்களை காணுவதற்கான வாய்ப்பாடுகளைக் கண்டுபிடித்தார். முற்காலத்தில் திரிகோணமிதி கடற்படையியல், நில அளவையியல் மற்றும் வானவியல் ஆகியவற்றில் பயன்படுத்தப்பட்டது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

தற்காலத்தில் திரிகோணமிதி மின் வரைபடம், அணுக் கொள்கை விரிவாக்கம், கடலில் எழும் அலைகளின் உயரத்தை கணிப்பது, இசைக் குரலைப் பகுப்பாய்வு செய்வது போன்ற பல பகுதிகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மீள் பார்வை

1. $\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$

2. $\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

4. $\cot\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்பக்கம்}}$

5. $\sec\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

6. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்பக்கம்}}$

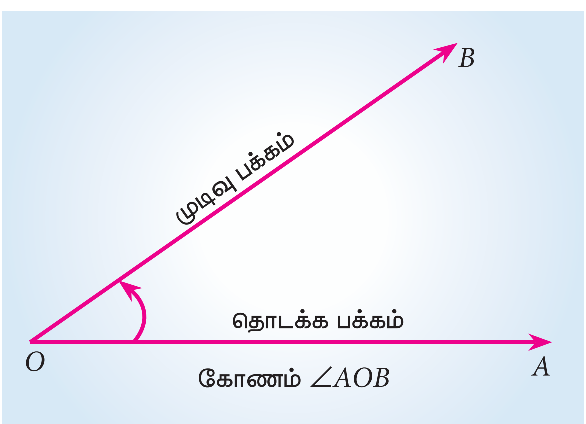
திரிகோணமிதி விகிதங்களுக்கு இடையேயான தொடர்பு

1. $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ அல்லது $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$
2. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ அல்லது $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
3. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ அல்லது $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
4. $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ அல்லது $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

திரிகோணமிதி முற்றொருமைகள்

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
3. $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

கோணம்



படம் 4.1

ஒருகதிர் அதன் தொடக்க நிலையிலிருந்து முடிவு நிலை வரை ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து சுழலும் அளவைக் கோணம் என்கிறோம். கதிர் 'OA' யை தொடக்க பக்கம் என்றும் கதிர் 'OB' யின் முடிவு நிலை கோணத்தின் முடிவு பக்கம் என்றும் அழைக்கலாம். புள்ளி 'O' –ஐ சுழலும் கதிரின் முனை என்பர்.

இச்சுழற்சி கடிகார சுழற்சிக்கு எதிர்திசையில் இருந்தால், கோணத்தை மிகைக்கோணம் என்றும் மற்றும் சுழற்சியானது கடிகார சுழற்சி திசையில் இருந்தால், கோணத்தை குறைக்கோணம் என்றும் கூறலாம்.

கோணங்களின் அளவு

கோணங்களின் அளவுகளை இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். ஒன்று பாகை அளவு மற்றொன்று ரேடியன் அளவு.

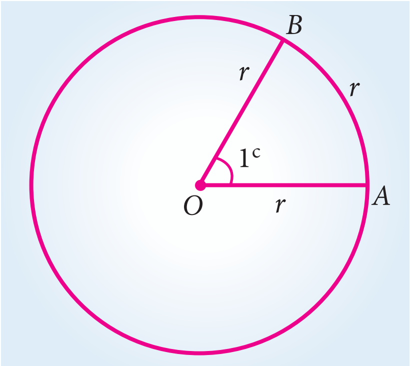
பாகை அளவு

ஒரு கோணத்தின் அளவு தொடக்க நிலையிலிருந்து முடிவு நிலை வரை ஒரு முழு சுற்றின் $\left(\dfrac{1}{360}\right)$ பங்கு சுழற்சிக்குச் சமமாக இருந்தால் அந்த கோணம் ஒரு பாகை அளவை கொண்டுள்ளது எனக் கூறலாம். மேலும் அதனை 1° பாகை (one degree) என எழுதலாம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை 90° சமபகுதியாக பிரித்தால் அவை ஒரு பாகை எனப்படும். பாகையை கலைகளாகவும் மற்றும் கலைகளை விகலைகளாகவும் பிரிக்கலாம்.

1 பாகை = 60 கலைகள் (minutes) $60'$
1 கலை = 60 விகலைகள் (seconds) $(60'')$

ரேடியன் அளவு

ஆரத்திற்கு சமமான வட்டவில், அதன் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் ஒரு ரேடியன் எனப்படும் இதை 1^c எனக் குறிக்கிறோம்.



படம் 4.2

குறிப்பு

ஒரு வட்டத்தின் வட்டவில் அதன் மையத்தில் தாங்கக் கூடிய கோணத்தின்

$$\text{ரேடியன் அளவு} = \frac{\text{வில்லின் நீளம்}}{\text{ஆரம்}}$$

$\therefore \theta = \dfrac{s}{r}$ இங்கு θ என்பது வட்ட மைய கோணம், s வட்ட வில்லின் நீளம், r வட்டத்தின் ஆரம்.

பாகைகளுக்கும் ரேடியன்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

ஒரு அலகு ஆரம் உடைய வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π என்பதனை நாம் அறிவோம். ஆரமானது ஒரு முழுச்சுற்று எடுத்துக் கொள்ளும் போது உருவாகும் கோணம் 2π ரேடியன்கள் ஆகும். வட்டம் அதன் மையப் பகுதியில் உருவாக்கும் கோணம் 360°.

2π ரேடியன் $= 360^\circ$

π ரேடியன் $= 180^\circ$

1 ரேடியன் $= \dfrac{180^\circ}{\pi}$

எடுத்துக்காட்டு 4.1

(i) 160° யை ரேடியனாக மாற்றுக

(ii) $\dfrac{4\pi}{5}$ ரேடியனை பாகையாக மாற்றுக

(iii) $\dfrac{1}{4}$ ரேடியனை பாகையாக மாற்றுக

தீர்வு

(i) $160^\circ = 160 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{8}{9}\pi$

(ii) $\dfrac{4\pi}{5}$ ரேடியன் $= \dfrac{4}{5}\pi \times \dfrac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ$

(iii) $\dfrac{1}{4}$ ரேடியன் $= \dfrac{1}{4}\dfrac{180}{\pi}$

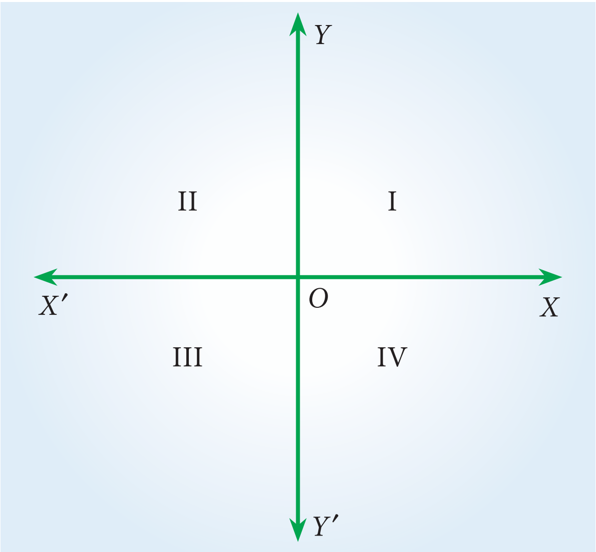
$= \dfrac{1}{4} \times 180 \times \dfrac{7}{22} = 14^\circ 19' 5''$

4.1 திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள் (Signs of trigonometric ratios)

4.1.1 கால் பகுதிகள் (Quadrants)

படத்தில் உள்ளபடி $X'OX$ மற்றும் $Y'OY$ என்பவைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு கோடுகளாகும். $X'OX$ –ஐ X-அச்சு என்றும், $Y'OY$ –ஐ Y-அச்சு என்றும் அழைக்கின்றோம்.

இந்த அச்சுக்கள், முழு தளத்தையும் 4 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. அவைகள் கால்பகுதிகள் (“Quadrants”) என்று அழைக்கப்படு கின்றன. XOY, YOX', $X'OY'$ மற்றும் $Y'OX$ என்பவைகள் முறையே முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் மற்றும் நான்காம் கால்பகுதி என அறியப்படுகின்றன.



படம் 4.3

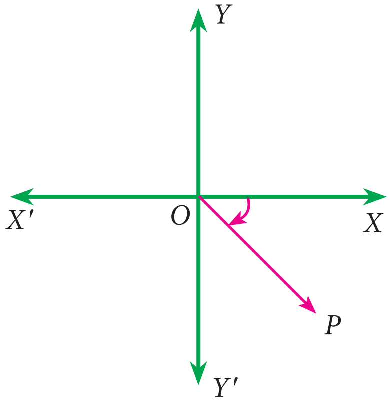
எடுத்துக்காட்டு 4.2

கீழ்க்காணும் கோணங்களின் முடிவு நிலை எந்தக் கால்பகுதியில் அமையும் எனக் காட்டுக.

(i) -70° (ii) -320° (iii) 1325°

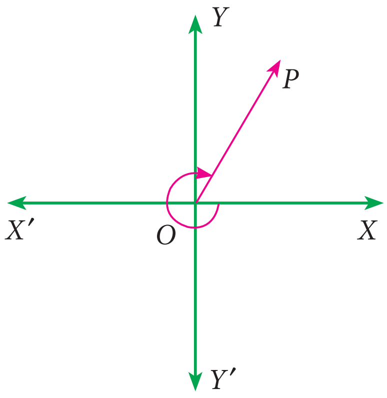
தீர்வு

(i) -70°–ன் முடிவு நிலை நான்காம் கால்பகுதியில் அமைகிறது.



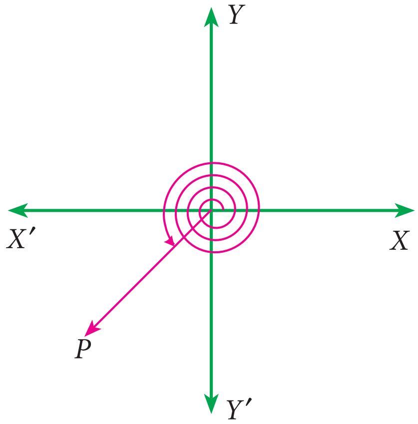
படம் 4.4

(ii) -320°–ன் முடிவு நிலை முதல் கால் பகுதியில் அமைகிறது.



படம் 4.5

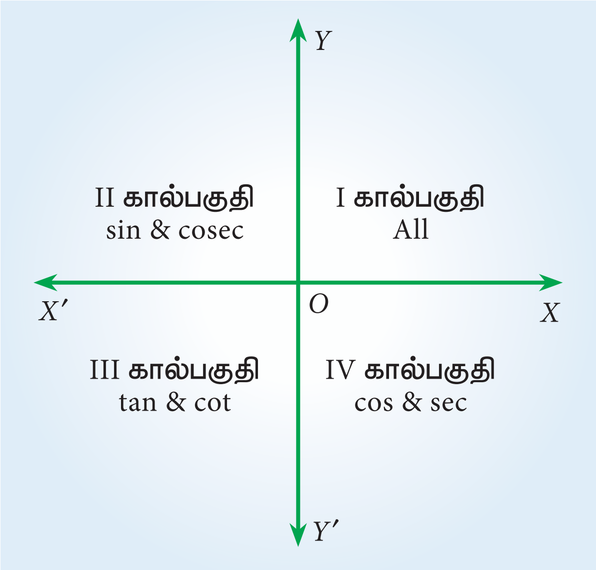
(iii) $1325^\circ = (3\times 360) + 180^\circ + 65^\circ$ –ன் முடிவு நிலை மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமைகிறது



படம் 4.6

4.1.2 0° லிருந்து 360° வரை மாறுபடுகின்ற கோணம் θ வின் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் குறியீடுகள் (Signs of the trigonometric ratios of an angle θ as it varies from 0° to 360°)

முதல் கால் பகுதியில் x, y இரண்டும் மிகை குறியாக இருக்கின்றன. ஆகவே எல்லா திரிகோணமிதி விகிதங்களும் மிகையாக இருக்கும். இரண்டாம் கால் பகுதியில் $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$ x குறை குறியாகவும், y மிகை குறியாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே $\sin\theta$ மற்றும் $\operatorname{cosec}\theta$ மிகையாக இருக்கும். மூன்றாம் கால்பகுதியில், $(180^\circ < \theta < 270^\circ)$ x மற்றும் y ஆகிய இரண்டும் குறைகுறி உடையதாக இருக்கின்றன. ஆகவே $\tan\theta$ மற்றும் $\cot\theta$ மிகையாக இருக்கும். நான்காம் கால்பகுதியில் $(270^\circ < \theta < 360^\circ)$ x மிகை குறியாகவும், y குறை குறியாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே $\cos\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ மிகையாக இருக்கும்.



All Silver Tea Cups (ASTC)

படம் 4.7

$f(x)$ என்பது ஒற்றைப்படைச் சார்பு எனில், $f(-x) = -f(x)$ ஆகும். $\sin\theta, \tan\theta, \cot\theta$ மற்றும் $\operatorname{cosec}\theta$ ஆகியவை ஒற்றைப்படைச் சார்புகளாகும். $f(x)$ இரட்டைப்படைச் சார்பு எனில், $f(-x) = f(x)$ ஆகும். $\cos\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ என்பன இரட்டைப்படைச் சார்புகளாகும்.

கோணம் / விகிதம்	$-\theta$	$90^\circ-\theta$ (அ) $\frac{\pi}{2}-\theta$	$90^\circ+\theta$ (அ) $\frac{\pi}{2}+\theta$	$180^\circ-\theta$ (அ) $\pi-\theta$	$180^\circ+\theta$ (அ) $\pi+\theta$	$270^\circ-\theta$ (அ) $\frac{3\pi}{2}-\theta$	$270^\circ+\theta$ (அ) $\frac{3\pi}{2}+\theta$	$360^\circ-\theta$ (அ) $2\pi-\theta$	$360^\circ+\theta$ (அ) $2\pi+\theta$
Sine	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
Cosine	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tangent	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$
cotangent	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$
secant	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$
cosecant	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$

அட்டவணை 4.1

4.1.3 துணைக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of allied angles)

இரு கோணங்களின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசங்கள் பூச்சியக் கோணமாகவும் அல்லது 90° பெருக்கங்களாகவும் இருக்கும்போது அவ்விருகோணங்கள் துணைக் கோணங்கள் எனக் கூறப்படும். கோணங்கள் $-\theta$, $90^\circ\pm\theta$, $180^\circ\pm\theta$, $360^\circ\pm\theta$ ஆகியன θ வின் துணைக் கோணங்கள் ஆகும். துணைக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு கோணத்தின் திரிகோணமிதி விகிதங்களையும் நாம் காண முடியும். அவை அட்டவனை 4.1 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

கீழ்க்காணும் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin 150^\circ$ (ii) $\cos(-210^\circ)$
(iii) $\text{cosec}\, 390^\circ$ (iv) $\tan(-1215^\circ)$
(v) $\sec 1485^\circ$

தீர்வு

(i) $\sin 150^\circ = \sin(1\times 90^\circ + 60^\circ)$

அதாவது 150° இரண்டாம் கால் பகுதியில் அமைவதனால்

$$\sin 150^\circ = \sin(1\times 90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

(ii) $\cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ$ என்க

அதாவது 210° மூன்றாம் கால் பகுதியில் அமைவதனால்,

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $\text{cosec}390^\circ = \text{cosec}(360^\circ + 30^\circ) = \text{cosec}30^\circ = 2$

(iv) $\tan(-1215^\circ) = -\tan(1215^\circ)$
$= -\tan(3\times360^\circ + 135^\circ)$
$= -\tan135^\circ$
$= -\tan(90^\circ + 45^\circ)$
$= -(-\cot45^\circ) = 1$

(v) $\sec1485^\circ = \sec(4 \times 360^\circ + 45^\circ) = \sec45^\circ = \sqrt{2}$

எடுத்துக்காட்டு 4.4

$\sin600^\circ \cos 390^\circ + \cos 480^\circ \sin 150^\circ = -1$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sin600^\circ = \sin(360^\circ+240^\circ) = \sin240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos480^\circ = \cos(360^\circ + 120) = \cos120^\circ = \cos(180^\circ-60^\circ) = -\cos60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin150^\circ = \sin(180^\circ-30^\circ) = \sin30^\circ = \frac{1}{2}$$

இப்போது, $\sin 600^\circ \cos390^\circ + \cos480^\circ \sin150^\circ$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-3-1}{4} = -1$$

எடுத்துக்காட்டு 4.5

$$\frac{\sin(-\theta)\tan(90^\circ-\theta)\sec(180^\circ-\theta)}{\sin(180+\theta)\cot(360-\theta)\,\text{cosec}(90^\circ-\theta)} = 1$$

என நிறுவுக.

தீர்வு

L.H.S

$$= \frac{\sin(-\theta)\tan(90^\circ-\theta)\sec(180^\circ-\theta)}{\sin(180+\theta)\cot(360-\theta)\,\text{cosec}(90^\circ-\theta)}$$

$$= \frac{(-\sin\theta)\cot\theta(-\sec\theta)}{(-\sin\theta)(-\cot\theta)\sec\theta} = 1$$

பயிற்சி 4.1

1. கீழ்கண்ட பாகை அளவுகளை ரேடியன் அளவில் மாற்றுக
   (i) 60° (ii) 150° (iii) 240° (iv) -320°

2. கீழ்கண்ட ரேடியன் அளவுகளை பாகை அளவுகளாக மாற்றுக.
   (i) $\frac{\pi}{8}$ (ii) $\frac{9\pi}{5}$ (iii) -3 (iv) $\frac{11\pi}{18}$

3. கீழ்கண்ட கோணங்கள் எந்த கால்பகுதியில் அமையும்.
   (i) 380° (ii) -140° (iii) 1195°

4. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.
   (i) $\sin 300^\circ$ (ii) $\cos(-210^\circ)$ (iii) $\sec 390^\circ$ (iv) $\tan(-855^\circ)$ (v) $\mathrm{cosec}\, 1125^\circ$

5. கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:
   (i) $\tan(-225^\circ)\cot(-405^\circ) - \tan(-765^\circ)\cot(675^\circ) = 0$
   (ii) $2\sin^2\frac{\pi}{6} + \mathrm{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$
   (iii) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right) = -1$

6. A, B, C, D என்பன வட்ட நாற்கரத்தின் கோணங்கள் எனில் $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$ என நிறுவுக.

7. கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:
   (i) $\dfrac{\sin(180^\circ-\theta)\cos(90^\circ+\theta)\tan(270-\theta)\cot(360-\theta)}{\sin(360-\theta)\cos(360+\theta)\sin(270-\theta)\,\mathrm{cosec}(-\theta)} = -1$
   (ii) $\sin\theta\cdot\cos\theta\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\mathrm{cosec}\,\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sec\theta\right\} = 1$

8. $\cos 510^\circ\cos 330^\circ + \sin 390^\circ\cos 120^\circ = -1$ என நிறுவுக.

9. நிறுவுக :
   (i) $\tan(\pi+x)\cot(x-\pi) - \cos(2\pi-x)\cos(2\pi+x) = \sin^2 x$
   (ii) $\dfrac{\sin(180^\circ+A)\cos(90^\circ-A)\tan(270^\circ-A)}{\sec(540^\circ-A)\cos(360^\circ+A)\,\mathrm{cosec}(270^\circ+A)} = -\sin A\cos^2 A$

10. $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\varphi = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ எனில், $8\tan\theta - \sqrt{5}\sec\varphi$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

4.2 கூட்டுக் கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of compound angles)

கூட்டுக் கோணங்கள் (Compound angles)

கோணங்களின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தலின் முடிவானது கூட்டுக்கோணம் எனப்படும். அதாவது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கோணங்களின் இயற்கணிதக் கூடுதல் கூட்டுக்கோணங்கள் எனப்படும்.

உதாரணமாக, A, B மற்றும் C ஆகியன மூன்று கோணங்கள் எனில், $A + B$, $A - B$, $A + B + C$, $A - B + C$ என்பன கூட்டுக் கோணங்களாகும்.

4.2.1 sine, cosine மற்றும் tangent என்பனவற்றின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தலின் சூத்திரங்கள் (Sum and difference formulae of sine, cosine and tangent)

(i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(ii) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

(iii) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(iv) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(v) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(vi) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

எடுத்துக்காட்டு 4.6

$\cos A = \dfrac{4}{5}$ மற்றும் $\cos B = \dfrac{12}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < (A, B) < 2\pi$, எனில்

(i) $\sin(A-B)$ மற்றும் (ii) $\cos(A+B)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$\dfrac{3\pi}{2} < (A, B) < 2\pi$ என்பதால் A மற்றும் B ஆகியன நான்காம் கால் பகுதியில் அமைகிறது. எனவே $\sin A$ மற்றும் $\sin B$ ஆகியவை குறைகுறி உடையதாக இருக்கும்.

$\cos A = \dfrac{4}{5}$ மற்றும் $\cos B = \dfrac{12}{13}$,

ஆகவே,

$$\sin A = -\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$= -\sqrt{1-\frac{16}{25}}$$
$$= -\sqrt{\frac{25-16}{25}}$$
$$= -\frac{3}{5}$$

$$\text{Sin B} = -\sqrt{1-\cos^2 B}$$
$$= -\sqrt{1-\frac{144}{169}}$$
$$= -\sqrt{\frac{169-144}{169}}$$
$$= -\frac{5}{13}$$

(i) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} - \left(\frac{-3}{5}\right)\times\left(\frac{-5}{13}\right)$$
$$= \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}$$

(ii) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$$= \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right)$$
$$= \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.7

பின்வரும் திரிகோணமிதி விகிதங்களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin 15^\circ$ (ii) $\cos(-105^\circ)$

(iii) $\tan 75^\circ$ (iv) $-\sec 165^\circ$

தீர்வு

(i) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

(ii) $\cos(-105^\circ) = \cos 105^\circ$

$$= \cos(60^\circ + 45^\circ)$$
$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(iii) $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$
$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$$

(iv) $\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ)$

$$= -\cos 15^\circ$$
$$= -\cos(60^\circ - 45^\circ)$$
$$= -(\cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ)$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore -\sec 165^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.8

$\tan A = m \tan B$ எனில்,

$\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \dfrac{m+1}{m-1}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\tan A = m \tan B$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\frac{\sin A}{\cos A} = m\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B} = m$$

கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சம விதியைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது

$$\frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\sin A\cos B - \cos A\sin B} = \frac{m+1}{m-1}$$ ஆகும்.

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{m+1}{m-1},$$

என நிறுவப்பட்டது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சம விதி:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ எனில், $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

4.2.2 மடங்கு கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of multiple angles)

$\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$, $\sin 3A$ etc. ஆகியன மடங்கு கோணங்களின் விகிதங்கள் ஆகும்.

அவற்றின் முற்றொருமைகள்

(i) $\sin 2A = \sin(A+A)$
$= \sin A\cos A + \cos A\sin A$
$= 2\sin A\cos A.$

(ii) $\cos 2A = \cos(A+A)$
$= \cos A\cos A - \sin A\sin A$
$= \cos^2 A - \sin^2 A$

(iii) $\sin 3A = \sin(2A+A)$
$= \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$
$= (2\sin A\cos A)\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A$
$= 2\sin A\cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A$
$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$
$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

இவ்வாறாக நாம் கீழ்க்கண்ட மடங்கு கோணங்களின் சூத்திரங்களை பெற்றிருக்கின்றோம்

1. (i) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

(ii) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

2. (i) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

(ii) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

(iii) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

(iv) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

3. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

4. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

5. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

6. $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

குறிப்பு

(i) $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$ (அல்லது)

$\cos A = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2A}{2}}$

(ii) $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A)$ (அல்லது)

$\sin A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2A}{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 4.9

$\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

எடுத்துக்காட்டு 4.10

$\tan 60^{\circ}$ மதிப்பினை இரட்டை கோணங்களின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$A = 30^{\circ}$ என பிரதியிட கிடைக்கப் பெறுவது,

$$\tan 60^{\circ} = \frac{2\tan 30^{\circ}}{1-\tan^2 30^{\circ}}$$

$$= \frac{2\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.11

$\tan A = \frac{1}{7}$ மற்றும் $\tan B = \frac{1}{3}$ எனில், $\cos 2A = \sin 4B$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}}$$

$$= \frac{48}{49} \times \frac{49}{50} = \frac{24}{25} \qquad \ldots (1)$$

இப்போது, $\sin 4B = 2\sin 2B \cos 2B$

$$= 2\frac{2\tan B}{1+\tan^2 B} \times \frac{1-\tan^2 B}{1+\tan^2 B}$$

$$= \frac{4\times\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}} \times \frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{24}{25} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$\cos 2A = \sin 4B$ என கிடைக்கப்பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.12

$\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$ எனில், $\tan 2A = \tan B$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{1-\cos B}{\sin B} = \frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \tan\frac{B}{2} \qquad \ldots (1)$$

$\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \tan A = \tan\frac{B}{2} \qquad (1) \text{ –ன் படி}$$

$$\Rightarrow A = \frac{B}{2}$$

$$2A = B$$

$$\therefore \tan 2A = \tan B$$

எடுத்துக்காட்டு 4.13

$\tan\alpha = \frac{1}{3}$ மற்றும் $\tan\beta = \frac{1}{7}$ எனில், $(2\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\tan(2\alpha+\beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\beta}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan(2\alpha+\beta) = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}$$

$$= 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$$

பயிற்சி 4.2

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:
   (i) $\operatorname{cosec} 15^{\circ}$ (ii) $\sin(-105^{\circ})$ (iii) $\cot 75^{\circ}$
2. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:
   (i) $\sin 76^{\circ}\cos 16^{\circ} + \cos 76^{\circ}\sin 16^{\circ}$
   (ii) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$
   (iii) $\cos 70^{\circ}\cos 10^{\circ} - \sin 70^{\circ}\sin 10^{\circ}$
   (iv) $\cos^2 15^{\circ} - \sin^2 15^{\circ}$
3. $\sin A = \frac{3}{5}$, $0 < A < \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $\cos B = \frac{-12}{13}$, $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ எனில், கீழ்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:
   (i) $\cos(A+B)$ (ii) $\sin(A-B)$
   (iii) $\tan(A-B)$

4. $\cos A = \frac{13}{14}$, $\cos B = \frac{1}{7}$; A மற்றும் B குறுங்கோணங்கள் எனில், $A-B = \frac{\pi}{3}$ என நிறுவுக.

5. $2\tan 80^\circ = \tan 85^\circ - \tan 5^\circ$ என நிறுவுக.

6. $\cot\alpha = \frac{1}{2}$, $\sec\beta = \frac{-5}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ மற்றும் $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ எனில்,$\tan(\alpha+\beta)$–ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் (α + β) என்பது எந்த கால்பகுதியில் அமையும் ?

7. $A+B = 45^\circ$ எனில், $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ –ன் மதிப்பைக் காண்க

8. (i) $\sin(A+60^\circ)+\sin(A-60^\circ) = \sin A$

   (ii) $\tan 4A \tan 3A \tan A + \tan 3A + \tan A - \tan 4A = 0$ என நிறுவுக.

9. (i) $\tan\theta = 3$ எனில், $\tan 3\theta$ –ன் மதிப்பை காண்க.

   (ii) $\sin A = \frac{12}{13}$ எனில், $\sin 3A$ –ன் மதிப்பை காண்க.

10. $\sin A = \frac{3}{5}$ எனில், $\cos 3A$ மற்றும் $\tan 3A$ –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. $\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}+\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} = 0$ என நிறுவுக.

12. $\tan A - \tan B = x$ மற்றும் $\cot B - \cot A = y$ எனில் $\cot(A-B) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ என நிறுவுக.

13. $\sin\alpha + \sin\beta = a$ மற்றும் $\cos\alpha+\cos\beta = b$ எனில், $\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$ என நிறுவுக.

14. $\tan\frac{\pi}{8}$ –ன் மதிப்புக் காண்க.

15. $\tan\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $0 < \beta < \frac{\pi}{2})$ எனில், $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$, என நிறுவுக.

4.3 உருமாற்று சூத்திரங்கள் (Transformation formulae)

இரண்டு வகையான உருமாற்று சூத்திரங்கள் கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

4.3.1 பெருக்கலை கூட்டல் அல்லது கழித்தல் வடிவமாக மாற்றுதல் (Transformation of the products into sum or difference)

$$\sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin(A+B) \quad (1)$$

$$\sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin(A-B) \quad (2)$$

$$\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B) \quad (3)$$

$$\cos A\cos B + \sin A\sin B = \cos(A-B) \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) –ஐ கூட்ட கிடைக்கப்பெறுவது,

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$$

(1) லிருந்து (2) –ஐ கழிக்க கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$$

(3) மற்றும் (4) ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்ட கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$$

(4) லிருந்து (3) –ஐ கழிக்க கிடைக்கப்பெறுவது

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$$

இவ்வாறு நாம் கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களைப் பெறுகிறோம்;

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$$

மேலும்

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B)$$

4.3.2 திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் கூட்டல் அல்லது கழித்தலை பெருக்கலாக மாற்றுதல் (Transformation of sum or difference into product)

$$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.14

கீழ்கண்டவற்றைக் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் வடிவில் எழுதுக

(i) $2\sin 2\theta\cos\theta$ (ii) $2\cos 3\theta\cos\theta$

(iii) $2\sin 4\theta\sin 2\theta$ (iv) $\cos 7\theta\ \cos 5\theta$

(v) $\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{5A}{2}$ (vi) $\cos 9\theta\sin 6\theta$

(vii) $2\cos 13A\sin 15A$

தீர்வு

(i) $2\sin 2\theta\cos\theta$

$$= \sin(2\theta+\theta) + \sin(2\theta-\theta)$$
$$= \sin 3\theta + \sin\theta$$

(ii) $2\cos 3\theta\cos\theta$

$$= \cos(3\theta+\theta)+\cos(3\theta-\theta)$$
$$= \cos 4\theta + \cos 2\theta$$

(iii) $2\sin 4\theta\sin 2\theta$

$$= \cos(4\theta-2\theta)-\cos(4\theta+2\theta)$$
$$= \cos 2\theta - \cos 6\theta$$

(iv) $\cos 7\theta\ \cos 5\theta$

$$= \frac{1}{2}[\cos(7\theta+5\theta)+\cos(7\theta-5\theta)]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos 12\theta + \cos 2\theta]$$

(v) $\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{5A}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3A}{2}+\frac{5A}{2}\right)+\cos\left(\frac{3A}{2}-\frac{5A}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{8A}{2}+\cos\left(\frac{-2A}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos 4A + \cos(-A)]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos 4A + \cos A]$$

(vi) $\cos 9\theta\sin 6\theta$

$$= \frac{1}{2}[\sin(9\theta+6\theta)-\sin(9\theta-6\theta)]$$
$$= \frac{1}{2}[\sin(15\theta)-\sin 3\theta]$$

(vii) $2\cos 13A\sin 15A$

$$= \sin(13A+15A)-\sin(13A-15A)$$
$$= \sin 28A + \sin 2A$$

எடுத்துக்காட்டு 4.15

$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{LHS} = \sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$$
$$= \sin 20^\circ\sin(60^\circ-20^\circ)\sin(60^\circ+20^\circ)$$
$$= \sin 20^\circ[\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ]$$
$$= \sin 20^\circ\left[\frac{3}{4}-\sin^2 20^\circ\right]$$
$$= \sin 20^\circ\left[\frac{3-4\sin^2 20^\circ}{4}\right]$$
$$= \frac{3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ}{4} = \frac{\sin 3(20^\circ)}{4}$$
$$= \frac{\sin 60^\circ}{4} = \frac{\sqrt{3}/2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.16

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ = \frac{3}{16}$$

என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{L.H.S} = \sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$$
$$= \sin 60^\circ\sin 20^\circ\sin(60^\circ-20^\circ)\sin(60^\circ+20^\circ)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\left(\frac{3}{4} - \sin^2 20^\circ\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)(3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\sin 60^\circ$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16} = \text{R.H.S}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.17

$\cos^2 A + \cos^2(A + 120^\circ) + \cos^2(A - 120^\circ) = \frac{3}{2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\cos^2 A + \cos^2(A + 120^\circ) + \cos^2(A - 120^\circ)$$
$$= \cos^2 A + \cos^2(A + 120^\circ) + (1 - \sin^2(A - 120^\circ))$$

[அதாவது $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$]

$$= \cos^2 A + 1 + \cos^2(A + 120^\circ) - \sin^2(A - 120^\circ)$$
$$= \cos^2 A + 1 + \cos[(A + 120^\circ) + (A - 120^\circ)]\cos[(A + 120^\circ) - (A - 120^\circ)]$$

[அதாவது $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A + B)\cos(A - B)$]

$$= \cos^2 A + 1 + \cos 2A \cos 240^\circ$$
$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)\cos(180^\circ + 60^\circ)$$

[அதாவது $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$]

$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)(-\cos 60^\circ)$$
$$= \cos^2 A + 1 + (2\cos^2 A - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \cos^2 A + 1 - \cos^2 A + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.18

கீழ்க்கண்டவற்றைத் திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் பெருக்கல் வடிவில் மாற்றி எழுதுக.

(i) $\sin 9A + \sin 7A$ (ii) $\sin 7\theta - \sin 4\theta$
(iii) $\cos 8A + \cos 12A$ (iv) $\cos 4\alpha - \cos 8\alpha$
(v) $\cos 20^\circ - \cos 30^\circ$ (vi) $\cos 75^\circ + \cos 45^\circ$
(vii) $\cos 55^\circ + \sin 55^\circ$

தீர்வு

(i) $\sin 9A + \sin 7A$

$$= 2\sin\left(\frac{9A + 7A}{2}\right)\cos\left(\frac{9A - 7A}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{16A}{2}\right)\cos\left(\frac{2A}{2}\right)$$
$$= 2\sin 8A\cos A$$

(ii) $\sin 7\theta - \sin 4\theta$

$$= 2\cos\left(\frac{7\theta + 4\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{7\theta - 4\theta}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{11\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

(iii) $\cos 8A + \cos 12A$

$$= 2\cos\left(\frac{8A + 12A}{2}\right)\cos\left(\frac{8A - 12A}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{20A}{2}\right)\cos\left(\frac{-4A}{2}\right)$$
$$= 2\cos 10A\cos(-2A)$$
$$= 2\cos 10A\cos 2A$$

(iv) $\cos 4\alpha - \cos 8\alpha$

$$= -2\sin\left(\frac{4\alpha + 8\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{4\alpha - 8\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{12\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{4\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\sin 6\alpha\sin 2\alpha$$

(v) $\cos 20^\circ - \cos 30^\circ$

$$= -2\sin\left(\frac{20^\circ + 30^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{20^\circ - 30^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{50^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{10^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\sin 25^\circ\sin 5^\circ$$

(vi) $\cos 75^\circ + \cos 45^\circ$

$$= 2\cos\left(\frac{75^\circ + 45^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 45^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$
$$= 2\cos 60^\circ\cos 15^\circ$$

(vii) $\cos 55^\circ + \sin 55^\circ$

$$= \cos 55^\circ + \cos(90^\circ - 55^\circ)$$

$$= \cos 55^\circ + \cos 35^\circ$$

$$= 2\cos\left(\frac{55^\circ + 35^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{55^\circ - 35^\circ}{2}\right)$$

$$= 2\cos 45^\circ \cos 10^\circ = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot \cos 10^\circ$$

$$= \sqrt{2}\cos 10^\circ$$

எடுத்துக்காட்டு 4.19

கோணங்கள் A, B மற்றும் C என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் உள்ளன எனில், $\cot B = \dfrac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{A-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\sin\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \cot\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$= \cot B$ [A,B,C என்பன கூட்டுத்தொடர் வரிசை என்பதால் $B = \dfrac{A+C}{2}$]

எடுத்துக்காட்டு 4.20

$\dfrac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{\sin 5x + \sin x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\,(\cos 2x - 1)}{-2\sin 3x\sin 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x$$

எடுத்துக்காட்டு 4.21

$\sin 105^o + \cos 105^o$ –ன் மதிப்பைக் காண்க

தீர்வு

$\sin 105^o + \cos 105^o$

$$= \sin(90^o + 15^o) + \cos 105^o$$

$$= \cos 15^o + \cos 105^o$$

$$= \cos 105^o + \cos 15^o$$

$$= 2\cos\left(\frac{105^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{105^\circ - 15^\circ}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right)$$

$$= 2\cos 60^o\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.22

$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\cos\alpha + \cos\beta$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \ldots.(1)$$

$\sin\alpha + \sin\beta$

$$= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \ldots.(2)$$

$(1)^2 + (2)^2$

$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

பயிற்சி 4.3

1. பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் sine அல்லது cosine ஆகியவற்றின் கூடுதல் அல்லது கழித்தல் வடிவில் எழுதுக:

   (i) $\sin\frac{A}{8}\sin\frac{3A}{8}$

   (ii) $\cos(60^\circ + A)\sin(120^\circ + A)$

   (iii) $\cos\frac{7A}{3}\sin\frac{5A}{3}$

   (iv) $\cos 7\theta \sin 3\theta$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் sine மற்றும் cosine ஆகியவற்றின் பெருக்கல் வடிவில் எழுதுக.

   (i) $\sin A + \sin 2A$

   (ii) $\cos 2A + \cos 4A$

   (iii) $\sin 6\theta - \sin 2\theta$

   (iv) $\cos 2\theta - \cos\theta$

3. (i) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

   (ii) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$

   என நிறுவுக.

4. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

   (i) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

   (ii) $\sin A \sin(60^\circ + A)\sin(60^\circ - A) = \frac{1}{4}\sin 3A$

5. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

   (i) $\sin(A-B)\sin C + \sin(B-C)\sin A + \sin(C-A)\sin B = 0$

   (ii) $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

6. (i) $\frac{\cos 2A - \cos 3A}{\sin 2A + \sin 3A} = \tan\frac{A}{2}$ மற்றும்

   (ii) $\frac{\cos 7A + \cos 5A}{\sin 7A - \sin 5A} = \cot A$ என நிறுவுக.

7. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$ என நிறுவுக.

8. பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

   (i) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

   (ii) $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ$

9. $\cos A + \cos B = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\sin A + \sin B = \frac{1}{4}$ எனில், $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

10. $\sin(y+z-x)$, $\sin(z+x-y)$, $\sin(x+y-z)$, என்பன கூட்டுத்தொடரில் (A.P.) உள்ளன எனில், $\tan x$, $\tan y$ மற்றும் $\tan z$ என்பன கூட்டுத்தொடரில் உள்ளது என நிறுவுக.

11. $\operatorname{cosec}A + \sec A = \operatorname{cosec}B + \sec B$ எனில், $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan A \tan B$ என நிறுவுக.

4.4 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் (Inverse Trigonometric Functions)

4.4.1 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் (Inverse Trigonometric Functions)

$\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x, \ldots$ போன்ற அளவைகள் நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

$\sin\theta = x$, எனவே $\theta = \sin^{-1}x$. நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் சார்பகம் (domain) மற்றும் வீச்சகம் (range) ஆகியவற்றின் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

சார்பு	சார்பகம் (x)	வீச்சகம் (y)
$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}x$	$R = (-\infty, \infty)$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{cosec}^{-1}x$	$R-(-1, 1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \neq 0$
$\sec^{-1}x$	$R-(-1, 1)$	$[0, \pi], y \neq \frac{\pi}{2}$
$\cot^{-1}x$	R	$(0, \pi)$

அட்டவணை 4.2

4.4.2 நேர்மாறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளின் பண்புகள் (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

பண்பு (1)

(i) $\sin^{-1}(\sin x) = x$

(ii) $\cos^{-1}(\cos x) = x$

(iii) $\tan^{-1}(\tan x) = x$

(iv) $\cot^{-1}(\cot x) = x$

(v) $\sec^{-1}(\sec x) = x$

(vi) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\, x) = x$

பண்பு (2)

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{cosec}^{-1}(x)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1}(x)$

(iv) $\text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1}(x)$

(v) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^{-1}(x)$

(vi) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}(x)$

பண்பு (3)

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$

(ii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

(iii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

(iv) $\cot^{-1}(-x) = -\cot^{-1}(x)$

(v) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}(x)$

(vi) $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1}(x)$

பண்பு (4)

(i) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\sec^{-1}(x) + \text{cosec}^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

பண்பு (5)

$xy < 1$ க்கு

(i) $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(ii) $\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

பண்பு (6)

$$\sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(y) = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.23

கீழ்க்காண்பவைகளின் முதன்மை மதிப்பு காண்க.

(i) $\sin^{-1}(1/2)$ (ii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

தீர்வு

(i) $\sin^{-1}(1/2) = y$ என்க

இங்கு $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin y = (1/2) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$

$\sin^{-1}(1/2)$ –ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{6}$

(ii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = y$ என்க

இங்கு $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan y = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow y = -\frac{\pi}{3}$

$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ –ன் முதன்மை மதிப்பு $-\frac{\pi}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 4.24

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right)$ (ii) $\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right)$

தீர்வு

(i) $\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right) = \theta$ என்க ... (1)

$\sin\theta = \frac{5}{13}$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$= \sqrt{1-\frac{25}{169}}$$
$$= \frac{12}{13} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\therefore \cos\left(\sin^{-1}\frac{5}{13}\right) = \cos\theta = \frac{12}{13}$$

(ii) $\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \theta$ என்க

$$\cos\theta = \frac{8}{17}$$
$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{1-\frac{64}{289}}$$
$$= \frac{15}{17} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.25

நிறுவுக:

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

தீர்வு

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{13}\right)}\right]$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{20}{90}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \theta$ என்க.

எனவே, $\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}$

$$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\therefore \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

இப்பொழுது $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.26

மதிப்பிடுக : $\tan\left[\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$

தீர்வு

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \theta$ என்க

எனவே $\tan\theta = \frac{1}{8}$

$$\therefore \tan\left[\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$
$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{7}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.27

தீர்க்க : $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$

தீர்வு:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$
$$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right)$$

$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right) = \frac{\pi}{4}$$
$$\frac{2x^2-4}{-3} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$
$$2x^2-4 = -3$$
$$\Rightarrow 2x^2-1 = 0$$
$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.28

சுருக்குக: $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

தீர்வு

$$\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(y)$$
$$= \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right]$$
$$\therefore \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= \sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}}\right]$$
$$= \sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{9}}\right]$$
$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.29

தீர்க்க:

$$\tan^{-1}(x+2)+\tan^{-1}(2-x) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

தீர்வு

$$\tan^{-1}\left[\frac{(x+2)+(2-x)}{1-(x+2)(2-x)}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{4}{1-(4-x^2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 6 = 12$$
$$\Rightarrow x^2 = 9$$
$$\therefore x = \pm 3$$

எடுத்துக்காட்டு 4.30

$\tan(x+y) = 42$ மற்றும் $x = \tan^{-1}(2)$ எனில், y –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\tan(x+y) = 42$$
$$x + y = \tan^{-1}(42)$$
$$\tan^{-1}(2)+y = \tan^{-1}(42)$$
$$y = \tan^{-1}(42) - \tan^{-1}(2)$$
$$= \tan^{-1}\left[\frac{42-2}{1+(42\times 2)}\right]$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{40}{85}\right)$$
$$y = \tan^{-1}\left[\frac{8}{17}\right]$$

பயிற்சி 4.4

1. பின்வருவனவற்றின் முதன்மை மதிப்புகளைக் காண்க.
   (i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\tan^{-1}(-1)$
   (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$ (iv) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$
2. நிறுவுக:
   (i) $2\tan^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
   (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$
3. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ என நிறுவுக.
4. தீர்க்க: $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$
5. தீர்க்க:
   $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{7}\right)$
6. மதிப்பிடுக : (i) $\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$
   (ii) $\sin\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$
7. $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$ -ன்மதிப்பு காண்க.
8. $\tan^{-1}\left(\frac{m}{n}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{m-n}{m+n}\right) = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.
9. $\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)-\sin^{-1}\left(-\frac{8}{17}\right) = \cos^{-1}\frac{84}{85}$ என நிறுவுக.
10. $\tan^{-1}\left[\frac{\cos x}{1-\sin x}\right], -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ என்பதனை எளிய வடிவில் விவரிக்கவும்.

பயிற்சி 4.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $\frac{\pi}{8}$ –ன் கோண மதிப்பு
   (a) $20^\circ 60'$
   (b) $22^\circ 30'$
   (c) $22^\circ 60'$
   (d) $20^\circ 30'$

HYWXT

2. $37^\circ 30'$ –ன் ரேடியன் அளவு
   (a) $\frac{5\pi}{24}$ (b) $\frac{3\pi}{24}$
   (c) $\frac{7\pi}{24}$ (d) $\frac{9\pi}{24}$

3. $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ மற்றும் θ முதல் கால்பகுதியில் அமைகிறது எனில், $\cos\theta$ –ன் மதிப்பு
   (a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{6}}$
   (c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ (d) $\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

4. sin 15°-ன் மதிப்பு
   (a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

5. $\sin(-420^\circ)$ -ன் மதிப்பு
   (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-1}{2}$

6. $\cos(-480^\circ)$ -ன் மதிப்பு
   (a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-1}{2}$

7. $\sin 28^\circ \cos 17^\circ + \cos 28^\circ \sin 17^\circ$ -ன் மதிப்பு
   (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 1 (c) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (d) 0

8. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ -ன் மதிப்பு
   (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

9. $\sec A \sin(270^\circ + A)$ –ன் மதிப்பு
   (a) –1 (b) $\cos^2 A$
   (c) $\sec^2 A$ (d) 1

10. $\sin A + \cos A = 1$ எனில், $\sin 2A =$
   (a) 1 (b) 2
   (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

11. $\cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ$ -ன் மதிப்பு
   (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$
   (c) 0 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. $1-2\sin^2 45^\circ$ –ன் மதிப்பு
   (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$
   (c) $\frac{1}{4}$ (d) 0

13. $4\cos^3 40^\circ - 3\cos 40^\circ$ –ன் மதிப்பு
   (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$
   (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

14. $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$ –ன் மதிப்பு
   (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

15. $\sin A = \frac{1}{2}$ எனில், $4\cos^3 A - 3\cos A =$
   (a) 1 (b) 0
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

16. $\frac{3\tan 10^\circ - \tan^3 10^\circ}{1-3\tan^2 10^\circ}$ –ன் மதிப்பு
   (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

17. $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ -ன் மதிப்பு

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

18. $\sec^{-1}\frac{2}{3}+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{2}{3}=$

(a) $\frac{-\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) π (d) $-\pi$

19. α, β என்பன 0 மற்றும் $\frac{\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில் உள்ளது, மேலும் $\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$ மற்றும் $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$ எனில் $\sin 2\alpha=$

(a) $\frac{16}{15}$ (b) 0

(c) $\frac{56}{65}$ (d) $\frac{64}{65}$

20. $\tan A=\frac{1}{2}$ மற்றும் $\tan B=\frac{1}{3}$ எனில், $\tan(2A+B)$ –ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

21. $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ க்கு சமமானது.

(a) $\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$ (b) $\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$

(c) $1-\tan x$ (d) $1+\tan x$

22. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{3}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{5}{4}$

23. $\frac{1}{\operatorname{cosec}(-45^\circ)}$ –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{2}$ (d) $-\sqrt{2}$

24. $p\sec 50^\circ=\tan 50^\circ$ எனில், p –ன் மதிப்பு

(a) $\cos 50^\circ$ (b) $\sin 50^\circ$

(c) $\tan 50^\circ$ (d) $\sec 50^\circ$

25. $\left(\frac{\cos x}{\operatorname{cosec} x}\right)-\sqrt{1-\sin^2 x}\sqrt{1-\cos^2 x}$ க்குச் சமமானது.

(a) $\cos^2 x-\sin^2 x$ (b) $\sin^2 x-\cos^2 x$

(c) 1 (d) 0

இதர கணக்குகள்

1. நிறுவுக : $\frac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}=\cot 3x$

2. நிறுவுக: $\sqrt{3}\operatorname{cosec} 20^\circ-\sin 20^\circ=4$

3. நிறுவுக: $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

4. $\tan x=\frac{3}{4}$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ எனில், $\sin\frac{x}{2}$ மற்றும் $\cos\frac{x}{2}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

5. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+4\sec^2\frac{3\pi}{4}=10$ என நிறுவுக.

6. மதிப்பிடுக : (i) $\sin 75^\circ$ (ii) $\tan 15^\circ$

7. $\sin A=\frac{1}{3}$, $\sin B=\frac{1}{4}$ எனில், $\sin(A+B)$ –ன் மதிப்பைக் காண்க. இங்கு, A, B குறுங்கோணங்கள்.

8. $\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$ என நிறுவுக.

9. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$ மற்றும் $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$ (இங்கு $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha-\beta$ குறுங்கோணங்கள்) எனில், $\tan 2\alpha$ ஐக் காண்க.

10. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$, $0<x<\pi$ என்பதனை எளிய வடிவில் எழுதுக.

தொகுப்புரை

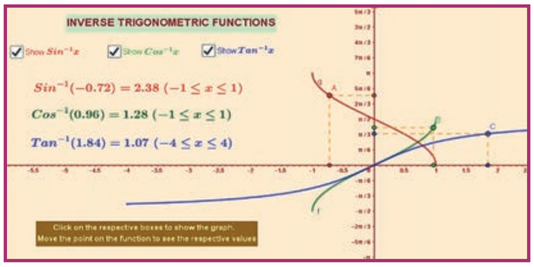
- ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r, வில்லின் நீளம் l, மையத்தில் தாங்கக்கூடிய கோணம் θ ரேடியன் எனில் $l = r\theta$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
- $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$
- $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
- $\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$
- $\cos x\sin y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$
- $\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
- $\sin x\sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)

உருமாற்று சூத்திரங்கள்	Transformation formulae
கால் பகுதிகள்	Quadrants
கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் விகித சமம்	Componendo and dividendo.
கூட்டுக் கோணங்கள்	Compound angles
கோணம்	Angle
திரிகோணமிதி முற்றொருமைகள்	Trignometric identities
திரிகோணமிதி விகிதங்கள்	Trignometric Ratios
துணைக் கோணங்கள்	Allied angles
நேர்மாறு சார்பு	Inverse function
பாகை அளவை	Degree measure
மடங்கு கோணங்கள்	Multiple angles
ரேடியன் அளவு / ஆரையன் அளவு	Radian measure
வில்லின் நீளம்	Length of the arc.

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

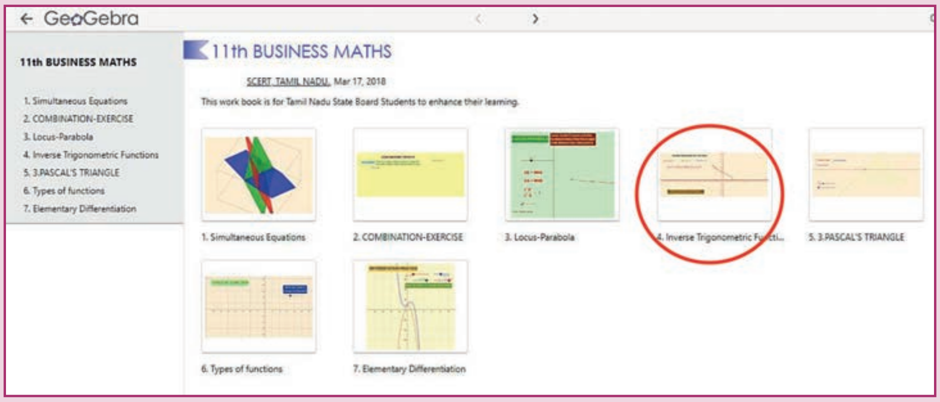
கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க.

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப்புத்தகத்தில் **"Inverse Trigonometric Functions"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

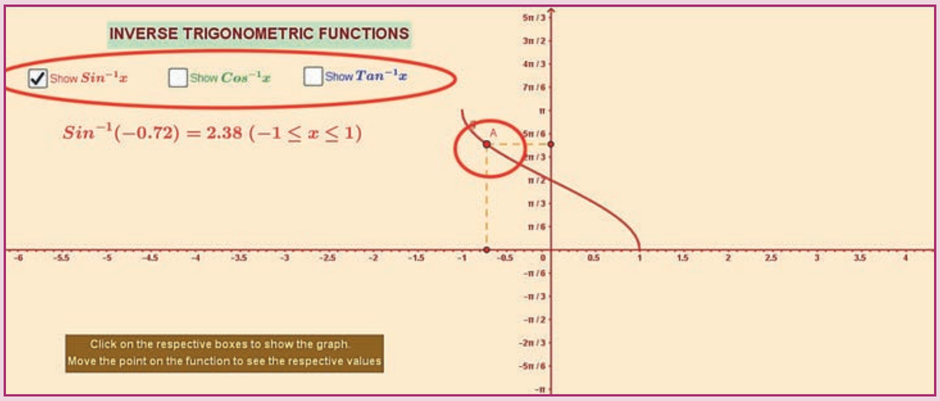
படி - 2

"Inverse Trigonometric Functions" க்கான பணித்தாளில் இடப் பக்கம் உள்ள தேர்வுப் பெட்டிகளில் தேவையான நேர்மாற்று திரிகோணச் சார்புகளை ஒவ்வொன்றாகச் சொடுக்கி வரைபடத்தில் காணலாம். மேலும் சார்புகளின் வரைபடத்தின் மேல் உள்ள புள்ளியினை நகர்த்தி x மற்றும் y அச்சுகளில் மதிப்புகளைக் கண்டு மீளாய்வு செய்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

அத்தியாயம் 5

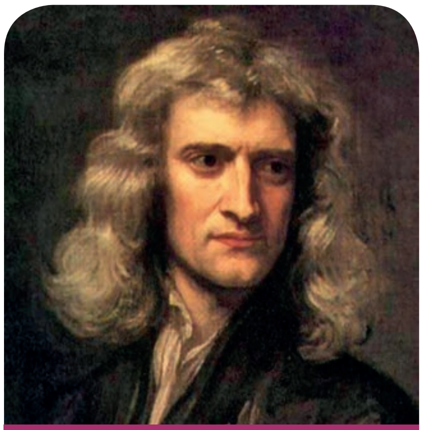
வகை நுண்கணிதம்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சி பற்றிய கருத்துரு
- எல்லைக்கான சூத்திரம் மற்றும் தொடர்ச்சி சார்புகளின் வரையறைகள்
- வகையீடுகளின் அடிப்படைக் கருத்துரு
- முதன்மைக் கோட்பாட்டு கொள்கையின் மூலம் வகையீடு காணும் முறை
- சார்புகளின் வகையீடுகளை சில நேரடி சூத்திரங்களின் வழியாக காணுதல் மற்றும் அதன் பயன்பாடு
- உயர் வரிசை வகையீடு காணும் முறை

G.W. லீப்னிட்ஸ்



சர். ஐசக் நீயூட்டன்

அறிமுகம்

கணக்கிடுவதற்காக பயன்படுத்தப்படும் கூழாங்கல் அல்லது ஒரு சிறிய கல் என்பதன் பொருளமைந்த லத்தீன் வார்த்தை நுண்கணிதம் ஆகும். மேலும், கணக்கிடுதல் என்ற வார்த்தை லத்தின் வார்த்தையிலிருந்து வருவிக்கப்பட்டதாகும். நுண்கணிதமென்பது மாற்றங்களுடன் தொடர்புடைய ஒரு முதன்மையான கணிதவியல் கருவியாகும். வகையிடலின் கருத்துருவாக்கம் என்பது நுண்கணித அறிவியலின் அடிப்படைக் கருவியாகும். நுண்கணிதம் என்பது தனித்த மாறியைப் பொறுத்து சார்ந்த மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் வீதத்தை கணக்கிடக் கூடிய ஒரு முக்கியமான பகுதியாகும். சர். ஐசக் நீயூட்டன் (1642 – 1727 பொ.ஆ.) மற்றும் ஜெர்மனியின் கணிதமேதை G.W. லீப்னிட்ஸ் (1646 – 1716 பொ.ஆ.) ஆகிய இருவரும் தனித்தனியாக மற்றும் ஏறத்தாழ ஒரே நேரத்தில் இப்பாடத்தைக் கண்டுபிடித்து மேம்படுத்தினார்கள்.

இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள், எல்லை, வகையிடல் மற்றும் வகையிடல் உத்திகள் ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிவோம்.

5.1 சார்புகள் மற்றும் அதன் வரைபடங்கள் (Functions and their graphs)

சில அடிப்படை கருத்துருக்கள்

5.1.1 அளவு (Quantity)

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் போன்ற அடிப்படை கணித செயல்முறைகள் கொண்டு பயன்படுத்தக் கூடிய அனைத்தும் அளவு எனப்படும்.

5.1.2 மாறிலி (Constant)

ஒரு அளவு, கணக்கீடுகளின் போது ஓரே மதிப்பை தக்க வைத்துக் கொண்டு இருந்தால் அவ்வளவை மாறிலி எனப்படும்.

அடிப்படையில் மாறிலி அளவைகள் இரு வகைப்படும்.

(i) **முழுமையான மாறிலிகள்:** முழுமையான மாறிலிகள் என்பது எந்வொரு கணித ஆய்வின் போதும் அதனுடைய மதிப்புகள் மாறாமல் இருக்கும். அதாவது, இவைகள் எப்பொழுதும் நிலையானவை. **உதாரணமாக:** $3, \sqrt{3}, \pi, \ldots$

(ii) **தன்னிச்சை மாறிலிகள்:** தன்னிச்சை மாறிலிகள் என்பது ஒரு கணக்கிடுதலில் முழுவதுமாக ஒரே மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். ஆனால் வெவ்வேறு தீர்வுகளைப் பெறுவதற்கு வெவ்வேறுவிதமான மதிப்புகளை வழங்கலாம். தன்னிச்சை மாறிலிகள் $a, b, c, \ldots$ போன்ற எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

உதாரணமாக: $y = mx + 4$, என்ற சமன்பாட்டில் m என்பது தன்னிச்சை மாறிலியாகும்.

5.1.3 மாறி (Variable)

ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கீட்டின் போது (எந்த ஒன்று பன்மதிப்பு கொண்டதாக அமைகிறதோ) வெவ்வேறான மதிப்புகளை பெறக்கூடிய ஒரு அளவானது மாறி ஆகும். மாறிகள் பொதுவாக x, y, z என்ற ஆங்கில எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$ என்ற நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டில் x மற்றும் y ஆகியவை மாறிகள். ஏனெனில் அவைகள் ஒரு நேர்கோட்டில் நகரும் புள்ளியின் அச்சு தொலைத்தூரங்களை நிர்ணயிக்கிறது. இங்கு a மற்றும் b என்பன, அச்சுக்களின் வெட்டு துண்டு மதிப்புகள் ஆகும். அவைகள் தன்னிச்சையானவை.

மாறிகளின் இருவகைகள்:

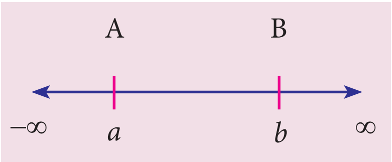
(i) **சாரா மாறி:** ஒரு மாறி என்பது தன்னிச்சையான மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் போது அம்மாறி சாரா மாறி எனப்படும்.

(ii) **சார்ந்த மாறி:** ஒரு மாறி மற்றொரு மாறியின் மதிப்புகளைச் சார்ந்து இருக்கும் போது அம்மாறி சார்ந்த மாறி எனப்படும்.

உதாரணமாக: $y = 5x^2 - 2x + 3$ என்ற சமன்பாட்டில் x என்பது சாரா மாறி, y என்பது சார்ந்த மாறி மற்றும் 3 என்பது மாறிலி

5.1.4 இடைவெளிகள் (Intervals)

மெய்யெண்களை, வடிவக் கணிதத்தில் ஒரு எண்கோட்டின் மீது உள்ள புள்ளிகளாக குறிப்பிடும் கோடு, மெய்கோடு (real line) என்றழைக்கப்படும்.

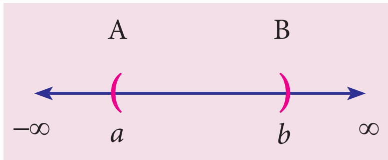


படம். 5.1

R என்ற குறியீடு மெய்யெண்களின் தொகுதி அல்லது மெய்க்கோட்டினைக் குறிக்கும். ஒரு மெய்க்கோட்டின் உட்கணமானது இடைவெளி எனப்படும். இது குறைந்தது இரண்டு எண்களுக்கு இடையேயுள்ள அனைத்து மெய்யெண்களையும் பெற்றிருக்கும்.

(i) திறந்த இடைவெளி (Open interval)

$\{x : a < x < b\}$ என்ற கணம் திறந்த இடைவெளியாகும். இதனை (a, b) எனக் குறிக்கலாம்.



படம். 5.2

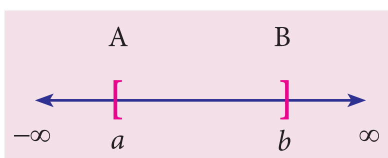
இந்த இடைவெளியில், a மற்றும் b ஆகிய எல்லைப் புள்ளிகள் உள்ளடங்காது.

உதாரணத்திற்கு, (4, 7) என்ற திறந்த இடைவெளியில், 4 –ம் மற்றும் 7 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகள் அல்ல. ஆனால் 4.001 -ம் மற்றும் 6.99 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகள் ஆகும்.

(ii) மூடிய இடைவெளி (Closed interval)

$\{x : a \leq x \leq b\}$ என்ற கணம் மூடிய இடைவெளியாகும்.

இதனை $[a, b]$ எனக் குறிக்கலாம்.



படம். 5.3

இந்த இடைவெளியில், a மற்றும் b ஆகிய எல்லைப் புள்ளிகளும் உள்ளடங்கும்.

உதாரணத்திற்கு, [4, 7] என்ற மூடிய இடைவெளியில், 4 -ம் மற்றும் 7 -ம் இந்த இடைவெளியின் உறுப்புகளாகும்.

மேலும் பாதி மூடிய, பாதி திறந்த இடைவெளிகளைப் பற்றி நாம் இங்கு குறிப்பிட வேண்டியுள்ளது.

$(a, b]= \{x : a < x \leq b\}$ என்பது இடப்புறம் திறந்த இடைவெளி என அழைக்கப்படுகிறது

$[a, b)= \{x : a \leq x < b\}$ என்பது வலப்புறம் திறந்த இடைவெளி என அழைக்கப்படுகிறது.

சீராக அனைத்து நிலைகளிலும் $b - a = h$ என்பது இடைவெளியின் நீளம் என அழைக்கப்படுகிறது.

5.1.5 ஒரு புள்ளியின் அண்மையகம் (Neighbourhood of a point)

'a' என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் மற்றும் $\varepsilon > 0$ என்பது ஒரு மிக மிகச் சிறிய மெய்யெண் என எடுத்துக்கொள்வோம். $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ என்ற திறந்த இடைவெளி, புள்ளி 'a' யின் ε–அண்மையகம் என அழைக்கப்படும். இதனை $N_{a,\varepsilon}$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கலாம்.

உதாரணமாக,

$$N_{5,\frac{1}{4}} = \left(5-\frac{1}{4}, 5+\frac{1}{4}\right) = \left\{x: \frac{19}{4} < x < \frac{21}{4}\right\}$$

$$N_{2,\frac{1}{7}} = \left(2-\frac{1}{7}, 2+\frac{1}{7}\right) = \left\{x: \frac{13}{7} < x < \frac{15}{7}\right\}$$

5.1.6 சார்பு (Function)

X மற்றும் Y என்பன மெய் எண்களைக் கொண்ட இரண்டு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. X –ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் Y –ல் உள்ள ஒரேயொரு உறுப்புடன் மட்டும் தொடர்பு படுத்தும் f என்ற விதியானது கணம் X லிருந்து Y க்கான சார்பு ஆகும். இதனை $f : X \longrightarrow Y$ என எழுதலாம்.

கணம் X –னை, சார்பு f –ன் சார்பகம் என்றும், கணம் Y –னை f –ன் துணைச் சார்பகம் என்றும் கூறுவோம். மேலும், $f(X) = \{f(x) \,/\, x \in X\}$ என்பது f –ன் வீச்சகம் எனப்படும். இங்கு $f(X) \subseteq Y$ என்பது தெளிவு.

x இன் சார்பு என்பது பொதுவாக $f(x)$, என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

1734 - 1735 ஆம் ஆண்டில் லியோனார்ட் ஆய்லரால் முதன் முதலில் சார்பின் குறியீடாக $y = f(x)$ பயன்படுத்தப்பட்டது.

5.1.7 சார்புகளின் வகைப்பாடு (Classification of functions)

சார்புகளை இருவகைப்படுத்தலாம் அவை,

(i) இயற்கணிதச் சார்பு (Algebric function)

நான்கு அடிப்படை கணக்கீட்டு செயலிகள், மாறிலிகள் மற்றும் x என்ற மாறியில் வெவ்வேறு அடுக்குகளைக் கொண்டு அமையும் தொகுப்பு இயற்கணிதச் சார்பாகும்.

உதாரணமாக : $y = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 7$, $y = \dfrac{2x^3+7x-3}{x^3+x^2+1}$, $y=\sqrt{3x^2+6x-1}$ ஆகியன இயற்கணித சார்புகள் ஆகும்.

(a) $y = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 7$ என்ற சார்பு பல்லுறுப்புக் கோவை (அல்லது) விகிதமுறுமுழுவெண் சார்பு ஆகும்

(b) $y=\dfrac{2x^3+7x-3}{x^3+x^2+1}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறுச் சார்பாகும்.

(c) $y=\sqrt{3x^2+6x-1}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறாச் சார்பு ஆகும்.

(ii) **விஞ்சிய சார்பு** (Transcendental function)

இயற்கணிதமற்ற சார்பானது விஞ்சிய சார்பு எனப்படும்.

உதாரணமாக: $\sin x, \sin^{-1}x, e^x, \log_a x$ ஆகியன விஞ்சிய சார்புகள் ஆகும்.

(a) $\sin x$, $\tan 2x$, ... போன்ற சார்புகள் திரிகோணமிதி சார்புகள் எனப்படும்.

(b) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, ... போன்ற சார்புகள் நேர்மாறு திரிகோணமிதி சார்புகள் எனப்படும்

(c) e^x, 2^x, x^x, ... போன்ற சார்புகள் அடுக்குச் சார்புகள் எனப்படும்.

(d) $\log_a x$, $\log_e(\sin x)$, ... போன்ற சார்புகள் மடக்கைச் சார்புகள் எனப்படும்.

5.1.8 இரட்டைச் சார்புகள் மற்றும் ஒற்றைச் சார்புகள் (Even and odd functions)

$f(-x) = f(x)$ எனில், $f(x)$ ஆனது **இரட்டைச் சார்பு** என்று அழைக்கப்படும்

$f(-x) = -f(x)$ எனில் $f(x)$ ஆனது **ஒற்றைச் சார்பு** என்று அழைக்கப்படும்.

உதாரணங்கள்: $f(x) = x^2$ மற்றும் $f(x) = \cos x$ என்பன இரட்டைச் சார்புகளாகும்.

$f(x) = x^3$ மற்றும் $f(x) = \sin x$ என்பன ஒற்றைச் சார்புகளாகும்

குறிப்பு

$f(x) = x^3 + 5$ என்பது இரட்டைச் சார்பும் அல்ல, ஒற்றைச்சார்பும் அல்ல.

5.1.9 வெளிபடு மற்றும் உட்படு சார்புகள் (Explicit and implicit functions)

ஒரு சார்பில் சார்ந்த மாறியானது சில சாரா மாறிகளைக் கொண்டு வெளிப்படையாக வடிவமைக்கப்பட்டிருந்தால், அச்சார்பு **வெளிபடுச் சார்பு** எனப்படும்.

உதாரணமாக: $y = x^2 + 3$ மற்றும் $y = e^x + e^{-x}$ என்பன x-ல் அமைந்த வெளிப்படு சார்புகள் ஆகும்.

x மற்றும் y என்ற மாறிகள், $f(x,y) = 0$ என்ற சார்பில் தொடர்பு படுத்தப்பட்டு எந்த ஒரு மாறியும் நேரிடையாக மீதமுள்ள மாறிகளால் வடிவமைக்கப்படாமல் இருந்தால், சார்பு **உட்படு சார்பு** எனப்படும்

உதாரணமாக: $x^3 + y^3 - xy = 0$ என்பது உட்படு சார்பு ஆகும்.

5.1.10 மாறிலிச் சார்பு (Constant function)

k என்பது ஒரு நிலையான மெய் எண் எனில் அனைத்து $x \in R$ க்கும், $f(x) = k$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பானது மாறிலிச்சார்பு என அழைக்கப்படும்.

உதாரணமாக: $y = 3$, $f(x) = -5$ என்பன மாறிலிச் சார்புகள் ஆகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$y = f(x)$ என்ற மாறிலிச் சார்பின் வரைபடம் x–அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோடு ஆகும்

5.1.11 சமனிச் சார்பு (Identity function)

ஒரு சார்பில் அதன் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் அதே மெய்யெண்ணுடன் தொடர்பு கொண்டிருந்தால் அது சமனிச்சார்பு என்போம். இது I என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

அதாவது, அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x)=x$, எனுமாறு வரையறுக்கப்படின் f–ஐ சமனிச் சார்பு என்போம்.

உதாரணமாக: $A=\{1, 2, 3\}$ மற்றும் $f : A \to A$ இன் வரிசைப் படுத்தப்பட்ட ஜோடிகளின் கணம் $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ஓர் சமனிச் சார்பு ஆகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

மெய்யெண்களின் மீதான சமனிச் சார்பின் வரைப்படமானது, ஆதியின் வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு ஆகும். இது x-அச்சின் மிகை திசையுடன் 45° கோணத்தை ஏற்படுத்தும்.

5.1.12 மட்டுச் சார்பு (Modulus function)

$f(x) = |x|$ இங்கு,

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \text{ என்று}$$

வரையறுக்கப்படின், $f(x)$ ஆனது மட்டுச்சார்பு எனப்படும். இதனை எண்ணளவைச் சார்பு என்றும் அழைக்கலாம்.

குறிப்பு

$|5| = 5,\ |-5| = -(-5) = 5$

மேற்குறிப்பு	இதன் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $[0, \infty)$ ஆகும்.

5.1.13 குறிச் சார்பு (Signum function)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படின் $f(x)$ ஆனது குறிச் சார்பு எனப்படும்.

மேற்குறிப்பு	இதன் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $\{-1, 0, 1\}$ ஆகும்

5.1.14 படிச் சார்பு (Step function)

(i) மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு (Greatest integer function)

ஒரு மெய்யெண் x இடத்து x –ஐ விட மிகைப்படாத மீப்பெரு மெய் முழு எண் மதிப்பைப் பெறும் சார்பு, மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு எனப்படுகிறது. இதனை $\lfloor x \rfloor$ என குறிப்போம்.

அதாவது $f : R \longrightarrow R$ என்ற சார்பு

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ என வரையறுக்கப்படுமாயின் அது மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு எனப்படும்.

குறிப்பு

$\lfloor 2.5 \rfloor = 2,\ \lfloor -2.1 \rfloor = -3,$
$\lfloor 0.74 \rfloor = 0,\ \lfloor -0.3 \rfloor = -1, \lfloor 4 \rfloor = 4.$

(ii) மீச்சிறு முழுக்கள் சார்பு (Least integer function)

ஒரு மெய்யெண் x இடத்து x –ஐ விட குறையாத மீச்சிறு மெய் முழு எண் மதிப்பைப் பெறும் சார்பு, மீச்சிறு முழுக்கள் சார்பு எனப்படுகிறது. இதனை $\lceil x \rceil$ என குறிப்போம்.

அதாவது $f : R \longrightarrow R$ என்ற சார்பு $f(x) = \lceil x \rceil$ என வரையறுக்கப்படுமாயின் அது மீச்சிறு முழுக்கள் சார்பு எனப்படும்.

குறிப்பு

$\lceil 4.7 \rceil = 5, \lceil -7.2 \rceil = -7,$
$\lceil 5 \rceil = 5, \lceil 0.75 \rceil = 1.$

மேற்குறிப்பு	இச்சார்பின் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் Z [முழுக்களின் கணம்] ஆகும்.

5.1.15 விகிதமுறுச்சார்பு (Rational function)

சார்பு $f(x)$ ஆனது $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அதனை ஒரு விகிதமுறுச் சார்பு எனலாம்.

உதாரணமாக: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}, x \neq 3$ ஒரு விகிதமுறு சார்பு ஆகும்.

5.1.16 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு (Polynomial function)

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ என வரையறுப்பின் f–ஐ ஒரு n–படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு எனலாம். இங்கு $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\,; a_0 \neq 0$ என்பன மெய்யெண்கள், மற்றும் n ஒரு குறைவிலா முழு எண்.

உதாரணமாக: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 7$ ஆனது முப்படிகொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சார்பாகும்.

5.1.17 நேர்கோட்டுச் சார்பு (Linear function)

a $\neq$ 0 மற்றும் a, b இவையிரண்டும் மெய்யெண்களாயின் $f(x) = ax + b$ –ஐ நேரியல் சார்பு என்போம்.

உதாரணமாக: $y = 2x + 3$ ஒரு நேரியல் சார்பு ஆகும்.

5.1.18 இருபடிச் சார்பு (Quadratic function)

$f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c மற்றும் $a \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பு இருபடிச்சார்பு எனப்படும்.

உதாரணமாக: $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ ஓர் இருபடிச் சார்பாகும்.

5.1.19 அடுக்குச் சார்பு (Exponential function)

அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ மற்றும் $a > 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பு அடுக்குச் சார்பு எனப்படும்.

உதாரணமாக:

$e^{2x}, e^{x^2+1}, 2^x$ ஆகியவை அடுக்குச் சார்புகள் ஆகும்.

மேற்குறிப்பு	சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $(0, \infty)$. மேலும் $(0, 1)$ ஆனது அச்சார்பின் வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

5.1.20 மடக்கைச் சார்பு (Logarithmic function)

$x > 0$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$ எனும்போது $f(x) = \log_a x$ –ஐ மடக்கைச் சார்பு என்போம்.

உதாரணமாக: $f(x) = \log_e(x+2)$, $f(x) = \log_e(\sin x)$ என்பன மடக்கைச் சார்புகள் ஆகும்.

மேற்குறிப்பு	சார்பகம் $(0, \infty)$ மற்றும் வீச்சகம் R. மேலும் $(1, 0)$ ஆனது அச்சார்பின் வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

5.1.21 இரு சார்புகளின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல்

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற சார்புகளின் சார்பகங்கள், மற்றும் துணைச் சார்பகங்கள் முறையே சமமாக இருப்பின்

(i) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

(ii) $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

(iv) $(cf)(x) = cf(x)$, c ஒரு மாறிலி.

5.1.22 சார்பின் வரைபடம் (Graph of a function)

$(x, f(x))$ என்ற புள்ளிகளின் தொகுப்பு சார்பின் வரைபடமாகும். இங்கு x என்பது சார்பின் சார்பகத்தின் மதிப்புகளாகவும், $f(x)$ என்பது சார்பின் வீச்சகத்தின் மதிப்புகளாகவும் இருக்கும்.

சார்பின் வரைபடம் வரையும்போது, தேவையான அளவுக்கு $(x, f(x))$ என்ற வரிசைச்ஜோடிகளை சார்பின் மீது கணக்கிட்டு, அதனை படத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும்.

குறிப்பு

ஒரு சார்பின் வரைபடத்திற்கான வரைபடத்தை வெள்ளைத் தாளில் வரைந்தால் போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டு 5.1

$f(x) = 2x^2-1$ மற்றும் $g(x) = 1-3x$ என்ற சார்புகள் சமம் எனில், அதன் சார்பகத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$f(x) = g(x)$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 1 = 1-3x$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(x+2)(2x-1) = 0$$

$$\therefore \quad x = -2, x = \frac{1}{2}$$

சார்பகம் $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

எடுத்துக்காட்டு 5.2

$f(x) = ax+b$ என்ற சார்பில் $f = \{(1, 1), (2, 3)\}$ என அமைந்தால் a மற்றும் b யின் மதிப்பினைக் காண்க

தீர்வு

$f(x) = ax + b$, $f(1) = 1$ மற்றும் $f(2) = 3$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளபடி)

$\therefore \quad a + b = 1$ மற்றும் $2a + b = 3$

$\Rightarrow \quad a = 2$ மற்றும் $b = -1$

எடுத்துக்காட்டு 5.3

$f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$ எனில்,

$[f(x)]^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$ என நிறுவுக

தீர்வு

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, $f(x^3) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ மற்றும்

$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

இப்போது,

$$\begin{aligned} LHS &= [f(x)]^3 \\ &= \left[x + \frac{1}{x}\right]^3 \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= f(x^3) + 3f(x) = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= RHS \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.4

$f(x) = x - 5$ மற்றும்

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x+5} & \text{if } x \neq -5 \\ \lambda & \text{if } x = -5 \end{cases}$$ எனுமாறு

f, g வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் $f(x) = g(x)$, $\forall\ x \in R$ எனில் λ வின் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$f(x) = g(x), \forall x \in R$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$\therefore f(-5) = g(-5)$$

$$-5 - 5 = \lambda$$

$$\therefore \lambda = -10$$

எடுத்துக்காட்டு 5.5

$f(x) = 2^x$ எனில், $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$ என நிறுவுக

தீர்வு

$f(x) = 2^x$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$\begin{aligned} \therefore \quad f(x+y) &= 2^{x+y} \\ &= 2^x \cdot 2^y \\ &= f(x)\cdot f(y) \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x > 0$ எனில்,

$f[f(x)] = -\dfrac{1}{x}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1} \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\therefore\ f\left[f(x)\right] = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}$$

$$=\frac{x-1-x-1}{x-1+x+1} = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

$f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$, $0 < x < 1$ எனில்,

$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=2f(x)$. என நிறுவுக

தீர்வு

$$f(x)=\log\frac{1+x}{1-x} \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\therefore\ f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}$$

$$=\log\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}$$

$$=\log\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2} = 2\log\frac{1+x}{1-x} = 2f(x).$$

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$f(x) = x$ மற்றும் $g(x) = |x|$ எனில் ,

(i) $(f+g)(x)$ (ii) $(f-g)(x)$ (iii) $(fg)(x)$ ஐக் காண்க.

தீர்வு

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + |x|$

$$=\begin{cases} x+x & , x\geq 0 \\ x-x & , x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2x & , x\geq 0 \\ 0 & , x<0\end{cases}$$

(ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x - |x|$

$$=\begin{cases} x-x & , x\geq 0 \\ x-(-x) & , x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & , x\geq 0 \\ 2x & , x<0\end{cases}$$

(iii) $(fg)(x)=f(x)g(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & , x\geq 0 \\ -x^2 & , x<0\end{cases}$

எடுத்துக்காட்டு 5.9

ஐம்பது பேர்கள் அமரக்கூடிய பேருந்து ஒன்றை மாணவர்கள் குழு ஒரு கல்வி சுற்றுலாவிற்காக வாடகைக்கு அமர்த்த விரும்பியது. பேருந்து நிறுவனம் குறைந்தது 35 மாணவர்களாவது விருப்பம் தெரிவித்தால்தான் பேருந்தை வாடகைக்கு விடும். மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 45 பேர்கள் வரை என்றால் ஒரு மாணவனுக்கு ₹ 200 எனவும், 45 பேர்களுக்கு மேற்படின் ₹200 லிருந்து 45 க்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையில் $\frac{1}{5}$ பாகத்தை கழித்து கட்டணமாக வசூலிக்கும். மொத்த செலவை சுற்றுலாச் செல்லும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை வாயிலாக ஒரு சார்பாக காணவும். மேலும், இதன் மதிப்பகத்தை காண்க.

தீர்வு

சுற்றுலாச் செல்லும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை 'x' எனக் கொள்க.

$\therefore\ 35 \leq x \leq 50$, x ஒரு மிகை முழு ஆகும்

சூத்திரம்:	மொத்தச் செலவு = (ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம்) x (மாணவர்களின்எண்ணிக்கை)

(i) மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 35 மற்றும் 45 க்கு இடையில்,

ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம் ₹200

$\therefore$ மொத்தச் செலவு $y = 200x.$

(ii) மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 46 மற்றும் 50 க்கு இடையில்,

ஒரு மாணவனுக்கான கட்டணம்

$$₹\ \left\{200-\frac{1}{5}(x-45)\right\} = 209-\frac{x}{5}$$

$\therefore$ மொத்தச் செலவு $y = \left(209-\frac{x}{5}\right)x$

$$= 209x-\frac{x^2}{5}$$

$$\therefore\quad y=\begin{cases} 200x & ;\ 35\leq x\leq 45 \\ 209x-\frac{x^2}{5} & ;\ 46\leq x\leq 50\end{cases}$$

சார்பகம் = $\{35, 36, 37, ..., 50\}$.

எடுத்துக்காட்டு 5.10

$f(x) = |x|$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக

தீர்வு

$$y = f(x) = |x|$$

$$= \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

x க்கு சில உகந்த மதிப்புகளை தெரிவு செய்து y இன் மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

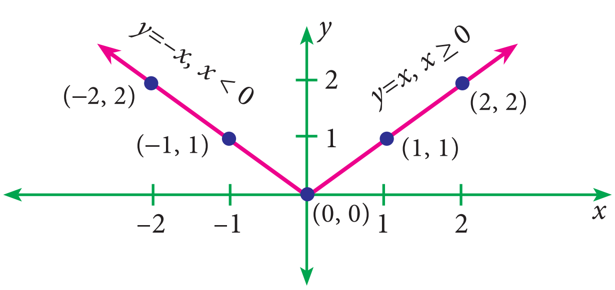
இவ்வாறாககீழ்கண்டஅட்டவணையை நாம் பெறுகிறோம்.

x	−2	−1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

அட்டவணை 5.1

(−2, 2), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் இணைக்கவும்.

$f(x)$ இன் வரைபடமானது படம் 5.4 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம். 5.4

எடுத்துக்காட்டு 5.11

$f(x) = x^2 - 5$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

$y = f(x) = x^2 - 5$ என்க.

x க்கு சில உகந்த மதிப்புகளை தெரிவு செய்து y இன் மதிப்புகளை கணக்கிடுக.

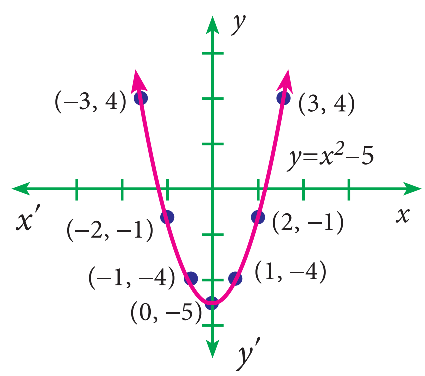
இவ்வாறாககீழ்கண்டஅட்டவணையை நாம் பெறுகிறோம்.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	4	−1	−4	−5	−4	−1	4

அட்டவணை : 5.2

(−3, 4), (−2, −1), (−1, −4), (0, −5), (1, −4), (2, −1), (3, 4) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து மென்மையான வளைவரையால் இணைக்கவும்

$\therefore$ $f(x)$ இன் வரைபடமானது படம் 5.5 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 5.5

எடுத்துக்காட்டு 5.12

$f(x) = a^x$, $a \neq 1$ மற்றும் $a > 0$ க்கு வரைபடம் வரைக

தீர்வு

$f(x)$ இன் சார்பகம் R மற்றும் வீச்சகம் $(0, \infty)$ மேலும் இதன் வளைவரையானது $(0, 1)$ இன் வழிச் செல்லும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

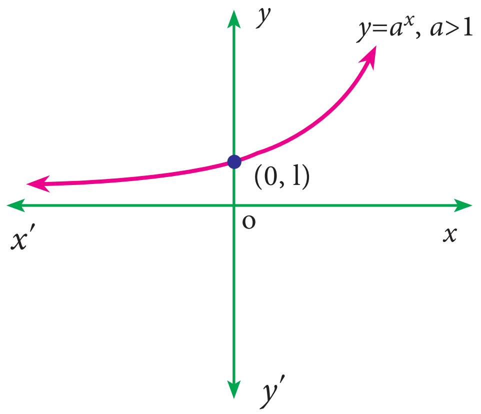
வகை (i) $a > 1$ எனில்,

$$y = f(x) = a^x$$

$$= \begin{cases} < 1 & , x < 0 \\ = 1 & , x = 0 \\ > 1 & , x > 0 \end{cases}$$

இங்கு x இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் போது, y இன் மதிப்பு அதிகரிக்கிறது. மற்றும் $y > 0$ ஆகும்.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.6 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



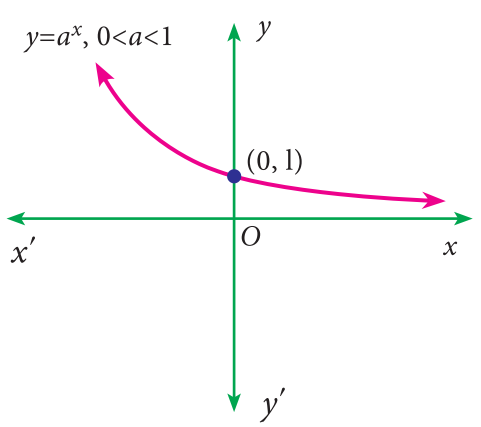
படம் 5.6

வகை (ii) $0 < a < 1$ எனில்

$$y = f(x) = a^x = \begin{cases} > 1 & , x < 0 \\ = 1 & , x = 0 \\ < 1 & , x > 0 \end{cases}$$

இங்கு x ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது y ன் மதிப்பு குறைகிறது. மற்றும் $y > 0$ ஆகும்.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.6 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 5.7

குறிப்பு

(i) e-ன் மதிப்பானது 2 க்கும், 3 க்கும் இடையில் அமையும் *i.e.* $2 < e < 3$

(ii) $f(x) = e^x$ இன் வரைபடமானது, $f(x) = a^x$, $a > 1$ இன் வரைபடத்திற்கு ஒத்திருக்கும். மேலும், $f(x) = e^{-x}$ இன் வரைபடமானது, $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ இன் வரைபடத்திற்கு ஒத்திருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

$x > 0$, $a > 0$ மற்றும் $a \neq 1$ எனும்போது $f(x) = \log_a x$ இன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

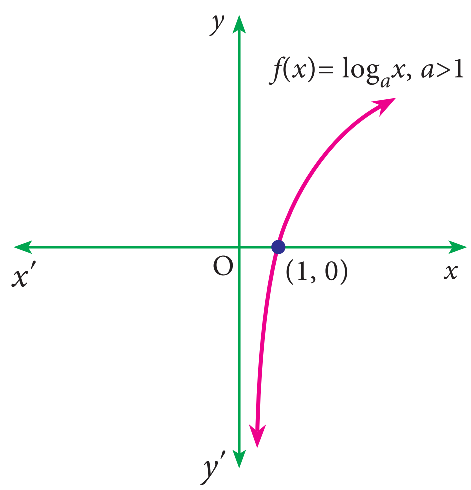
$f(x)$ இன் சார்பகம் $(0, \infty)$ மற்றும் வீச்சகம் R மேலும் இதன் வளைவரையானது $(1, 0)$ இன் வழிச் செல்லும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

வகை (i) $a > 1$ மற்றும் $x > 0$ எனில்,

$$f(x) = \log_a x = \begin{cases} < 0 & , 0 < x < 1 \\ = 0 & , x = 1 \\ > 0 & , x > 1 \end{cases}$$

இங்கு x–ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, $f(x)$ இன் மதிப்பு அதிகரிக்கிறது.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.8 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



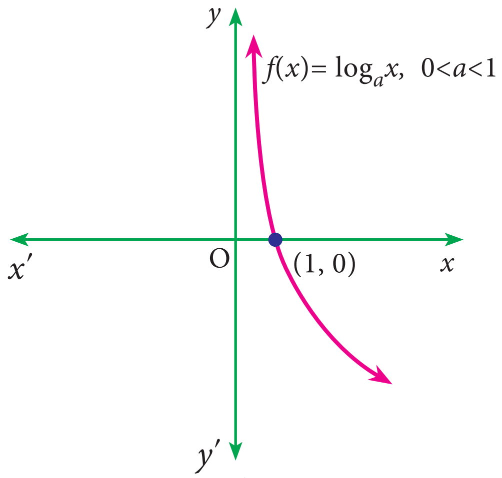
படம் 5.8

வகை (ii) $0 < a < 1$ மற்றும் $x > 0$ எனில்

$$f(x) = \log_a x = \begin{cases} > 0 & , 0 < x < 1 \\ = 0 & , x = 1 \\ < 0 & , x > 1 \end{cases}$$

இங்கு x இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது , $f(x)$ இன் மதிப்பு குறைகிறது.

$\therefore$ இதன் வரைபடமானது படம் 5.9 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 5.9

பயிற்சி 5.1

1. பின்வரும் சார்புகள் ஒற்றைச் சார்பா? அல்லது இரட்டை சார்பா? எனக் காண்க

   (i) $f(x) = \left(\dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}\right)$

   (ii) $f(x) = \log\left(x^2 + \sqrt{x^2+1}\right)$

   (iii) $f(x) = \sin x + \cos x$

   (iv) $f(x) = x^2 - |x|$

   (v) $f(x) = x + x^2$

2. $f(x) = x^3 - kx^2 + 2x,\ x \in R$. என்ற சார்பு ஒற்றை சார்பு எனில் k இன் மதிப்பு யாது ?

3. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3},\ x \neq 0$ எனில்,

   $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ எனக் காட்டுக.

4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1},\ x \neq 1$ எனில், $f(f(x)) = x$ என நிறுவுக.

5. $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+1},\ x > 1$ எனில், $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ மற்றும் $\dfrac{1}{f(x)}$ இன் சார்பை எழுதுக.

6. $f(x) = e^x$ மற்றும் $g(x) = \log_e x$ எனில்,

   (i) $(f+g)(1)$ (ii) $(fg)(1)$

   (iii) $(3f)(1)$ (iv) $(5g)(1)$ ஐக் காண்க.

7. பின்வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக:

   (i) $f(x) = 16 - x^2$ (ii) $f(x) = |x - 2|$

   (iii) $f(x) = x|x|$ (iv) $f(x) = e^{2x}$

   (v) $f(x) = e^{-2x}$ (vi) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

5.2 எல்லைகள் மற்றும் வகைக்கெழுக்கள் (Limits and derivatives)

இப்பகுதியில் நாம் சார்பின் எல்லை, சார்பின் தொடர்ச்சி, வகைக்கெழு குறித்தும் மற்றும் முதன்மைக் கோட்பாடு முறை கொள்கைகளிலிருந்து வகைக் கெழுவைக் காணும் முறை குறித்தும் பயில்வோம். எல்லை என்பது ஒரு மாறுகின்ற அளவையில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நிலையான மதிப்பிற்கு மிகவும் அருகாமையில் அளவையின் மதிப்பினைக் காண பயன்படுகிறது.

வரையறை 5.1

f என்பது மெய் மதிப்புகளை கொண்ட x இல் அமைந்த சார்பு என்க. l மற்றும் a என்பன இரு நிலை எண்கள் என்க. x ஆனது a எனும் நிலையெண்ணை நெருங்கும் போது $f(x)$ ஆனது l –ஐ நெருங்குமானால், l –ஐ $f(x)$ –ன் எல்லை என்போம்.

இதனை $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ என எழுதுவோம்

குறியீடுகள்:

(i) $L[f(x)]_{x=a} = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ என்பது $x=a$ இல் $f(x)$ இன் இடக்கை எல்லை என்போம்.

(ii) $R[f(x)]_{x=a} = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ என்பது $x=a$ இல் $f(x)$ இன் வலக்கை எல்லை என்போம்.

5.2.1 எல்லையின் உள்ளமைத்தன்மை (Existence of limit)

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது $\Leftrightarrow$ $L[f(x)]_{x=a}$ மற்றும் $R[f(x)]_{x=a}$ ஆகியவை காணத் தக்கதாகவும் சமமாகவும் இருக்க வேண்டும்.

i.e., $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow L[f(x)]_{x=a} = R[f(x)]_{x=a}$.

குறிப்பு

$L[f(x)]_{x=a}$ மற்றும் $R[f(x)]_{x=a}$ ஆகியவற்றை $L[f(a)]$ மற்றும் $R[f(a)]$ எனவும் குறியிடலாம்.

5.2.2 இடமிருந்து எல்லை காணும் வழிமுறை : $L[f(x)]_{x=a}$

(i) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ –ஐ எழுதுக.

(ii) $x=a-h,\ h>0$ எனக் கொண்டு $x \to a^-$ க்கு பதிலாக $h \to 0$ என மாற்றுக.

(iii) $\lim\limits_{h \to 0} f(a-h)$ இன் மதிப்பை காண்க.

(iv) நிலை (iii) இல் பெறப்பட்ட மதிப்பு, $x = a$ இல் $f(x)$ என்ற சார்புக்கான இடக்கை எல்லை மதிப்பு ஆகும்.

5.2.3 வலமிருந்து எல்லை காணும் வழிமுறை : $R[f(x)]_{x=a}$

(i) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ –ஐ எழுதுக.

(ii) $x = a+h,\ h>0$ எனக் கொண்டு $x \to a^+$ க்கு பதிலாக $h \to 0$ என மாற்றுக.

(iii) $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$ இன் மதிப்பை காண்க.

(iv) நிலை (iii) இல் பெறப்பட்ட மதிப்பு, $x = a$ இல் $f(x)$ என்ற சார்புக்கான வலக்கை எல்லை மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & , x \neq 3 \\ 0 & , x = 3 \end{cases}$$ எனும் சார்புக்கு $x=3$ இல் இடக்கை மற்றும் வலக்கை எல்லை மதிப்புக்களை காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned} L[f(x)]_{x=3} &= \lim_{x \to 3^-} f(x) \\ &= \lim_{h \to 0} f(3-h),\ x = 3-h \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|(3-h)-3|}{(3-h)-3} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|-h|}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} -1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R[f(x)]_{x=3} &= \lim_{x \to 3^+} f(x) \\ &= \lim_{h \to 0} f(3+h),\ x = 3+h \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|(3+h)-3|}{(3+h)-3} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

குறிப்பு

இங்கு, $L[f(3)] \neq R[f(3)]$ எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு எல்லை மதிப்பு இல்லை. அதாவது $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ இன் மதிப்பு காணத்தக்கதல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 5.15

$$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & if\ 0 < x \leq 1 \\ 4x^3 - 3x & if\ 1 < x < 2 \end{cases}$$ க்கு $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ மதிப்பு காணத் தக்கதா என ஆராய்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned} L[f(x)]_{x=1} &= \lim_{x \to 1^-} f(x) \\ &= \lim_{h \to 0} f(1-h),\ x = 1-h \\ &= \lim_{h \to 0} [5(1-h)-4] \\ &= \lim_{h \to 0} (1-5h) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R[f(x)]_{x=1} &= \lim_{x \to 1^+} f(x) \\ &= \lim_{h \to 0} f(1+h),\ x = 1+h \\ &= \lim_{h \to 0} [4(1+h)^3 - 3(1+h)] \\ &= 4(1)^3 - 3(1) = 1 \end{aligned}$$

தெளிவாக, $L[f(1)] = R[f(1)]$

$\therefore\ \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ஆனது மதிப்பு காணத் தக்கது மற்றும் இதனுடைய மதிப்பு 1 ஆகும்.

குறிப்பு

$f(x)$ என்ற சார்புக்கு a என்ற புள்ளியில் சார்பின் எல்லை மதிப்பு மற்றும் சார்பின் மதிப்பு காணும் போது பின் வரும் நிலைகள் ஏற்படலாம்.

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ –ஐ காண இயலும் ஆனால் $f(a)$ –ஐ காண இயலாது.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ –ஐ காண இயலாது ஆனால் $f(a)$ –ஐ காண இயலும்.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ –ஐ காண இயலும் ஆனால் அவை சமமற்றவையாக இருக்கும்.

(iv) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ –ஐ காண இயலும் மற்றும் அவை சமமாக இருக்கும்.

5.2.4 எல்லைகளின் சில முடிவுகள்

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ –ஐ காண இயலுமாயின்

(i) $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(iii) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

(iv) $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$, இங்கு k ஒரு மாறிலி.

5.2.5 மதிப்பிடமுடியாத வடிவங்கள் மற்றும் எல்லை மதிப்புக் காணல் (Indeterminate forms and evaluation of limits)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன எல்லை மதிப்புகள் காணத்தக்க இரு சார்புகள் என்க.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ எனில், $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ ஆனது $\dfrac{0}{0}$ என்ற வடிவத்தில் அமைவதால் அது அர்த்தமற்றதாகிறது. ஆனால் $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ என்பது அர்த்தமற்றது எனக் கூற இயலாது.

பல நேரங்களில் இம்மாதிரியான மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களுக்கு நிலையான ஒரு எல்லை மதிப்பினை காண இயலும். இந்த மாதிரி வடிவங்களுக்கு எல்லை மதிப்பிடுதல் முறையில் மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களின் மதிப்பிடல் என்போம்.

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ மற்றும் 1^∞ இல் அமைந்த வடிவங்கள் மதிப்பிட முடியாத வடிவங்கள் ஆகும். இவற்றுள் $\dfrac{0}{0}$ என்ற வடிவம் ஆனது மதிப்பிட முடியாத வடிவங்களில் அடிப்படை வடிவம் ஆகும்.

5.2.6 இயற்கணித எல்லையின் வரம்புகளை (மதிப்பை) மதிப்பிடும் முறைகள்

(i) நேரடி பிரதியிடல்

(ii) காரணிப்படுத்தல்

(iii) விகிதமாக்கல் முறை

(iv) சில எல்லைகளின் திட்ட வாய்ப்பாடுகளைக் கொண்டு காணல்

5.2.7 சில திட்ட எல்லை வாய்பாடுகள்

(i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, n \in Q$

(ii) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta} = 1$, θ ரேடியனில்.

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_e a, \quad a>0$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

(v) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(vi) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

(vii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 5.16

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + 4x - 5)$.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 + 4x - 5)$$

$$= 3(1)^2 + 4(1) - 5 = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 5.17

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+6}{x+2}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+6}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+6)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}$$

$$=\frac{(2)^2-4(2)+6}{2+2}=\frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.18

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{5\sin 2x-2\cos 2x}{3\cos 2x+2\sin 2x}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{5\sin 2x-2\cos 2x}{3\cos 2x+2\sin 2x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(5\sin 2x-2\cos 2x)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(3\cos 2x+2\sin 2x)}$$

$$=\frac{5\sin\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}}{3\cos\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{5(1)-2(0)}{3(0)+2(1)}=\frac{5}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.19

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

தீர்வு

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ என்பது $\dfrac{0}{0}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$$

$$=(1)^2+1+1=3$$

எடுத்துக்காட்டு 5.20

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.21

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{3}{5}}-a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{1}{5}}}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{3}{5}}-a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{1}{5}}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{x^{\frac{3}{5}}-a^{\frac{3}{5}}}{x-a}}{\dfrac{x^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{1}{5}}}{x-a}}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}(a)^{-\frac{2}{5}}}{\frac{1}{5}(a)^{-\frac{4}{5}}}=3a^{\frac{-2}{5}+\frac{4}{5}}=3a^{\frac{2}{5}}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.22

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{3x\times\dfrac{\sin 3x}{3x}}{5x\times\dfrac{\sin 5x}{5x}}\right\}$$

$$=\frac{3}{5}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.23

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-5x^2}{4x+15x^2}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6-5x^2}{4x+15x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x^2}-5}{\frac{4}{x}+15}$$

$$=\frac{0-5}{0+15}=-\frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.24

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

தீர்வு

$y=\frac{1}{x}$ என்க. $x\to\infty$ எனும்பொழுது $y\to 0$ ஆகும்.

$$\lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y} = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.25

மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3}$.

தீர்வு

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(1)(2) = \frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.26

மதிப்பிடுக $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x} = 1.$

தீர்வு

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log(1+x^3)}{x^3}\times\frac{x^3}{\sin^3 x}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{x^3}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}$$

$$= 1\times\frac{1}{1} = 1$$

பயிற்சி 5.2

1. கீழ்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+2}{x+1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x^2+3x+9}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sum n}{n^2}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(v) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{\frac{5}{8}}-a^{\frac{5}{8}}}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to -a}\frac{x^9+a^9}{x+a} = \lim\limits_{x\to 3}(x+6)$ எனில் , a–ன் மதிப்பை காண்க.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2} = 448$ எனில், n–ன் மீச்சிறு மிகை முழு எண்ணை காண்க.

4. $f(x)=\frac{x^7-128}{x^5-32}$ எனில், $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ –ஐ காண்க.

5. $f(x)=\frac{ax+b}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ எனில், $f(-2)=0$ என நிறுவுக.

வகைக்கெழு (Dserivative)

இப்பகுதியை பற்றி தெரிந்து கொள்வதற்கு முன் நாம் ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மையை பற்றி இங்கு விரிவாக தெரிந்து கொள்வோம். சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = a$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியுடையது எனில் அதன் வளைவரை $x = a$ இல் முறிவு ஏதும் கிடையாது என்பதாகும்.

மேலும், $x = a$ இல் வளவரை முறிவை பெறுமாயின் சார்பு அப்புள்ளியில் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை கொண்டது எனலாம்.

சார்பு $f(x)$ ஆனது ஒரு இடைவெளியில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சித் தன்மையை பெற்றிருந்தால் அந்த குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சித் தன்மையை கொண்டதாகும்.

5.2.8 தொடர்ச்சி சார்பு (Continuous function)

சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = a$ இல் தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்டது எனில், பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $f(a)$ காணத்தக்கது.

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

கூர்நோக்கு

மேற்கூறியவரையறையின் நிபந்தனைகளில் ஏதேனும் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிபந்தனைகள் $x = a$–ல் பொருந்தவில்லை எனில் சார்பு $f(x)$, தொடர்ச்சி தன்மை அற்றது எனலாம்

5.2.9 தொடர் சார்புகளின் சில பண்புகள்

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்ற மெய்மதிப்புகளை கொண்ட சார்புகள் $x = a$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டதாக இருக்கும்போது,

(i) $f(x) \pm g(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(ii) $f(x)\, g(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(iii) $kf(x)$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது, k ஓர் மெய்யெண்.

(iv) $f(a) \neq 0$ எனில், $\dfrac{1}{f(x)}$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(v) $g(a) \neq 0$ எனில், $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

(vi) $|f(x)|$ என்பதும் $x = a$ இல் தொடர்ச்சியானது.

எடுத்துக்காட்டு 5.27

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 4, & 0 < x \le 1 \\ 4x^3 - 3x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு, $x = 1$ இல் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

தீர்வு

$$L\left[f(x)\right]_{x=1} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} f(1-h),\ x = 1-h$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[5(1-h) - 4\right]$$
$$= 5(1) - 4 = 1$$

$$R\left[f(x)\right]_{x=1} = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} f(1+h),\ x = 1+h$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[4(1+h)^3 - 3(1+h)\right]$$
$$= 4(1)^3 - 3(1)$$
$$= 4 - 3 = 1$$

இப்போது, $f(1) = 5(1) - 4 = 5-4 = 1$

$$\therefore \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

$\Rightarrow x = 1$ –ல் சார்பு $f(x)$ தொடர்ச்சியானது.

எடுத்துக்காட்டு 5.28

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 2 \\ 2 + x, & x \ge 2 \end{cases}$$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f இன் தொடர்ச்சித் தன்மையை $x = 2$ ல் ஆராய்க.

தீர்வு

$$L\left[f(x)\right]_{x=2} = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} f(2-h),\ x = 2-h$$
$$= \lim_{h \to 0} \{2 - (2-h)\}$$
$$= \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$R\left[f(x)\right]_{x=2} = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} f(2+h),\ x = 2+h$$
$$= \lim_{h \to 0} \{2 + (2+h)\}$$
$$= \lim_{h \to 0} (4+h) = 4$$

மேலும், $f(2) = 2+2 = 4$.

இங்கு $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$

$\therefore f(x)$ என்ற சார்பானாது $x = 2$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை அற்றது ஆகும்.

கூர்நோக்கு

(i) மாறிலிச் சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(ii) சமனிச் சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(iii) பல்லுறுப்புக் கோவை சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(iv) மட்டுச்சார்புஎங்கும்தொடர்ச்சியுடையது.

(v) அடுக்குக் குறிச் சார்பு a^x, $a>0$ எங்கும் தொடர்ச்சியுடையது.

(vi) மடக்கைச் சார்பு அதன் அரங்கத்தில் தெடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

(vii) அனைத்து விகிதமுறுச் சார்புகளும் அதன் அரங்கத்தில் உள்ள அனைத்து புள்ளிகளிடத்தும் தெடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x) & , \quad x < a \\ k & , \quad x = a \\ \beta(x) & , \quad x > a \end{cases}$$ எனில்

$$\mathrm{L}[f(x)]_{x=a} = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} \alpha(x)$$

$$\mathrm{R}[f(x)]_{x=a} = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} \beta(x)$$

$x = a$ என்ற புள்ளியின் இரு பக்கங்களிலும் சார்புக்கு வெவ்வேறு வரையறைகள் இருக்கும் போது மட்டுமே இது பொருந்தும்

பயிற்சி 5.3

1. கீழ்வரும் சார்புகளுக்கு சுட்டிக் காட்டப்பட்டுள்ள புள்ளியில் சார்புகளின் தெடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & , \; x \neq 2 \\ 0, & , \; x = 2 \end{cases}$ எனில் $x = 2$–ல்

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & , \; x \neq 3 \\ 6, & , \; x = 3 \end{cases}$ எனில் $x = 3$–ல்

2. $f(x) = |\,x\,|$ என்ற சார்பானது $x = 0$ இல் தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது என நிறுவுக.

5.2.10 ஒரு புள்ளியில் வகையீடு காணல் (Differentiability at a point)

$(a,\ b)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் $f(x)$ என்பது மெய்மதிப்புளை கொண்ட சார்பு மற்றும் $c \in (a, b)$ எனக் கொள்க.

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ காணத்தக்கதாக இருந்தால் $f(x)$ ஆனது $x = c$ –ல், வகையிட தக்கதாகும்.

இவ்வாறாக காணப்படும் எல்லை மதிப்பை, சார்பு $f(x)$க்கு $x = c$–ல் வகைக்கெழு மதிப்பு என்போம். இதனை $f'(c)$ அல்லது $Df(c)$ அல்லது $\left[\dfrac{d}{dx}(f(x))\right]_{x=c}$ என குறிப்பிடுவோம்.

ஆதலால், $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

5.2.11 இடக்கை மற்றும் வலக்கை வகையீடு

(i) $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ அல்லது

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}$ என்பது $x = c$–ல் சார்பு $f(x)$ இன் இடக்கை வகையீடு எனக் கூறுவோம். இதனை $f'(c^-)$ அல்லது $L[\,f'(c)]$ எனக் குறிப்போம்.

(ii) $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ அல்லது

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ என்பது $x = c$–ல் சார்பு $f(x)$ இன் வலக்கை வகையீடு எனக் கூறுவோம். இதனை $f'(c^+)$ அல்லது $R[\,f'(c)]$ எனக் குறிப்போம்.

முடிவு	$x = c$ இல் சார்பு $f(x)$ வகையிடத்தக்கது $\Longleftrightarrow L\big[f'(c)\big] = R\big[f'(c)\big]$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒரு புள்ளியிடத்து தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்ட சார்பு, அப்புள்ளியிடத்து வகையிடத்தக்கதாக இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

மேற்குறிப்பு:

(i) $L\left[f'(c)\right] \neq R\left[f'(c)\right]$ எனில், $f(x)$ ஆனது $x=c$ இல் வகையிடத்தக்கது அல்ல.

(ii) $x=c$ இல் சார்பு $f(x)$ ஆனது வகையிடத்தக்கது எனில், அப்புள்ளியில் சார்பு $f(x)$ ஆனது தொடர்ச்சித் தன்மை கொண்டது.

எடுத்துக்காட்டு 5.29

$f(x) = |x|$ என்ற சார்பு $x = 0$ இல் வகையிடத் தக்கது அல்ல என நிறுவுக.

தீர்வு

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & if \ \ x \geq 0 \\ -x & if \ \ x < 0 \end{cases}$$

$$L[f'(0)] = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{0-h-0}, \quad x = 0-h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|-h|-|0|}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|-h|}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(-1) = -1$$

$$R[f'(0)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0}, \ x = 0+h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

இங்கு, $L[f'(0)] \neq R[f'(0)]$

$\therefore$ $f(x)$ ஆனது $x = 0$ இல் வகையிடத்தக்கதல்ல

எடுத்துக்காட்டு 5.30

$x = 1$ இல் $f(x) = x^2$ ஆனது வகையிடத்தக்கது எனக் காட்டுக, மேலும் $f'(1)$ –ஐ காண்க.

தீர்வு

$f(x) = x^2$

$$L[f'(1)] = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{1-h-1}, \ x=1-h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)^2-1}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h^2-2h-1}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(-h+2) = 2$$

$$R[f'(1)] = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}, \ x = 1+h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h^2+2h-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(h+2) = 2$$

இங்கு, $L[f'(1)] = R[f'(1)]$

$\therefore$ $x = 1$ இல் சார்பு $f(x)$ ஆனது வகையிடத்தக்கது ஆகும். மேலும் $f'(1) = 2$

5.2.12 முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணல் (Differentiation from first principle)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

என்பதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காணும் முறையை முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து வகையீடு காணல் எனலாம். $f'(x)$ என்பதனை $\frac{dy}{dx}$ எனக் குறிக்கலாம்

5.2.13 சில சார்புகளுக்கான வகைக்கெழுவை முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து காணல்

1. $x \in R$ க்கு $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$

நிரூபணம்:

$f(x) = x^n$ என்க

$\therefore \quad f(x+h) = (x+h)^n$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-(x)^n}{(x+h)-x}\\ &= \lim_{z\to x}\frac{z^n-x^n}{z-x}\end{aligned}$$

இங்கு, $z = x + h$ மற்றும் $h \to 0$ எனும்போது $z \to x$ ஆகும்.

$$= nx^{n-1} \left[\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

i.e., $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

2. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

நிரூபணம்:

$f(x) = e^x$ என்க

$\therefore f(x+h) = e^{x+h}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h-e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} e^x\left[\frac{e^h-1}{h}\right]\\ &= e^x \lim_{h\to 0}\left[\frac{e^h-1}{h}\right]\\ &= e^x \times 1 \quad \left[\because \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}\right]=1\right]\\ &= e^x\end{aligned}$$

i.e., $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

3. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

நிரூபணம்:

$f(x) = \log_e x$ என்க

$\therefore f(x+h) = \log_e(x+h)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\;\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\\ &= \frac{1}{x}\times 1\end{aligned}$$

$$\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.31

முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து $\frac{d}{dx}(x^3)$ –ஐ காண்க.

தீர்வு

$f(x) = x^3$ என்க

$$\therefore\ f(x+h) = (x+h)^3$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2$$

$$= 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

எடுத்துக்காட்டு 5.32

முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து $\frac{d}{dx}(e^{3x})$ –ஐ காண்க.

தீர்வு

$f(x) = e^{3x}$ எனில்

$$\therefore f(x+h) = e^{3(x+h)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3(x+h)} - e^{3x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3x}\cdot e^{3h} - e^{3x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{3x}(e^{3h}-1)}{h}$$

$$= 3e^{3x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-1}{3h}$$

$$= 3e^{3x}\times 1 \qquad [\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1]$$

$$= 3e^{3x}$$

பயிற்சி 5.4

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு முதன்மைக் கொள்கையிலிருந்து x –ஐ பொறுத்த வகைக் கெழுவை காண்க.

(i) x^2 (ii) e^{-x} (iii) $\log(x+1)$

5.3 வகையிடல் உத்திகள் (Differentiation techniques)

இப்பகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளின் வகைக் கெழுக்களை காண பயன்படுத்தப்படும் வெவ்வேறு முறைகளை பற்றி விவாதிப்போம்.

5.3.1 சில திட்டமான முடிவுகள் (வாய்பாடுகள்)

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\frac{d}{dx}(k) = 0$, k ஒரு மாறிலி

4. $\frac{d}{dx}(kx) = k$, k ஒரு மாறிலி

5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

6. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

8. $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$

9. $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$

10. $\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right) = -2x\,e^{-x^2}$

11. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\log_e a$, $a > 0$

12. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

13. $\frac{d}{dx}\log_e(x+a) = \frac{1}{x+a}$

14. $\frac{d}{dx}\left(\log_e(ax+b)\right) = \frac{a}{(ax+b)}$

15. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\log_e a}$, a > 0 மற்றும் a ≠ 1

16. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

17. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

18. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

19. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$

20. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

21. $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x) = -\mathrm{cosec} x \cot x$

5.3.2 வகைக்கெழுக்களுக்கான பொது விதிகள்

(i) **கூட்டல் விதி**

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$$

(ii) **கழித்தல் விதி**

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] - \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$$

(iii) **பெருக்கல் விதி**

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]g(x) + f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$$

(அல்லது) $u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ எனில்,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

(iv) **வகுத்தல் விதி**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] - f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2},$$

$g(x) \neq 0$

(அல்லது) $u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ எனில்,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

(v) **பெருக்கு சார்பலனின் வகைக் கெழு**

$\frac{d}{dx}[c\, f(x)] = c\,\frac{d}{dx}[f(x)]$ இதில், c ஒரு மாறிலி

(vi) **சங்கிலி விதி:**

$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))\cdot g'(x)$ (அல்லது)

$y = f(t)$ மற்றும் $t = g(x)$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$

இங்கு, வகைக்கெழுவின் சில திட்டமான முடிவுகளைக் கொண்டும், பொது விதிகளைக் கொண்டும் பின் வரும் வெளிப்படு சார்புகளுக்கு வகைகெழுக்களை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.33

பின் வரும் சார்புகளை x –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

(i) $x^{\frac{3}{2}}$ (ii) $7e^x$ (iii) $\frac{1-3x}{1+3x}$

(iv) $x^2 \sin x$ (v) $\sin^3 x$

(vi) $\sqrt{x^2+x+1}$

தீர்வு

(i) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(ii) $\frac{d}{dx}(7e^x) = 7\frac{d}{dx}(e^x) = 7e^x$

(iii) $y = \frac{1-3x}{1+3x}$ என்ற சார்பை x –ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+3x)\frac{d}{dx}(1-3x) - (1-3x)\frac{d}{dx}(1+3x)}{(1+3x)^2}$$

$$= \frac{(1+3x)(-3)-(1-3x)(3)}{(1+3x)^2}$$

$$= \frac{-6}{(1+3x)^2}$$

(iv) $y = x^2 \sin x$ என்ற சார்பை x –ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2\cos x + 2x\sin x$$
$$= x(x\cos x + 2\sin x)$$

(v) $y = \sin^3 x$ (or) $(\sin x)^3$

$u = \sin x$ எனில் $y = u^3$ ஆகும்.

$u = \sin x$ என்ற சார்பை x –ஐ பொறுத்து வகையிட நாம்பெறுவது, $\frac{du}{dx} = \cos x$

$y = u^3$ என்ற சார்பை u -ஐ பொறுத்து வகையிட நாம்பெறுவது,

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 = 3\sin^2 x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3\sin^2 x\cdot\cos x$$

(vi) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$u = x^2 + x + 1$ எனில் $y = \sqrt{u}$ ஆகும்.

$u = x^2 + x + 1$ என்ற சார்பை x -ஐ பொறுத்து வகையிட நாம் பெறுவது,

$$\frac{du}{dx} = 2x + 1$$

$y = \sqrt{u}$ என்ற சார்பை u -ஐ பொறுத்து வகையிட நாம் பெறுவது, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}\cdot(2x + 1)$$
$$= \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

★ $\frac{d}{dx}(\sin(\log x)) = \frac{d}{d(\log x)}(\sin(\log x))\frac{d}{dx}(\log x)$

★ $\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1)^5 = \frac{d}{d(x^2 + 3x + 1)}(x^2 + 3x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1)$

★ $\frac{d}{dx}(e^{(x^3+3)}) = \frac{d}{d(x^3 + 3)}(e^{(x^3+3)})\frac{d}{dx}(x^3 + 3)$

எடுத்துக்காட்டு 5.34

$f(x) = x^n$ மற்றும் $f'(1) = 5$ எனில், n இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$f(x) = x^n$$
$$\therefore f'(x) = nx^{n-1}$$
$$f'(1) = n(1)^{n-1}$$
$$f'(1) = n$$
$$f'(1) = 5 \text{ (கணக்கின்படி)}$$
$$\Longrightarrow n = 5$$

எடுத்துக்காட்டு 5.35

$y = \frac{1}{u^2}$ மற்றும் $u = x^2 - 9$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

தீர்வு

$$y = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$$
$$\frac{dy}{du} = -\frac{2}{u^3}$$
$$\frac{dy}{du} = -\frac{2}{(x^2 - 9)^3} \quad (\because u = x^2 - 9)$$
$$u = x^2 - 9$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$

இப்போது, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$= -\frac{2}{(x^2 - 9)^3}\cdot 2x$$
$$= -\frac{4x}{(x^2 - 9)^3}.$$

05_11th_BM-STAT_Ch-5-TM.indd 123 13-12-2021 11:31:03

பயிற்சி 5.5

1. பின்வரும் சார்புகளை x –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

(i) $3x^4 - 2x^3 + x + 8$

(ii) $\dfrac{5}{x^4} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{5}{x}$

(iii) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + e^x$

(iv) $\dfrac{3 + 2x - x^2}{x}$

(v) $x^3 e^x$

(vi) $(x^2 - 3x + 2)(x + 1)$

(vii) $x^4 - 3\sin x + \cos x$

(viii) $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

2. பின்வரும் சார்புகளை x –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

(i) $\dfrac{e^x}{1+x}$ (ii) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ (iii) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$

3. பின்வரும் சார்புகளுக்கு x –ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

(i) $x \sin x$ (ii) $e^x \sin x$

(iii) $e^x(x + \log x)$ (iv) $\sin x \cos x$

(v) $x^3 e^x$

4. பின்வரும் சார்புகளுக்கு x –ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

(i) $\sin^2 x$ (ii) $\cos^2 x$ (iii) $\cos^3 x$

(iv) $\sqrt{1+x^2}$ (v) $(ax^2 + bx + c)^n$

(vi) $\sin(x^2)$ (vii) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5.3.3 உட்படு சார்புகளுக்கான வகையீடு (Derivative of implicit functions)

$f(x, y) = 0$ என்ற உட்படு சார்பில் உள்ள y யை x இல் அமையும் சார்பாக கருதி x க்கு வகையீடு கண்டு, அதில் $\dfrac{dy}{dx}$ அடங்கிய பகுதிகளை இடப்புறமும், மீதமுள்ள பகுதிகளை வலப்புறமும் இடம்பெறுமாறு மாற்றி எழுதியபின் $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

குறிப்பு

$f(x, y) = 0$ என்ற சார்பு உட்படு சார்பாக இருக்கும் போது $\dfrac{dy}{dx}$ ஆனது x மற்றும் y உறுப்புகளைக் கொண்டு இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.36

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

தீர்வு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

இருபுறமும் x –ஐ பொறுத்து வகையீடு காண,

$$2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2ax + 2hy + 2g) + (2hx + 2by + 2f)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.37

$x^3 + y^3 = 3axy$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

தீர்வு

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

இருபுறமும் x –ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண,

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(3axy)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left[x\frac{dy}{dx} + y\right]$$

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = ax\frac{dy}{dx} + ay$$

$$(y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = (ay - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.38

$2x^2 + 3xy + 5y^2 = 10$ என்ற வளைவரைக்கு $(1,1)$ –ல், $\dfrac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு காண்.

தீர்வு

$$2x^2+3xy+5y^2=10$$

இருபுறமும் x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d}{dx}\left[2x^2+3xy+5y^2\right] = \frac{d}{dx}\,[10]$$

$$4x+3x\frac{dy}{dx}+3y+10y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x+10y)\frac{dy}{dx} = -3y-4x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(3y+4x)}{(3x+10y)}$$

$\therefore$ (1, 1) இல் $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3+4}{3+10}$

$$= -\frac{7}{13}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.39

$\sin y = x\sin(a+y)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sin y = x\sin(a+y)$$

$$x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$$

y –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y)\cos y-\sin y\cdot\cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

பயிற்சி 5.6

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $\dfrac{dy}{dx}$ ஐ காண்க

   (i) $xy=\tan(xy)$

   (ii) $x^2-xy+y^2=7$

   (iii) $x^3+y^3+3axy=1$

2. $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0,\ x\neq y$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ என நிறுவுக

3. $4x+3y=\log(4x-3y)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

5.3.4 மடக்கையை பயன்படுத்தி வகைக்கெழு காணல் (Logarithmic differentiation)

சில சமயங்களில் சார்புகளானது, பெருக்கல், வகுத்தல் மற்றும் அடுக்குகள் கொண்டும், மற்றும் சார்புகளின் அடுக்குகளில் மாறிகள் கொண்டும் அமையலாம். இவ்வகையான சார்புகளை மடக்கையை பயன்படுத்தி எளிய முறையில் மாற்றி வகையீடு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.40

பின்வருவனவற்றை x –ஐ பொறுத்து வகையீடு காண்க.

(i) x^x (ii) $(\log x)^{\cos x}$

தீர்வு

(i) $y=x^x$ என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\log y = x\log x$$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y[1+\log x]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^x[1+\log x]$$

(ii) $y=(\log x)^{\cos x}$ என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\therefore\ \log y = \cos x\ \log(\log x)$$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \cos x\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}+\left[\log(\log x)\right](-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cos x}{x\log x}-\sin x\ \log(\log x)\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\log x)^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x \log x} - \sin x \log(\log x)\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 5.41

$x^y = e^{x-y}$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$x^y = e^{x-y}$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க,

$$y \log x = (x-y)$$

$$y(1+\log x) = x$$

$$y = \frac{x}{1+\log x}$$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)(1) - x\left(0+\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.42

வகைக் கெழு காண் : $\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$

தீர்வு

$$y = \sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}} = \left[\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}\right]^{\frac{1}{2}}$$

என்க

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க,

$$\log y = \frac{1}{2}\left[\log(x-3) + \log(x^2+4) - \log(3x^2+4x+5)\right]$$

$\left[\because \log ab = \log a + \log b\right.$ மற்றும் $\left.\log\frac{a}{b} = \log a - \log b\right]$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-3} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{x-3} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

பயிற்சி 5.7

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு x –ஐ பொறுத்து வகைகெழு காண்.

   (i) $x^{\sin x}$ (ii) $(\sin x)^x$

   (iii) $(\sin x)^{\tan x}$ (iv) $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x^2+x+1)}}$

2. $x^m \cdot y^n = (x+y)^{m+n}$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ எனக் காட்டுக.

5.3.5 துணையலகு சார்புகளின் வகையீடு (Differentiation of paramatric functions)

x மற்றும் y எனும் மாறிகள் மூன்றாவது மாறி t –ன் சார்புகளாக இருப்பின் அவை துணையலகுச் சார்புகள் எனப்படும். t என்பது சார்பின் துணையலகு எனப்படும்.

$x = f(t)$ மற்றும் $y = g(t)$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

5.3.6 ஒரு சார்பை மற்றொரு சார்பை பொறுத்து வகையிடல் காணல் (Differentiation of a function with respect to an another function)

$u = f(x)$ மற்றும் $v = g(x)$ என்பன x –ன் மீதான இரு சார்புகள் எனில் $g(x)$ –ஐ பொறுத்து $f(x)$ –ன் வகைக்கெழுவானது,

$$\frac{d(f(x))}{d(g(x))} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.43

பின்வரும் துணையலகு சார்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க

(i) $x = at^2$, $y = 2at$

(ii) $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$

தீர்வு

(i)

$x = at^2$	$y = 2at$
$\frac{dx}{dt} = 2at$	$\frac{dy}{dt} = 2a$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

(ii) $\quad x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta \quad \Bigg| \quad \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta}$$

$$= -\cot\theta$$

எடுத்துக்காட்டு 5.44

$x = a\theta$ மற்றும் $y = \frac{a}{\theta}$ எனில், $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$x = a\theta \quad \Bigg| \quad y = \frac{a}{\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \quad \Bigg| \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{-a}{\theta^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{\theta^2}\right)}{a}$$

$$= -\frac{1}{\theta^2}$$

$$= -\frac{y}{x}$$

i.e. $\quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$

மாற்றுமுறை :

$xy = a\theta \cdot \frac{a}{\theta}$ என எடுக்க,

$xy = a^2$

x –ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 5.45

$\frac{x^2}{1+x^2}$ என்ற சார்பிற்கு x^2–ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு

$$u = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \Bigg| \quad v = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1+x^2)(2x) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2} \quad \Bigg| \quad \therefore \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$= \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dx}\right)}$$

$$= \frac{\left[\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]}{2x}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

பயிற்சி 5.8

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx}$ –ஐ காண்க.

 (i) $x = ct,\ y = \frac{c}{t}$

 (ii) $x = \log t,\ y = \sin t$

 (iii) $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$

 (iv) $x = a(\theta - \sin\theta),\quad y = a(1 - \cos\theta)$

2. $\sin^3 x$ என்ற சார்பை $\cos^3 x$ –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

3. $\sin^2 x$ என்ற சார்பை x^2 –ஐ பொறுத்து வகையிடுக.

5.3.7 தொடர் வகையிடல் (Successive differentiation)

ஒரு சார்பை மீண்டும் மீண்டும் வகைப்படுத்தி அதன் வகையீடுகளை காணும் முறையை தொடர் வகையிடல் என்போம்.

(i) y என்ற சார்பின் x –ஐ பொறுத்த வகையீட்டை முதலாம் வரிசை வகையிடல் என்போம். இதனை $\frac{dy}{dx}$ (அல்லது) y_1 (அல்லது) $f'(x)$ எனக் குறிப்போம்.

(ii) $f'(x)$ என்பதும் வகையிடத்தக்கது எனில் x –ஐ பொறுத்து $f'(x)$ –ன் வகையீட்டை இரண்டாம் வரிசை வகையிடல் என்போம் இதனை $\frac{d^2y}{dx^2}$ (அல்லது) y_2 (அல்லது) $f''(x)$ எனக் குறிப்போம்.

(iii) மேலும் $\frac{d^ny}{dx^n}$ (அல்லது) y_n (அல்லது) $f^{(n)}(x)$ என்பது $y = f(x)$ ன் n வது வரிசை வகைக்கெழு ஆகும்.

மேற்குறிப்பு

(i) $y = f(x)$ எனில்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

(ii) $x = f(t)$ மற்றும், $y = g(t)$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}\cdot\frac{dt}{dx}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.46

பின்வரும் சார்புகளுக்கு x –ஐ பொறுத்து இரண்டாம் வகைக் கெழுவை காண்க,

(i) $3\cos x + 4\sin x$

(ii) $x = at^2, \quad y = 2at$

(iii) $x\sin x$

தீர்வு

(i)
$$\begin{aligned} y &= 3\cos x + 4\sin x \\ y_1 &= -3\sin x + 4\cos x \\ y_2 &= -3\cos x - 4\sin x \\ y_2 &= -(3\cos x + 4\sin x) \end{aligned}$$

$y_2 = -y$ (அல்லது) $y_2 + y = 0$

(ii) $x = at^2$, $\quad \frac{dx}{dt} = 2at$ | $y = 2at$, $\quad \frac{dy}{dt} = 2a$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{1}{t}$$

இப்பொழுது, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2at} \\ &= -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2at} \\ &= -\frac{1}{2at^3} \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} y &= x\sin x \\ \frac{dy}{dx} &= x\cos x + \sin x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -x\sin x + \cos x + \cos x \\ &= 2\cos x - x\sin x \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.47

$y = A\sin x + B\cos x$ எனில், $y_2 + y = 0$ என நிறுவுக,

தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= A\sin x + B\cos x \\ y_1 &= A\cos x - B\sin x \\ y_2 &= -A\sin x - B\cos x \\ y_2 &= -y \\ y_2 + y &= 0 \end{aligned}$$

பயிற்சி 5.9

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு y_2 –ஐ காண்க

(i) $y = e^{3x+2}$

(ii) $y = \log x + a^x$

(iii) $x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta$

2. $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ எனில், $y_2 - 49y = 0$ எனக் காட்டுக.

3. $y = 2 + \log x$ எனில், $xy_2 + y_1 = 0$ எனக் காட்டுக.

4. $y = a\cos mx + b\sin mx$ எனில், $y_2 + m^2 y = 0$ எனக் காட்டுக.

5. $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ எனில், $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$ எனக் காட்டுக.

6. $y = \sin(\log x)$ எனில், $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ எனக் காட்டுக.

பயிற்சி 5.10

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $f(x) = x^2 - x + 1$ எனில், $f(x+1)$ ஆனது

(a) x^2 (b) x
(c) 1 (d) $x^2 + x + 1$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & , x \geq 2 \\ x + 2 & , x < 2 \end{cases}$ எனில், $f(5)$ இன் மதிப்பு

(a) –1 (b) 2 (c) 5 (d) 7

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & , x \geq 2 \\ x + 2 & , x < 2 \end{cases}$ எனில், $f(0)$ இன் மதிப்பு

(a) 2 (b) 5 (c) –1 (d) 0

4. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, $x > 1$ எனில், $f(-x) =$

(a) $-f(x)$ (b) $\dfrac{1}{f(x)}$
(c) $-\dfrac{1}{f(x)}$ (d) $f(x)$

5. $y = 3$ இன் வரைபடமானது

(a) x-அச்சுக்கு இணை
(b) y-அச்சுக்கு இணை
(c) ஆதியின் வழிச் செல்லும்
(d) x-அச்சை வெட்டிச் செல்லும்

6. $y = 2x^2$ என்ற வரைபடம் எந்தப்புள்ளி வழியாக செல்லும்?

(a) (0,0) (b) (2,1)
(c) (2,0) (d) (0,2)

7. $y = e^x$ என்ற வரைபடமும் y அச்சும் வெட்டும் புள்ளி

(a) (0, 0) (b) (1, 0)
(c) (0, 1) (d) (1, 1)

8. $f(x) = |x|$ என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு

(a) 0 (b) –1 (c) +1 (d) $-\infty$

9. $x \neq 0$ என்ற நிலையில் கீழ்வரும் சார்புகளில் எந்த சார்பு $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ என்ற வகையில் அமையும்

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$

(c) $f(x) = x$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

10. $f(x) = 2^x$ மற்றும் $g(x) = \dfrac{1}{2^x}$ எனில், $(fg)(x)$ இன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 0 (c) 4^x (d) $\dfrac{1}{4^x}$

11. கீழ்காணும் சார்புகளில் எது ஒற்றை சார்பாகவும் மற்றும் இரட்டை சார்பாகவும் இருக்காது?

(a) $f(x) = x^3 + 5$ (b) $f(x) = x^5$
(c) $f(x) = x^{10}$ (d) $f(x) = x^2$

12. அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x) = -5$ என்பது

(a) ஒரு சமனிச் சார்பு
(b) மட்டுச் சார்பு
(c) அடுக்குச் சார்பு
(d) மாறிலிச் சார்பு

13. அனைத்து $x \in R$ க்கு $f(x) = |x|$ –ன் வீச்சகமானது

(a) $(0, \infty)$ (b) $[0, \infty)$

(c) $(-\infty, \infty)$ (d) $[1, \infty)$

14. $f(x) = e^x$ இன் வரைபடத்தை போல் ஒத்த வரைபடத்தைக் கொண்ட சார்பு

(a) $f(x) = a^x, a > 1$

(b) $f(x) = a^x, a < 1$

(c) $f(x) = a^x, 0 < a < 1$

(d) $y = ax + b, a \neq 0$

15. $f(x) = x^2$ மற்றும் $g(x) = 2x+1$ எனில், $(fg)(0)$ இன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 4

16. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta} =$

(a) 1 (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) θ

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} =$

(a) e (b) nx^{n-1}

(c) 1 (d) 0

18. x இன் எம்மதிப்புக்கு, $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ தொடர்ச்சி அற்றது?

(a) –2 (b) 1 (c) 2 (d) –1

19. சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = a$ இல் தொடர்ச்சித்தன்மை கொண்டது எனில் $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ன் மதிப்பு

(a) $f(-a)$ (b) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

(c) $2f(a)$ (d) $f(a)$

20. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

(a) $-\dfrac{1}{x^2}$ (b) $-\dfrac{1}{x}$

(c) $\log x$ (d) $\dfrac{1}{x^2}$

21. $\dfrac{d}{dx}(5e^x - 2\log x) =$

(a) $5e^x - \dfrac{2}{x}$ (b) $5e^x - 2x$

(c) $5e^x - \dfrac{1}{x}$ (d) $2\log x$

22. $y = x$ மற்றும் $z = \dfrac{1}{x}$ எனில் $\dfrac{dy}{dz} =$

(a) x^2 (b) 1 (c) $-x^2$ (d) $-\dfrac{1}{x^2}$

23. $y = e^{2x}$ எனில், $x = 0$ இல் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ இன் மதிப்பு

(a) 4 (b) 9 (c) 2 (d) 0

24. $y = \log x$ எனில், $y_2 =$

(a) $\dfrac{1}{x}$ (b) $-\dfrac{1}{x^2}$

(c) $-\dfrac{2}{x^2}$ (d) e^2

25. $\dfrac{d}{dx}(a^x) =$

(a) $\dfrac{1}{x\log_e a}$ (b) a^a

(c) $x\log_e a$ (d) $a^x\log_e a$

இதர கணக்குகள்

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}, x > -\dfrac{1}{2}$ எனில், $f(f(x)) = \dfrac{2x+1}{2x+3}$ என நிறுவுக.

2. $y = 9-x^2$ இன் வரைபடம் வரைக.

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$ எனில், $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ காணத்தக்கது அல்ல எனக் காண்பி.

4. மதிப்பிடுக: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

5. $f(x) = 2x-|x|$ என்ற சார்பு $x=0$ இல் தொடர்ச்சியுடைய சார்பு எனக் காட்டுக

6. $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x < 1 \\ (1-x)(2-x) & , 1 \le x \le 2 \\ 3-x & , x > 2 \end{cases}$

எனும் சார்புக்கு $x = 1$ மற்றும் $x=2$ இல் அதன் தொடர்ச்சித் தன்மை மற்றும் வகையீட்டுத் தன்மையை ஆராய்க.

7. $x^y = y^x$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{x\log y - y}{y\log x - x}\right)$ என நிறுவுக.

8. $xy^2 = 1$ எனில், $2\frac{dy}{dx} + y^3 = 0$ என நிறுவுக.

9. $y = \tan x$ எனில், $y_2 - 2yy_1 = 0$ என நிறுவுக.

10. $y = 2\sin x + 3\cos x$ எனில், $y_2 + y = 0$ என நிறுவுக.

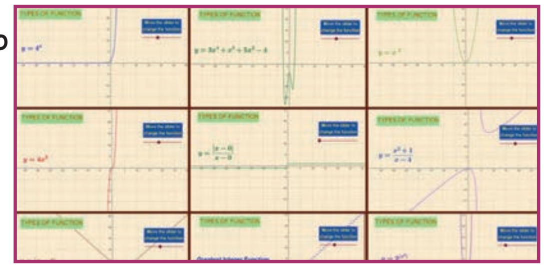
தொகுப்புரை

- A மற்றும் B என்பன மெய் எண்களைக் கொண்ட இரு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. A இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் B இல் உள்ள ஒரேயொரு உறுப்புடன் மட்டும் தொடர்பு படுத்தும் f என்ற விதியானது கணம் Aலிருந்து B க்கான சார்பு ஆகும்.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ காணத்தக்கது $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
- மெய்யெண் a மற்றும் $f(x)$ என்ற சார்புக்கு , $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ மற்றும் $f(a)$ இன் மதிப்புகள் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.
- $x = a$ இல் சார்பு $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ஆவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- சார்பு $f(x)$ ஒரு அரங்கத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியுடைய சார்பாக இருந்தால் அது தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.
- $f(x)$, $g(x)$ என்ற இரு சார்புகள் அதன் பொதுவான அரங்கத்தில் தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் எனில் $f \pm g$, $f \cdot g$, kf (k ஒரு மாறிலி) என்ற சார்புகளும் தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் மற்றும் $g \neq 0$ எனில் $\frac{f}{g}$ ம் தொடர்ச்சியான சார்பு ஆகும்.
- $L[f'(c)] = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}$ மற்றும் $R[f'(c)] = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$
- $f(x)$ என்ற சார்பு $x = c$ இல் வகையிட தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $L[f'(c)] = R[f'(c)]$ ஆகும்.
- சார்பு $f(x)$ ஆனது $x=c$ இல் வகையிட தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ முடிவுறு எண்ணாகவும், காணத்தக்கதாகவும் அமைய வேண்டும். இதனை $f'(c)$ எனக் குறிப்போம்.
- அனைத்து வகையிடத்தக்க சார்புகளும், தொடர்ச்சியுடைய சார்புகள் ஆகும். ஆனால் இதன் மறுதலை மெய்யாக இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.
- $y = f(x)$ எனில், $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ என்பது y –ஐ பொறுத்து x –ன் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு ஆகும்.
- $x = f(t)$ மற்றும் $y = g(t)$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}$ அல்லது $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\} \cdot \frac{dt}{dx}$

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
அடுக்கு	Exponential
அண்மையகம்	Neighbourhood
இடக்கை எல்லை	Left limit
இடைவெளி	Interval
இயற்கணித சார்புகள்	Algebric functions
உட்படு	Implict
எல்லை	Limit
குறிச் சார்பு	Signum function
சங்கிலி விதி	Chain rule
சமனி	Identity
சாரா மாறி	Independent variable
சார்ந்த மாறி	Dependent variable
சார்பகம் / அரங்கம்	Domain
சார்பு	Function
தன்னிச்சை மாறிலிகள்	Arbitrary constants
திறந்த இடைவெளி	Open interval
துணையலகு சார்புகள்	Parametric functions
தொடர் வகையிடல்	Successive differentiation
தொடர்ச்சி	Continuous
மடக்கை	Logarithmic
மட்டு	Modulus
மாறி	Variable
மாறிலி	Constant
முழுமையான மாறிலிகள்	Absolute constants
மூடிய இடைவெளி	Closed interval
வகையீடு	Derivative
வலக்கை எல்லை	Right limit
விஞ்சிய சார்புகள்	Transcendental functions
வீச்சகம்	Range
வெளிபடு	Explict

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Types of Functions"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

படி - 2

"Types of Functions" க்கான பணித்தாளில் வலப் பக்கம் காணப்படும் சார்புகளின் வகைகளின் தேர்வுப் பெட்டிகளை ஒவ்வொன்றாகச் சொடுக்கினால் இடப் பக்கத்தில் அதற்கான வரைபடங்கள் தோன்றும். மேலும் இடப் பக்கம் உள்ள நழுவலை நகர்த்தி சார்புகளை மாற்றி மீளாய்வு செய்க.

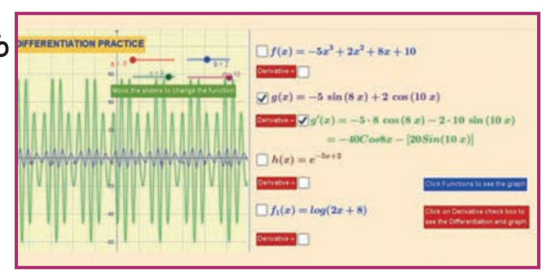
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

XD413

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Elementary Differentiation"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

படி - 2

"Elementary Differentiation" க்கான பணித்தாளில் வணிகப் பாடத்தின் அடிப்படையான 4 வகைக்கெழு கணக்குகளை வலப் பக்கத்தில் காணலாம். அருகில் உள்ள தேர்வுப் பெட்டிகளை ஒவ்வொன்றாகச் சொடுக்கினால் இடப் பக்கத்தில் அதற்கான வரைபடங்கள் தோன்றும். ஒவ்வொரு கணக்காக வகைக்கெழுவைக் கணக்கிட்டு விடையினைச் சரிபார்க்கவும். மேலும் இடப் பக்கத்தில் உள்ள *a, b, c, d* எனும் நழுவல்களை நகர்த்தி புதிய சார்புகளை அமைக்கலாம்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

GHJ1B

அத்தியாயம் 6

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துக் கொள்ள இயலும்

- தேவை மற்றும் அளிப்பு என்பனவற்றின் கருத்துருக்கள்.
- செலவு, வருவாய் மற்றும் இலாபச் சார்பு என்பதன் பொருள் மற்றும் பயன்கள்.
- சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை எனும் கருத்துருக்கள்.
- தேவை மற்றும் அளிப்பு நெகிழ்ச்சிகள்
- சராசரி வருவாய், இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் தேவை நெகிழ்ச்சிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு.
- கூடும் மற்றும் குறையும் சார்பின் பயன்பாடுகள்
- பெருமம் மற்றும் சிறுமங்களின் பயன்பாடுகள்
- மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு எனும் கருத்துரு
- பகுதி வகையீடுகளின் கருத்துருக்கள்
- பொருளாதாரத்தில் பகுதி வகையீடுகளின் பயன்பாடுகள்
- பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சிகள்.

அறிமுகம்

நவீன பொருளாதார கருத்தியல்கள் வகை நுண்கணிதம் மற்றும் தொகை நுண் கணிதத்தின் தத்துவங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டது. பொருளாதாரத்தில் வகை நுண்கணிதமானது இறுதிநிலைச் செலவு, இறுதிநிலை வருவாய், பெருமம் மற்றும் சிறுமம், நெகிழ்ச்சிகள், பகுதி நெகிழ்ச்சி களைக் கணக்கிடுவதற்குப் பயன்படுகிறது. மேலும் இது ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பில்

லியோனார்ட் ஆய்லர்

மீப்பெரு இலாபத்தை அல்லது மீச்சிறு நட்டத்தைக் கணிக்க பொருளாதார வல்லுநர்களுக்கு உதவுகிறது. இந்த அத்தியா யத்தில், நாம் வகையீடு களின் வாயிலாக வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரம் பற்றிய சில முக்கியமானக் கருத்துருக்கள் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள் பற்றி இங்கு பயில்வோம்.

பொருளாதாரத்தில் ஆய்லரின் தேற்றம்

ஒரு உற்பத்தி சார்பின் காரணிகள் அதனுடைய இறுதி நிலை உற்பத்தி காரணிகளின் பெருகற்பலனாகக் கணக்கிடப் பட்டால் அவற்றின் மொத்த உற்பத்தியானது உற்பத்தி சார்பு மற்றும் அதனுடைய ஓர்நிலைத்தன்மைப் படியின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமமாகும்.

6.1 வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத்தில் வகையீடுகளின் பயன்பாடுகள் (Applications of differentiation in business and economics)

ஒரு பொருளாதாரச் சூழ்நிலையில், விலை மற்றும் அளவு என்பன மாறிகள் எனக் கருதுக. p என்பது ஒரு பொருளின் அலகு விலை ரூபாயிலும் மற்றும் x என்பது நுகர்வோரால் கோரப்பட்ட (அல்லது) உற்பத்தியாளரால் வழங்கப்பட்ட அப்பொருளின் உற்பத்தி (வெளியீடு / அளவு) என்க.

6.1.1 தேவை, அளிப்பு, செலவு, வருவாய் மற்றும் இலாபச் சார்புகள் (Demand, supply, cost, revenue and profit functions)

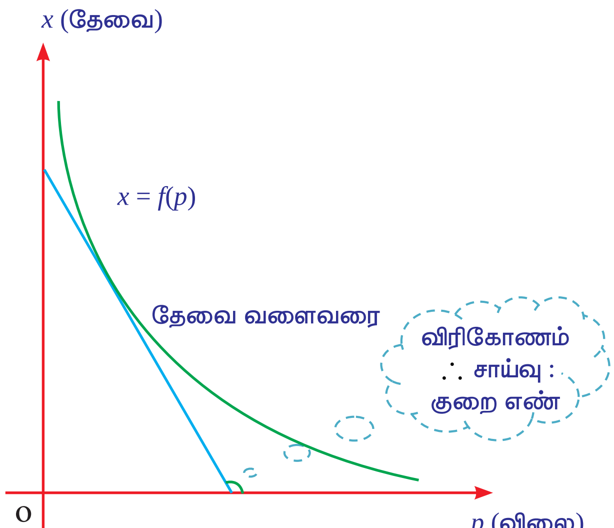
தேவைச் சார்பு: (Demand function)

சந்தையில், நுகர்வோரால் கோரப்பட்ட ஒரு பொருளின் அளவானது, அப்பொருளின்

விலையைச் சார்ந்துள்ளது. எனவே பொருளின் விலை அதிகரிக்கும் பொழுது, கோரப்படும் அளவு குறைகிறது மற்றும் பொருளின் விலை குறையும் பொழுது கோரப்படும் அளவு அதிகரிக்கிறது.

நுகர்வோர்களால் கோரப்பட்ட ஒரு பொருளின் அளவுக்கும் அதன் அலகு விலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு **தேவைச் சார்பு** எனப்படும். மேலும் இது $x = f(p)$ அல்லது $p = f(x)$, $x > 0$ மற்றும் $p > 0$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x = f(p)$ என்ற தேவைச் சார்பின் வரைபடம்:



படம் : 6.1

> **உங்களுக்கு தெரியுமா?** "தேவை – விலை" தொடர்பு வளைவரையானது விலை மற்றும் கோரப்படும் அளவு ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள எதிர்மறை தொடர்பை விளக்குகிறது.

கூர்நோக்கு : (Observations)

(i) தேவைச் சார்பில், விலை மற்றும் அளவு எதிர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

(ii) தேவைச் சார்பின் வளைவரை முதல் கால் பகுதியில் மட்டுமே அமையும்.

(iii) தேவை வளைவரையில், எந்த ஒரு தொடுகோட்டுக்கும், அதன் மிகை திசைக் கான x–அச்சுக்கும், இடையேயுள்ள கோணம் எப்பொழுதும் விரிகோணம் ஆகும்.

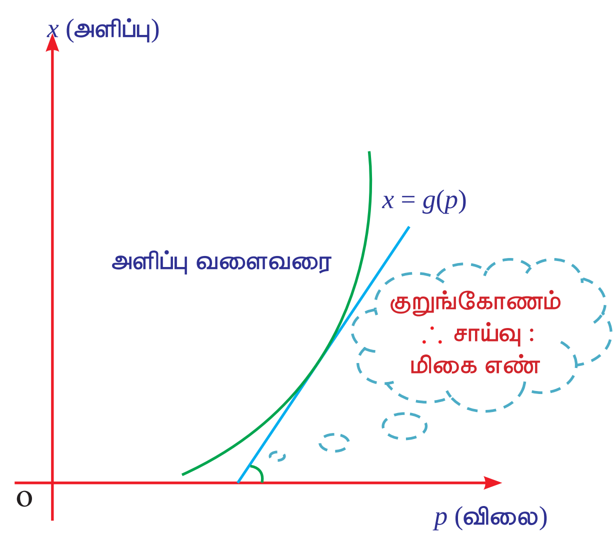
(iv) தேவை வளைவரையின் சாய்வு, ஒரு குறை எண் (–ve) ஆகும்.

அளிப்புச் சார்பு: (Supply function)

சந்தையில், உற்பத்தியாளரால் வழங்கப் பட்ட ஒரு பொருளின் அளவானது அப்பொருளின் விலையைச் சார்ந்துள்ளது. எனவே பொருளின் விலை அதிகரிக்கும்பொழுது, வழங்கப்படும் அளவானதும் அதிகரிக்கிறது மற்றும் பொருளின் விலை குறையும்பொழுது வழங்கப்படும் அளவானதும் குறைகிறது.

உற்பத்தியாளரால் வழங்கப்படும் ஒரு பொருளின் அளவுக்கும் அதன் அலகு விலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு **அளிப்புச் சார்பு** எனப்படும். மேலும் இது $x = g(p)$ (அல்லது) $p = g(x)$, $x > 0$ மற்றும் $p > 0$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x = g(p)$ எனும் அளிப்புச் சார்பின் வரைபடம்:



படம் : 6.2

கூர்நோக்கு : (Observations)

(i) அளிப்பு சார்பில், விலை மற்றும் அளவு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

(ii) அளிப்பு சார்பின் வளைவரை முதல் கால் பகுதியில் மட்டுமே அமையும்.

(iii) அளிப்பு வளைவரையில், எந்த ஒரு தொடுகோட்டுக்கும் அதன் மிகை திசைக்காண x–அச்சுக்கும், இடையே யுள்ள கோணம் எப்பொழுதும் குறுங் கோணம் ஆகும்.

(iv) அளிப்பு வளைவரையின் சாய்வு, ஒரு மிகை எண் (+ve) ஆகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

"அளிப்பு – விலை" தொடர்பு வளைவரையானது விலை மற்றும் வழங்கப்படும் அளவு ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள நேர்மறை தொடர்பை விளக்குகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

தேவை / அளிப்பு விதியானது மாற்றத்தின் திசையை தான் நமக்குச் சொல்கிறது, அதில் நடைபெறுகின்ற மாற்றத்தின் விகிதத்தை அல்ல.

சமன்நிலை விலை: (Equilibrium Price)

ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அதன் அளிப்பு சமநிலையை அடையும்பொழுது கிடைக்கப்பெறும் விலையே சமன்நிலை விலையாகும். மேலும் இதனை p_E எனக் குறிக்கலாம்.

சமன்நிலை அளவு: (Equilibrium Quantity)

ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அதன் அளிப்பு சமநிலையை அடையும்பொழுது கிடைக்கப்பெறும் அளவே சமன்நிலை அளவாகும். மேலும் இதனை x_E எனக் குறிக்கலாம்.

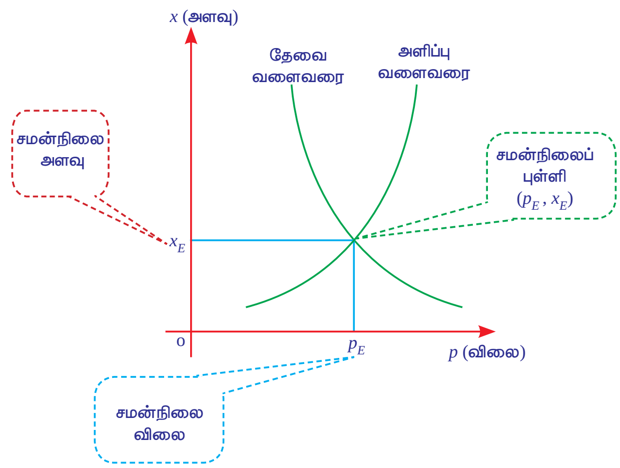
குறிப்பு:

பொதுவாக, தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகளில், அளவு x ஆனது விலை p –ன் வாயிலாக வெளிப்படுத்தப்படுகிறது. எனவே சமன்நிலை விலை p_E - யை தேவைச் சார்பு (அல்லது) அளிப்புச் சார்பில் பிரதியிட்டு சமன்நிலை அளவானது பெறப்படுகிறது.

சமன்நிலைப் புள்ளி: (Equilibrium Point)

தேவை மற்றும் அளிப்பு வளைவரைகளின் வெட்டுப் புள்ளி, (p_E, x_E)–ஐ சமன்நிலைப் புள்ளி என்போம்.

சமன்நிலை விலை, சமன்நிலை அளவு மற்றும் சமன்நிலைப் புள்ளிக்கான விளக்கப்படம்: (Diagrammatical explanation of equilibrium price, equilibrium quantity and equilibrium point)



படம் : 6.3

சராசரி மற்றும் இறுதிநிலை கருத்துருக்கள்: (Average and Marginal concepts)

பொதுவாக 'x' எனும் சாரா மாறியின் அளவைப் பொறுத்து 'y' என்ற சார்ந்த மாறியின் அளவில் ஏற்படும் மாறுபாட்டை இரு கருத்துருக்களின் அடிப்படையில் விவரிக்கலாம், அவையாவன:

(i) சராசரி கருத்துரு

(ii) இறுதிநிலை கருத்துரு

(i) சராசரியின் கருத்துரு: (Average concept)

சராசரி கருத்துருவானது x இன் முழு வீச்சு மீதான y இன் மாறுபாடாகும். இதனை $\frac{y}{x}$ எனக் குறிக்கலாம்.

(ii) இறுதிநிலையின் கருத்துரு: (Marginal concept)

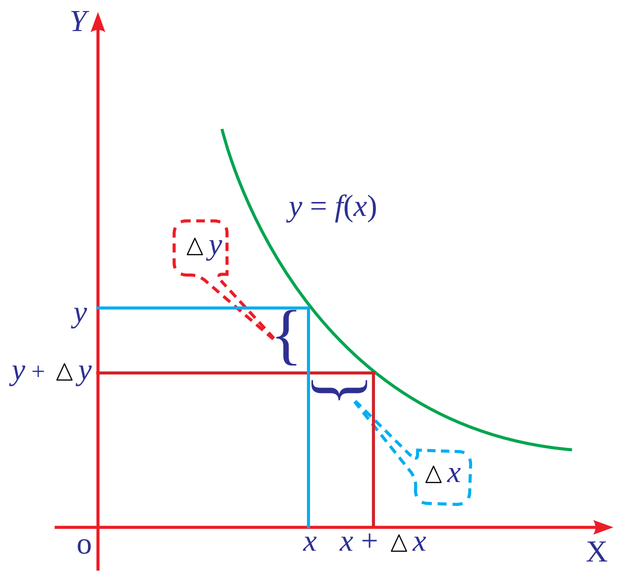
இறுதிநிலை கருத்துருவானது x – ஐ பொறுத்து y இல் ஏற்படக்கூடிய உடனடி மாறுவீதமாகும். இதனை $\frac{dy}{dx}$ எனக் குறிக்கலாம்.

மேற்குறிப்பு:

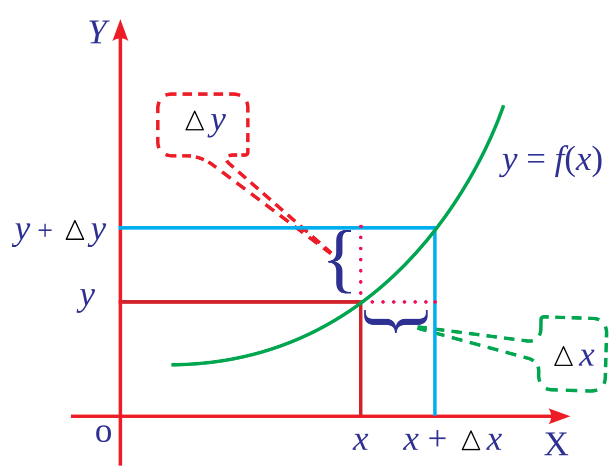
$y = f(x)$ என்ற சார்பில் Δx என்பது x இல் ஏற்படும் ஒரு சிறு மாற்றம் எனவும் Δy என்பது அதன் தொடர்பாக y இல் ஏற்படும் மாற்றம் எனில் $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$ ஆகும்.

x –ஐ பொறுத்து y இல் ஏற்படக்கூடிய உடனடி மாறுவீதமானது வரம்பிடப்பட்ட எல்லையில் ஏற்படும் y இன் மாற்றத்திற்கும், x இன் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதமாகும்.

அ. து. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$



படம் : 6.4 (a)



படம் : 6.4 (b)

செலவுச் சார்பு : (Cost function)

ஒரு பொருளை உற்பத்தி செய்வதற்காக செலவிடப்படும் தொகை செலவுச் சார்பு எனப்படும்.

பொதுவாக, மொத்த செலவுச் $[TC]$ சார்பானது, இரு பகுதிகளை உள்ளடக்கியது. அவை

(i) மாறும் செலவு

(ii) மாறாச் செலவு (நிலையான செலவு)

மாறும் செலவு: (Variable cost)

மாறும் செலவு என்பது, கிட்டத்தட்ட உற்பத்தி அளவுக்கு நேர் விகிதத்தில் மாறுகின்ற செலவு ஆகும்.

மாறாச் செலவு: (Fixed cost)

மாறாச் செலவு என்பது உற்பத்தி அளவுடன் நேரடியாக தொடர்பு அல்லாதச் செலவு ஆகும்.

x அலகுகள் உற்பத்திக்கான ஒரு பொருளின் மாறும் செலவு $f(x)$ மற்றும் மாறாச் செலவு k எனில் மொத்த செலவுச் சார்பானது $C(x)=f(x)+k,\ x > 0$ ஆகும்.

குறிப்பு

(i) மாறும் செலவு $f(x)$ ஆனது உற்பத்தியின் ஒரு மதிப்பு உடையச் சார்பாகும்.

(ii) மாறாச் செலவு k ஆனது உற்பத்தி அளவைச் சார்ந்தது அல்ல.

(iii) $f(x)$ மாறிலி உறுப்பைக் கொண்டிருக்காது.

சில திட்டமான முடிவுகள்: (Some standard results)

$C(x) = f(x) + k$ என்பது மொத்த செலவுச் சார்பு எனில்

(i) சராசரி செலவு $[AC] = \dfrac{\text{மொத்த செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

$= \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{f(x)+k}{x}$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு $[AVC]$

$= \dfrac{\text{மாறும் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}} = \dfrac{f(x)}{x}$

(iii) சராசரி மாறாச் செலவு $[AFC]$

$= \dfrac{\text{மாறாச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}} = \dfrac{k}{x}$

06_11th_BM-STAT_Ch-6-TM.indd 137 08-12-2021 21:08:58

(iv) இறுதி நிலைச் செலவு $[MC]$

$$= \frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}[C(x)] = C'(x)$$

(v) இறுதி நிலைச் சராசரிச் செலவு $[MAC]$

$$= \frac{d}{dx}(AC)$$

(vi) மொத்தச் செலவு [$[TC]$

= சராசரிச் செலவு $\times$ உற்பத்தி

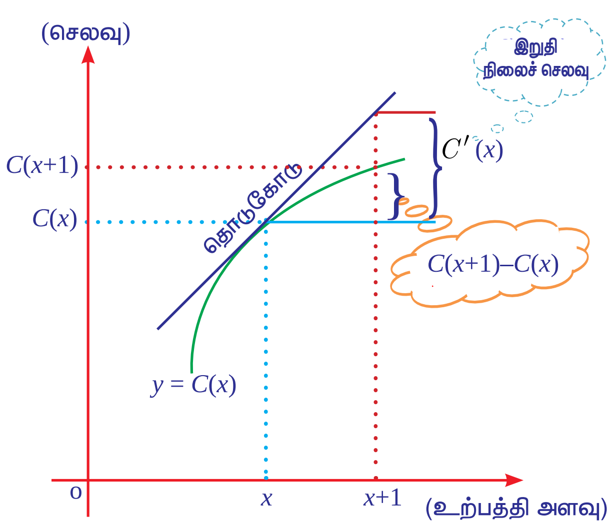
(vii) $MC = AC$ எனும்போது சராசரி [AC] செலவானது சிறுமத்தை அடையும்.

மேற்குறிப்பு:

இறுதிநிலைச் செலவு $[MC]$ என்பது தோராயமாக உற்பத்தியின் அளவு x அலகுகளாக இருக்கும்போது $(x+1)$ வது அலகின் உற்பத்திச்செலவு ஆகும்.

இறுதிநிலைச் செலவுக்கான வரைபட விளக்கம் (Diagrammatical explanation of marginal cost $[MC]$)

உற்பத்தி வெளியீட்டின் அளவில் ஒரு அலகு அதிகரிக்கப்படும் போது அல்லது ஒரு அலகு குறைக்கப்படும் போது மொத்தச் செலவில் ஏற்படும் மாற்றமே இறுதிநிலைச் செலவு ஆகும்.



படம் : 6.5

வருவாய்ச் சார்பு: (Revenue function)

ஒரு பொருள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டு, விற்கப்படும் போது கிடைக்கக்கூடிய தொகை வருவாய் எனப்படும். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட x அலகுப் பொருளை, ஒரு அலகு p என்ற விலையில் விற்கப்படும் போது கிடைக்கும் தொகையானது மொத்த வருவாய் $R(x) = px$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு x மற்றும் p என்பன மிகை எண்களாகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

உற்பத்தியாளர், அதிக விலையில் அதிக அளவை வழங்கும் போது வருவாய் அதிகரிக்கும்.

சில திட்டமான முடிவுகள்: (Some standard results)

$R(x) = px$ என்பது வருவாய்ச் சார்பு எனில்

(i) சராசரி வருவாய் $[AR]$ =

$$\frac{\text{மொத்த வருவாய்}}{\text{உற்பத்தி}} = \frac{R(x)}{x} = p$$

(ii) இறுதி நிலை வருவாய் $[MR]$ =

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(R(x)) = R'(x)$$

(iii) இறுதி நிலைச் சராசரி வருவாய் $[MAR]$

$$= \frac{d}{dx}(AR) = AR'(x)$$

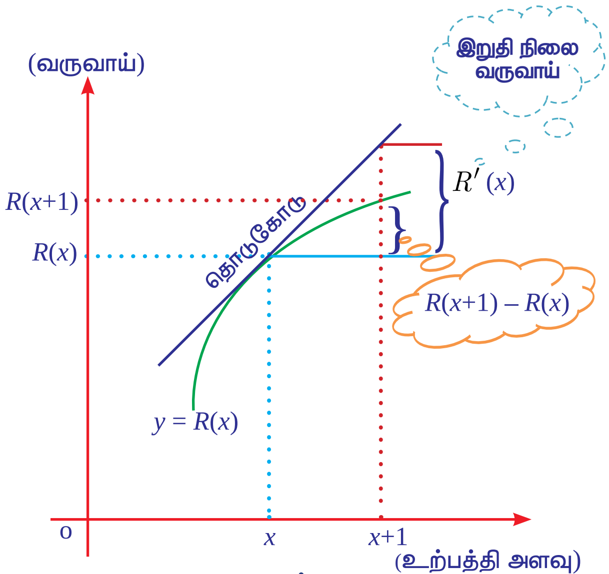
மேற்குறிப்பு:

(i) சராசரி வருவாயும் $[AR]$ மற்றும் விலையும் (p) ஒன்றே. (அ.து. $AR = p$)

(ii) விற்பனை அளவு x அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது, $(x+1)$ வது அலகு உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்பட்டதால் கிடைக்கும் தோராயமான கூடுதல் வருவாயே இறுதி நிலை வருவாய் $[MR]$ ஆகும்.

இறுதிநிலை வருவாய்க்கான வரைபட விளக்கம் [(Diagrammatical explanation of Marginal Revenue $[MR]$)]

விற்பனை அளவின் அலகுகளில் ஒரு அலகு அதிகரிக்கும்போது மொத்த வருவாயில் எற்படும் மாற்றமே இறுதிநிலை வருவாய் ஆகும்.



படம்: 6.6

இலாபச் சார்பு: (Profit function)

மொத்த உற்பத்தி வருவாயில், மொத்தச் செலவுக்கும் மேல் உள்ள உபரித் தொகையே, இலாபம் எனப்படும். $R(x)$ என்பது மொத்த வருவாய், $C(x)$ என்பது மொத்தச் செலவு எனில், இலாபச் சார்பு $P(x)$ என்பது $P(x) = R(x) - C(x)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

சில திட்டமான முடிவுகள்:

$P(x) = R(x) - C(x)$ என்பது இலாபச் சார்பு எனில்

(i) சராசரி இலாபம் $[AP] = \dfrac{\text{மொத்த இலாபம்}}{\text{உற்பத்தி}}$

$$= \frac{P(x)}{x}$$

(ii) இறுதி நிலை இலாபம் $[MP]$

$$= \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}(P(x)) = P'(x)$$

(iii) இறுதி நிலை சராசரி இலாபம் $[MAP]$

$$= \frac{d}{dx}(AP) = AP'(x)$$

(iv) $MR = MC$ எனும்போது இலாபச் சார்பு $[P(x)]$ பெருமத்தை அடையும்.

6.1.2 நெகிழ்ச்சி: (Elasticity)

x என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சி 'η' ஆனது, y –ன் சார் மாற்றத்திற்கும், x –ன் சார் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தின் வரம்பிடப்பட்ட எல்லை என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \eta = \frac{E_y}{E_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} \Rightarrow \eta = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\eta = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{x \text{ –ஐ பொறுத்த } y \text{ –ன் இறுதி நிலை அளவு}}{x \text{ –ஐ பொறுத்த } y \text{ –ன் சராசரி அளவு}}$$

(i) விலையின் தேவை நெகிழ்ச்சி (Price elasticity of demand)

விலையின் தேவை நெகிழ்ச்சி என்பது விலை மாற்றத்தினால், கோரப்பட்ட அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் பிரதிபலிப்பு அளவு ஆகும்.

தேவைச் சார்பு $x = f(p)$ –ல், x என்பது தேவை மற்றும் p என்பது அலகு விலை எனில் விலையைப்பொறுத்ததேவைநெகிழ்ச்சியானது $\eta_d = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) விலையின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சி (Price elasticity of supply)

விலையின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சி என்பது விலை மாற்றத்தினால், வழங்கப்பட்ட அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் பிரதிபலிப்பு அளவு ஆகும்.

அளிப்பு சார்பு $x = g(p)$ –ல், x என்பது அளிப்பு மற்றும் p என்பது அலகு விலை எனில் விலையைப் பொறுத்த அளிப்பு நெகிழ்ச்சியானது $\eta_s = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$. என வரையறுக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

நெகிழ்ச்சி முக்கியமாக விலை மாற்றத்தின் விளைவாக ஏற்படும் நுகர்வோர் தேவை மாற்றத்தை மதிப்பீடு செய்யப் பயன்படுகிறது.

குறிப்பு

'நெகிழ்ச்சி' என்பது 'விலையின் நெகிழ்ச்சி' என்பதன் சுருக்கமாகும்.

விலை நெகிழ்ச்சியின் முக்கிய முடிவுகள்: (Some important results on price elasticity)

(i) $|\eta|>1$, எனும்போது, தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது மீள்த்தன்மைக் கொண்டது எனலாம்.

(ii) $|\eta|=1$, எனும்போது, தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது அலகு மீள்த்தன்மை கொண்டது எனலாம்.

(iii) $|\eta|<1$, எனும்போது, தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது மீள்த்தன்மையற்றது எனலாம்.

மேற்குறிப்பு:

(i) **மீள்த்தன்மை :** ஒரு தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது அதன் விலையின் மாற்றங்களை பெரிதும் பிரதிபலிக்கிறது எனில், அளவு மீள்த்தன்மைக் கொண்டது எனலாம்.
உதாரணம்: வெங்காயத்தின் நுகர்வும் அதன் விலையும்.

(ii) **மீள்த்தன்மையற்றது :** ஒரு தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது அதன் விலையின் மாற்றங்களை மிகக் சிறிய அளவில் பிரதிபலிக்கிறது எனில், அளவு மீள்த்தன்மையற்றது எனலாம்.
உதாரணம்: அரிசியின் நுகர்வும் அதன் விலையும்.

(iii) **அலகு மீள்த்தன்மை :** ஒரு தேவை (அ) அளிப்பு அளவானது அதன் விலையின் மாற்றத்தை சமவிகிதத்தில் பிரதி பலிக்கிறது எனில், அளவு அலகு மீள்த்தன்மைக் கொண்டது எனலாம்.

இறுதி நிலை வருவாய் [MR], சராசரி வருவாய் [AR] மற்றும் தேவை நெகிழ்ச்சி [η_d] களுக்கு இடையே உள்ளத் தொடர்பு: (Relationship among Marginal revenue [MR], Average revenue [AR] and Elasticity of demand [η_d])

$$R(x)=px$$

அதாவது, $R = px$

மற்றும் $\eta_d = -\dfrac{p}{x}\cdot\dfrac{dx}{dp}$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

இப்போது, $$\begin{aligned} MR &= \frac{d}{dx}(R) \\ &= \frac{d}{dx}(px) = p + x\frac{dp}{dx} \\ &= p\left[1+\frac{x}{p}\cdot\frac{dp}{dx}\right] \\ &= p\left[1+\frac{1}{\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}}\right] \\ &= p\left[1-\frac{1}{-\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}}\right] \\ &= p\left[1-\frac{1}{\eta_d}\right] \end{aligned}$$

அதாவது, $MR = AR\left[1-\dfrac{1}{\eta_d}\right]$ (அல்லது)

$$\eta_d = \frac{AR}{AR-MR}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.1

x அலகுகள் உற்பத்திக்கான ஒரு பொருளின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C(x)=\dfrac{1}{3}x^3+4x^2-25x+7$ எனில்,

(i) சராசரிச் செலவுச் சார்பு

(ii) சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு

(iii) சராசரி மாறாச் செலவுச் சார்பு

(iv) இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு

(v) இறுதி நிலைச் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$$C(x)=\frac{1}{3}x^3+4x^2-25x+7$$

(i) சராசரிச் செலவு $(AC)=\dfrac{C}{x}$

$$=\frac{1}{3}x^2+4x-25+\frac{7}{x}$$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு $(AVC)=\dfrac{f(x)}{x}$

$$=\frac{1}{3}x^2+4x-25$$

(iii) சராசரி மாறாச் செலவு $(AFC) = \frac{k}{x}$

$= \frac{7}{x}$

(iv) இறுதி நிலைச் செலவு (MC)

$= \frac{dC}{dx}$ (அல்லது) $\frac{d}{dx}(C(x))$

$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 25x + 7\right]$

$= x^2 + 8x - 25$

(v) இறுதிநிலைச் சராசரிச் செலவு (MAC)

$= \frac{d}{dx}[AC] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^2 + 4x - 25 + \frac{7}{x}\right]$

$= \frac{2}{3}x + 4 - \frac{7}{x^2}$

எடுத்துக்காட்டு 6.2

x அலகுகள் கொண்ட ஒரு பொருளின் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு C ரூபாயில், $C(x) = 50 + 4x + 3\sqrt{x}$ எனில், 9 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவு யாது?

தீர்வு

$C(x) = 50 + 4x + 3\sqrt{x}$

இறுதிநிலைச் செலவு $(MC) = \frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}[C(x)]$

$= \frac{d}{dx}\left[50 + 4x + 3\sqrt{x}\right] = 4 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$x = 9$, எனும்போது, $\frac{dC}{dx} = 4 + \frac{3}{2\sqrt{9}}$

$= 4\frac{1}{2} = ₹\ 4.50$

$\therefore$ 9 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவு ₹ 4.50.

எடுத்துக்காட்டு 6.3

பின்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளைக் கொண்டு சமன்நிலை விலை மற்றும் சமன்நிலை அளவு காண்க.

தேவை: $x = \frac{1}{2}(5 - p)$ மற்றும் அளிப்பு: $x = 2p–3$

தீர்வு

சமன்நிலையில், தேவை = அளிப்பு

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(5 - p) = 2p–3$

$5–p = 4p - 6$

$\Rightarrow \quad p = \frac{11}{5}$

$\therefore$ சமன்நிலை விலை: p_E=₹ $\frac{11}{5}$

இப்போது, $p = \frac{11}{5}$ –ஐ $x = 2p - 3$ –ல் பிரதியிட

நாம் பெறுவது, $x = 2\left(\frac{11}{5}\right) - 3 = \frac{7}{5}$

$\therefore$ சமன் நிலை அளவு: $x_E = \frac{7}{5}$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 6.4

$x = \frac{20}{p+1}$ என்ற தேவைச் சார்புக்கு, $p = 3$ –ல் விலையைப் பொறுத்து தேவை நெகிழ்ச்சியை காண்க. மேலும் இது $p = 3$ –ல் மீள்த்தன்மை கொண்டதா என ஆராய்க .

தீர்வு:

$$x = \frac{20}{p+1}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-20}{(p+1)^2}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= -\frac{p}{\left(\frac{20}{(p+1)}\right)}\cdot\frac{-20}{(p+1)^2}$$

$$= \frac{p}{p+1}$$

$p = 3$ –ல், $\eta_d = \frac{3}{4}$ (அ) 0.75

இங்கு, $|\eta_d| < 1$. $\therefore$ தேவை மீள்த்தன்மையற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 6.5

$x = 2p^2 - 5p + 1$ என்ற அளிப்புச் சார்புக்கு அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு:

$x = 2p^2 - 5p + 1$

$\frac{dx}{dp} = 4p - 5$

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி: $\eta_s = \frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= \frac{p}{2p^2-5p+1}\cdot(4p-5) = \frac{4p^2-5p}{2p^2-5p+1}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.6

$y = \frac{2x+1}{3x+2}$ எனில், $x=1$–ல் இதன் நெகிழ்ச்சியை காண்க.

தீர்வு:

$$y = \frac{2x+1}{3x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+2)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

நெகிழ்ச்சி: $\eta = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)}\cdot\frac{1}{(3x+2)^2}$

$$= \frac{x}{(2x+1)(3x+2)}$$

$x = 1$ –ல், $\eta = \frac{1}{15}$

எடுத்துக்காட்டு 6.7

$xp^n = k$ என்ற தேவைச் சார்பில் n மற்றும் k என்பன மாறிலிகள் எனில், தேவை நெகிழ்ச்சி எப்போதும் ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$xp^n = k$$

$$x = kp^{-n}$$

$$\frac{dx}{dp} = -nkp^{-n-1}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= -\frac{p}{kp^{-n}}\left(-nkp^{-n-1}\right)$$

$= n$, ஒரு மாறிலி

எடுத்துக்காட்டு 6.8

$p = 40-x$ என்ற தேவைச் சார்பில் தேவை நெகிழ்ச்சி (η_d) ஆனது 1 எனில் உற்பத்தி அளவை காண்க.

தீர்வு:

$$p = 40-x$$

$$\therefore \quad x = 40-p$$

$$\frac{dx}{dp} = -1$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= \frac{40-x}{x}$$

கணக்கின் படி, $\eta_d = 1$

$$\therefore \frac{40-x}{x} = 1$$

$$2x = 40$$

$\therefore$ உற்பத்தி அளவு $(x) = 20$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 6.9

$p = (a-bx)^{\frac{1}{2}}$ என்ற தேவை விதிக்கு, x –ன் வாயிலாக (x–ஐ பொறுத்து) தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. மேலும் தேவை நெகிழ்ச்சி 1 எனும்போது உற்பத்தி (x) –ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு:

$$p = (a-bx)^{\frac{1}{2}}$$

'p' -ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$1 = \frac{1}{2}(a-bx)^{\frac{-1}{2}}(-b)\cdot\frac{dx}{dp}$$

$$\therefore \frac{dx}{dp} = \frac{2(a-bx)^{\frac{1}{2}}}{-b}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}$

$$= -\frac{(a-bx)^{\frac{1}{2}}}{x}\cdot\frac{2(a-bx)^{\frac{1}{2}}}{-b}$$

$$= \frac{2(a-bx)}{bx}$$

$\eta_d = 1$ எனும்போது, $\dfrac{2(a-bx)}{bx} = 1$

$$2(a-bx) = bx$$

$\therefore$ உற்பத்தி $(x) = \dfrac{2a}{3b}$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 6.10

$p = 50 - 3x$ என்ற தேவை விதியைக் கொண்டு தேவை நெகிழ்ச்சி, சராசரி வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை வருவாய்க்கு இடையேயுள்ள தொடர்பினைச் சரிபார்.

தீர்வு:

$$p = 50 - 3x$$

$$\frac{dp}{dx} = -3$$

$$\therefore \frac{dx}{dp} = -\frac{1}{3}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\dfrac{p}{x}\cdot\dfrac{dx}{dp}$

$$= -\frac{50-3x}{x}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{50-3x}{3x} \qquad \ldots (1)$$

இப்போது, வருவாய் : $R = px$

$$= (50-3x)x$$

$$= 50x - 3x^2$$

சராசரி வருவாய் : $AR = p$

$$= 50-3x$$

இறுதிநிலை வருவாய் : $MR = \dfrac{dR}{dx}$

$$= 50-6x$$

$$\therefore \frac{AR}{AR-MR} = \frac{50-3x}{(50-3x)-(50-6x)}$$

$$= \frac{50-3x}{3x} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) விருந்து, நாம் பெறுவது

$$\eta_d = \frac{AR}{AR-MR}$$

எனவே, சரி பார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 6.11

$x = \dfrac{p}{p+5}$ என்ற அளிப்பு விதிக்கு $p = 20$–ல் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. மேலும் விடைக்கு விளக்கம் தருக.

தீர்வு:

$$x = \frac{p}{p+5}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{(p+5)-p}{(p+5)^2}$$

$$= \frac{5}{(p+5)^2}$$

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி: $\eta_s = \dfrac{p}{x}\cdot\dfrac{dx}{dp}$

$$= (p+5)\frac{5}{(p+5)^2}$$

$$= \frac{5}{p+5}$$

$p=20$ எனில், $\eta_s = \dfrac{5}{20+5} = 0.2$

பொருள் விளக்கம்: (Interpretation)

- p = ₹ 20–லிருந்து விலையானது 1% அதிகரித்தால்,அளிப்பின் அளவு தோராயமாக 0.2% அதிகரிக்கிறது.
- p = ₹ 20–லிருந்து விலையானது 1% குறைந்தால் அளிப்பின் அளவு தோரயமாக 0.2% குறைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

செலவுச் சார்பு $C = 2x\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)+7$ –ல் உற்பத்தி அளவு x ஆனது தொடர்ச்சியாக அதிகரிக்கும் பொழுது இறுதி நிலைச் செலவானது [MC] தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$C = 2x\left(\frac{x+5}{x+2}\right)+7$$

$$= \frac{2x^2+10x}{x+2}+7$$

இறுதி நிலைச் செலவு:

$$MC = \frac{dC}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{2x^2+10x}{x+2}+7\right]$$

$$= \frac{(x+2)(4x+10)-(2x^2+10x)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+4x+10)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2\left[(x+2)^2+6\right]}{(x+2)^2}$$

$$= 2\left[1+\frac{6}{(x+2)^2}\right]$$

$\Rightarrow$ x ஆனது தொடர்ச்சியாக அதிகரிக்கும் பொழுது, இறுதி நிலைச் செலவு $[MC]$ ஆனது தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.13

உற்பத்திக்கானச் சராசரி செலவு சார்பு $\overline{C} = 0.05x^2+16+\frac{100}{x}$. உற்பத்தி அளவு 50 அலகுகள் எனும்போது இறுதி நிலைச் செலவு யாது? மற்றும் விடைக்கு விளக்கம் தருக.

தீர்வு:

மொத்தச் செலவு $C = AC \times x$

$= \overline{C} \times x$

$= 0.05x^3+16x+100$

இறுதி நிலைச் செலவு : $MC = \frac{dC}{dx}$

$= 0.15x^2+16$

$$\left(\frac{dC}{dx}\right)_{x=50} = 0.15(50)^2+16$$

$= 375+16 = ₹\ 391$

பொருள் விளக்கம்: (Interpretation)

உற்பத்தி அளவானது $x = 50$ –லிருந்து ஒரு அலகு அதிகரிக்கும் பொழுது, கூடுதல் அலகுக்கான உற்பத்திச் செலவு தோராயமாக ₹ 391 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.14

$y = x^3+19$ என்ற சார்பின் இறுதி நிலை மதிப்பானது 27–க்கு சமமெனில், x–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$y = x^3+19$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \dots (1)$$

கணக்கின் படி, $\frac{dy}{dx} = 27$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) விருந்து, நாம் பெறுவது

$$3x^2 = 27$$

$$\therefore x = \pm 3$$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = \frac{4}{x}$ – ல் 'p' என்பது அலகு விலையாகும். விலை $p = 4$ எனில் விலையைப் பொறுத்து, தேவையின் உடனடி மாறுவீதம் காண்க. மேலும் விடைக்கு விளக்கம் தருக.

தீர்வு:

$$p = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{p}$$

$$\therefore \frac{dx}{dp} = -\frac{4}{p^2}$$

$p = 4$ –ல், $\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{4} = -0.25$

$\therefore$ p = ₹ 4 –ல் விலையைப் பொறுத்து தேவையின் உடனடி மாறுவீதம் – 0.25 ஆகும்.

பொருள் விளக்கம்: (Interpretation)

p = ₹ 4–லிருந்து விலையானது 1% அதிகரிக்கும் பொழுது, தேவை 0.25% குறைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.16

ஒரு நிறுவனத்தின் தேவை மற்றும் செலவுச் சார்புகள் முறையே $p = 497 - 0.2x$ மற்றும் $C = 25x+10000$ ஆகும். இலாபம் பெருமத்தை அடையும்பொழுது உற்பத்தி அளவு மற்றும் விலையைக் காண்க.

தீர்வு:

இறுதி நிலை வருவாய் $[MR]$ = இறுதி நிலைச் செலவு $[MC]$ எனும்போது, இலாபமானது பெருமத்தை அடையும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

வருவாய் : $R = px$

$= (497-0.2x)x$

$= 497x-0.2x^2$

$MR = \dfrac{dR}{dx}$

$\therefore MR = 497-0.4x$

செலவு $C = 25x+10000$

$\therefore MC = 25$

$MR = MC \Rightarrow 497-0.4x = 25$

$\Rightarrow 472-0.4x = 0$

$\Rightarrow x = 1180$ அலகுகள்.

இப்போது, $p = 497-0.2x$

$x = 1180$ –ல் $p = 497-0.2(1180)$

$= ₹\,261$

எடுத்துக்காட்டு 6.17

ஒரு நிறுவனத்தின் செலவுச் சார்பு $C = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$. சராசரி செலவு சிறுமத்தை அடையும் பொழுது அதன் உற்பத்தி அளவை $(x > 0)$ காண்க.

தீர்வு:

சராசரி செலவு $[AC]$ = இறுதிநிலைச் செலவு $[MC]$ எனும் பொழுது சராசரி செலவானது சிறுமத்தை அடையும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

செலவு: $C = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$

$\therefore AC = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 9$ மற்றும்

$MC = x^2 - 6x + 9$

இப்போது,

$AC = MC \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$

$\Rightarrow 2x^2 - 9x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{9}{2}$ அலகுகள் $[\because x > 0]$

பயிற்சி 6.1

1. ஒரு நிறுவனம் x டன்கள் உற்பத்தி செய்யும் பொழுது அதன் மொத்தச் செலவு $C(x) = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 - 20x + 7$ எனில்
   (i) சராசரிச் செலவுச் சார்பு
   (ii) சராசரி மாறும் செலவுச் சார்பு
   (iii) சராசரி மாறாச் செலவுச் சார்பு
   (iv) இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு
   (v) இறுதி நிலை சராசரிச் செலவுச் சார்பு
   ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு நிறுவனத்தின் x அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்தச் செலவு $C = \frac{2}{3}x + \frac{35}{2}$ எனில்,
   (i) உற்பத்தி 4 அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது அதன் செலவு
   (ii) உற்பத்தி 10 அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது அதன் சராசரிச் செலவு
   (iii) உற்பத்தி 3 அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது அதன் இறுதி நிலைச் செலவு
   ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $R = 14x - x^2$ மற்றும் $C = x\left(x^2 - 2\right)$ என்பன முறையே வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் செலவுச் சார்பு எனில்,
   (i) சராசரிச் செலவுச் சார்பு
   (ii) இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு

(iii) சராசரி வருவாய்ச் சார்பு மற்றும்

(iv) இறுதி நிலை வருவாய்ச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. $p = 10e^{-\frac{x}{2}}$ என்ற தேவை விதிக்கு, தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

5. கீழ்க்காணும் தேவை விதிகளுக்கு x –ன் வாயிலாக தேவை நெகிழ்ச்சிக் காண்க. மேலும் தேவை நெகிழ்ச்சியை ஒன்று எனக் கொண்டு உற்பத்தி (x)–ஐ காண்க.

(i) $p=(a-bx)^2$ (ii) $p=a-bx^2$

6. $p=3$ –ல் $x=2p^2+5$ என்ற அளிப்பு சார்பின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

7. ஒரு பொருளின் தேவை வளைவரை $p=\dfrac{50-x}{5}$, உற்பத்தி அளவான எந்த ஒரு x–க்கும் இறுதி நிலை வருவாய் காண்க. மேலும் $x=0$ மற்றும் $x=25$–ல் இறுதி நிலை வருவாயைக் காண்க.

8. ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $x=a\sqrt{p-b}$, $p > b$ ஆகும், இதில் p என்பது அலகு விலை, a மற்றும் b என்பன மாறிலிகள். $p = 2b$ –ல் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

9. p–ஐ அலகு விலையாகவும், x–ஐ உற்பத்தி அளவாகவும் கொண்ட தேவைச் சார்பு $p=400-2x-3x^2$ க்கு $MR=p\left[1-\dfrac{1}{\eta_d}\right]$ எனக் காட்டுக.

10. p–ஐ அலகு விலையாகவும், x–ஐ உற்பத்தி அளவாகவும் கொண்ட தேவைச் சார்பு $p = 550–3x–6x^2$-ல் $MR=p\left[1-\dfrac{1}{\eta_d}\right]$ எனக் காட்டுக.

11. $x=\dfrac{25}{p^4}$, $1 \le p \le 5$ என்ற தேவைச் சார்புக்கு தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

12. ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அதன் செலவுச் சார்புகள் முறையே $p=200-\dfrac{x}{100}$ மற்றும் $C=40x+120$ ஆகும். இங்கு p என்பது அலகு விலை ரூபாயில் மற்றும் x என்பது உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்பட்ட அளவு எனில்,

(i) இலாபச் சார்பு

(ii) உற்பத்தி அளவு 10 அலகுகள் எனும்போது சராசரி இலாபம்

(iii) உற்பத்தி அளவு 10 அலகுகள் எனும்போது இறுதி நிலை இலாபம்

(iv) உற்பத்தி அளவு 10 அலகுகள் எனும்போது இறுதி நிலைச் சராசரி இலாபம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

13. $y= x^3+10x^2-48x+8$ என்ற சார்பின் இறுதி நிலையானது x –ஐ போல் இருமடங்கு எனில் x –ன் மதிப்புகள் யாது?

14. x அலகுகளுக்கான மொத்த செலவுச் சார்பு $y=3x\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)+5$ –ல் உற்பத்தி அளவு (x) ஆனது தொடர்ச்சியாக அதிகரிக்கும் பொழுது, இறுதி நிலைச் செலவானது [MC] தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது எனக் காட்டுக

15. $x = 10 - p$ என்ற தேவைச் சார்புக்கு விலையைப் பொறுத்து, தேவை நெகிழ்ச்சி காண். இங்கு p விலையையும், x தேவையையும் குறிக்கும். மேலும் $p = 6$-ல் தேவையானது மீள்த்தன்மை கொண்டதா, மீள்த்தன்மையற்றதா அல்லது அலகு மீள்த் தன்மைக் கொண்டதா என்பதனை ஆராய்க.

16. பின்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகளைக் கொண்டு அதன் சமன்நிலை விலை மற்றும் சமன்நிலை அளவு காண்க.

தேவை: $x=100 - 2p$ மற்றும்

அளிப்பு: $x = 3p - 50$

17. ஒரு நிறுவனத்தின் தேவை மற்றும் செலவு சார்புகள் முறையே $x = 6000–30p$ மற்றும் $C = 72000+60x$ ஆகும். இலாபம் பெருமத்தை அடையும்பொழுது உற்பத்தி அளவு மற்றும் விலையைக் காண்க.

18. ஒரு நிறுவனத்தின் செலவுச் சார்பு $C = x^3 - 12x^2 + 48x$ எனில், சராசரிச் செலவு சிறுமத்தை அடையும்பொழுது அதன் உற்பத்தி அளவு $(x > 0)$ காண்க.

6.2 பெருமம் மற்றும் சிறுமம் (Maxima and minima)

பெருமம் மற்றும் சிறுமம் ஆகியவற்றை அன்றாட வாழ்க்கையிலும், இயற்பியல், வேதியியல், பொறியியல் மற்றும் பொருளாதாரம் ஆகியபலதுறைகளிலும்நாம்பயன்படுத்துகிறோம்.

குறிப்பாக கீழ்க்காணும் நிலைகளில் நாம் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் ஆகியவற்றின் பயன்பாடுகளைக் காணலாம்.

(i) இலாபம், திறன், நிறுவனத்தின் உற்பத்தி போன்ற பயன்தரத்தக்க மதிப்புகளை பெருமம் அடையச் செய்வதற்கு.

(ii) செலவுகள், உழைப்பு போன்றவற்றைக் குறைப்பதற்கு.

(iii) சரக்குநிலைக் கட்டுப்பாடு, மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு போன்றவற்றைக் கற்றறிவதற்கு.

6.2.1 கூடும் மற்றும் குறையும் சார்புகள்: (Increasing and decreasing functions)

பெருமம் மற்றும் சிறுமம் என்ற கருத்துருக்களை அறிந்துகொள்வதற்கு முன் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்புக்கான வளைவரையின் தன்மையை வகையீடல் மூலம் எவ்வாறு காண்பது என்பதை பயில்வோம்.

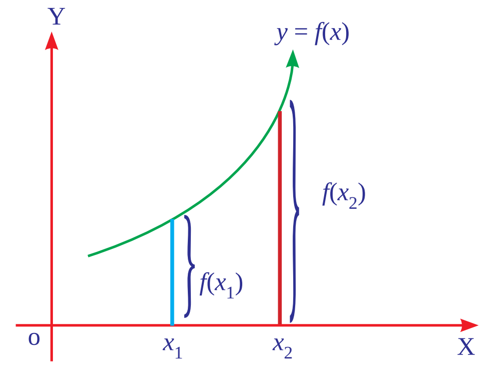
(i) கூடும் சார்பு: (Increasing function)

$y = f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில்

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$ என அமையுமானால், அது கூடும் சார்பு எனப்படும்.

$y = f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில்

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது திட்டமாகக் கூடும் சார்பு எனப்படும்.



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

திட்டமாகக் கூடும் சார்பு

படம்: 6.7

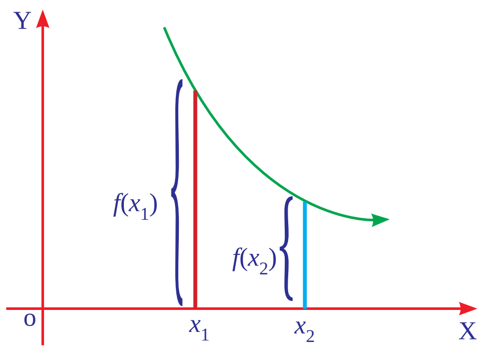
(ii) குறையும் சார்பு: (Decreasing function)

$y = f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில்

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது குறையும் சார்பு எனப்படும்.

$y = f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில்

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ அனைத்து $x_1, x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது திட்டமாகக் குறையும் சார்பு எனப்படும்.



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

திட்டமாகக் குறையும் சார்பு

படம்: 6.8

குறிப்பு

கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளி முழுவதும் ஒரு சார்பு கூடும் சார்பாகவோ அல்லது குறையும் சார்பாகவோ இருந்தால் அது ஒரியல்புச் சார்பு என அழைக்கப்படும்.

கூடும் மற்றும் குறையும் சார்புக்கான வகைக்கெழுச் சோதனை : (Derivative test for increasing and decreasing function)

தேற்றம்: 6.1 (நிரூபணமின்றி)

f என்ற ஒரு சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதாகவும் (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத் தக்கதாகவும் இருந்து, மேலும்

(i) $f'(x) \geq 0$ எனில் f ஆனது $[a.b]$ யில் கூடும் சார்பு அல்லது ஏறும் சார்பு எனப்படும்.

(ii) $f'(x) \leq 0$ எனில் f ஆனது $[a.b]$ யில் குறையும் சார்பு அல்லது இறங்கும் சார்பு எனப்படும்.

மேற்குறிப்பு

(i) (a,b)–ல் உள்ள x–ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) > 0$ எனில் (a,b)–ல் f ஒரு திட்டமான கூடும் சார்பு எனப்படும்.

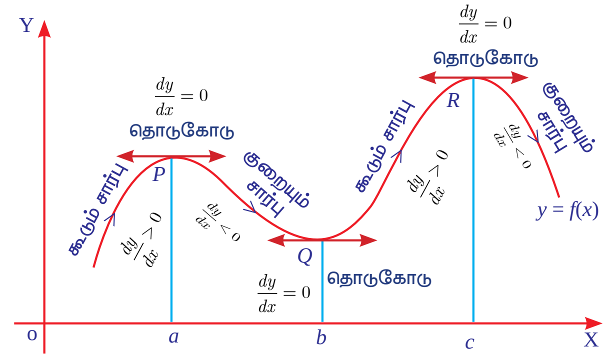
(ii) (a,b)–ல் உள்ள x –ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f'(x) < 0$ எனில் (a,b)–ல் f ஒரு திட்டமான குறையும் சார்பு எனப்படும்.

(iii) $f'(x) = 0$ எனில் $f(x)$ ஒரு மாறிலிச் சார்பு எனப்படும்.

6.2.2 சார்பின் தேக்கநிலை மதிப்பு (Stationary Value of a function)

$f(x)$ என்ற சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதாகவும் (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத் தக்கதாகவும் கொள்க.

$x = a$ –ல் $f(x)$ தேக்கநிலையை அடைகிறது எனில் $f'(a)=0$ என அமைய வேண்டும். $f(x)$ –ன் தேக்கநிலை மதிப்பு $f(a)$ எனவும், $(a, f(a))$ என்பது தேக்கநிலைப் புள்ளி எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.



P, Q, R என்பன தேக்க நிலைப் புள்ளிகள்

படம் 6.9

வரைபடம் 6.9 –ல் $y = f(x)$என்ற சார்பு $x = a$, $x = b$ மற்றும் $x = c$ என்ற மதிப்புகளில் தேக்க நிலை அடைகிறது. அந்த புள்ளிகளில் $f'(x) = 0$ என இருக்கும். அவற்றின் வழியாக வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x–அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.

குறிப்பு:

பொருளாதார புள்ளி விவரங்களுக்கு தொடர்புடைய வரைபடத்தின் மூலம், வியாபாரத்தின் போக்கை அறிந்து கொண்டு முன்னேற்பாடுடன் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.18

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x,\ x \in R$ என்ற சார்பு R – ல் திட்டமாக கூடும் சார்பு என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R \\ f'(x) &= 3x^2-6x+4 \\ &= 3x^2-6x+3+1 \\ &= 3(x-1)^2+1 > 0, \text{ அனைத்து } x \in R \end{aligned}$$

அதாவது, இங்கு அனைத்து $x \in R$ –க்கும் $f'(x) > 0$ ஆகும்.

$\therefore$ f என்ற சார்பு $(-\infty,\infty)$ என்ற இடைவெளியில் திட்டமாகக் கூடும் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.19

$f(x) = x^2 - 4x + 6$ என்ற சார்பு எந்தெந்த இடைவெளிகளில் திட்டமாகக் கூடும் அல்லது திட்டமாகக் குறையும் எனக் காண்க.

தீர்வு :

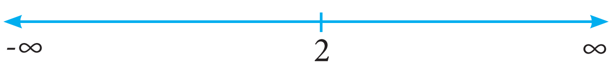
$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

x –ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த,

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2.$$



படம் : 6.10

$x = 2$ என்ற புள்ளி மெய்யெண் கோட்டை $(-\infty, 2)$ மற்றும் $(2, \infty)$ என பிரிக்கின்றது.

[இடைவெளிகளில் $f'(x)$ –க்கான குறியீடு (+அல்லது–)யைக்காண,அவ்விடைவெளிகளில் இருந்து x–க்கான ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை $f'(x)$ -ல் பிரதியிட்டு காணலாம்.]

இடை வெளிகள்	$f'(x) = 2x - 4$ –ன் குறியீடு	சார்பின் தன்மை
$(-\infty, 2)$	< 0	$f(x)$ ஆனது $(-\infty, 2)$ –ல் திட்டமாகக் குறையும் சார்பு
$(2, \infty)$	> 0	$f(x)$ ஆனது $(2, \infty)$ –ல் திட்டமாகக் கூடும் சார்பு

அட்டவணை:6.1

எடுத்துக்காட்டு 6.20

$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ என்ற சார்பு எந்தெந்த இடைவெளிகளில் கூடும் அல்லது குறையும் சார்பு எனக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 12x - 72 \\ &= 12(x^2 - x - 6) \\ &= 12(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12(x-3)(x+2) = 0$$

$x = 3$ (or) $x = -2$

$x = 3$ மற்றும் $x = -2$ என்ற புள்ளிகளில் $f(x)$ தேக்கநிலையை அடையும்.

படம்: 6.11

இங்கு மெய்யெண் கோடு $(-\infty, -2), (-2, 3)$ மற்றும் $(3, \infty)$ என மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

இடைவெளிகள்	$f'(x)$ –ன் குறியீடு	கூடும் / குறையும் இடைவெளி
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	இடைவெளி $(-\infty, -2]$ –ல் கூடும் சார்பு
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	இடைவெளி $[-2, 3]$ –ல் குறையும் சார்பு
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	இடைவெளி $[3, \infty)$ –ல் கூடும் சார்பு

அட்டவணை: 6.2

எடுத்துக்காட்டு 6.21

$f(x) = x^2 + 2x - 5$ என்ற சார்பின் தேக்கநிலைப் புள்ளி மற்றும் தேக்கநிலை மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 \qquad \ldots (1)$$

x– ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தும் போது நாம் பெறுவது

$$f'(x) = 2x + 2$$

தேக்கநிலைப் புள்ளியில், $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

$x = -1$ –ல் $f(x)$ ஆனது தேக்கநிலை மதிப்பை பெற்றிருக்கும்

$x = -1$, எனில், சமன்பாடு (1) –ல் இருந்து

$f(-1) = (-1)^2+2(-1)-5$

$= -6$

$f(x)$ இன் தேக்கநிலை மதிப்பு $= -6$

எனவே தேக்கநிலைப் புள்ளி $(-1,-6)$ மற்றும் தேக்கநிலை மதிப்பு -6 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.22

$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$ என்ற சார்பின் தேக்கநிலைப் புள்ளி மற்றும் தேக்கநிலை மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 2x^3+9x^2+12x+1.$$

x –ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்தும் போது நாம் பெறுவது

$$f'(x) = 6x^2+18x+12$$
$$= 6(x^2+3x+2)$$
$$= 6(x+2)(x+1)$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x+2)(x+1) = 0$$

$\Rightarrow x + 2 = 0$ (அ) $x + 1 = 0.$

$x = -2$ (அ) $x = -1$

$x = -2$ மற்றும் $x = -1$ ல் $f(x)$ ஆனது தேக்கநிலைப் புள்ளிகளை பெறுகிறது.

$x = -2$ மற்றும் $x = -1$ என $f(x)$ இல் பிரதியிடும் போது தேக்கநிலை மதிப்புகள் கிடைக்கிறது.

$x = -2$ எனில்,

$$f(-2) = 2(-8)+9(4)+12(-2)+1$$
$$= -3$$

$x = -1$ எனில்,

$$f(-1) = 2(-1)+9(1)+12(-1)+1$$
$$= -4$$

தேக்கநிலைப் புள்ளிகள் $(-2,-3)$ மற்றும் $(-1,-4)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.23

ஒரு நிறுவனம் x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான இலாபச் சார்பு $P(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+x.$ அந்த நிறுவனம் இலாபத்தில் இயங்குகிறதா, இல்லையா என கணிக்கவும்.

தீர்வு :

$$P(x) = \frac{x^3}{3}+x^2+x.$$
$$P'(x) = x^2+2x+1$$
$$= (x+1)^2$$

x –ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $P'(x) > 0$ என்பது தெளிவாகிறது.

$\therefore$ நிறுவனமானது இலாபத்தில் இயங்குகிறது.

முக்கியக் குறிப்பு :

$R(x)$ மற்றும் $C(x)$ என்பன முறையே x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான வருவாய் மற்றும் செலவுச் சார்பு என்க. அனைத்து $x > 0$ –க்கும் $P(x) = R(x) - C(x)$ என்பது பெரும மதிப்பை அடையும்பொழுது இறுதி நிலை வருவாய் = இறுதி நிலைச் செலவு என அமையும், அதாவது $R'(x)=C'(x)$ எனும் பட்சத்தில் மேற்கூறிய கருத்து உண்மையாகும். தேக்க நிலைப் புள்ளியில் இலாபம் பெருமத்தை அடைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.24

$C(x) = \frac{x^2}{6} + 5x + 200$ மற்றும் $p(x) = 40 - x$ என்பது x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான மொத்த செலவு சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு எனில் பெரும லாபம் கிடைப்பதற்கான உற்பத்தியின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$C(x) = \frac{x^2}{6}+5x+200 \qquad \ldots (1)$$

மற்றும் $p(x) = 40-x \qquad \ldots(2)$

இறுதிநிலை வருவாய் $[R'(x)]$ = இறுதிநிலை செலவு $[C'(x)]$ என இருக்கும்பொழுது, இலாபம் பெருமமாகிறது.

சமன்பாடு (1)–லிருந்து $C'(x) = \frac{2x}{6} + 5$

$= \frac{x}{3} + 5$

சமன்பாடு (2)–லிருந்து $R = p \cdot x$

$= 40x - x^2$

$R'(x) = 40 - 2x$

எனவே $40 - 2x = \frac{x}{3} + 5$

$x = 15$

$x = 15$ – ல் இலாபம் பெருமத்தை அடைகிறது.

6.2.3 இடம் சார்ந்த பெருமம் மற்றும் சிறுமம் , மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம்: (Local and Global (Absolute) Maxima and Minima)

வரையறை 6.1:(Definition)

இடம் சார்ந்த பெருமம் மற்றும் இடம்சார்ந்த சிறுமம்

c–ஐ உள்ளடக்கிய ஏதேனும் ஒரு திறந்த இடைவெளி (a,b)–ல் $f(c) \geq f(x)$ அனைத்து $x \in (a,b)$ எனுமாறு அமைந்தால் f ஆனது இடம்சார்ந்த பெருமம் (அல்லது சார்ந்த பெருமம்) பெற்றிருக்கிறது எனலாம்.

c–ஐ உள்ளடக்கிய ஏதேனும் ஒரு திறந்த இடைவெளி (a,b) –ல் $f(c) \leq f(x)$ அனைத்து $x \in (a,b)$ எனுமாறு அமைந்தால் f ஆனது இடம்சார்ந்த சிறுமம் (அல்லது சார்ந்த சிறுமம்) பெற்றிருக்கிறது எனலாம்.

வரையறை : 6.2 (Definition)

மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மற்றும் மீச்சிறு சிறுமம்:

f –ன் அரங்கத்திலுள்ள அனைத்து x–க்கும், $f(c) \geq f(x)$ என இருக்குமானால் f ஆனது c–யில் **மீப்பெரு பெருமத்தை** அடைகிறது என்போம். $f(c)$ என்பது f–ன் அரங்கத்தில் f–ன் மீப்பெரு மதிப்பு ஆகும்.

இதேபோல் f –ன் அரங்கத்திலுள்ள அனைத்து x –க்கும், $f(c) \leq f(x)$ என அமையுமானால் f ஆனது c–ல் **மீச்சிறு சிறுமத்தை** அடைகிறது எனலாம். $f(c)$ என்பது f –ன் அரங்கத்தில் f–ன் மீச்சிறு மதிப்பாகும். f –ன் மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகள் என்பன முறையே முகட்டுப் புள்ளிகள்(அறுதி நிலைப் புள்ளிகள்) எனப்படும்.

குறிப்பு:

(a,b) –ல் f என்ற சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகள் முழுதளாவிய பெருமம் மற்றும் முழுதளாவிய சிறுமம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

இடம்சார்ந்த பெருமம் மற்றும் இடம் சார்ந்த சிறுமம் ஆகியவற்றிற்கான நிபந்தனைகள்:

c –ஐ உள்ளடக்கிய (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் f என்ற சார்பானது வகையிடத்தக்கது மற்றும் $f''(c)$ காணத்தக்கது என்க.

(i) $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) > 0$, எனில் f ஆனது c –ல் இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடைகிறது.

(ii) $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) < 0$, எனில் f ஆனது c –ல் இடம் சார்ந்த பெருமத்தை அடைகிறது.

குறிப்பு:

பொருளாதாரத்தில், $y = f(x)$ என்பது செலவுச் சார்பு அல்லது வருவாய் சார்பை குறிக்கும் எனில், $\frac{dy}{dx} = 0$, என்ற புள்ளியில், செலவு அல்லது வருவாய் பெருமம் அல்லது சிறுமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.25

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ என்ற சார்பிற்கு அறுதி நிலை (முகட்டு) மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 2x^3+3x^2-12x \quad \ldots (1)$$

$$f'(x) = 6x^2+6x-12$$

$$f''(x) = 12x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2+6x-12 = 0$$

$$\Rightarrow 6(x^2+x-2) = 0$$

$$\Rightarrow 6(x+2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \,;\, x = 1$$

$x = -2$ எனில்

$$f''(-2) = 12(-2) + 6$$

$$= -18 < 0$$

$x=-2$ –ல் $f(x)$ ஆனது இடம் சார்ந்த பெருமத்தை அடைகிறது.

மேலும் (1) –ல் $x = -2$-ஐ பிரதியிட, இடம் சார்ந்த பெருமத்தை அடையலாம்.

$$f(-2) = 2(-2)^3+3(-2)^2-12(-2)$$

$$= -16+12+24$$

$$= 20.$$

$x = 1$ எனில்

$$f''(1) = 12(1) + 6$$

$$= 18 > 0$$

$x = 1$–ல் $f(x)$ ஆனது இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடைகிறது.

மேலும் (1)–ல் $x = 1$ –ஐப் பிரதியிட, இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடையலாம்.

$$f(1) = 2(1) + 3(1) - 12(1)$$

$$= -7$$

அறுதி நிலை (முகட்டு) மதிப்புகள் -7 மற்றும் 20 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.26

$[-2,1]$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)=3x^5-25x^3+60x+1$ என்ற சார்பிற்கு முழுதளாவிய பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$f(x) = 3x^5-25x^3+60x+1 \quad \ldots (1)$$

$$f'(x) = 15x^4-75x^2+60$$

$$= 15(x^4-5x^2+4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 15(x^4-5x^2+4) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-4)(x^2-1) = 0$$

$$x = \pm 2 \text{ (அ) } x = \pm 1$$

$-2, \pm 1 \in [-2, 1]$ மற்றும் $2 \notin [-2,1]$

$x = -2$ எனில்

$$f(-2) = 3(-2)^5 - 25(-2)^3 + 60(-2) + 1$$

$$= -15$$

$x = 1$ எனில்

$$f(1) = 3(1)^5 - 25(1)^3 + 60(1) + 1$$

$$= 39$$

$x = -1$ எனில்

$$f(-1) = 3(-1)^5 - 25(-1)^3 + 60(-1) + 1$$

$$= -37.$$

மீப்பெரு பெருமம் = 39

மீச்சிறு சிறுமம் = -37

6.3 பெருமம் மற்றும் சிறுமம் ஆகியவற்றின் பயன்பாடுகள் (Applications of maxima and minima)

6.3.1 பெரும இலாபம் மற்றும் சிறுமச்செலவு சார்ந்த கணக்குகள்: (Problems on profit maximization and minimization of cost function)

எடுத்துக்காட்டு 6.27

குறிப்பிட்ட செலவுச் சார்பு $C = 56 - 8x + x^2$ ஆகும். இங்கு C என்பது ஒரு அலகிற்கான செலவு மற்றும் x என்பது உற்பத்தி செய்யப்படும்

மொத்த அலகுகள் என்க. உற்பத்திச் செலவின் மீச்சிறு மதிப்பினையும் அதற்குத் தகுந்த உற்பத்தி அளவுகளின் எண்ணிக்கையும் காண்க

தீர்வு:

$C = 56 - 8x + x^2$

x – ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dC}{dx} = -8 + 2x$$

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 2$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow -8 + 2x = 0$$

$$\therefore x = 4$$

$x = 4$ எனில் $\frac{d^2C}{dx^2} = 2 > 0$

$\therefore x = 4$–ல் C ஆனது பெருமத்தை அடைகிறது.

$\therefore$ உற்பத்தி செலவின் மீச்சிறு மதிப்பு

$$C(4) = 56-32+16 = 40$$

மேலும் அதற்கான உற்பத்தி அளவு $x = 4$ அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 6.28

ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்தச் செலவுச் சார்பானது $C(x) = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 28x + 10$, இங்கு x ஆனது உற்பத்தி ஆகும். உற்பத்தியின் ஒவ்வொரு அலகிற்கும் ₹ 2 வீதம் விதிக்கப்பட்ட வரியை உற்பத்தியாளர் தன் செலவோடு இணைத்துக் கொள்கிறார். வியாபாரச் சந்தைக்கான தேவைச் சார்பு $p = 2530 - 5x$, என கொடுக்கப்பட்டால், பெரும இலாபம் அடைவதற்கான உற்பத்தியின் அளவையும், விலையையும் காண்க. இங்கு p என்பது உற்பத்தியின் ஒவ்வொரு அலகின் விலையைக் குறிகிறது.

தீர்வு:

x அலகுகள் உற்பத்திற்கான மொத்த வருவாய்: $R = p\,x$

$$= (2530 - 5x)x$$

$$= 2530x - 5x^2$$

அலகிற்கான வரி ₹ 2 வீதம் செலுத்தப்பட்ட வரித் தொகை = $2x$.

$\therefore$ வரி விதிக்கப்பட்ட பின் மொத்தச் செலவு

$$C(x) + 2x = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 28x + 10 + 2x$$

இலாபம் = மொத்தவருவாய்–(மொத்தசெலவு + வரி)

$$P = (2530 - 5x)x - \left(\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 28x + 10 + 2x\right)$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2500x - 10$$

$$\frac{dP}{dx} = -x^2 + 2500$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2x$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow 2500 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 2500$$

$\therefore x = 50$ (-50 ஏற்புடையதல்ல)

$x = 50$ எனில், $\frac{d^2P}{dx^2} = 2 \times 50 < 0$

$x = 50$ –ல் P ஆனது பெருமம் அடைகிறது

$$P = 2530 - 5(50)$$

$$= ₹\ 2280$$

எடுத்துக்காட்டு 6.29

உற்பத்திக்கான மேற்பார்வை செலவு ₹ 1600. ஒரு அலகிற்கான பொருட்செலவு ₹ 30 மற்றும் x அலகுகள் உற்பத்தி செய்வதற்கான ஊதியம் ₹$\left(\frac{x^2}{100}\right)$ ஆகும். சராசரி செலவு சிறுமமாக இருக்க எத்தனை அலகுகள் உற்பத்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தகவலின்படி, ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் x அலகுகள் தயாரிப்பதற்கான மொத்த செலவு $C(x)$ = (உற்பத்தி செய்வதற்கான ஊதியம்) + (பொருட்செலவு) + (உற்பத்திக்கான மேற்பார்வைச் செலவு)

$$C(x) = \frac{x^2}{100} + 30x + 1600$$

$$AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{100} + 30x + 1600}{x}$$

$$= \frac{x}{100} + 30 + \frac{1600}{x}$$

$$\frac{d(AC)}{dx} = \frac{1}{100} - \frac{1600}{x^2} \quad \text{மற்றும்}$$

$$\frac{d^2(AC)}{dx^2} = \frac{3200}{x^3}$$

$$\frac{d(AC)}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{1600}{x^2} + \frac{1}{100} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{1600}{x^2} \Rightarrow x^2 = 160000$$

$\therefore \quad x = 400$ (-400 ஏற்புடையதல்ல)

$x = 400$ எனில், $\dfrac{d^2(AC)}{dx^2} = \dfrac{3200}{400^3} > 0$

அதாவது, $x = 400$ எனில் AC ஆனது சிறுமத்தை அடைகிறது.

சராசரி செலவு சிறுமமாக இருக்க 400 அலகுகள் உற்பத்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

பயிற்சி 6.2

1. x அலகுகள் கொண்ட ஒரு பொருளுக்கான உற்பத்தி மற்றும் சந்தைப்படுத்தலுக்கான சராசரிச் செலவுச் சார்பு $AC = 2x - 11 + \frac{50}{x}$. AC ஆனது கூடும் சார்பாக அமைவதற்கான உற்பத்தி அளவு (x) ஏற்கும் மதிப்புகளைக் காண்க.

2. ஒரு தொலைக்காட்சி உற்பத்தியாளர் x எண்ணிக்கை கொண்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்வதற்கும், சந்தைப்படுத்துவதற்குமான செலவுச் சார்பு $C(x) = 300x^2 + 4200x + 13,500$. ஒவ்வொரு தொலைக்காட்சி பெட்டியும் ₹ 8,400–க்கு விற்பனை செய்யப்படுகிறது எனில், நிறுவனத்தின் இலாபம் அதிகமாகிறது என நிறுவுக.

3. ஒரு முற்றுரிமையாளரின் தேவைப்பாட்டின் வளைவரை $x = 106 - 2p$ மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பின் வளைவரை $AC = 5 + \frac{x}{50}$. இங்கு p என்பது உற்பத்திற்கான ஒரு அலகு விலை மற்றும் x என்பது உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை ஆகும். மொத்த வருவாய் $R = px$, எனில் அதிகப்படியான இலாபம் தரும் உற்பத்தி அளவு மற்றும் மீப்பெரு இலாபம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. ஒரு சுற்றுலா ஏற்பாட்டாளர் ஒரு பயணிக்கு ₹ 136 வீதத்தில் 100 பயணிகளுக்கு மேற்பட்ட ஒவ்வொரு பயணிகளுக்கும் 40 பைசாக்கள் வீதம் தள்ளுபடி தருகிறார். குறைந்தது 100 பயணிகள் கலந்து கொண்டால்தான் சுற்றுலா மேற்கொள்ளப்படும். அவர் மீப்பெரு தொகையைப் பெறுவதற்கான பயணிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

5. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ –க்கு இடம் சார்ந்த சிறுமம் மற்றும் இடம் சார்ந்த பெருமம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. x எனும் ஒரு பொருளின் மொத்த வருவாய் சார்பானது $R = 15x + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{36}x^4$ எனில், சராசரி வருவாயின் மீப்பெரு புள்ளியில் சராசரி வருவாயானது இறுதி நிலை வருவாய்க்குச் சமம் என நிறுவுக.

6.3.2 சரக்கு நிலைக் கட்டுப்பாடு (Inventory control)

நடைமுறை மற்றும் எதிர்கால தேவைக்கேற்ப மூலப்பொருட்களைக் கையிருப்பு செய்வதே சரக்குநிலைக் கட்டுப்பாடு ஆகும். மூலப்பொருட்கள், மற்றும் முழுமையடைந்த உற்பத்தி பொருட்கள் என்பன சரக்கு இருப்பிற்கான எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

தேவையான மூலப்பொருட்களில் தேவையான அளவை சீரான இடைவெளியில் கோருதல் மற்றும் பெறுதல் மூலம், கோருதல் செலவை குறைப்பதே சரக்குநிலைக் கணக்கின் உள் நோக்கமாகும்.

சரக்கு நிலைத் தீர்மானங்கள்: (An inventory decisions)

ஒவ்வொரு முறையும் சரக்கின் அளவானது,

1. எவ்வளவு கோரப்பட வேண்டும்?
2. அவை எப்பொழுது கோரப்பட வேண்டும்?

சரக்கு நிலை கணக்கில் விலைக் காரணிகளின் பங்கு (Costs involved in an inventory problems)

(i) தக்க வைத்தல் செலவு (அல்லது) இருப்புச் செலவு (அல்லது) சரக்குத் தேக்கச் செலவு C_1 (Holding cost or storage cost or inventory carrying cost)

ஒரு அலகு அளவு கொண்ட பொருட்களை ஒரு அலகு கால அளவிற்கு தேக்கிவைப்பது (அல்லது) கையிருப்பு செய்வதின் தொடர்பாக ஏற்படும் செலவே சரக்கு தேக்கச் செலவாகும்.

(ii) பற்றாக்குறை விலை: (Shortage cost : C_2)

சரக்கு இருப்பு வைப்பதற்கான கொள்முதல் பொருளின் பற்றாக்குறையால் ஏற்படும் அதிகப்படிச் செலவு பற்றாக்குறைச் செலவாகும்.

(iii) உட்கட்டமைப்புச் செலவு (அல்லது) கோருதல் செலவு (அல்லது) கொள்முதல் செலவு C_3 (Setup cost or ordering cost or procurement cost)

பொருட்களை வாங்குவதற்கான கோருதல் வைப்புச் செலவு அல்லது உற்பத்தியின் வசதிக்காக, உற்பத்தி உபகரணங்களை மாற்றி அமைப்பதற்கான ஆரம்ப கட்டச் செலவு.

6.3.3 மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு (Economic Order Quantity (EOQ)):

வருடாந்திர சரக்குத் தேக்க செலவு மற்றும் நிச்சயிக்கப்பட்ட சூழ்நிலையில், வருடாந்திர தேவைக்கேற்ப நிறுவன அமைப்புச் செலவு போன்றவைகளை குறைப்பதற்குத் ஏற்ற வகையில் கோருதல் அளவை, சீர்படுத்துவதே மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு ஆகும்.

சூத்திரத்தை தருவிக்கும் முறை கற்றல் திறனை மேம்படுத்துவதற்காகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தருவிக்கும் முறை தேர்வில் கேட்கப்படமாட்டாது.

தேவை தெரிந்தும், குறைபாடுகளின்றியும், சீரானதாகவும் உள்ள பொழுது, பொருளாதார நோக்கின் கீழ் அமைந்த கோருதல் அளவையும், அடுத்தடுத்த சாதகமான இடைவெளிகளில் கோருதல் அளவைத் தீர்மானிப்பதற்கும், இந்த வாய்பாடு பயன்படுகிறது.

EOQ ஐப் பெற பின்வருவனவற்றைக் கருதுவோம்.

(i) ஒரு கால அளவிற்குச் சீரான தேவை R அலகுகள் என்க.

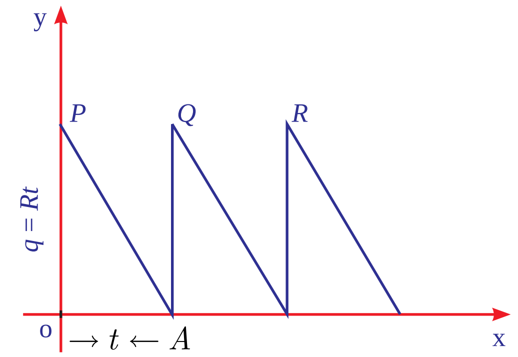
(ii) சரக்கு நிலை உருப்படிகளின் அளிப்பு அல்லது உற்பத்தி உடனடியாகப் பெறப்படுகிறது என்க.

(iii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு ₹ C_1 என்க.

(iv) ஒரு ஆண்டில் கோரப்படும் எண்ணிக்கை $'n'$ எனவும், ஒவ்வொரு முறையும் $'q'$ அலகுகள் கோரப்படுகின்றன (உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன) என்க.

(v) ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் கோருதல் செலவு ₹ C_3 எனவும், அடுத்தடுத்த இரு கோருதல்களுக்கு இடைப்பட்ட கால அளவு $'t'$ என்க.

இந்த கட்டமைப்பின் விளக்கப் படமானது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (Model)



படம். 6.12

ஓர் உற்பத்தி ஓட்டமானது t இடைவெளியில் அமைகிறது எனில், ஒரு தேவையின் அளவு $q = Rt$ யானது ஒவ்வொரு ஓட்டத்திற்கும் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும். சிறிய கால அளவு dt –ல் கையிருப்பானது $Rt\,dt$, என்பதால் கால அளவு t –ல் கையிருப்பானது

$$\int_0^t Rt\,dt = \frac{1}{2}Rt^2$$

$$= \frac{1}{2}qt \quad (\because Rt = q)$$

= சரக்கு நிலை முக்கோணம் OAP–ன் பரப்பளவு (படம் 6.12 –ஐ பார்க்க)

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் சரக்குத் தேக்கச் செலவு = $\frac{1}{2}C_1Rt^2$

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் கோருதல் செலவு = C_3

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் மொத்த செலவு = $\frac{1}{2}C_1Rt^2 + C_3$

ஒரு கால அளவிற்கான மொத்த சராசரி செலவு

$$C(t) = \frac{1}{2}C_1Rt + \frac{C_3}{t} \quad ..(1)$$

$$\frac{d}{dt}C(t) = \frac{1}{2}C_1R - \frac{C_3}{t^2} \quad ...(2)$$

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = \frac{2C_3}{t^3} \quad ...(3)$$

$C(t)$ ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெற,

$$\frac{d}{dt}C(t) = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \frac{d^2}{dt^2}C(t) > 0$$

$$\frac{d}{dt}C(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1R - \frac{C_3}{t^2} = 0$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$$

$t = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$ எனும்போது,

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = \frac{2C_3}{\left(\frac{2C_3}{C_1R}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

இவ்வாறாக, உகந்த (optimum) கால இடைவெளி $t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$ –ல் $C(t)$ ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

∴ மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு :

$$EOQ = q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$$

இதுவே வில்சனின் உகந்த கோருதல் அளவைக் கணக்கிடும் சூத்திரமாகும்.

(i) ஒரு ஆண்டிற்கு, உகந்த கோருதலின் எண்ணிக்கை

$$n_0 = \frac{\text{தேவை}}{EOQ} = R\sqrt{\frac{C_1}{2C_3R}} = \sqrt{\frac{RC_1}{2C_3}} = \frac{1}{t_0}$$

(ii) ஓர் அலகு காலத்தில், சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு, $C_0 = \sqrt{2C_1C_3R}$

(iii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு $= \frac{q_0}{2} \times C_1$ மற்றும் கோருதல் செலவு $= \frac{R}{q_0} \times C_3$

(iv) EOQ –ல், கோருதல் செலவு = சரக்கு தேக்கச் செலவு.

(v) மொத்த உகம செலவு $= Rp + \sqrt{2C_1C_3R}$.

எடுத்துக்காட்டு 6.30

ஒரு நிறுவனம் வருடத்திற்கு 48000 அலகுகள் கச்சாப் பொருட்களைப் பயன்படுத்துகிறது. அவற்றின் ஓர் அலகின் விலை ₹ 2.50 ஒரு கோருதலுக்கானக் கோருதல் செலவு ₹ 45. ஓர் ஆண்டிற்கு தேக்கச் செலவு ஓர் அலகு விலையில் 10.8 % ஆகும் எனில் மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு, ஒரு ஆண்டிற்கான கோருதல்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்ட கால அளவு ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவில், சரக்கு தேக்கச் செலவும், கோருதல் செலவும் சமம் என்பதை சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு:

இங்கு, தேவை $R = 48000$

தேக்கச் செலவு $C_1 = 2.50$ இல் 10.8%

$$= \frac{10.8}{100} \times 2.50 = 0.27$$

கோருதல் செலவு $C_3 = 45$

மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு $q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 45 \times 48000}{0.27}} = 4000 \text{ அலகுகள்}$$

ஒரு ஆண்டுக்கான கோருதல்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{R}{q_0}$

$$= \frac{48000}{4000} = 12$$

ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்டக் கால அளவு : $t_0 = \dfrac{q_0}{R}$

$$= \frac{1}{12} = 0.083 \text{ ஆண்டு}$$

மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவில், சரக்கு தேக்கச் செலவு $= = \dfrac{q_0}{2} \times C_1$

$$= \frac{4000}{2} \times 0.27 = ₹\ 540$$

மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவில், சரக்கு கோருதல் செலவு $= \dfrac{R}{q_0} \times C_3$

$$= \frac{48000}{4000} \times 45 = ₹\ 540$$

எனவே மிகு ஆதாய கோருதல் அளவில், சரக்கு தேக்கச் செலவும், கோருதல் செலவும் சமம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.31

ஒரு உற்பத்தியாளர் தன்னுடைய வாடிக்கையாளர்களுக்கு வருடந்தோறும் $12,000$ அலகுகள் வழங்குவதற்கு ஒத்துக் கொண்டுள்ளார். கோருதல் செலவு (C_3) ₹ 100 மற்றும் சரக்குத் தேக்கச் செலவு, ஒரு அலகிற்கு, ஒருமாதத்திற்கு ₹0.80 எனக்கணக்கிடப்படுகிறது. பற்றாக்குறை அனுமதிக்கப் படுவதில்லை மற்றும் கோருதலுக்கான வழங்கல் உடனுக்குடன் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது எனில்,

(i) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு காண்க.

(ii) இரண்டு கோருதலுக்கு இடைப்பட்டக் கால அளவு

(iii) ஆண்டு ஒன்றுக்கு வழங்கப்படும் கோருதலின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

R = வருடத் தேவை = $12,000$ அலகுகள்

C_3= கோருதல் செலவு = ₹ 100 கோருதல் ஒன்றிற்கு

C_1= சரக்குத் தேக்கச் செலவு = ₹ 0.80 /லிட்டர் / மாதம் ஒன்றிற்கு

= ₹ 0.80×12 வருடத்திற்கு

= ₹ 9.6 வருடத்திற்கு

(i) EOQ = மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு

$$= \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 12000}{9.6}}$$

$= 500$ அலகுகள்

(ii) ஒரு வருடத்திற்கான உகந்த கோருதலின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{\text{தேவை}}{EOQ} = \dfrac{12,000}{500} = 24$

(iii) உகந்த நேரம், வருடம் ஒன்றிற்கு

$$= \frac{1}{t_0} = \frac{1}{24} \text{ வருடம்} = \frac{12}{24} \text{ மாதம்}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ மாதம்} = 15 \text{ நாட்கள்}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.32

ஒரு நிறுவனம் மாதம் ஒன்றிற்கு 1000 அலகுகள் சீரான விலையில் வழங்குகிறது மற்றும் ஒவ்வொரு முறையும் உற்பத்தி செலவு ₹ 200–ல் ஆரம்பிக்கிறது. ஒரு பொருளுக்கு ஒரு மாதத்திற்கு தேக்க நிலைச் செலவு ₹ 20 ஒரு ஓட்டத்திற்கு உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை உறுதி செய்யப்பட வேண்டும். $500, 600, 700$ மற்றும் 800 ஆகிய ஓட்ட அளவிற்கு மொத்த உள்கட்டமைப்புச் செலவு மற்றும் சரக்கு நிலைத் தேக்கச் செலவுகளைக் காண்க. மேலும் EOQ சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, உற்பத்தி ஓட்டச் செலவைக் காண்க.

தீர்வு:

தேவை: $R = 1000$ அலகுகள் / மாதம்

கோருதல் செலவு : $C_3 =$ ₹ 200 ஒரு கோருதலுக்கு

சரக்குத் தேக்கச் செலவு : C_1= ₹ 20 / உருப்படி/ மாதம்

ஓட்ட அளவு q	கோருதல் செலவு $\frac{R}{q} \times C_3$	சரக்கு நிலைத் தேக்கச் செலவு $\frac{q}{2} \times C_1$	மொத்த சரக்கு நிலைச் செலவு
500	$\frac{1000}{500} \times 200 = 400$	$\frac{500}{2} \times 20 = 5000$	5400
600	$\frac{1000}{600} \times 200 = 333.3$	$\frac{600}{2} \times 20 = 6000$	6333.3
700	$\frac{1000}{700} \times 200 = 285.7$	$\frac{700}{2} \times 20 = 7000$	7285.7
800	$\frac{1000}{800} \times 200 = 250$	$\frac{800}{2} \times 20 = 8000$	8250

அட்டவணை : 6.3

$$EOQ = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 200}{20}}$$

$$= \sqrt{20000}$$

= 141 அலகுகள் (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 6.33

ஒரு தயாரிப்பு நிறுவனம், சீரான விலையில் 4000 அலகுகள் உற்பத்தியினை வழங்குவதற்கு ஒத்துக்கொண்டுள்ளது. இருப்புச் செலவு அலகு ஒன்றிற்கு ஒரு ஆண்டிற்கு ₹ 50 மற்றும் சரக்கு இருப்புச் செலவு ஒரு ஓட்ட உற்பத்திற்கு ₹160 என தீர்மானிக்கப்பட்டுள்ளது. உற்பத்தியானது உடனடியாக தொடங்குவதற்கு ஒத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது மற்றும் பற்றாக் குறை அனுமதிக்கப்படுவதில்லை எனில், ஓட்டம் ஒன்றுக்கு மொத்த சரக்கு நிலைச் செலவு, சிறுமம் அடைவதற்கு எத்தனை அலகுகள் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும் எனக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

வருடத் தேவை : R = 4000 அலகுகள்

இருப்புச் செலவு : C_1 = ₹ 50

ஒரு உற்பத்திக்கு கோருதல் செலவு: C_3= ₹160

$$EOQ = \sqrt{\frac{2Rc_3}{c_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 4000 \times 160}{50}} = 160 \text{ அலகுகள்.}$$

∴ உற்பத்தி செலவினைக் குறைப்பதற்கு ஓட்டம் ஒன்றிக்கு 160 அலகுகள் உற்பத்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.34

ஒரு நிறுவனமானது 500 பெட்டிகளை மூன்று மாதங்களில் வாங்கியுள்ளது. ஒரு பெட்டியின் விலை ₹ 125, கோருதல் செலவு ₹150 ஆகும். ஓர் அலகிற்கு ஆண்டு சரக்கு நிலைச் தேக்கச் செலவு 20% –ஆக மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

(i) தற்போதைய சரக்கு நிலைக் கொள்கைக்கான மொத்த சரக்கு நிலை செலவுத் தொகையைக் காண்க.

(ii) EOQ –ன், அளவினை அலகு மதிப்பில் காண்க

(iii) மிகு ஆதாய கோருதல் அளவைப் பயன்படுத்தி வேலை செய்வதன் மூலம் எவ்வளவு பணம் சேமிக்க இயலும்?

தீர்வு:

கணக்கின்படி,

ஒரு கோருதலின் கோருதல் செலவு : C_3= ₹150

ஓர் அலகு கோருதலின் எண்ணிக்கை : $q = 500$ அலகுகள்

வருடத் தேவை $= 500 \times 4 = 2000$ அலகுகள்

தேக்கச் செலவு = ஓர் அலகுக்கு 20%

$$C_1 = \frac{20}{100} \times 125 = ₹25$$

(i) தற்போதைய சரக்குநிலை கொள்கைக்கான மொத்த சரக்கு நிலைச் செலவு

$$= \frac{R}{q} \times C_3 + \frac{q}{2} C_1$$

$$= \frac{2000}{500} \times 150 + \frac{500}{2} \times 25$$

$$= ₹\ 6850$$

(ii) $$EOQ = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 150}{25}}$$

$= \sqrt{12 \times 2000}$

≈ 155 அலகுகள்.

(iii) சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு $= \sqrt{2RC_3C_1}$

$= \sqrt{2 \times 2000 \times 150 \times 25}$

$=$ ₹ $3873.$

மிகு ஆதாய கோருதல் அளவினைப் பயன்படுத்தி, நிறுவனம் சேமித்த பணம்

$= 6850 - 3873 =$ ₹2977

பயிற்சி 6.3

1. வருடாந்திர தேவை மற்றும் 3 பொருட்களின் ஓரலகு விலை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பொருட்கள்	வருடத் தேவை (அலகுகளில்)	அலகு விலை (ரூபாயில்)
A	800	0.02
B	400	1.00
C	13,800	0.20

கோருதல் செலவு ஒரு கோருதருலுக்கு ₹ 5 மற்றும் ஆண்டு இருப்புச் செலவு அலகு ஒன்றிற்கு ₹ 10 ஆகும் எனில்,

(i) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவினை அலகு மதிப்பில் காண்க.

(ii) சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு.

(iii) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவைப் ரூபாயில் காண்க.

(iv) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவை வருட வழங்கல் அடிப்படையில் காண்க.

(v) ஒரு வருடத்திற்கான கோருதல்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

2. ஒரு விற்பனையாளர் தன்னுடைய வாடிக்கையாளருக்கு ஒரு வாரத்திற்கு 400 அலகுகள் கொண்ட பொருட்களை வழங்குகிறார். விற்பனையாளர் உற்பத்தியாளரிடமிருந்து ஓர் அலகு பொருளை ₹ 50 –க்கு வாங்குகிறார். உற்பத்தியாளரிடமிருந்து வாங்கப்படும் கோருதல் செலவு, ஒரு கோருதலுக்கு ₹ 75 ஒரு வருடத்திற்கான சரக்கு நிலை தேக்கச் செலவானது உற்பத்தி செலவின் 7.5 % எனில்

(i) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு (EOQ)

(ii) மொத்த உகமச் செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

6.4 பகுதி வகையிடல்: (Partial Derivatives)

பல மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு சார்பின் பகுதி வகையிடல் என்பது மாறிகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பொறுத்து (மற்ற மாறிகளை மாறிலிகளாகக் கொண்டு) சார்பின் வகையிடல் ஆகும். **இப்பகுதியில் நாம் இரண்டு சாரா மாறிகளை கொண்ட சார்புகளை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டு அவற்றின் வகையீடுகளை காண்போம்.**

$u = f(x,y)$ என்பது x , y என்ற இரண்டு சாரா மாறிகளைக் கொண்ட சார்பு என்க.

y –ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு x –ஐ பொறுத்து $u = f(x,y)$ –யை வகையீடு செய்து கிடைப்பது x –ஐ பொறுத்து u –ன் பகுதி வகைக்கெழு ஆகும். இதை $\frac{\partial u}{\partial x}$ அல்லது u_x எனும் குறியீட்டில் குறிப்பது வழக்கம்

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

என்ற எல்லை இருக்கும்போது, y என்பது மாறாதது, Δx என்பது x –ல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும். x –ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு y –ஐப் பொறுத்து $u = f(x,y)$ –ஐ வகையீடு செய்து கிடைப்பது y –ஐ பொறுத்த u –ன் பகுதி வகையிடல் ஆகும். இதை $\frac{\partial u}{\partial y}$ அல்லது u_y எனும் குறியீட்டில் குறிப்பது வழக்கம்

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right)}{\Delta y}$$

என்ற எல்லை இருக்கும்போது, x என்பது மாறாதது, $\triangle y$ என்பது y –ல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும்.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ –ஐ $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ (அல்லது) $\frac{\partial f}{\partial x}$ என எழுதலாம். இதே போல் $\frac{\partial u}{\partial y}$ –ஐ $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ (அல்லது) $\frac{\partial f}{\partial y}$ என எழுதலாம். பகுதி வகைக்கெழுக்களைக் காணும் முறையை பகுதி வகையிடல் என்கிறோம்.

6.4.1 தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழுக்கள்: (Successive partial derivatives)

$u = f(x,y)$ என்ற சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம். இதிலிருந்து $\frac{\partial u}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y}$ காணலாம். $\frac{\partial u}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y}$ என்பன, y–ன் சார்புகளாக இருந்தால் அவற்றை x மற்றும் y–ஐ பொறுத்து மீண்டும் பகுதி வகையிடலாம். இந்தப் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் $u(x, y)$–ன் இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்கள் ஆகும். அதாவது $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ஆகியவை இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்கள்.

இதேபோல் மூன்றாம் வரிசை, நான்காம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்களை (காண முடியுமானால்) நாம் காணலாம். தொடர்ச்சியாக பகுதி வகைக்கெழு காணும் முறையை தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழுக்கள் என்போம்.

$u = f(x,y)$ –ஐ x –ஐ பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்து மீண்டும் y, ஐ பொறுத்து பகுதி வகைப்படுத்தினால் நாம் பெறுவது $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ அதாவது $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ஆகும்.

அதே போல் $u = f(x,y)$–ஐ y–ஐ பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்து மீண்டும் x– ஐ பொறுத்த பகுதி வகையிடலை $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ அதாவது $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ என்று குறிப்போம்.

குறிப்பு:

$u(x,y)$ என்பது x மற்றும் y–ல் தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

சமபடித்தான சார்புகள்: (Homogeneous functions)

$u=f(x,y)$ என்பது x ,y என்ற இரு சாரா மாறிகளைக்கொண்ட சார்பு என்க.

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y),\ t > 0.$$

எனில் $u=f(x,y)$ என்பது 'n' படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனப்படும்.

6.4.2 ஆய்லரின் தேற்றம் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள் (Euler's theorem and its applications)

இரு மாறிகளை கொண்ட ஆய்லரின் தேற்றம்: (Euler's theorem for two variables)

$u = f(x,y)$ என்பது x,y –ல் அமைந்த 'n', படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில்

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

எடுத்துக்காட்டு 6.35

$u = x^2(y-x) + y^2(x-y)$, எனில் $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-y)^2$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$u = x^2y - x^3 + xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 3x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

$$= -2\left(x^2 + y^2 - 2xy\right)$$

$$= -2(x-y)^2$$

எடுத்துக்காட்டு 6.36

$u = \log(x^2+y^2)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$$u=\log(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}(2x)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)\cdot 2-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}(2y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)\cdot 2-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

எடுத்துக்காட்டு 6.37

$u = xy+\sin(xy)$, எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$u = xy+\sin(xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y+y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x+x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= 1+x\left(-\sin(xy)\cdot y\right)+\cos(xy)$$

$$= 1-xy\sin(xy)+\cos(xy) \quad \text{.... (1)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y+y\cos(xy)\right)$$

$$= 1+\cos(xy)+y\left(-\sin(xy)x\right)$$

$$= 1-xy\sin(xy)+\cos(xy)\ldots \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.38

$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ என்ற சார்பிற்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$$u(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u(tx,ty) = \left(t^2x^2+t^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = t^{-1}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ u என்ற சமப்படித்தான சார்பின் படி -1 ஆகும்.

ஆய்லரின் தேற்றத்தின் படி,

$$x.\frac{\partial u}{\partial x}+y.\frac{\partial u}{\partial y}=(-1)u=-u$$

சரிபார்த்தல்:(Verification)

$$u = \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=\frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\ x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$= (-1)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = (-1)u = -u$$

எனவே ஆய்லரின் தேற்றம் சரிப்பார்க்கபட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 6.39

$u=\log\frac{x^4+y^4}{x+y}$ என்க. ஆய்லரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=3$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$u = \log \frac{x^4+y^4}{x+y}$$

$$e^u = \frac{x^4+y^4}{x+y} = f(x,y) \qquad \ldots (1)$$

$f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x+y}$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$f(tx,ty) = \frac{t^4x^4+t^4y^4}{tx+ty} = t^3\left(\frac{x^4+y^4}{x+y}\right) = t^3 f(x,y)$$

$\therefore$ f என்ற சமப்படித்தான சார்பின் படி 3 ஆகும்.

ஆய்லரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 3f$$

$f(x,y) = e^u$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$x\cdot\frac{\partial e^u}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial e^u}{\partial y} = 3e^u$$

$$\therefore e^u x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + e^u y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 3e^u$$

$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 3$$

பயிற்சி 6.4

1. $z = (ax+b)(cy+d)$, எனில் $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ மற்றும் $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ என்பனவற்றைக் காண்க.
2. $u = e^{xy}$, எனில் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u(x^2+y^2)$ எனக்காட்டுக.
3. $u = x\cos y + y\cos x$. எனில், $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதைச் சரி பார்க்க.
4. $u = x^3 + y^3 + 3xy^2$ என்ற சார்பிற்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தைச் சரி பார்க்க.
5. $u = x^2 y^3 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ என்க. ஆய்லரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $x.\dfrac{\partial u}{\partial x} + y.\dfrac{\partial u}{\partial y} = 5u$ எனக் காட்டுக.

6.5 பகுதி வகையிடலின் பயன்பாடுகள் (Applications of partial derivatives)

தொழில் துறையில் நேரடி பங்கு வகிக்கக் கூடிய கணக்குகளை பகுதி வகையிடல் மூலம் இங்கு காணலாம்.

6.5.1 இரு மாறிகளின் உற்பத்திச் சார்பு, இறுதி நிலை உற்பத்தித் திறன் (Production function and marginal productivities of two variables)

(i) உற்பத்திச் சார்பு: (Production function)

P என்ற ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தியானது, மூலதனம் (K), ஊதியம் (L), மூலப்பொருள்கள் (R), இயந்திரங்கள் (M) போன்ற பல பொருளாதாரக்காரணிகளைச்சார்ந்திருக்கிறது. எனவே $P = f(K,L,R,M,\ldots)$ என்பது உற்பத்திச் சார்பு எனப்படும். P என்பது முதலீடு மற்றும் ஊதியம் மட்டுமே சார்ந்து இருப்பின் $P = f(L,K)$ என எழுதலாம்.

(ii) இறுதி நிலை உற்பத்தித் திறன்: (Marginal productivities)

$P = f(L,K)$ என்பது உற்பத்திச் சார்பு எனில் $\dfrac{\partial P}{\partial L}$ என்பது ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்திச் சார்பு எனவும், $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ என்பது மூலதனம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்திச் சார்பு எனவும் அழைக்கப்படும்.

$P(L,K)$ என்ற ஒரு படி சீரான உற்பத்திச் சார்பிற்கான ஆயிலரின் தேற்றமானது

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = P \text{ ஆகும்.}$$

6.5.2 பகுதி தேவை நெகிழ்ச்சிகள் (Partial elasticity of demand)

A, B ஆகிய பொருள்களின் விலைகள் முறையே p_1, p_2 எனில் A என்ற பொருளின் தேவை $q = f(p_1, p_2)$ ஆகும்.

p_1 ஐப் பொறுத்து q–ன் தேவையின் பகுதி நெகிழ்ச்சி

$$\eta_{qp_1} = \frac{Eq}{Ep_1} = \frac{-p_1}{q}\frac{\partial q}{\partial p_1}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

p_2 ஐப் பொறுத்து q –ன் தேவையின் பகுதி நெகிழ்ச்சி

$$\eta_{qp_2} = \frac{Eq}{Ep_2} = \frac{-p_2}{q}\frac{\partial q}{\partial p_2}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.40

$$P = 10L + 0.1L^2 + 5K - 0.3K^2 + 4KL$$

என்ற உற்பத்திச் சார்புக்கு K = L = 10 எனில் மூலதனம் (K) மற்றும் ஊதியம் (L) ஆகியவற்றினை சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$P = 10L + 0.1L^2 + 5K - 0.3K^2 + 4KL$

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 10 + 0.2L + 4K$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 5 - 0.6K + 4L$$

$K = L = 10$ அலகுகள் எனில்

ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial L}\right)_{(10,10)} = 10 + 2 + 40 = 52 \text{ அலகுகள்}$$

மூலதனம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial K}\right)_{(10,10)} = 5 - 6 + 40 = 39 \text{ அலகுகள்}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.41

ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பு $P = 10L - 0.1L^2 + 15K - 0.2K^2 + 2KL$ இங்கு L என்பது ஊதியம் மற்றும் K என்பது மூலதனத்தைக் குறிக்கிறது.

(i) ஊதியம்மற்றும்மூலதனம்ஒவ்வொன்றும் 10 அலகுகள் எனில் இறுதிநிலை உற்பத்திச் சார்புகளைக் கணக்கிடுக.

(ii) மூலதனத்தில் 10 அலகுகள் பயன்படுத்தப்பட்டால் ஊதியத்திற்கான உச்ச வரம்பைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) $P = 10L - 0.1L^2 + 15K - 0.2K^2 + 2KL$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 10 - 0.2L + 2K$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 15 - 0.4K + 2L$$

$L = K = 10$ அலகுகள் எனில்,

ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial L}\right)_{(10,10)} = 10 - 2 + 20 = 28 \text{ அலகுகள்}$$

மூலதனம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial K}\right)_{(10,10)} = 15 - 4 + 20 = 31 \text{ அலகுகள்}$$

(ii) $K=10$ எனும் போது ஊதியத்திற்கான உச்ச வரம்பு $\left(\frac{\partial P}{\partial L}\right) \geq 0$ ஆகும்.

$$10 - 0.2L + 20 \geq 0$$

$$30 \geq 0.2L$$

அதாவது, $L \leq 150$

$\therefore$ ஊதியத்திற்கான உச்ச வரம்பானது 150 அலகுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.42

ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பு $P = 4L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$ எனில், மூலதனம் சார்ந்த இறுதி நிலை உற்பத்தி மற்றும் ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி ஆகியவற்றைக் காண்க.

மேலும் $L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = P$ என நிரூபி.

தீர்வு:

$P = 4L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$

ஊதியம் சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்தி :

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 4 \times \frac{3}{4} L^{\frac{-1}{4}} K^{\frac{1}{4}} = 3\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{4}}$$

மூலதனம் பொறுத்த இறுதி நிலை உற்பத்தி:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = 4L^{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{4} K^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = 3\mathrm{L}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{4}} + \mathrm{K}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$= 3L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}} + L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$$

$$= 4L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}} = P$$

எடுத்துக்காட்டு 6.43

x என்ற பொருளின் தேவை $q = 5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2$ எனில் $\frac{Eq}{EP_1}$ மற்றும் $\frac{Eq}{EP_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளை p_1=3 மற்றும் p_2=7 எனும் பொழுது காண்க.

தீர்வு:

$$q = 5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2$$

$$\frac{\partial q}{\partial p_1} = -2 - 2p_1 p_2$$

$$\frac{\partial q}{\partial p_2} = 1 - p_1^2$$

$$\frac{Eq}{Ep_1} = -\frac{P_1}{q}\frac{\partial q}{\partial p_1}$$

$$= \frac{-p_1}{5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2}(-2 - 2p_1 p_2)$$

$$= \frac{2p_1 + 2p_1^2 p_2}{5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2}$$

இங்கு p_1= 3 மற்றும் p_2= 7

$$\frac{Eq}{Ep_1} = \frac{2(3) + 2(9)(7)}{5 - 6 + 7 - (9)(7)} = \frac{132}{-57} = \frac{-132}{57}$$

$$\frac{Eq}{Ep_2} = -\frac{P_2}{q}\frac{\partial q}{\partial p_2} = \frac{-p_2(1 - p_1^2)}{5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2}$$

$$= \frac{-p_2 + p_2 p_1^2}{5 - 2p_1 + p_2 - p_1^2 p_2}$$

இங்கு p_1= 3 மற்றும் p_2= 7

$$\frac{Eq}{Ep_2} = \frac{-7 + 7(9)}{5 - 6 + 7 - (9)(7)} = \frac{56}{-57} = \frac{-56}{57}$$

பயிற்சி 6.5

1. $P = 8L - 2K + 3K^2 - 2L^2 + 7KL$ என்ற உற்பத்திச் சார்பிற்கு $K = 3$ மற்றும் $L = 1$ என்ற மதிப்புகளின் மூலதனம் (K) மற்றும் ஊதியம் (L) சார்ந்த இறுதிநிலை உற்பத்திகளைக் காண்க.
2. ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திச் சார்பு $P = 4LK - L^2 + K^2$, $L>0$, $K>0$, எனில் $L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = 2\mathrm{P}$ என நிரூபி.
3. $z = 3x^2 - 4xy + 3y^2$ என்பது ஒரு உற்பத்திச் சார்பு. இங்கு x என்பது ஊதியம் மற்றும் y என்பது மூலதனம் ஆகும். $x = 1, y = 2$ எனில் இறுதிநிலை உற்பத்தி சார்புகளைக் காண்க
4. $P = 3(L)^{0.4}(K)^{0.6}$ என்பது ஒரு உற்பத்திச் சார்பு இங்கு L என்பது ஊதியம் மற்றும் K என்பது மூலதனம் எனில் $L = 10$ மற்றும் $K = 6$ என இருக்கும்பொழுது இறுதிநிலை உற்பத்திகளை காண்க.

   $[(0.6)^{0.6} = 0.736, (1.67)^{0.4} = 1.2267]$
5. A என்ற பொருளின் தேவை $q = 13 - 2p_1 - 3p_2^2$ எனில் $p_1 = p_2 = 2$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $\frac{Eq}{Ep_1}$ மற்றும் $\frac{Eq}{Ep_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.
6. A என்ற பொருளின் தேவை $q = 80 - p_1^2 + 5p_2 - p_1 p_2$ எனில் p_1=2 மற்றும் p_2=1 என்ற மதிப்புகளுக்கு $\frac{Eq}{Ep_1}$ மற்றும் $\frac{Eq}{Ep_2}$ என்ற பகுதி நெகிழ்ச்சிகளைக் காண்க.

பயிற்சி 6.6

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $C(x) = 2x^3 + 5x^2 - 14x + 21$ என்ற செலவு சார்பின் சராசரி மாறாச் செலவானது

   (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{x}$ (c) $-\frac{14}{x}$ (d) $\frac{21}{x}$

2. $p = 20 - 3x$ என்ற தேவைச் சார்பின் இறுதி நிலை வருவாய்

(a) $20-6x$ (b) $20-3x$

(c) $20+6x$ (d) $20+3x$

3. ஒரு நிறுவனத்தின் தேவை மற்றும் அதன் செலவுச் சார்பு முறையே $p = 2-x$ மற்றும் $C = -2x^2 + 2x + 7$ எனில், இதன் இலாபச் சார்பானது

(a) x^2+7 (b) x^2-7

(c) $-x^2+7$ (d) $-x^2-7$

4. தேவைச் சார்பு மீள்தன்மை கொண்டது எனில்,

(a) $|\eta_d|>1$ (b) $|\eta_d|=1$

(c) $|\eta_d|<1$ (d) $|\eta_d|=0$

5. $x = \frac{1}{p}$ என்ற தேவை சார்பின் தேவை நெகிழ்ச்சி

(a) 0 (b) 1

(c) $-\frac{1}{p}$ (d) ∞

6. MR, AR மற்றும் η_d க்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பானது

(a) $\eta_d = \frac{AR}{AR-MR}$

(b) $\eta_d = AR - MR$

(c) $MR = AR = \eta_d$

(d) $AR = \frac{MR}{\eta_d}$

7. $C = \frac{1}{25}e^{5x}$ என்ற செலவுச் சார்புக்கான இறுதிநிலைச் செலவு

(a) $\frac{1}{25}$ (b) $\frac{1}{5}e^{5x}$

(c) $\frac{1}{125}e^{5x}$ (d) $25e^{5x}$

8. $x = 2$ –ல் x –ஐப் பொறுத்து $y = 2x^2 + 5x$ –ன் உடனடி மாறு வீதம்

(a) 4 (b) 5

(c) 13 (d) 9

9. ஒரு குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தின் சராசரி வருவாய் ₹ 50 மற்றும் அதன் தேவை நெகிழ்ச்சி 2 எனில் அதனுடைய இறுதி நிலை வருவாய்

(a) ₹ 50 (b) ₹ 25

(c) ₹ 100 (d) ₹ 75

10. $P(x)$ என்ற இலாபச் சார்பானது பெருமத்தை அடைய தேவையான கட்டுப்பாடு

(a) $MR = MC$ (b) $MR = 0$

(c) $MC = AC$ (d) $TR = AC$

11. $f(x) = \sin x$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பானது

(a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. $f(x,y)$ என்பது n, படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில் $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ –க்குச் சமமானது

(a) $(n-1)f$ (b) $n(n-1)f$

(c) nf (d) f

13. $u = 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ –ன் மதிப்பு

(a) $8x + 4y + 4$ (b) 4

(c) $2y + 32$ (d) 0

14. $u = x^3 + 3xy^2 + y^3$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ –ன் மதிப்பு

(a) 3 (b) $6y$

(c) $6x$ (d) 2

15. $u = e^{x^2}$ எனில் $\frac{\partial u}{\partial x}$ –ன் மதிப்பு

(a) $2xe^{x^2}$ (b) e^{x^2}

(c) $2e^{x^2}$ (d) 0

16. சராசரிச் செலவு சிறுமம் எனில்

(a) இறுதி நிலைச் செலவு = இறுதி நிலை வருவாய்

(b) சராசரிச் செலவு = இறுதி நிலைச் செலவு

(c) சராசரிச் செலவு = இறுதி நிலை வருவாய்

(d) சராசரி வருவாய் = இறுதி நிலைச் செலவு

17. ஒரு நிறுவனம் லாபத்தை அடைவது

(a) மீப்பெரு புள்ளியில்

(b) சமபாட்டுப் புள்ளியில்

(c) தேக்கநிலைப் புள்ளியில்

(d) சீரான புள்ளியில்

18. தேவைச் சார்பு எப்பொழுதும்

(a) கூடும் சார்பு ஆகும்.

(b) குறையும் சார்பு ஆகும்.

(c) குறையற்ற சார்பு ஆகும்.

(d) வரையறுக்கப்படாத சார்பு ஆகும்.

19. $q = 1000 + 8p_1 - p_2$ எனில், $\frac{\partial q}{\partial p_1}$ இன் மதிப்பு

(a) –1 (b) 8

(c) 1000 (d) $1000 - p_2$

20. $R = 5000$ அலகுகள்/வருடம் $C_1 = 20$ பைசாக்கள், $C_3 =$ ₹20 எனில் EOQ இன் மதிப்பு

(a) 5000 (b) 100

(c) 1000 (d) 200

இதர கணக்குகள்

1. x அலகுகள் உற்பத்திக்கான ஒரு பொருளின் மொத்தச் செலவு சார்பு $C = 10 - 4x^3 + 3x^4$ எனில்

(i) சராசரிச் செலவுச் சார்பு

(ii) இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு

(iii) இறுதி நிலை சராசரிச் செலவுச் சார்பு ஆகியவனவற்றை காண்க.

2. பின்வரும் சார்புகளுக்கு குறிப்பிடப்பட்டுள்ள நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

(i) $p = xe^x$, $x > 0$ –ல் அளிப்பு நெகிழ்ச்சி

(ii) $p = 10e^{-\frac{x}{3}}$, $x > 0$ –ல் தேவை நெகிழ்ச்சியை காண்க.

3. $p = 1$ –ல் $x = 2p^2 + 5$ எனும் அளிப்பு சார்புக்கான அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

4. $p = 100 - 6x^2$ எனும் தேவைச் சார்புக்கு இறுதி நிலை வருவாய் காண்க. மேலும் $MR = p\left[1 - \frac{1}{\eta_d}\right]$ என்பதனையும் சரிபார்க்க.

5. மொத்த செலவுச் சார்பு $y = 4x\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + 6$ –ல் உற்பத்தி அளவு x ஆனது தொடர்ச்சியாகக் அதிகரிக்கும் பொழுது அதன் இறுதி நிலை செலவானது [MC] தொடர்ச்சியாகக் குறைகிறது என நிறுவுக.

6. செலவுச் சார்பு $C = 2000 + 1800x - 75x^2 + x^3$ –க்கு எப்பொழுது அதன் மொத்த செலவு கூடுகிறது மற்றும் எப்பொழுது குறைகிறது என்பதைக் காண்க.

7. ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = 15 + 9x - 6x^2 + x^3$. எனில் மொத்த செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறுவதற்கான x–ஐ காண்க.

8. $u = \log \frac{x^4 - y^4}{x - y}$ என்ற சார்புக்கு ஆய்லரின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3$ எனக் காட்டுக.

9. $u = x^3 + 3x^2y^2 + y^3$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதனை சரிபார்க்க.

10. $f(x,y) = 3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 7$ எனில் $f_{yy}(1,1) = 18$ எனக்காட்டுக.

தொகுப்புரை

- தேவை என்பது ஒரு பொருளின் தேவை அளவுக்கும் அதன் விலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு ஆகும்.
- அளிப்பு என்பது ஒரு பொருளின் அளிப்பு அளவுக்கும் அதன் விலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு ஆகும்.
- செலவு என்பது ஒரு பொருளின் மீது உற்பத்திக்காகச் செலவிடப்பட்டத் தொகை ஆகும்.
- வருவாய் என்பது உற்பத்தி செய்யப்பட்டப் பொருளை விற்கும்பொழுது கிடைக்கும் தொகை ஆகும்.
- இலாபம் என்பது வருவாயில் செலவு போக கிடைக்கும் உபரித் தொகை ஆகும்.
- $y = f(x)$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சி என்பது y இன் சார் மாற்றத்திற்கும், x இன் சார் மாற்றத்திற்கும் உள்ள விகிதத்தின் வரம்பிடப்பட்ட எல்லையாகும்
- ஒரு பொருளின் சமன்நிலை விலை என்பது தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் சமன்நிலையை அடையும்பொழுது பெறப்படும் விலையாகும்.
- இறுதி நிலைச் செலவின் பொருள் விளக்கமானது, உற்பத்தியின் அளவு x அலகுகளிலிருந்து $(x+1)$ அலகுகளாக மாறும்போது உற்பத்தி செலவில் ஏற்படும் தோராயமான மாற்றம் ஆகும்.
- இறுதிநிலை வருவாயின் பொருள் விளக்கமானது, விற்பனை அளவு x அலகுகளாக இருக்கும் பொழுது, $(x+1)$ ஆவது அலகு உற்பத்தி செய்யப்பட்டு விற்கப்பட்டதால் கிடைக்கும் தோராயமான வருவாயே இறுதி நிலை வருவாய் ஆகும்.
- $y=f(x)$ என்ற சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, அனைத்து $x_1,x_2 \in [a,b]$ என அமையுமானால், **அது** **கூடும் சார்பு** எனப்படும்.
- $y=f(x)$ என்ற சார்பு $[a,\ b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, அனைத்து $x_1,x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது **திட்டமாகக் கூடும் சார்பு** எனப்படும்.
- $y= f(x)$ என்ற சார்பு $[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, அனைத்து $x_1,x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது **குறையும் சார்பு** எனப்படும்.
- $y=f(x)$ என்ற சார்பு $[a,\ b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, அனைத்து $x_1,x_2 \in [a,b]$ என இருப்பின், அது **திட்டமாகக் குறையும் சார்பு** எனப்படும்.
- c–ஐ உள்ளடக்கிய (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் f என்ற சார்பானது வகையிடத்தக்கது மற்றும் $f'(c)$ காணத்தக்கது என்க.

  (i) $f'(c)=0$ மற்றும் $f''(c)>0$, எனில் f ஆனது c–ல் இடம் சார்ந்த சிறுமத்தை அடைகிறது.

  (ii) $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) < 0$, ஆனது c–ல் இடம் சார்ந்த பெருமத்தை அடைகிறது.
- $u = f(x,y)$ என்பது $x,\ y$ என்ற இரு சாரா மாறிகளைக்கொண்ட சார்பு என்க. மேலும் $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$, $t>0$ எனில் $u=f(x,\ y)$ என்பது 'n' படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனப்படும்.
- $u = f(x,y)$ என்பது $x,\ y$ –ல் அமைந்த 'n', படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில் $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=nu$ ஆகும்.
- p_1 –ஐ பொறுத்து q–ன் தேவை பகுதி நெகிழ்ச்சி $\eta_{qp_1} = \dfrac{Eq}{Ep_1} = \dfrac{-p_1}{q}\dfrac{\partial q}{\partial p_1}$ ஆகும்.
- p_2 –ஐப் பொறுத்து q–ன் தேவை பகுதி நெகிழ்ச்சி $\eta_{qp_2} = \dfrac{Eq}{Ep_2} = \dfrac{-p_2}{q}\dfrac{\partial q}{\partial p_2}$ ஆகும்.

முக்கியமான சூத்திரங்கள்(Some standard results)

1. மொத்தச் செலவு $C(x) = f(x) + k$

2. சராசரிச் செலவு: $AC = \dfrac{f(x)+k}{x} = \dfrac{c(x)}{x}$

3. சராசரி மாறும் செலவு: $\text{AVC} = \dfrac{f(x)}{x}$

4. சராசரி மாறாச் செலவு: $AFC = \dfrac{k}{x}$

5. இறுதி நிலைச் செலவு: $MC = \dfrac{dC}{dx}$

6. இறுதி நிலைச் சராசரி செலவு: $MAC = \dfrac{d}{dx}(AC)$

7. மொத்தச் செலவு: $C(x) = AC \times x$

8. வருவாய்: $R = px$

9. சராசரி வருவாய்: $AR = \dfrac{R}{x} = p$

10. இறுதி நிலை வருவாய்: $MR = \dfrac{dR}{dx}$

11. இலாபம்: $P(x) = R(x) - C(x)$

12. நெகிழ்ச்சி: $\eta = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

13. தேவை நெகிழ்ச்சி: $\eta_d = -\dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$

14. அளிப்பு நெகிழ்ச்சி: $\eta_s = \dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$

15. MR, AR மற்றும் η_d –களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு $MR = AR\left[1 - \dfrac{1}{\eta_d}\right]$ அல்லது $\eta_d = \dfrac{AR}{AR - MR}$ ஆகும்.

16. x –ஐ பொறுத்து y இன் இறுதி நிலை சார்பானது (அல்லது) x –ஐ பொறுத்து y இன் உடனடி மாறுவீதமானது $\dfrac{dy}{dx}$ ஆகும்.

17. $MC = AC$ எனும்பொழுது சராசரிச் செலவு $[AC]$ சிறுமத்தை அடையும்.

18. $MR = 0$ எனும்பொழுது மொத்த வருவாய் $[TR]$ பெருமத்தை அடையும்.

19. $MR = MC$ எனும் பொழுது இலாபம் $[P(x)]$ பெருமத்தை அடையும்.

20. சார்பின் விலையைப் பொறுத்த நெகிழ்ச்சியில்
    (a) $|\eta| > 1$, எனில் சார்பு மீள்த்தன்மைக் கொண்டது.
    (b) $|\eta| = 1$, எனில் சார்பு அலகு மீள்த்தன்மைக் கொண்டது .
    (c) $|\eta| < 1$, எனில் சார்பு மீள்த்தன்மை அற்றது.

21. $EOQ = q_0 = Rt_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1}}$

22. ஓர் ஆண்டிற்கான உகந்த கோருதலின் எண்ணிக்கை :

$$n_0 = \frac{\text{தேவை}}{\text{EOQ}} = R\sqrt{\frac{C_1}{2C_3R}} = \sqrt{\frac{RC_1}{2C_3}} = \frac{1}{t_0}$$

23. ஓர் அலகு காலத்தில், சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு, $C_0 = \sqrt{2C_1C_3R}$

24. சரக்குத் தேக்கச் செலவு $= \dfrac{q_0}{2} \times C_1$ மற்றும் கோருதல் செலவு $= \dfrac{R}{q_0} \times C_3$

25. EOQ–ல், கோருதல் செலவு = சரக்கு தேக்கச் செலவு

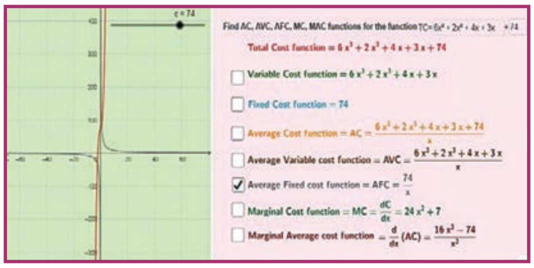
26. $u(x,y)$ என்பது x மற்றும் y–ல் தொடர்ச்சியான சார்பு எனில், $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ஆகும்.

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
அளவு	Quantity
அளிப்பு	Supply
இலாபம்	Profit
இறுதிநிலை / விளிம்பு	Marginal
உற்பத்தி வெளியீடு	Production Output
உற்பத்தியாளர்	Producer
ஒரே விலை / மாறா விலை	Fixed cost
சமநிலை	Equilibrium
சராசரி	Average
சார்ந்த மாற்றம்	Relative change
சிறுமம்	Minimum
செலவுச் சார்பு	Cost function
தேவை	Demand
தோரயமான	Approximately
நுகர்வோர்	Consumer
நெகிழ்ச்சி	Elasticity
பெருமம்	Maximum
பொருள்	Commodity
மாறும் விலை	Variable cost
மாறுவீதம்	Rate of change
மிகுதியான	Excess
வருவாய் சார்பு	Revenue function
விகிதம்	Ratio

இணையச் செயல்பாடு

படி – 1 **இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்**

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் இருக்கும்.

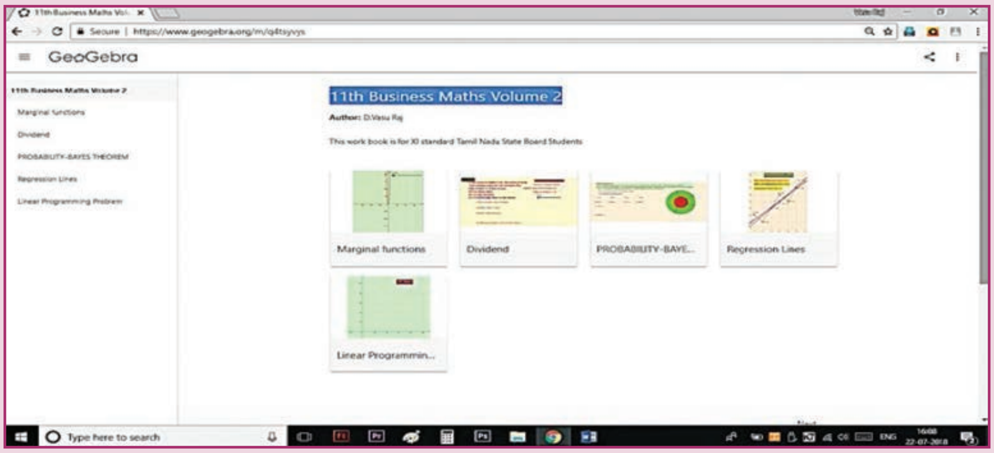


படி - 2

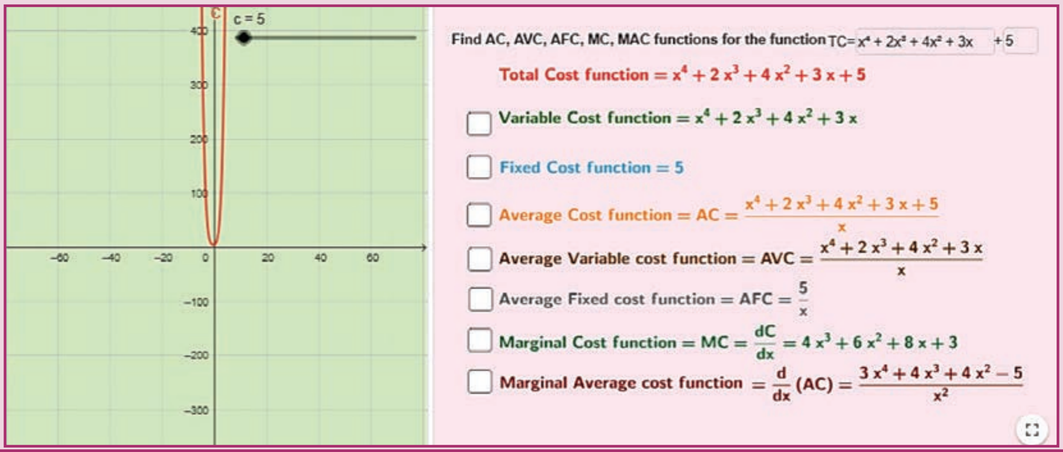
"Marginal function" என்பதைத் தேர்வு செய்யவும். பொருத்தமான கட்டத்தைத் தேர்வு செய்து இடப்பக்கத்தில் வரைபடங்களைக் காண்க.

மேலும் "Total cost function" மதிப்புகளை வலப்பக்கம் மேற்புறம் உள்ள கட்டத்தில் உள்ளீடு செய்து கணக்குகளைத் தொடரவும்..

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/q4tsyvys (or) scan the QR Code

அத்தியாயம் 7

நிதியியல் கணிதம்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துக்கொள்ள இயலும்

- தவணைப் பங்கீட்டு தொகை – தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் வகைகள்.
- தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் நிகழ்கால மற்றும் வருங்கால மதிப்புகள்.
- சரக்கு முதல் விற்பதில் அல்லது வாங்குவதில் ஏற்படும் இலாபம் அல்லது நட்டம் பற்றிய கருத்தியல்.
- பங்கு பரிவர்த்தணையில் தரகு வியாபாரம்.
- மெய் வருமான விகிதம்/ பயனுள்ள வருமான விகிதம்.

5LY31

அறிமுகம்

நம்முடைய நடைமுறை வாழ்க்கையில் ஒவ்வொரு நாளும் நிறைய பண பரிமாற்றத்தை கையாளுகிறோம். பெரும்பாலான பணப் பரிமாற்றங்களில் ஒரே தவணை அல்லது சமமான பல தவணைகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில்நடைபெறுகிறது.இந்ததவணைகளில் தொகைகள் அவற்றிற்கான காத்திருப்பு காலத்தினை சமன் செய்யும் வகையில் கணக்கிடப்படுகிறது. மற்ற வகைகளில் எதிர்கால திட்டமிட்ட செலவுகளை சந்திப்பதற்கு ஒரு தொடர்ச்சியான சேமிப்பு செய்யப்படலாம். அதாவது சீரான கால இடைவெளியில் சேமிக்கப்படும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகை வட்டி பயன் பெறும் விதத்தில், ஒதுக்கப்படுகிறது. இவ்வகை சூழ்நிலைகளில் தவணை பங்கீட்டுத் தொகை என்ற கருத்துருவாக்கம் பயன்படுகிறது.

7.1 தவணை பங்கீட்டுத் தொகை

சீரான இடைவெளியில் தொடர்ச்சியான சமபங்கு தொகையை செலுத்துவது அல்லது பெறுவது என்பது தவணை பங்கீட்டுத் தொகையாகும். தவணை பங்கீட்டுத் தொகையில் சீராக செலுத்தப்படும் தொகைக்கு தவணைத் தொகை எனப்படும். அடுத்தடுத்த இருதவணைத் தொகைகளுக்கு இடைப்பட்ட கால இடைவெளி தவணை இடைவெளி அல்லது தவணைக்காலம் எனப்படும். இங்கு தவணைக் காலம் என்பது ஓராண்டாகவோ, அரையாண்டாகவோ, காலாண்டாகவோ, ஒரு மாதமாகவோ அல்லது குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியாகவோ இருக்கலாம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் முதல் தவணைக்கும் கடைசி தவணைக்கும் இடைப்பட்ட காலம் தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் பருவம் எனப்படும். தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் பருவத்தில் செலுத்தப்படுகின்ற தொகையின் கூடுதல் மற்றும் தவணை பங்கீட்டுப் பருவத்தில் அத்தொகை ஈட்டித்தரும் வட்டி ஆகியவைகள் தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் எதிர்கால மதிப்பு எனப்படும். தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் தற்போதைய அல்லது முதலீட்டுத் தொகை மதிப்பு என்பது தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் பருவம் முழுவதும் செலுத்தப்படும் தவணைத் தொகைகளில் நிகழ்கால மதிப்புகளின் கூடுதல் ஆகும். இங்கு தவணைக் காலம் குறிப்பிடப்படாத நிலையில் தவணைக் காலம் ஓராண்டாக கருதப்பட வேண்டும்.

7.1.1 தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் வகைகள்

அ) தவணைகளின் எண்ணிக்கை சார்ந்து / காலங்களின் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில்

(i) நிலையான தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகை: குறிப்பிடப்பட்ட வருடங்களுக்குள் செலுத்தப்படும் தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகை நிலையான தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகை எனப்படும்.

வீட்டுமனைகள், வங்கி பாதுகாப்பு வைப்புநிதி, வீட்டு உபயோகப் பொருட்கள் வாங்கியது ஆகியவற்றிற்கு செலுத்தப்படும் தவணைத் தொகை நிலையான தவணைப் பங்கீட்டு தொகைக்கு உதாரணங்களாகும். எந்த தேதிகளில் தவணைத்தொகை கட்டப்படவேண்டும் என்பதை வாங்குபவர் தெரிந்து வைத்திருப்பார்.

(ii) தற்காலிக தவணை பங்கீட்டுத் தொகை (Annuity Contigent)

சீரான இடைவெளியில் செலுத்தப்படும் தொகையின் காலத்தை முன்கூட்டியே தீர்மானிக்க முடியாத அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்வு வரை செலுத்தப்படும் தொகையை தற்காலிக தவணை பங்கீட்டுத் தொகை என்கிறோம்.

உதாரணமாக அறக்கட்டளைக்கு வழங்கப்படும் நன்கொடை. இந்த நன்கொடை மூலம் கிடைக்கும் வட்டியானது நலத் திட்டங்களுக்குமட்டுமேபயன்படுத்தப்படுகிறது. இங்கு வைப்புத் தொகை (நன்கொடை) நிலையானது மற்றும் கிடைக்கும் வட்டியின் மூலம் நடைபெறும் நலத் திட்டங்கள் எப்பொழுதும் தொடர்ந்தபடியே இருக்கும்.

ஆ) தவணை செலுத்தும் முறையின் அடிப்படையில்

(i) **சாதாரண பங்கீட்டுத் தொகை:** தவணை காலத்தின் முடிவில் செலுத்தப்படும் தவணை பங்கீட்டுத் தொகை சாதாரண தவணை பங்கீட்டுத் தொகை அல்லது உடனடி தவணை பங்கீட்டுத் தொகை எனப்படும்.

உதாரணமாக வீட்டுக்கடன், வாகனக் கடன் ஆகியவற்றிற்காக செலுத்தப்படும் தொகை.

(ii) காத்திருப்பு தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகை

ஒவ்வொரு கால இடைவெளியின் துவக்கத்திலும் தவணைத் தொகை செலுத்தப்படின் அது காத்திருப்பு தவணை பங்கீட்டுத் தொகை எனப்படும்.

காத்திருப்பு தவணை பங்கீட்டுத் தொகையில் செலுத்தப்படும் ஒவ்வொரு தொகையும் முதலீடாகவும், வட்டி ஈட்டித் தருபவையாகவும் இருக்கும். முதல் காத்திருப்பு தவணை தொகையானது ஈட்டித் தரும் வட்டியை விட அடுத்த தவணை தொகையானது ஒரு தவணைக் காலம் குறைவாக வட்டி ஈட்டித்தரும். இவ்வாறாக கடைசி தவணை தொகையானது ஒரு தவணைக் காலம் மட்டும் வட்டி ஈட்டித்தரும்.

உதாரணமாக சேமிப்புத் திட்டம் மற்றும் ஆயுள் காப்பீட்டுத் திட்டம் ஆகியவற்றில் செலுத்தப்படும் தொகைகள்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

நீண்ட காலமாக பல தவணைகள் செலுத்தப்படாமல் இருந்து பின்னர் செலுத்தப்படும் மொத்த தவணை ஒத்தி வைக்கப்பட்ட தவணை பங்கீட்டுத் தொகையாகும்.

பின்வரும் சூத்திரங்களின் நிரூபணம் மாணவர்கள் நன்கு புரிந்து கொள்வதற்காக வழங்கப்பட்டுள்ளது தேர்விலிருந்து விலக்கு அளிக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) உடனடித் தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகை (அல்லது) எளிய தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகை (அல்லது) உறுதியான தவணைப் பங்கீட்டு தொகைக்கான தொகைக்காணல்:–

'a' என்பது சாதாரண தவணை பங்கீட்டுத் தொகை என்க. i என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கான வட்டி விகிதமாகும் சாதாரண தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையில், முதல் தவணை முதல் காலத்தின் முடிவிற்குப் பிறகு செலுத்தப்படுவதாகும். எனவே, அது $(n-1)$ காலத்திற்கான வட்டியை பெற்றுத்தரும். இரண்டாவது தவணை $(n-2)$ காலத்திற்கான வட்டியைப் பெற்றுத் தரும் மற்றும் இதே போன்று தொடரும் கடைசி தவணை $(n-n)$ காலத்திற்கான

வட்டியைப் பெற்றுத் தரும். அதாவது எவ்வித வட்டியையும் பெற்றுத் தராது.

$(n-1)$ காலத்திற்கான

முதல் தவணை பங்கீட்டுத் தொகைக்கான தொகை $= a(1+i)^{n-1}$

இரண்டாவது தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகைக்கான தொகை $= a(1+i)^{n-2}$

மூன்றாவது தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகைக்கான தொகை $= a(1+i)^{n-3}$

இதே போன்று மற்றவைகளை கணக்கிடலாம்.

$\therefore$ i சதவிகித வட்டியில் n காலத்திற்கான மொத்த தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகைக்கான தொகை A யை கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.

$$A = a(1+i)^{n-1}+a(1+i)^{n-2}+\ldots a(1+i)+a$$
$$= a[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\ldots+(1+i)+1]$$
$$= a[1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-1}]$$
$$= a[1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}], \text{ இங்கு } 1+i=r$$
$$= a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right], \text{ G.P பொது வித்தியாசம் } r>1$$
$$= a\left[\frac{(1+i)^n-1}{1+i-1}\right]$$
$$\boldsymbol{A = \frac{a}{i}\left[(1+i)^n-1\right]}$$

(ii) உடனடி தவணை பங்கீட்டுத் தொகை அல்லது சாதாரண பங்கீட்டுத் தொகை ஆகியவற்றின் தற்போதைய மதிப்பு (Present Value) காணல்:

'a' என்பது சாதாரண தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் வருடாந்திர தவணைத் தொகை என்க. n என்பது வருடங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் i என்பது ஒரு வருடத்தில் ஒரு ரூபாய்க்கான வட்டி விகிதத்தைக் குறிக்கிறது மற்றும் P என்பது தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் தற்போதைய மதிப்பாகும். உடனடி தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் போது தவணைத் தொகை ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட காலத்தின் முடிவிலும் தொடர்ச்சியாக செலுத்தப்படுகிறது.

முதல் தவணை முதல் வருடத்தின் முடிவில் செலுத்தப்படுவதால் அதன் நிகழ்கால மதிப்பு $\frac{a}{1+i}$ ஆகும்.இரண்டாவதுதவணையின் நிகழ்கால மதிப்பு $\frac{a}{(1+i)^2}$ ஆகும். இதே போன்று மற்ற நிகழ்கால மதிப்புகளையும் பெறலாம். கடைசி தவணையின் நிகழ்கால மதிப்பு $\frac{a}{(1+i)^n}$ எனில்

$$P = \frac{a}{1+i}+\frac{a}{(1+i)^2}+\frac{a}{(1+i)^3}+\ldots\frac{a}{(1+i)^n}$$
$$= \frac{a}{(1+i)^n}+\frac{a}{(1+i)^{n-1}}+\ldots+\frac{a}{(1+i)}$$
$$= \frac{a}{r^n}\left[1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}\right], \text{ இங்கு } 1+i=r$$
$$= \frac{a}{r^n}\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right], \text{ G.P பொது வித்தியாசம் } r>1$$
$$= \frac{a}{(1+i)^n}\left[\frac{(1+i)^n-1}{1+i-1}\right]$$
$$= \frac{a}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$
$$\boldsymbol{P = \frac{a}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right]}$$

(iii) n காலத்தின் முடிவில் தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் காத்திருப்பு தவணைத் தொகைக்காணல்:

முன்பு வரையறுத்தப்படி காத்திருப்பு தவணை பங்கீட்டுத் தொகை என்பது ஒவ்வொரு தவணைக் காலத்தின் துவக்கத்திலும் செலுத்தப்படும் தவணை தொகையாகும். முதல் தவணை ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் 'i' வட்டி வீதத்தில் 'n' தவணைக் காலத்திற்கு வட்டியைப் பெற்றுத் தரும். இதே போன்று இரண்டாம் தவணை $(n-1)$ தவணைக் காலத்திற்கான வட்டியை பெற்றுத் தரும் மற்றும் இதே போன்று தொடரும். எனவே காத்திருப்பு பங்கீட்டுத் தொகையின் மொத்தம்

$$A = a(1+i)^n+a(1+i)^{n-1}+\ldots+a(1+i)^1$$
$$= a(1+i)[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2})+\ldots+1]$$
$$= a(1+i)[1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-1}]$$
$$= ar[1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}], \; 1+i=r, \text{ என்க.}$$
$$= ar\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right], \text{ G.P பொது வித்தியாசம், } r>1$$
$$= a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n-1}{1+i-1}\right]$$

$$= \frac{a(1+i)}{i}[(1+i)^n - 1$$

$$A = \frac{a(1+i)}{i}[(1+i)^n - 1]$$

(iv) காத்திருப்பு தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் (annuity due) தற்போகைய மதிப்பு:

முதல் தவணை முதல் தவணை காலத்தின் (வருடத்தின்) துவக்கத்தில் செலுத்தப்படுவதால் அதன் நிகழ்கால மதிப்பு 'a', க்கு சமமாக இருக்கும். 'a' என்பது காத்திருப்பு தவணை பங்கீட்டு தொகை வருடாந்திர செலுத்தும் தொகையாகும். இரண்டாம் தவணை இரண்டாவது வருடத்தின் ஆரம்பத்தில் செலுத்தப்படுகிறது ஆகவே அதன் நிகழ்கால மதிப்பு என்பது $\frac{a}{(1+i)}$ ஆகும் மற்றும் இதே போன்று தொடர்ந்து நிகழ்கால மதிப்புகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும். கடைசி தவணை n காலத்தின் ஆரம்பத்தில் செலுத்தப்படுகிறது. ஆகவே அதன் நிகழ்கால மதிப்பு $\frac{a}{(1+i)^{n-1}}$, P என்பது தவணை பங்கீட்டுத் தொகை நிலுவையின் நிகழ்கால மதிப்பை குறிக்கிறது எனில்

$$P = a + \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \frac{a}{(1+i)^3} + \dots + \frac{a}{(1+i)^{n-1}}$$

$$= a\left[1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

$$= a\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}}\right]$$

$$= a\left[\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{\frac{(1+i)-1}{1+i}}\right]$$

$$= \frac{a(1+i)}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]$$

$$P = \frac{a(1+i)}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

(v) நிரந்தரமான தவணை பங்கீட்டுத் தொகை (Perpetual Annuity)

எப்பொழுதும் தொடரக்கூடிய, தொடர்ந்து செலுத்தக் கூடிய தவணை பங்கீட்டுத் தொகை என்பது நிரந்தரமான தவணை பங்கீட்டுத் தொகையாகும். நிரந்தரமான தவணை பங்கீட்டுத் தொகை வரையறுக்கப்படாததால் எவ்வித எல்லையும் இன்றி காலங்கள் அதிகரிக்கும் பொழுது தொகையும் அதிகரிக்கும். உடனடி தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் நிகழ்கால மதிப்பு

$$P = \frac{a}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

என்பது நாம் அனைவரும் அறிந்தது. நிரந்தரமான தவணை பங்கீட்டுத் தொகை தற்பொழுது உள்ள வரையறையின் படி $n \to \infty$, $\frac{1}{(1+i)^n} \to 0$ என்பது நாம் அறிந்தது ஏனெனில் $1+i > 1$.

$$\text{இங்கு } P = \frac{a}{i}[1-0]$$

$$P = \frac{a}{i}$$

குறிப்பு

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள அனைத்து சூத்திரங்களிலும் காலம் என்பது ஒரு வருடமாகும். தவணை தொகை ஒரு வருடத்திற்கு ஒரு முறைக்கு மேல் செலுத்தப்படுமாயின் 'i' என்பதனை $\frac{i}{k}$ எனவும் மற்றும் n என்பதை nk, எனவும் பிரதியிடவும். இங்கு k என்பது ஒரு வருடத்திற்கு செலுத்தப்படும் தவணை தொகைகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.1

ஒரு நபர், வருடத்திற்கு ₹ 64,000 வீதம் 12 வருடங்களுக்கு, ஆண்டுக்கு 10% வட்டி வீதத்தில் செலுத்தப்படுகின்ற சாதாரண தவணை பங்கீட்டின் முதிர்வுத் தொகையைக் காண்க $[(1.1)^{12} = 3.3184]$

தீர்வு

இங்கு $a = 64,000$, $n = 12$ மற்றும் $i = \frac{10}{100} = 0.1$

சாதாரண தவணை பங்கீட்டுத் தொகை,

$$A = \frac{a}{i}[(1+i)^n - 1]$$
$$= \frac{64000}{0.1}[(1+0.1)^{12} - 1]$$
$$= 6,40,000[(1.1)^{12} - 1]$$
$$= 6,40,000[3.3184 - 1]$$
$$= 6,40,000\,[2.3184] = 64 \times 23184$$
$$\therefore A = ₹\ 14,83,776$$

எடுத்துக்காட்டு 7.2

ஆண்டுக்கு 15% என்ற வட்டி வீதத்தில் 16 வருடங்கள் கழித்து ஒரு நபர் முதிர்வுத் தொகையாக ₹ 1,67,160 –ஐ சாதாரண தவணை பங்கீட்டி முறையில் பெறுவதற்கு ஆண்டுத் தவணை தொகையாக எவ்வளவு செலுத்தப்பட வேண்டும்? $[(1.15)^{16} = 9.358]$

தீர்வு

இங்கு $A = 1,67,160$, $n = 16$ வருடங்கள்

$i = \frac{15}{100} = 0.15 \quad a = ?$

$$A = \frac{a}{i}[(1+i)^n - 1]$$
$$1,67,160 = \frac{a}{0.15}[(1+0.15)^{16} - 1]$$
$$= \frac{a}{0.15}[(1.15)^{16} - 1]$$
$$\Rightarrow a = \frac{1,67,160 \times 0.15}{(1.15)^{16} - 1}$$
$$= \frac{1,67,160 \times 0.15}{9.358 - 1}$$
$$= \frac{1,67,160 \times 0.15}{8.358} = 3,000$$
$$\therefore a = ₹\ 3,000$$

எடுத்துக்காட்டு 7.3

ஒரு சிறுமியின் வயது 2 ஆகிறது. அந்த சிறுமியின் தந்தை தன் மகளுக்கு 22 வயது ஆகும் பொழுது ₹20,00,000 –ஐ முதிர்வுத் தொகையாக வங்கியில் இருந்து பெற விருப்பப்படுகிறார். அதற்க்காக அவர் ஆண்டுக்கு 10% கூட்டு வட்டி வழங்கக்கூடிய வங்கியில் தன் கணக்கை தொடங்குகிறார் எனில், அக் கூட்டுச் சேர்ப்பு கணக்கில் ஒவ்வொரு மாத முடிவிலும் தவணை தொகையாக எவ்வளவு செலுத்த வேண்டும்? $[(1.0083)^{240} = 6.194]$.

தீர்வு

இங்கு $A = 20,00,000$; $i = \frac{10}{100} = 0.1$ $n = 20$ மற்றும் $k = 12$

$$A = \frac{a}{i/k}\left[\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk} - 1\right]$$
$$20,00,000 = \frac{a}{\frac{0.1}{12}}\left[\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{20 \times 12} - 1\right]$$
$$= \frac{12a}{0.1}\left[\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{240} - 1\right]$$
$$= 120a\left[\left(\frac{12.1}{12}\right)^{240} - 1\right]$$
$$= 120a\,[(1.0083)^{240} - 1]$$
$$= 120a\,[6.194 - 1] = 120a\,(5.194)$$
$$\Rightarrow a = \frac{20,00,000}{120 \times 5.194} = 3208.83$$
$$\approx ₹\ 3,209$$

ஒவ்வொரு மாதமும் ₹3,209 செலுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.4

ஒரு நபர் ஒவ்வொரு வருடத்தின் ஆரம்பத்திலும் ₹4,000 முதலீடு செய்கிறார். ஆண்டுக்கு 14% கூட்டு வட்டி கிடைக்குமெனில் 10 வருடங்கள் கழித்து கிடைக்கும் முதிர்வுத் தொகையினைக் காண்க $[(1.14)^{10} = 3.707]$

தீர்வு

இங்கு $a = 4,000$; $i = 0.14$ மற்றும் $n = 10$ வருடம்.

$$A = (1+i)\ \frac{a}{i}[(1+i)^n - 1]$$
$$= (1+0.14)\ \frac{4000}{0.14}\ [(1+0.14)^{10} - 1]$$
$$= (1.14)\ \frac{4000}{0.14}\ [(1.14)^{10} - 1]$$
$$= 1.14 \times \frac{4000}{0.14}(3.707 - 1)$$
$$= 1.14 \times \frac{4000}{0.14}(2.707) = 88,170.86$$
$$A \approx ₹88,171$$

எடுத்துக்காட்டு 7.5

ஒரு நபர், ஒரு இயந்திரத்தை சனவரி–1, 2009–ம் வருடம் வாங்குகிறார். அவர் ஒவ்வொரு ஆண்டின் முடிவிலும் ₹12,000 என 10 சமமான தவணைகளில் 15% கூட்டு வட்டியுடன் செலுத்துவதற்கு ஒப்புக் கொள்கிறார் எனில், இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு என்ன? $[(1.15)^{10} = 4.016]$.

தீர்வு

இங்கு $n=10$, $a = 12,000$ மற்றும் $i = 0.15$

$$P = \frac{a}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$= \frac{12,000}{0.15}\left[1-\frac{1}{(1+0.15)^{10}}\right]$$

$$= \frac{12,000}{0.15}\left[1-\frac{1}{(1.15)^{10}}\right]$$

$$= \frac{12,00,000}{15}\left[1-\frac{1}{4.016}\right]$$

$$= 80,000\left[\frac{4.016-1}{4.016}\right]$$

$$= 80,000\left[\frac{3.016}{4.016}\right] \approx 60,080$$

$\therefore P = ₹60,080$

எடுத்துக்காட்டு 7.6

ஒரு நிழற்படக் கலைஞர், ஒரு புகைபடக் கருவியை தவணைமுறையில் வாங்குகிறார். வாங்கிய தேதியிலிருந்து ஒவ்வொரு தவணைக்கும் ₹36,000 என 7 வருடாந்திர தவணைகளில் 16% கூட்டு வட்டியுடன் செலுத்த வேண்டும் எனில், அப்புகைப்படக் கருவியின் அசல் விலை (தற்போதைய மதிப்பு) என்ன? $[(1.16)^7 = 2.2828]$

தீர்வு

இங்கு $a = 36,000$; $n = 7$ மற்றும் $i = 0.16$

$$P = (1+i)\ \frac{a}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$= (1+0.16)\ \frac{36,000}{0.16}\left[1-\frac{1}{(1+0.16)^7}\right]$$

$$= \frac{1.16}{0.16}(36,000)\left[1-\frac{1}{(1+0.16)^7}\right]$$

$$= \frac{116\times 36000}{16}\left[1-\frac{1}{2.828}\right]$$

$$= \frac{116\times 36000}{16}\left[\frac{2.828-1}{2.828}\right]$$

$$= \frac{116\times 36,000\times 1.828}{16\times 2.828}$$

$$= \frac{116\times 36,000\times 1828}{16\times 2828} \approx 1,68,709$$

$\therefore P = ₹1,68,709$

எடுத்துக்காட்டு 7.7

ஒரு நிதி நிறுவனத்திலிருந்து ஒருவர் 16% வட்டி விகிதத்தில் ₹7,00,000 –த்தை கடனாக பெறுகிறார். திருப்பி செலுத்துவதற்கான கால அளவு 15 வருடங்கள் எனில், ஒவ்வொரு மாத ஆரம்பத்திலும் அவர் செலுத்தக் கூடிய தவணைத் தொகையினைக் காண்க. $[(1.0133)^{180} = 9.772]$

தீர்வு

இங்கு $P = 7,00,000$; $n = 15$; $i = 0.16$ மற்றும் $k = 12$.

$$P = \left(1+\frac{i}{k}\right)\left(\frac{a}{\frac{i}{k}}\right)\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk}}\right]$$

$$7,00,000 = \left(1+\frac{0.16}{12}\right)\left(\frac{a}{\frac{0.16}{12}}\right)\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{0.16}{12}\right)^{15\times 12}}\right]$$

$$= \left(\frac{12.16}{12}\right)\left(\frac{12a}{0.16}\right)\left[1-\frac{1}{\left(\frac{12.16}{12}\right)^{180}}\right]$$

$$= \frac{(1216)a}{16}\left[1-\frac{1}{(1.0133)^{180}}\right]$$

$$= \frac{1216}{16}a\left[1-\frac{1}{9.772}\right]$$

$$= \frac{1216}{16}a\left[\frac{9.772-1}{9.772}\right]$$

$$= \frac{1216}{16}a\left[\frac{8.772}{9.772}\right]$$

$$\Rightarrow a = \frac{7,00,000\times 16\times 9772}{1216\times 8772} \approx ₹\ 10,261$$

எடுத்துக்காட்டு 7.8

ஒரு கூட்டுறவு சங்கத்தின் தலைவர் வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் பாடத்தில் அதிக மதிப்பெண் பெறுகின்ற மாணவருக்கு தங்கப் பதக்கத்தை விருதாக அளிக்க விரும்புகிறார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் அப்பதக்கத்திற்கான செலவு ₹9,000 என்க. அண்டுதோறும் இச்செலவினை மேற்க்கொள்ள ஆண்டிற்கு 15% கூட்டு வட்டியில் தற்போது அவர் எவ்வளவு வைப்புத் தொகையை முதலீடாக அளிக்க வேண்டும்?

தீர்வு

இங்கு $a = 9{,}000$ மற்றும் $i = 0.15$

$$P = \frac{a}{i}$$

$$= \frac{9000}{0.15}$$

$$= \frac{9{,}00{,}000}{15}$$

$$= 60{,}000$$

முதலீட்டுத் தொகை = ₹ 60,000.

எடுத்துக்காட்டு 7.9

ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட நிறுவனம் நெருக்கடியான சூழல்களில் தனது தொழிலாளர்களுக்கு உதவுவதற்க்காக ஒரு நிதியை உருவாக்க விரும்புகிறது. ஒவ்வொரு மாதத்திற்கும் மதிப்பிடப்பட்ட செலவு ₹18,000 ஆகும். இந்நிதிக்காக, நிறுவனம் 15% கூட்டு வட்டியில் முதலீடு செய்ய வேண்டிய வைப்புத் தொகையை காண்க.

தீர்வு

இங்கு $a = 18{,}000$; $i = 0.15$ மற்றும் $k = 12$.

$$P = \frac{a}{i/k} = \frac{18{,}000}{0.15/12}$$

$$= \frac{18{,}000}{0.15} \times 12 = \frac{18{,}00{,}000 \times 12}{15}$$

$$= 14{,}40{,}000$$

முதலீடு செய்யப்பட வேண்டிய வைப்புத் தொகை ₹14,40,000 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.10

தற்போதைய மதிப்புபான ₹30,000 –த்தை கொண்டு ஒவ்வொரு அரையாண்டுக்கும் நிரந்தர தவணை தொகையாக ₹675 –ஐ பெறுவதற்கான ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு $P = 30{,}000$; $a = 675$; $k = 2$, $i = ?$

$$P = \frac{a}{i/k}$$

$$30{,}000 = \frac{675}{\frac{i}{2}}$$

$$= \frac{1350}{i}$$

$$\Rightarrow i = \frac{1350}{30{,}000} = \frac{135}{3000} = 0.045$$

வட்டி வீதம் = $0.045 \times 100\% = 4.5\%$

பயிற்சி 7.1

1. ஆண்டிற்கு 10% வட்டி விகிதத்தில் ஒவ்வொரு ஆண்டும் செலுத்தப்படும் சாதாரண தவணை பங்கீட்டுத் தொகை ₹3,200 –க்கு 12 ஆண்டுகளுக்கான முதிர்வுத் தொகையினைக் காண்க. $[(1.1)^{12} = 3.1384]$
2. ஒவ்வொரு காலாண்டு இறுதியிலும் 8% ஆண்டு வட்டியில் ₹2,000 என 10 ஆண்டுகளுக்கு செலுத்தப்படும் தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் முதிர்வுத் தொகையினைக் காண்க. $[(1.02)^{40} = 2.2080]$
3. ஆண்டிற்கு 12% என மாதந்திர கூட்டு வட்டியை ஈட்டக்கூடிய சாதாரண தவணை பங்கீட்டுத் தொகை ₹1,500 –ன் 12 மாதங்களுக்கான முதிர்வுத் தொகையினைக் காண்க. $[(1.01)^{12} = 1.1262]$
4. ஒரு வங்கி ஆண்டிற்கு 8% வட்டியை காலாண்டிற்கு ஒரு முறை கூட்டு வட்டியாக தருகிறது. ₹30,200 –ஐப் பெறுவதற்காக ஒவ்வொரு காலாண்டின் முடிவிலும் செலுத்தும் வகையில் 10 வருடங்களுக்கு செய்யப்படும் சமமான தவணைத் தொகையின் மதிப்பு என்ன? $[(1.02)^{40} = 2.2080]$

5. ஒரு நபர் அவருடைய வருமானத்திலிருந்து ₹2,000 –த்தை ஒவ்வொரு மாத இறுதியிலும் தன் பங்கீட்டு ஓய்வூதியக் கணக்கில் செலுத்துகிறார். அதே அளவுத் தொகையை நிர்வாகமும் செலுத்துகிறது. ஆண்டுக்கு 8% கூட்டு வட்டி அளிக்கப்படுகிறது எனில், 20 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவருக்கு கிடைக்கும் மொத்த தொகையைக் காண்க. $[(1.0067)^{240} = 4.9661]$
6. 14 வருடங்களுக்கு, ஆண்டிற்கு 10% என்ற வட்டி விகிததில் ஒவ்வொரு ஆண்டு இறுதியிலும் செலுத்தப்படுகின்ற தவணைத் தொகை ₹2,000 –த்தின் தற்போதைய மதிப்பினைக் காண்க. $[(1.1)^{-14}= 0.2632]$
7. 6 வருடங்களுக்கு, ஆண்டிற்கு 8% என்ற கூட்டு வட்டியில் ஒவ்வொரு ஆறு மாதங்களின் முடிவிலும் செலுத்தப்படும் தவணைத் தொகை ₹900 –த்தின் தற்போதைய மதிப்பினைக் காண்க. $[(1.04)^{-12}=0.6252]$
8. ஆண்டுக்கு 10% என்ற கூட்டு வட்டியில் ஒவ்வொரு வருடத்தின் ஆரம்பத்தில் செலுத்தக் கூடிய தவணை பங்கீட்டுத் தொகை ₹5,000 –க்கு 12 வருடங்களின் முடிவில் கிடைக்கும் முதிர்வுத் தொகையினைக் காண்க. $[(1.1)^{12} = 3.1384]$
9. ஆண்டிற்கு 8% என்ற வட்டிவிகிதத்தில் 16 வருடங்களுக்கு செலுத்தப்படும் காத்திருப்பு தவணைத் தொகை ₹1,500 –ன் தற்போதைய மதிப்பைக் காண்க. $[(1.08)^{-16} = 0.2919]$
10. ஆண்டிற்கு 5% என்ற கூட்டு வட்டியில் உள்ள நிரந்தர பங்கீட்டு தவணைத் தொகை ₹50–க்கான வைப்புத் தொகையைக் காண்க.

7.2 சரக்கு முதல்கள், பங்குகள், கடன் பத்திரங்கள் மற்றும் தரகு (Stocks, shares, debentures and Brokerage)

ஏதேனும் ஒரு பெரிய வியாபாரம் தொடங்குவதற்கு, மிகப் பெரிய தொகை தேவைப்படுகிறது. பொதுவாக ஒரு தனி நபரால் மிகப் பெரிய தொகையை முதலீடு செய்ய முடியாது, எனவே தொழில் தொடங்குவதற்கு தேவைப்படும் மொத்த தொகை சமபாகங்களாக பிரிக்கப்படும், ஒவ்வொரு சமபாகமும் ஒரு பங்கு எனப்படும். இந்த பங்குகளை வைத்து இருப்பவர்கள் பங்குதாரர்கள் எனப்படுவர்.

7.2.1 பங்குகளின் வகைகள் (Types of shares):

இரண்டு வகையான பங்குகள் உள்ளன. அதாவது பொதுவான பங்கு (அல்லது சாதாரண பங்கு) மற்றும் முன்னுரிமைப் பங்கு.

பொதுவாக நிறுவனத்தால் பெறப்பட்ட இலாபம் பங்குதாரர்களிடையே வினியோகிக் கப்படுகிறது. முன்னுரிமைப் பங்கு வைத்திருப் பவர்களுக்கு ஈவுத்தொகை மீது முதல் உரிமை உள்ளது. அவர்களுக்கு பணம் செலுத்தப்பட்ட உடன், மீதமுள்ள இலாபம் பொதுவான பங்கு தாரர்களிடையே வினியோகிக்கப்படுகிறது.

7.2.2 வரையறைகள் (Definitions)

(i) மூலதனம் என்பது ஒரு நிறுவனம் தொடங்க முதலீடு செய்யப்படும் மொத்த தொகை ஆகும்.

(ii) தனிப்பட்ட நபர்கள் வாங்கிய பங்குகள் சரக்குமுதல்கள்என்றுஅழைக்கப்படுகிறது.

(iii) பங்குகளை வாங்கும் நபர்கள் பங்கு தாரர்கள் என அழைக்கப்படுகிறார்கள்.

(iv) முகமதிப்பு **(Face value):**
நிறுவனம் முதலீட்டாளர்களுக்கு விற்கும் ஒரு பங்குக்கான அசல் மதிப்பை முக மதிப்பு அல்லது ஒப்பு மதிப்பு அல்லது சம மதிப்பு என அழைக்கப்படுகிறது. பங்குகளின் அசல் மதிப்பானது பங்கு மூலதனச் சான்றிதழில் அச்சிடப்படுகிறது.

(v) சந்தை மதிப்பு **(Market value) :** சந்தையில் வாங்கப்படும் மற்றும் விற்கப்படும் ஒரு பங்கின் விலை சந்தை மதிப்பு (அல்லது பண மதிப்பு) என்றழைக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பானது நேரத்துக்கு நேரம் மாறுபட்டுக் கொண்டிருக்கும்.

மேற்குறிப்புகள் (Remarks):

(i) பங்குகளின் சந்தை மதிப்பானது முகமதிப்பைக் காட்டிலும் அதிகமாக இருந்தால், பங்கு அதிக விலையில் உள்ளது என்போம்.

(ii) பங்குகளின் சந்தை மதிப்பானது அதன் முக மதிப்பின் அதே அளவாக இருந்தால், பங்கு சம விலையில் உள்ளது என்போம்.

(iii) பங்குகளின் சந்தைமதிப்பு முகமதிப்பைக் காட்டிலும் குறைவாக இருந்தால் பங்கு கழிவு விலையில் உள்ளது என்போம்.

ஈவுத்தொகை (Dividend):

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஈவு தொகை சதவீதமாக வெளிப்படுத்தப்படுகிறது.

பங்குதாரர்களிடையே வினியோகிக்கப்படும் ஒரு நிறுவனத்தால் பெறப்பட்ட இலாபமானது ஈவுத்தொகை என்றழைக்கப்படுகிறது. இது பங்கின் முகமதிப்பில் கணக்கிடப்படுகிறது.

சில பயனுள்ள முடிவுகள் (Some useful results):

(i) முதலீடு (Investment):

பங்கு முதலீடு = பங்குகளின் எண்ணிக்கை $\times$ பங்குகளின் சந்தை மதிப்பு

(ii) வருமானம் (Income):

ஆண்டு வருமானம் = பங்குகளின் எண்ணிக்கை $\times$ பங்குகளின் முக மதிப்பு $\times$ ஈவுத் தொகையின் வீதம் (பங்கு வீதம்)

(iii) திரும்பப் பெறும் தொகையின் சதவீதம் (அல்லது) வருமான வீதம் (Return percentage (or) yield percentage):

திரும்பப் பெறும் தொகையின் சதவீதம்

$$= \frac{\text{வருமானம்}}{\text{முதலீடு}} \times 100$$

(iv) பங்குகளின் எண்ணிக்கை (Number of shares):

வாங்கிய பங்குகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{முதலீடு}}{\text{ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு}}$$

பங்குச் சந்தை (Stock exchange):

பங்குகள் வர்த்தகம் செய்யப்படும் இடம் பங்குச் சந்தை என்றழைக்கப்டுகிறது.

தரகு (Brokerage):

பங்குச் சந்தை மூலம் பங்குகளை வாங்குவது மற்றும் விற்பது போன்ற கோருதல்களை நிறைவேற்றும் நபர் பங்கு தரகர் என்று அழைக்கப்படுகிறார். தரகரின் சேவைக்கான கட்டணம் தரகு என்றழைக்கப்படும்.

தரகு, பொதுவாக முக மதிப்பை அடிப்படையாகக் கொண்டது, இது சதவீதத்தில் குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

(i) சரக்கு முதல் வாங்கப்படும் போது தரகு, சந்தை விலையுடன் சேர்க்கப்படும்.

(ii) சரக்கு முதல் விற்கப்படும் போது தரகு, சந்தை விலையிருந்து கழிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.11

₹18 அதிக விலையில் உள்ள ₹100 –ஐ முகமதிப்பாகக் கொண்ட 325 பங்குகளின் சந்தை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

ஒரு பங்கின் முகமதிப்பு = ₹100

ஒரு பங்கிற்கான அதிக விலை = ₹18

ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு = ₹118

325 பங்குகளின் சந்தை மதிப்பு

= பங்குகளின் எண்ணிக்கை $\times$ ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு

= 325×118 = ₹38,350

325 பங்குகளின் சந்தை மதிப்பு = ₹38,350

எடுத்துக்காட்டு 7.12

₹14 கழிவில் உள்ள ₹100 முகமதிப்புக் கொண்ட 500 பங்குகளை ஒரு நபர் வாங்குகிறார் எனில், அவர் செலுத்த வேண்டிய தொகை எவ்வளவு?

தீர்வு

பங்குகளின் எண்ணிக்கை = 500

ஒரு பங்கின் முகமதிப்பு = ₹100

கழிவு = ₹14

ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு = 100 – 14

(முக மதிப்பு – கழிவு)

= ₹86.

500 பங்குகளின் சந்தை மதிப்பு

= பங்குகளின் எண்ணிக்கை

× ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு

= 500 × 86 = ₹43,000

500 பங்குகளின் சந்தை மதிப்பு = ₹43,000

எடுத்துக்காட்டு 7.13

ஒரு நிறுவனத்திலிருந்து சமமதிப்பு ₹10 உடைய 9% பங்கு வீதம் அளிக்கும் 20 பங்குகளை ஒருவர் வாங்குகிறார். அந்த 20 பங்குகள் மூலம் கிடைத்த வருமானம் அவர் செய்த முதலீட்டுக்கு 12% எனில், ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

பங்கின் முக மதிப்பு = ₹10

20 பங்குகளின் முக மதிப்பு = ₹200

ஈவுத் தொகை = $\frac{9}{100} \times 200$

$= ₹18 \left[S.I = \frac{PNR}{100}, N = 1\right]$

முதலீடு = $\frac{18 \times 100}{1 \times 12}$ $\left[P = \frac{100 \times S.I}{N \times R}, N = 1\right]$

= ₹150

20 பங்குகளின் வாங்கிய விலை ₹150

ஒரு பங்கின் சந்தை விலை = ₹ $\frac{150}{20}$

= ₹7.50

எடுத்துக்காட்டு 7.14

₹25 முகமதிப்புள்ள 10% பங்கு வீதம் கொண்ட பங்குகளின் மூலம் கிடைக்கும் மொத்த ஈவுத் தொகை ₹2000 எனில், பங்குகளின் எண்ணிக்கைக் காண்க.

தீர்வு

பங்குகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

$\therefore$ x பங்குகளின் முகமதிப்பு = ₹25 x

எனவே, $\frac{10}{100} \times 25x = ₹2,000$

$\Rightarrow \quad x = \frac{2000 \times 100}{25 \times 10} = 800$

எனவே பங்குகளின் எண்ணிக்கை = 800

எடுத்துக்காட்டு 7.15

₹100 முகமதிப்புள்ள 12% சரக்கு முதலின் ஆண்டு வருமானம் ₹3,600 எனில், பங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

பங்குகளின் எண்ணிக்கை 'x' என்க

பங்கின் முகமதிப்பு = ₹100

'x' பங்குகளின் முகமதிப்பு = ₹100x

$\frac{12}{100} \times 100x = ₹3600$

$12\,x = 3600 \Rightarrow x = 300$

எனவே பங்குகளின் எண்ணிக்கை = 300

எடுத்துக்காட்டு 7.16

₹80–க்கு கிடைக்கும் ₹100 முக மதிப்புள்ள பங்குகளில் ஒரு நபர் ₹96,000 முதலீடு செய்கிறார். பங்கு நிறுவனம் வழங்கும் பங்கு வீதம் 18% எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) அவர் வாங்கிய பங்குகளின் எண்ணிக்கை

(ii) மொத்த ஈவுத் தொகை

(iii) முதலீட்டுக்கான வருமான வீதம்

தீர்வு

(i) முதலீடு = ₹96,000

முகமதிப்பு = ₹100

சந்தை விலை = ₹80

வாங்கப்பட்ட பங்குகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{முதலீடு}}{\text{ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு}}$$

$$= \frac{96,000}{80}$$

= 1200 பங்குகள்

(ii) மொத்த ஈவுத் தொகை

= பங்குகளின் எண்ணிக்கை × ஈவுத் தொகை வீதம் × பங்கின் முக மதிப்பு

$$= 1200 \times \frac{18}{100} \times 100$$

= ₹21,600

(iii) ₹ 96000 க்கான வருமானம் = ₹21600

$$\text{வருமான வீதம்} = \frac{21,600}{96,000} \times 100\%$$

$$= \frac{45}{2}\%$$

$$= 22.5\%$$

எடுத்துக்காட்டு 7.17

ஒருவர் 17% கழிவில் உள்ள 12% சரக்கு முதல்களை ₹ 54,000 –க்கு வாங்கினார். அதற்க்காக அவர் செலுத்திய தரகு 1% எனில், அவரின் வருமானத்தின் வீதத்தைக் காண்க.

தீர்வு

முகமதிப்பு = ₹100

சந்தை மதிப்பு = ₹(100 – 17 + 1)

= ₹84

$$\therefore \text{வருமான வீதம்} = \frac{(12\times100)}{84}$$

$$= \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$$

$$\therefore \text{வருமானத்தின் சதவிகதம்} = 14\frac{2}{7}\ \%$$

எடுத்துக்காட்டு 7.18

₹ 89 –ல் உள்ள 10% சரக்கு முதலிலும், ₹ 90 –ல் உள்ள 7% சரக்கு முதலிலும் சமமான தொகைகள் முதலீடு செய்யப்படுகின்றன (இரு பரிவர்த்தனைகளிலும் 1% தரகு என்க). 10% சரக்கு முதல் 7% சரக்கு முதலைக் காட்டிலும் ₹100 அதிக வருமானம் தருகிறது எனில், ஒவ்வொரு சரக்கு முதலிலும் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகைகளைக் காண்க.

தீர்வு

x என்பது ஒவ்வொரு பங்கிற்குமான முதலீட்டுத் தொகை என்க.

₹ 89 –ல் உள்ள 10% சரக்கு முதலுக்கான வருமானம்:

முகமதிப்பு = ₹100

சந்தை மதிப்பு = ₹ (89+1) = ₹90

பங்குகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{முதலீடு}}{\text{ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு}}$$

$$= \frac{x}{90}$$

$$\text{ஆண்டு வருமானம்} = \frac{x}{90} \times \frac{10}{100} \times 100$$

$$= \frac{x}{9} \qquad \ldots (1)$$

₹ 90–ல் உள்ள 7% சரக்கு முதலுக்கான வருமானம்:

சந்தை மதிப்பு = ₹ (90+1) = ₹91

பங்குகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{முதலீடு}}{\text{ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு}}$$

$$= \frac{x}{91}$$

$$\text{ஆண்டு வருமானம்} = \frac{x}{91} \times \frac{7}{100} \times 100$$

$$= \frac{x}{13} \qquad \ldots (2)$$

$\frac{x}{9} - \frac{x}{13} = 100$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\Rightarrow x =$ ₹ 2925

∴ ஒவ்வொரு பங்கிலும் செய்யும் முதலீடு = ₹ 2925

எடுத்துக்காட்டு 7.19

ஒரு நிறுவனத்தின் மூலதனம் 16% பங்கு வீதம் கொண்ட 1 00 000 முன்னுரிமைப் பங்குகளையும், 50000 சாதாரணப் பங்குகளையும்

கொண்டதாக உள்ளது. முன்னுரிமை மற்றும் சாதாரணப் பங்குகள் ஒவ்வொன்றின் முகமதிப்பு ₹10 ஆகும். அந்த நிறுவனத்திற்கு கிடைத்த மொத்த இலாபம் ₹ 3,20,000 –ல் இருந்து ₹40,000 இருப்பு நிதிக்காகவும் ₹20,000 மதிப்பிறக்க நிதிக்காகவும் ஒதுக்கப்படுகிறது எனில், சாதாரணப் பங்குதாரர்களுக்கு கொடுக்கப்படும் பங்கு வீதத்தை காண்க.

தீர்வு

முன்னுரிமை மற்றும் சாதாரணப் பங்குகளின் முகமதிப்பு = ₹10

முன்னுரிமைப் பங்குகளின் மொத்த முகமதிப்பு

$= ₹1,00,000 \times 10 = ₹10,00,000$

சாதாரணப் பங்குகளின் மொத்த முகமதிப்பு

$= ₹50,000 \times 10 = ₹5,00,000$

பங்குதாரர்களுக்கு அளிக்கப்பட்ட ஈவுத்தொகை

$= ₹(3,20,000 - 40,000 - 20,000) = ₹2,60,000$

முன்னுரிமைப் பங்குதாரர்களுக்கான ஈவுத்தொகை

$$= \frac{16}{100} \times 10,00,000 = ₹1,60,000$$

சாதாரணப் பங்குகளுக்கான ஈவுத்தொகை

$= ₹2,60,000 - ₹1,60,000 = ₹1,00,000$

சாதாரணப் பங்கின் பங்கு வீதம்

$$= \frac{\text{வருமானம்}}{\text{முதலீடு}} \times 100\%$$

$$= \frac{1,00,000}{5,00,000} \times 100\% = 20\%$$

எடுத்துக்காட்டு 7.20

முகமதிப்பு ₹10,000 உள்ள 20% சரக்கு முதல்களை ஒருவர் 42% அதிக விலையில் விற்கிறார். விற்று கிடைத்த பணத்தைக் கொண்டு 22% கழிவில் உள்ள 15% சரக்கு முதல்களை வாங்குகிறார். வழங்கப்பட்ட தரகு 2% எனில், அவரது வருமானத்தில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் காண்க.

தீர்வு

படி (i): 20% சரக்கு முதல்கள்:

முகமதிப்பு = ₹10000

$$\text{வருமானம்} = \frac{20}{100} \times 10000 = ₹\ 2,000 \quad \ldots (1)$$

முதலீடு = ₹10,000

முகமதிப்பு = ₹100

சந்தை மதிப்பு = ₹(100 + 42 – 2) = ₹140

$$\text{பங்குகளின் எண்ணிக்கை} = \frac{\text{முதலீடு}}{\text{முக மதிப்பு}}$$

$$= \frac{10,000}{100} = 100$$

விற்றுக் கிடைக்கும் தொகை = 100×140

= ₹14,000

படி (ii): 15% சரக்கு முதல்கள்:

சந்தை மதிப்பு = ₹(100 – 22 + 2) = ₹80

$$\text{பங்குகளின் எண்ணிக்கை} = \frac{\text{முதலீடு}}{\text{முக மதிப்பு}}$$

$$= \frac{14000}{80} = 175$$

$$\text{வருமானம்} = 175 \times \frac{15}{100} = ₹2625$$

படி (iii): வருமான மாற்றம்:

வருமான மாற்றம் = ₹ 2625 – ₹ 2000 = ₹ 625

எடுத்துக்காட்டு 7.21

எது சிறந்த முதலீடு: ₹ 16 –ல் கிடைக்கும் ₹20 முகமதிப்புள்ள 12% பங்கு வீதம் கொண்ட பங்குகள் (அல்லது) ₹ 24 –ல் கிடைக்கும் ₹20 முகமதிப்புள்ள 15% பங்கு வீதம் கொண்ட பங்குகள்.

தீர்வு

ஒவ்வொரு சரக்கு முதலிலும் ₹(16×24) –ஐ முதலீடு செய்வதாக கொள்வோம்.

படி (i): ₹ 16 –ல் கிடைக்கும் 12% பங்குகள்:

12 % பங்குகளில் கிடைக்கும் வருமானம்

$$= \frac{12}{16} \times (16 \times 24)$$

= ₹ 288

படி (ii): ₹ 24 –ல் கிடைக்கும் 15% பங்குகள்:

15 % பங்குகளில் கிடைக்கும் வருமானம்

$$= \frac{15}{24} \times (16 \times 24)$$

= ₹ 240

எனவே, முதலாவது முதலீடு சிறந்ததாகும்.

பயிற்சி 7.2

1. ₹132–ல் கிடைக்கும் ₹100 சம மதிப்புள்ள 62 பங்குகளின் சந்தை மதிப்பினைக் காண்க.
2. ₹7 கழிவில் கிடைக்கும் ₹25 மதிப்புள்ள 125 பங்குகளை வாங்குவதற்கு தேவைப்படும் தொகை எவ்வளவு?
3. ₹20 மதிப்புள்ள, 9% பங்கு வீதம் கொண்ட பங்குகள் மூலம் கிடைக்கின்ற ஈவுத் தொகை ₹1,620 எனில், வாங்கப்படும் பங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
4. ₹100 முகமதிப்புள்ள 15% பங்கு வீதமுடைய பங்குகளை ஒரு நிறுவனம் 20% அதிக விலையில் அறிவித்துள்ளது. திரு. மோகன் என்பவர் அதில் ₹29,040 –ஐ முதலீடு செய்கிறார் எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
   (i) திரு.மோகனால் வாங்கப்படும் பங்குகளின் எண்ணிக்கை
   (ii) இப்பங்குகளிலிருந்து அவருக்கு கிடைக்கும் வருடாந்திர வருமானம்
   (iii) அவருடைய முதலீட்டிருந்து கிடைக்கும் வருமான சதவிகிதம்
5. ஒரு நபர் ₹2.50 அதிக விலையில் கிடைக்கும் ₹10 முகமதிப்புக் கொண்ட 400 பங்குகளை வாங்கினார். பங்கு வீதம் 12% எனில் ,கீழ்க்கண்டவற்றைக் கணக்கிடுக.
   (i) அவரது முதலீடு
   (ii) அவருக்கு கிடைக்கும் ஆண்டு ஈவுத் தொகை
   (iii) அவரது முதலீடுக்கு கிடைக்கும் வட்டி வீதம்
6. ₹4500 –க்கு ₹10 மதிப்புக் கொண்ட 12% பங்கு வீதம் கொண்ட பங்குகளை சம விலையில் திரு. சுந்தர் என்பவர் வாங்குகிறார். பங்கின் விலை ₹23 ஆக அதிகரிக்கும் பொழுது பங்குகளை விற்று அதன் மூலம் கிடைக்கும் தொகையை ₹25 மதிப்புள்ள 10% பங்குகளில் ₹18–க்கு முதலீடு செய்கிறார் எனில், அவரது வருமானத்தில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் காண்க.
7. ஒரு நபர் ₹13,500 இன் ஒரு பகுதியை, ₹100 மதிப்புள்ள 6% பங்குகளில் ₹140 –க்கும், மீதமுள்ள தொகையை ₹100 மதிப்புள்ள 5% பங்குகளில் ₹125 –க்கும் முதலீடு செய்கிறார். அவருடைய மொத்த வருமானம் ₹560 எனில், ஒவ்வொன்றிலும் அவர் எவ்வளவு முதலீடு செய்திருக்க வேண்டும்.
8. பாபு என்பவர் ₹100 மதிப்புள்ள பங்குகளை 10% கழிவிற்கு விற்று கிடைக்கும் தொகையில் ₹50 மதிப்புள்ள 15% பங்குகளில் ₹33 –க்கு முதலீடு செய்கிறார். 10% கழிவிற்கு பதிலாக 10% அதிகவிலைக்கு அவருடைய பங்குகளை விற்றிருப்பாரேயானால் அவர் ₹450 அதிகமாக இலாபம் ஈட்டியிருப்பார் எனில், அவர் விற்ற பங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
9. ₹100 மதிப்புள்ள 7% பங்குகள் ₹120 –க்கு அல்லது ₹100 மதிப்புள்ள 8% பங்குகள் ₹135 –க்கு, இவற்றுள் எது சிறந்த முதலீடு?
10. ₹140 –ல் உள்ள 20% சரக்கு முதல் அல்லது ₹ 70–ல் உள்ள 10% சரக்கு முதல், இவற்றுள் எது சிறந்த முதலீடு?

பயிற்சி 7.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. ₹100 முகமதிப்பு உடைய 8% சரக்கு முதலின் 200 பங்குகளிலிருந்து கிடைக்கும் ஈவுத் தொகை
   (a) 1600 (b) 1000
   (c) 1500 (d) 800
2. முக மதிப்பு ₹100 உடைய 8% சரக்கு முதலின் 200 பங்குகளை ₹50 –க்கு விற்பதன் மூலம் கிடைக்கும் தொகை.
   (a) 16,000 (b) 10,000
   (c) 7,000 (d) 9,000
3. ₹20,000 மதிப்புக் கொண்ட ₹100 முகமதிப்புடைய ஒரு சரக்கு முதலை 20% அதிகவிலையில் ஒருவர் வாங்குகிறார் எனில், அவரது முதலீடு
   (a) ₹ 20,000 (b) ₹ 25,000
   (c) ₹ 24,000 (d) ₹ 30,000

4. ₹100 முகமதிப்புடைய 10% சரக்கு முதல் மூலம் ஒருவருக்கு கிடைக்கும் ஈவுத் தொகை ₹ 25,000 எனில், அவர் வாங்கிய பங்குகளின் எண்ணிக்கை

(a) 3500 (b) 4500
(c) 2500 (d) 300

5. ₹100 முகமதிப்புடைய 400 பங்குகளை விற்பதற்கான தரகு வீதம்1% எனில், அவர் செலுத்திய தரகு தொகை

(a) ₹ 600 (b) ₹ 500
(c) ₹ 200 (d) ₹ 400

6. ₹100 முகமதிப்புடைய, ஒரு பங்கு, $9\frac{1}{2}$ % கழிவு விலைக்கு, $\frac{1}{2}$ % தரகு வீதத்தில் கிடைக்கும் எனில், அப்பங்கின் வாங்கிய விலை

(a) ₹89 (b) ₹90 (c) ₹91 (d) ₹95

7. ₹100 முக மதிப்புடைய 9% சரக்கு முதலின் 100 பங்குகளை 10%, கழிவிற்கு ஒருவர் வாங்குகிறார் எனில், அச்சரக்கு முதலுக்கான முதலீடு

(a) ₹9000 (b) ₹6000
(c) ₹5000 (d) ₹4000

8. 7% சரக்கு முதலை ₹80–க்கு வாங்கினால் கிடைக்கும் வருமானம் வீதம்

(a) 9% (b) 8.75%
(c) 8% (d) 7%

9. ₹100 முகமதிப்புடைய 15% பங்கு வீதம் கொண்ட 500 பங்குகளின் ஆண்டு வருமானம்

(a) ₹7,500 (b) ₹ 5,000
(c) ₹8,000 (d) ₹ 8,500

10. நிலையான தவணை பங்கீட்டுத் தொகையாக ₹5000 ஒவ்வொரு வருடமும் 10% கூட்டுவட்டியில் செலுத்தப்படுகிறது எனில், உடனடி தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் தற்போதைய மதிப்பு

(a) ₹60,000 (b) ₹ 50,000
(c) ₹10,000 (d) ₹ 80,000

11. 'a' என்பது ஆண்டு தவணைத் தொகை, 'n' என்பது தவணைக் காலங்களின் எண்ணிக்கை, 'i' என்பது ₹1 –க்கான கூட்டுவட்டி எனில், சாதாரண தவணை பங்கீட்டுத் தொகையின் எதிர்கால தொகை

(a) $A = \frac{a}{i}(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]$
(b) $A = \frac{a}{i}\left[(1+i)^n - 1\right]$
(c) $P = \frac{a}{i}$
(d) $P = \frac{a}{i}(1+i)\left[1-(1+i)^{-n}\right]$

12. A என்பவர் ₹ 96–ல் உள்ள 10% சரக்கு முதலில் ஒரு சிறு தொகையை முதலீடு செய்கிறார். B என்பவர் இதற்கு சமமான வருமானம் அளிக்ககூடிய 12% சரக்கு முதலில் முதலீடு செய்கிறார் எனில், அவர் வாங்க வேண்டிய சரக்கு முதலின் சந்தை விலை

(a) ₹80 (b) ₹115.20
(c) ₹120 (d) ₹125.40

13. ஒவ்வொரு தவணை காலத்தின் ஆரம்பத்தில் செலுத்தப்படும் தொகை

(a) காத்திருப்பு தவணை பங்கீட்டுத் தொகை
(b) உடனடி பங்கீட்டுத் தொகை
(c) நிலையான தவணை பங்கீட்டுத் தொகை
(d) இவை ஏதுமில்லை

14. மாதா மாதம் செலுத்தப்படும் நிலையான தவணை பங்கீட்டுத் தொகை ₹ 2000–க்கு 10 % கூட்டுவட்டியில் தற்போதைய மதிப்பு

(a) ₹2,40,000 (b) ₹ 6,00,000
(c) ₹20,40,000 (d) ₹ 2,00,400

15. தற்காலிக தவணை பங்கீட்டுத் தொகைக்கான எடுத்துக்காட்டு

(a) ஒரு வீட்டுமனைக்காக செலுத்தப் படும் தவணைத் தொகை
(b) மாணவர்களுக்கு உதவி தொகை அளிக்கும் நன்கொடை நிதி
(c) வங்கியின் தனி நபர் கடன்
(d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

இதர கணக்குகள்

1. ஆண்டுக்கு 10% கூட்டுவட்டி சேர்க்கப்படும் போது ஒவ்வொரு ஆண்டின் இறுதியிலும் ₹2000 வீதம் 4 ஆண்டுகளுக்கு செலுத்தப்படும் தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் முதிர்வுத் தொகையைக் காண்க. $[(1.1)^4 = 1.4641]$

2. ஒரு கருவி தவணை முறையில் வாங்கப்படுகிறது. வாங்கும் சமயம் ₹5000 செலுத்தி பின்னர் முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் மற்றும் நான்காம் வருட முடிவில் ஒவ்வொரு முறையும் ₹3000 தவணை செலுத்தப்படுகிறது. ஆண்டு வட்டி வீதம் 5% எனில், அக்கருவியின் ரொக்க விலையைக் காண்க. $[(1.05)^{-4} = 0.8227]$

3. (i) ஆண்டுக்கு 7% சதவீதம் கூட்டு வட்டி சேர்க்கப்படும் போது ஒவ்வொரு ஆண்டின் இறுதியிலும் ₹500 வீதம் 7 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்தப்படும் தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் முதிர்வுத் தொகையைக் காண்க. $[(1.07)^7 = 1.6058]$

   (ii) அரையாண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி சேர்த்து 10% வட்டி கொடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு அரையாண்டு முடிவிலும் ₹10,000 தொகை செலுத்தினால் 5 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்தப்படும் தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் முதிர்வுத் தொகையைக் காண்க. $[(1.05)^{10} = 1.6289]$

   (iii) காலாண்டுக்கு ஒருமுறை வட்டி சேர்த்து 4% வட்டி கொடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு காலாண்டு முடிவிலும் ₹600 தொகை செலுத்தினால் 10 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்தப்படும் தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் முதிர்வுத் தொகையைக் காண்க. $[(1.01)^{40} = 1.4889]$

   (iv) மாதந்தோறும் வட்டி சேர்த்து 6% வட்டி கொடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு மாத முடிவிலும் ₹2000 தொகை செலுத்தினால் 5 ஆண்டுகளுக்குச் செலுத்தப்படும் தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் முதிர்வுத் தொகையைக் காண்க. $[(1.005)^{60} = 1.3489]$

4. நவீன் என்பவர் ஒவ்வொரு மாதத்தின் முடிவிலும் ₹250 –ஐ கணக்கில் செலுத்துகிறார். 6% ஆண்டு கூட்டு வட்டியில் மாதந்தோறும் கூட்டு வட்டி சேர்க்கப்படுகிறது. அவரின் மொத்த வைப்புத் தொகையானது குறைந்தது ₹6,390 –ஐ அதைய எத்தனை மாதங்கள் ஆகும்.

   $[\log(1.1278) = 0.0523, \log(1.005) = 0.0022]$

5. பொருளியியல் தேர்வில் முதல் மதிப்பெண் பெரும் மாணவருக்கு ஒரு நபர் ₹1,500 –ஐ பரிசுத் தொகையாக ஒவ்வொரு வருடமும் வழங்குகிறார். இத்தொகையை வழங்குவதற்கு அவர் முதலீடு செய்வதற்கு தேவைப்படும் வைப்புத் தொகையை காண்க. ஆண்டிற்கு 12% வட்டி கணக்கிடப்படுகிறது எனக் கொள்க.

6. இயந்திரம் A-ன் விலை ₹15,000 இயந்திரம் B-ன் விலை ₹20,000 அவற்றிலிருந்து கிடைக்கும் ஆண்டு வருமானம் முறையே ₹4,000 மற்றும் ₹7,000 ஆகும். இயந்திரம் A-ன் ஆயுட்காலம் 4 ஆண்டுகள் மற்றும் B-ன் ஆயுட்காலம் 7 ஆண்டுகள் எனில், எந்த இயந்திரத்தை வாங்குவது சிறந்தது. (ஆண்டுக்கு 8% கழிவு எனக் கொள்க.)

   $[(1.08)^{-4} = 0.7350, (1.08)^{-7} = 0.5835]$

7. ₹27,000 -த்தை பங்குகளில் முதலீடு செய்ய திரு. விஜய் அவர்கள் விரும்புகிறார். பின்வரும் நிறுவன பங்குகள் அவருக்கு கிடைக்கின்றன. சமவிலையில் உள்ள நிறுவனம் A–ன் பங்கு மதிப்பு ₹100; ₹25 அதிக விலையில் உள்ள நிறுவனம் B-ன் பங்கு மதிப்பு ₹100; ₹10 கழிவில் உள்ள நிறுவனம் C–ன் பங்கு மதிப்பு ₹100; 20% அதிக விலையில் உள்ள நிறுவனம் D-ன் பங்கு மதிப்பு ₹50 எனில், (i) A (ii) B (iii) C (iv) D ஆகிய நிறுவனங்களில் அவர் பங்குகளை

வாங்கினால் எத்தனை பங்குகள் கிடைக்கும்?

8. ₹80 -க்கு ₹100 மதிப்புள்ள 7% பங்கு வீதம் கொண்ட பங்கில் ₹8,000 –த்தை திரு. கோபால் என்பவர் முதலீடு செய்துள்ளார். ஒரு வருடத்திற்குப் பிறகு அந்தப் பங்குகளை, பங்கு 1–ற்கு ₹75 வீதம் விற்கிறார் மற்றும் ₹41-க்கு ₹25 மதிப்புள்ள 18% பங்கு வீதம் கொண்ட பங்கில், விற்று கிடைத்த தொகையை (வருமானம் உட்பட) முதலீடு செய்ய முன்வருகிறார் எனில்,

   (i) முதல் வருடத்திற்க்காக அவருக்கு கிடைக்கும் ஈவுத் தொகை

   (ii) இரண்டாம் வருடத்தில் அவருடைய ஆண்டு வருமானம்

   (iii) அவருடைய அசல் மூலதனத்தை பொறுத்து அதிகரித்த வருமான சதவீதம் ஆகியவைகளைக் காண்க

9. 25% ஈவுத் தொகை கொடுக்கக் கூடிய ₹10 முகமதிப்புக் கொண்ட நிறுவனத்தின் 2000 சாதாரண பங்குகளை பங்கு 1–க்கு ₹33 வீதம் ஒருவர் விற்கிறார். விற்று கிடைத்தத் தொகையை 15% ஈவுத் தொகை தரக்கூடிய ₹25 முகமதிப்புக் கொண்ட பருத்தி ஆடை நிறுவனத்தில் பங்கு 1–க்கு ₹44 வீதம் முதலீடு செய்ய முன்வருகிறார் எனில்,

   (i) பருத்தி ஆடை நிறுவனத்தில் இருந்து வாங்கிய பங்குகளின் எண்ணிக்கை

   (ii) அவருடைய ஈவுத் தொகை (வருமான) மாற்றம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. ஒரு நிறுவனத்தின் மூலதனம் 16% பங்குவீதம் கொண்ட 50,000 முன்னுரிமைப் பங்குகளையும் 25,000 சாதாரணப் பங்குகளையும் கொண்டதாக உள்ளது. முன்னுரிமை மற்றும் சாதாரணப் பங்குகள் ஒவ்வொன்றின் முகமதிப்பு ₹10 ஆகும். அந்த நிறுவனத்திற்குக் கிடைத்த மொத்த இலாபம் ₹1,60,000 –இல் இருந்து ₹20,000 சேமிப்பு நிதிக்காகவும் ₹10,000 மதிப்பிறக்க நிதிக்காகவும் ஒதுக்கப்படுகிறது எனில், சாதாரணப் பங்குதாரர்களுக்குக் கொடுக்கப்படும் பங்குவீதம் காண்க.

தொகுப்புரை

தவணைப் பங்கீட்டுத் தொகையின் வகைகள்

காத்திருப்பு தவணைப் பங்கீட்டு தொகை

ஒவ்வொரு தவணைக் காலத்தில் ஆரம்பத்தில் செலுத்தப்படும் தொகை

$$A = \frac{a}{i}\left(1+i\right)\left[\left(1+i\right)^{n}-1\right]$$

தற்போதைய மதிப்பு

$$P = \frac{a}{i}\left(1+i\right)\left[1-\left(1+i\right)^{-n}\right]$$

தற்காலிக தவணைப் பங்கீட்டு தொகை

ஒவ்வொரு தவணைக் காலத்தில் முடிவில் செலுத்தப்படும் தொகை

$$A = \frac{a}{i}\left[\left(1+i\right)^{n}-1\right]$$

தற்போதைய மதிப்பு

$$P = \frac{a}{i}\left[1-\left(1+i\right)^{-n}\right]$$

நிரந்தர தவணைப் பங்கீட்டு தொகை

தற்போதைய மதிப்பு

$$P = \frac{a}{i}$$

- **நன்கொடை அல்லது உதவித் தொகை**

  (i) உதவித்தொகை முடிவின்றி வழங்கப்படும் எனில் $P=\frac{a}{i}$

  (ii) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு உதவி தொகை வழங்கப்படும்

  (n –ஆண்டுகள்) எனில் $P=\frac{a}{i}\left[1-\left(1+i\right)^{-n}\right]$

- **முகமதிப்பு:** ஒரு பங்கின் உண்மை மதிப்பு என்பது அதனின் ஒப்பு மதிப்பு அல்லது முக மதிப்பு அல்லது அச்சிடப்பட்ட மதிப்பு என அழைக்கப்படுகிறது

- **சந்தை மதிப்பு:** ஒரு பங்கு விற்கப்படும் விலை அல்லது பங்கு சந்தை மூலமாக மூதலீட்டுச் சந்தையில் வாங்கப்படுவது என்பது சந்தை மதிப்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

- ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு அதனுடைய முக மதிப்புக்கு சமம் எனில் அல்லது அதனுடைய ஒப்பு மதிப்புக்கு சமம் எனில் அப்பங்கு சமமதிப்புப் பெற்றிக்கிறது எனக் கூறலாம்.

- ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு அதனுடைய ஒப்பு மதிப்பிற்கு குறைவாக இருக்கிறது எனில் அப்பங்கு சம மதிப்பிற்கு கீழ் அல்லது கழிவு நிலையை பெற்றிருக்கிறது எனலாம்.

- ஒரு பங்கின் சந்தை மதிப்பு அதனுடைய ஒப்பு மதிப்பிற்கு அதிகமாக இருக்கிறது எனில் அப்பங்கு சம மதிப்பிற்கு மேல் அல்லது அதிக நிலையை பெற்றிருக்கிறது எனலாம்.

- ஒரு பங்குதாரர் அவருடைய முதலீட்டிற்கான வருடாந்திர இலாபத்தில் ஒரு நிறுவனத்திடமிருந்து பெறுகின்ற ஒரு பகுதி ஈவுத் தொகை எனப்படும்.

- ஈவுத் தொகை என்பது எப்பொழுதும் ஒரு பங்கின் முக மதிப்பு கொண்டு அறிவிக்கப்படுவதாகும் மற்றும் ஈவுத் தொகை வீதம் என்பது ஒரு வருடத்தின் ஒரு பங்கின் ஒப்பு மதிப்பை சதவீதத்தில் விவரிப்பதாகும்.

- பங்குதாரர்களின் ஆண்டு வருமானம் $=\frac{n\times r\times F.V}{100}$

  இங்கு $n=$ பங்குதாரர்கள் வைத்துள்ள பங்குகளின் எண்ணிக்கை

  $r=$ ஈவுத் தொகை வீதம்,

- ஆண்டு ஈவு $=\frac{\text{ஆண்டு வருமானம்}}{\text{பங்குகளின் முதலீடு}}\times 100$

- கையிருப்பு பங்குகளின் எண்ணிக்கை

  $$=\frac{\text{முதலீடு}}{\text{ஒரு பங்கின்சந்தை மதிப்பு (அ) முகமதிப்பு}} \quad \text{(அ)}$$

  $$\frac{\text{வருடாந்திர வருமானம்}}{\text{ஒரு பங்கிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானம்}} \quad \text{(அ)} \quad \frac{\text{மொத்த முகமதிப்பு}}{\text{ஒரு பங்கின் முக மதிப்பு}}$$

- ஒரே முகமதிப்பைக் கொண்ட இரண்டு சரக்கு முதலுக்கான முதலீட்டில் எது சிறந்தது:

ஒவ்வொரு வகையின் முதலீடு = (முதல் சரக்கின் சந்தை மதிப்பு × இரண்டாம் சரக்கின் சந்தை மதிப்பு)

வகை (i) r_1 % லிருந்து பெறுகின்ற வருமானம்

$$= \frac{r_1}{r_1\% \text{ கொண்ட சரக்கின் சந்தை மதிப்பு}} \times \text{முதலீடு}$$

வகை (ii) r_2 % லிருந்து பெறுகின்ற வருமானம்

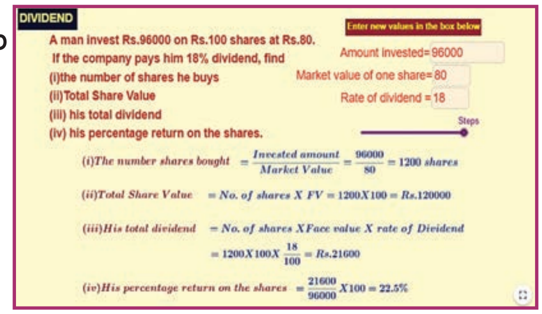
$$= \frac{r_2}{r_2\% \text{ கொண்ட சரக்கின் சந்தை மதிப்பு}} \times \text{முதலீடு}$$

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)

கடன் பத்திரங்கள்	Debentures
காலமுறை செலுத்துதல்	Periodic payment
சந்தை விலை	Market price
சம பங்கு	Equity shares
சரக்கு முதல்கள்	Stocks
செலுத்தும் கால இடைவெளி	Payment interval
தரகு	Brokerage
தவணை பங்கீட்டு தொகை	Immediate annuity
தவணை பங்கீட்டு தொகை காலம்	Term of annuity
நிரந்தர தவணை பங்கீட்டு தொகை	Perpetual annuity
பங்குகள்	Shares
பங்குச் சந்தை	Stock exchange
பங்குதாரர்கள்	Share holders
பரிவர்த்தனை	Transaction
முக மதிப்பு	Face value
முன்னுரிமை	Preference shares
மூலதன மதிப்பு	Capital value
வட்டி	Interest
விற்பனை விலை	Selling price

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

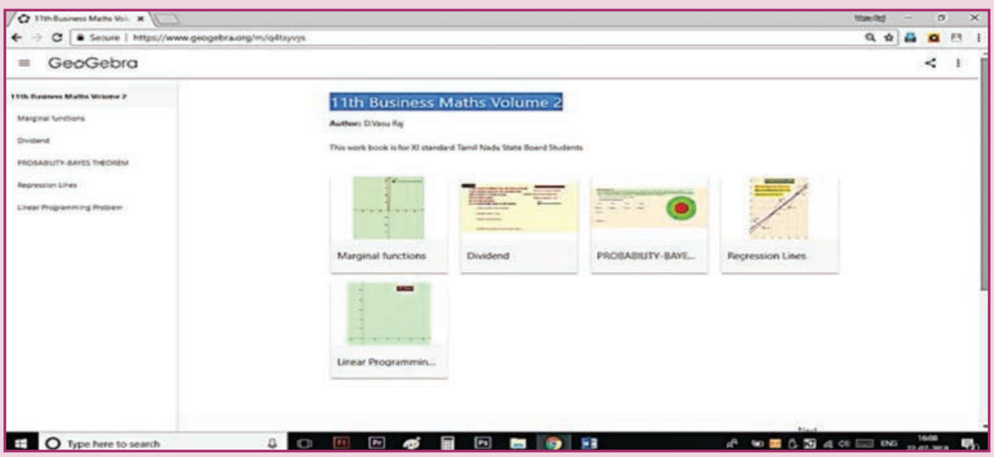
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் இருக்கும்.

படி - 2

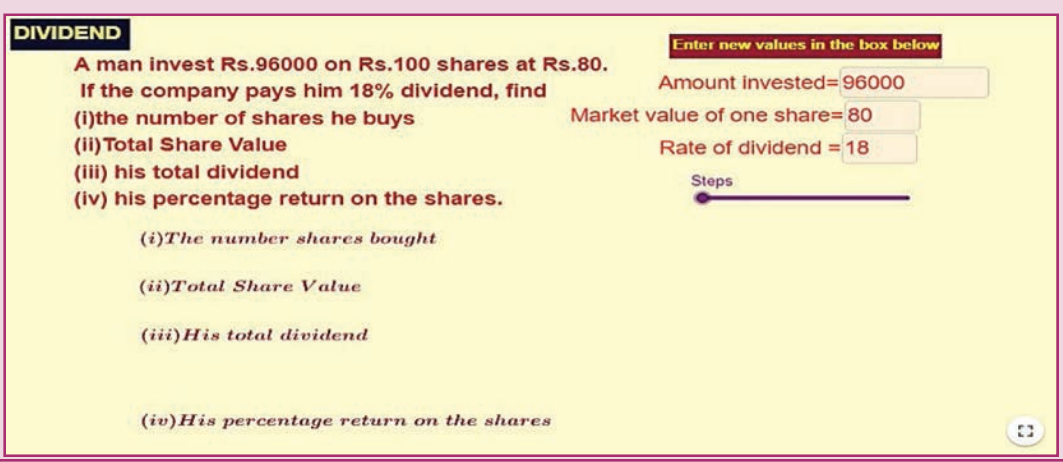
"Dividend" என்பதைத் தேர்வு செய்து, படிகளைப் பார்ப்பதற்கு நழுவலை நகர்த்தவும்.Select the work sheet "Dividend" Move the sliders to see the steps.

முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை (Amount invested), பங்குச்சந்தையின் மதிப்பு (Market value of one share) மற்றும் லாபப்பங்கின் வீதம்(dividend rate)ஆகியவற்றை வலப்பக்கம் உள்ள கட்டத்தில் உள்ளீடு செய்து, கணக்குகளைத் தொடரவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/q4tsyvys (or) scan the QR Code

அத்தியாயம்

8

விவரப் புள்ளியியல் மற்றும் நிகழ்தகவு

கற்றல் நோக்கங்கள்

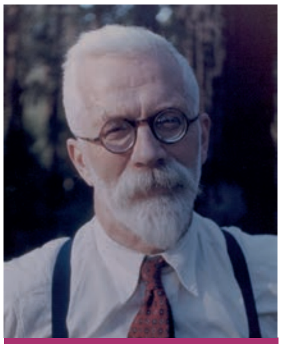
இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துருக்களை மாணவர்கள் நன்கு புரிந்துகொள்ள இயலும்.

- A.M, G.M மற்றும் H.M போன்ற மையப் போக்கு அளவைகள்.
- சராசரிகளுக்கு இடையேயான தொடர்புகள்.
- கால்மானங்கள், பத்துமானங்கள், நூற்றுமானங்கள் என்பன போன்ற தொடர்புடைய நிலை அளவைகள்.
- கால்மானவிலக்கம், சராசரிவிலக்கம் என்பன போன்ற சிதறல் அளவைகள்.
- கால்மான விலக்கக் கெழு, சராசரி விலக்கக் கெழு போன்ற தொடர்புடைய அளவைகள்.
- நிபந்தனை நிகழ்த்தகவின் கருத்துருக்கள், நிகழ்த்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம்.
- பேயிஸ் தேற்றம் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள்

8.1 மையப் போக்கு அளவைகள் (Measures of central tendency)

அறிமுகம்:

புள்ளியியல் பகுப்பாய்வின் முக்கியமான குறிக்கோள்களில் ஒன்று, கொடுக்கப்பட்ட மொத்த விவரங்களின் தன்மையை ஒரு தனிமதிப்பைக் கொண்டு விவரித்தல் ஆகும். அத்தகைய மதிப்பு முழுமையான விவரங்களுக்கான மையபோக்கு அளவைகள் எனப்படுகிறது. "சராசரி" என்பதுப் பொதுவாக அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுத்தப்படும் வார்த்தை ஆகும். உதாரணமாக பேச்சு வழக்கில் "இவன் வகுப்பில் ஒரு சராசரிப் பையன், சராசரி உயரம், ஒரு இந்தியனின் சராசரி வாழ்க்கை, சராசரி வருமானம்" என்பன நடைமுறையில் உள்ள வார்த்தைகள் ஆகும். சர். ரொனல்ட் பிஷர் என்பவர் புள்ளியியலின் தந்தை என அறியப்பட்டவர் மற்றும் அவர் பல்வேறு துறைகளில் புள்ளியியலின் செயல்பாட்டிற்கு ஆரம்ப கால பங்களிப்பை அளித்தவர் ஆவார்.



சர். ரொனல்ட் பிஷர்

8.1.1 சராசரி

மீள்பார்வை

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு பல மையபோக்கு அளவைகள் உள்ளன. அவைகள்,

- கூட்டுச் சராசரி
- இடைநிலை
- முகடு
- பெருக்குச் சராசரி
- இசைச் சராசரி

கூட்டுச் சராசரி (தொடர்ச்சியற்ற விவரங்கள்) (Arithmetic Mean (Discrete case))

விவரங்களின் தொகுப்பிற்கானக் கூட்டுச் சராசரி என்பது அவற்றின் கூடுதலை, விவரங்களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைப்பது ஆகும். விவரங்களை a) தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் மற்றும் b) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள் என இரு வகைப்படுத்தலாம்.

அ) தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் (Ungrouped data)

(i) நேரடி முறை (Direct Method):

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ...X_n}{n} = \frac{\sum X}{n}$$

08_11th_BM-STAT_Ch-8-TM.indd 190 08-12-2021 21:50:50

இங்கு $\overline{X}$ என்பது கூட்டுச்சராசரி $\sum X$ என்பது X என்ற மாறியின் எல்லா மதிப்புகளின் கூடுதல் மற்றும் n என்பது விவரங்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) சுருக்கு முறை (Short-cut method)

$\overline{X} = A + \frac{\sum d}{n}$ இங்கு $d = X - A$, A என்பது ஏதேனும் ஒரு தன்னிச்சையான மதிப்பு மற்றும் d என்பது X என்ற மாறியின் விலக்கம் எனப்படும்

ஆ) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள் (Grouped data)

(i) நேரடி முறை (Direct method)

நேரடி முறையில் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுவதற்கானச் சூத்திரம் $\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$ ஆகும். இங்கு f என்பது அலைவெண்; X – என்பது மாறி, மேலும் $N = \sum f$ (அலைவெண்களின் கூடுதல்)

(ii) சுருக்கு முறை (Short-cut method)

கீழ்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கூட்டுச் சராசரியைக் காணலாம்.

$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$ இங்கு A என்பது ஊகச் சராசரி, $d = X - A$; $N = \sum f$

தொடர்ச்சியுடைய விவரங்களுக்கான கூட்டுச் சராசரி (தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள்)

கூட்டுச் சராசரியை கீழ்க்கண்ட முறைகளில் கணக்கீடு செய்யலாம்.

(i) நேரடி முறை
(ii) சுருக்கு முறை
(iii) படி விலக்க முறை

(i) நேரடி முறை (Direct method)

நேரடி முறையைப் பயன்படுத்தி கூட்டுச் சராசரி $\overline{X} = \frac{\sum fm}{N}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இங்கு m என்பது ஒவ்வொரு இடைவெளிகளின் மைய மதிப்பு

f என்பது ஒவ்வொரு இடைவெளியின் அலைவெண்

$N = \sum f$ என்பது அலைவெண்களின் கூடுதல்

(ii) சுருக்கு முறை (Short-cut method)

கீழ்க்கண்டச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடலாம்.

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

இங்கு A என்பது ஊகச் சராசரி

$d = m - A$ என்பது ஊகச் சராசரியிலிருந்து மைய மதிப்புகளின் விலக்கங்கள் $N = \sum f$

(iii) படிவிலக்க முறை (Step Deviation Method)

தொகுக்கப்பட்ட அல்லது தொடர் அலைவெண் பரவலுக்கானக் கூட்டுச் சராசரிக் காணும் முறை,

$$\overline{X} = A + \left(\frac{\sum fd}{N} \times c\right)$$

இங்கு $d = \frac{(m - A)}{c}$, A என்பது ஏதேனும் ஒரு தன்னிச்சையான மதிப்பு அல்லது ஒரு ஊகச் சராசரி c என்பது இடைவெளியின் அளவு

உங்களுக்கு தெரியுமா?

தொடர்ச்சியுடைய விவரங்களுக்கான கூட்டுச் சராசரியை மேற்கண்ட மூன்று முறைகளில் எந்த முறையில் கணக்கிட்டாலும், ஒரே விடைதான் கிடைக்கும்

முகடு (Mode):

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களில், அதிக எண்ணிக்கையில் திரும்பத்திரும்ப வரும் மதிப்பு முகடு ஆகும்

இடைநிலை (Median):

இடைநிலை என்பது ஒரு சரியான நடுமதிப்பு ஆகும். இடைநிலைக்கு இரு புறமும் உள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கை சமமாக

இருக்கும். இடைநிலை என்பது ஒரு நிலை அளவையாகும். மேலும் சில தொடர்புடைய நிலைஅளவைகள்கீழேவிவரிக்கப்பட்டுள்ளன.

குறிப்பு

மாணவர்களுக்கு மேற்கூறியக் கருத்துக்கள் நன்கு அறிந்தவை என நம்பப்படுகிறது. நமது தற்போதைய பாடத்திட்டத்தினை கீழ்வரும் பிரிவுகளிலிருந்து தொடங்குவோம்.

8.1.2 நிலையைப் பொறுத்த சில அளவைகள்–கால்மானங்கள், பத்துமானங்கள் மற்றும் நூற்றுமானங்கள் (Related Positional Measures - Quartiles, Deciles and Percentiles) :

இடைநிலையைத் தவிர கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை, சமபாகங்களாக பிரிக்கக் கூடிய மேலும் சில அளவைகளை இப்பகுதியில் காண்போம். இவ்வளவைகளில், கால்மானங்கள், பத்துமானங்கள் மற்றும் நூற்றுமானங்கள் ஆகியவை மிகவும் முக்கியமானவை ஆகும்.

(i) கால்மானங்கள் (Quartiles):

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண் விவரங்களை நான்கு சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் வகையில் உள்ள அளவுகள், கால்மானங்கள் எனப்படும்.

ஒவ்வொரு பிரிவும், சம எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். முதல்பிரிவு, முதல் கால்மானம் (Q_1) எனவும் இரண்டாவது பிரிவு இரண்டாவது கால்மானம் (Q_2) எனவும், மூன்றாம் பிரிவு, மூன்றாம் கால்மானம் (Q_3) எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு இரண்டாவது கால்மானம் (Q_2) என்பது இடைநிலை அளவாகும்.

முதல் கால்மானம் (Q_1) அல்லது கீழ்கால்மானம் என்பது பரவலின் 25 % உறுப்புகளைத் தனக்குக் கீழேக் கொண்டதாகவும் மற்றும் பரவலின் 75% உறுப்புகள் கால்மானத்திற்கு மேல் அமைந்திருக்கும். இரண்டாவது கால்மானம் (Q_2) (அல்லது) இடை நிலை அளவு பரவலின் 50% உறுப்புகளைத் தனக்குக் கீழேயும் மற்றும் 50% உறுப்புகளைத் தனக்கு மேலேயும் கொண்டதாக இருக்கும். மூன்றாவது கால்மானம் (Q_3) அல்லது மேல் கால்மானம் பரவலின் 75% உறுப்புகளைத் தனக்கு கீழேயும் மற்றும் 25% உறுப்புகளை தனக்கு மேலேயும் பெற்றிருக்கும். இவ்வாறே மற்ற இரு இடம் சார்ந்த அளவைகளை வரையறுக்கலாம்.

(ii) பத்துமானங்கள் (Deciles):

வரிசைபடுத்தப்பட்ட எண் விவரங்களை பத்து சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் அளவைகள் பத்துமானங்கள் எனப்படும்

அதாவது பத்துமானங்கள் என்பது ஒரு தொடர் வரிசையை, பத்து சம பகுதிகளாக பிரிக்கும் மதிப்புகள் ஆகும். நாம் பெறுகின்ற $D_1, D_2, \ldots, D_9$ என்கிற 9 பிரிவு நிலைகள் பத்துமானங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. இங்கு D_5 என்பது இடைநிலையைக் குறிக்கும் என்பதை நினைவில் கொள்க.

(iii) நூற்றுமானங்கள் (Percentiles):

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண் விவரங்களை நூறு சம பாகங்களாக பிரிக்கும் அளவைகள் நூற்றுமானங்கள் எனப்படும்

அதாவது எண் தொடர் வரிசையை, 100 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் அளவுகள் நூற்றுமானங்கள் எனப்படும்.

நாம் பெறுகின்ற $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$ என்ற 99 பிரிவு நிலைகள் நூற்றுமானங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. இங்கு P_{50} என்பது இடைநிலையைக் குறிக்கும் என்பதை நினைவில் கொள்க.

8.1.3 தொடர்புடைய நிலை அளவைகளைக் கணக்கீடு செய்யும் முறைகள் (Computations for Related positional measure)

இடைநிலை அளவைக் கணக்கீடு செய்யும் முறையைப் போன்றே, கால்மானங்கள்,

பத்துமானங்கள் மற்றும் நூற்றுமானங்களைக் கணக்கீடு செய்யலாம்.

(i) தொகுக்கப்படாத விவரங்கள் (Ungrouped data):

படிநிலைகள்:

1. விவரங்களைத் தனித்த விவரங்களுக்கான அளவையைப் பொறுத்து, ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதவும்.

2. கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$D_1 = \left(\frac{n+1}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$D_2 = 2\left(\frac{n+1}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$P_{60} = 60\left(\frac{n+1}{100}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$P_{99} = 99\left(\frac{n+1}{100}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$Q_2 = D_5 = P_{50} =$ இடைநிலை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.1

22, 4, 2, 12, 16, 6, 10, 18, 14, 20, 8 என்ற தொடரின் D_2 மற்றும் D_6 காண்க.

தீர்வு:

இங்கு n = எண் விவரங்களின் எண்ணிக்கை =11, இதனை ஏறுவரிசையில் அமைக்க,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

$D_2 = 2\left(\frac{n+1}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$D_6 = 6\left(\frac{n+1}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$D_2 = 2.4$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு ≈ 2 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 4$

$D_6 = 7.2$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு ≈ 7 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $=14$

எடுத்துக்காட்டு 8.2

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரங்களுக்கு Q_1, Q_3, D_6 மற்றும் P_{50} ஆகியவற்றைக் காண்க.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7
மதிப்பெண்கள்	20	28	40	12	30	15	50

தீர்வு:

மதிப்பெண்கள் ஏறுவரிசையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

12 15 20 28 30 40 50

n = விபரங்களின் எண்ணிக்கை =7

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{7+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 2$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 15$

$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{3 \times 8}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 6$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 40$

$D_6 = \left(\frac{6(n+1)}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{6 \times 8}{10}\right)$

$= 4.8$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

≈ 5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 30$

$P_{50} = \left(\frac{50(n+1)}{100}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 4$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 28$

எனவே $Q_1 = 15$, $Q_3 = 40$, $D_6 = 30$ மற்றும் $P_{50} = 28$

(ii) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள் (தொடர்ச்சியற்ற அளவுகள்) (Grouped data -Discrete case):

படிநிலைகள்:

1. விவரங்களை அளவைப் பொறுத்து ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதவும்.
2. குவிவு அலைவெண்களைக் காண்க.
3. கீழ்காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

$Q_1 = \left(\dfrac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$Q_3 = \left(\dfrac{3(N+1)}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$\left(\dfrac{N+1}{4}\right)$ன் மதிப்பு (அல்லது) அதற்கு அடுத்த அதிகமான குவிவு அலைவெண் மதிப்பிற்கு தொடர்புடைய மாறி x–ன் மதிப்பு Q_1 ஆகும். இவ்வாறே $\dfrac{3(N+1)}{4}$ அல்லது அதற்கு அடுத்த அதிகமான அலைவெண் மதிப்பிற்கு தொடர்புடைய மதிப்பு Q_3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.3

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு Q_1, D_2 மற்றும் P_{90}–ஆகியவற்றை காண்க.

மதிப்பெண்	10	20	30	40	50	60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	7	15	8	7	2

தீர்வு:

மதிப்பெண் X	அலைவெண் f	குவிவு அலைவெண் cf
10	4	4
20	7	11
30	15	26
40	8	34
50	7	41
60	2	N= 43

அட்டவணை : 8.1

$Q_1 = \left(\dfrac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \dfrac{43+1}{4}$ –ன் அளவு

$= 11$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 20$

$D_2 = \left(\dfrac{2(N+1)}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \dfrac{88}{10}$ –ன் அளவு

$= 8.8$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 20$

$P_{90} = \left(\dfrac{90(N+1)}{100}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \dfrac{3960}{100}$ –ன் அளவு

$= 39.6$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 50$

(iii) தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள் (தொடர்ச்சியான அளவுகள்) (Grouped data (Continuous case)):

தொடர் அலைவெண் பரவலில் இடைவெளிகளை ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுத வேண்டும் மற்றும் தொடர் அலைவெண் பரவலில் $\dfrac{N}{4}$ அல்லது அதிகமான குவிவு அலைவெண்ணுக்கு தொடர்புடைய இடைவெளி Q_1 இடைவெளி எனப்படும்.

Q_1 காணச் சூத்திரம்:

$$Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - pcf}{f}\right) \times c$$

இங்கு L என்பது Q_1 இடைவெளியின் கீழ்எல்லை,

f என்பது Q_1 இடைவெளியின் அலைவெண்,

c என்பது Q_1 இடைவெளியின் நீளம்,

pcf என்பது Q_1 இடைவெளிக்கு முந்தைய இடைவெளியின் குவிவு அலைவெண்.

இவ்வாறே, மேற்கண்ட முறையினைப் பயன்படுத்தி Q_3 –யை காணலாம்.

Q_3 காணச் சூத்திரம்:

$$Q_3 = L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - pcf}{f} \right) \times c$$

L என்பது மூன்றாம் கால்மான இடைவெளியின் கீழ்எல்லை,

f என்பது மூன்றாம் கால்மான இடைவெளியின் அலைவெண்,

c என்பது மூன்றாம் கால்மான இடைவெளியின் நீளம்,

pcf என்பது மூன்றாம் கால்மான இடைவெளிக்கு முந்தைய இடைவெளியின் குவிவு அலைவெண்

இதேப் போன்று பத்துமானங்கள் மற்றும் நூற்றுமானங்களின் நிலைப்புள்ளிகள் கணக்கிடுவதற்கான வாய்பாடுகள்,

$$D_4 = L + \left(\frac{\frac{4N}{10} - pcf}{f} \right) \times c$$

$$P_{60} = L + \left(\frac{\frac{60N}{100} - pcf}{f} \right) \times c$$

எடுத்துக்காட்டு 8.4

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு மேல்கால்மானங்கள், கீழ்கால்மானங்கள், D_4 மற்றும் P_{60}, P_{75} ஆகியவற்றைக் காண்க.

இடைவெளி	அலைவெண்
10 – 20	12
20 – 30	19
30 – 40	5
40 – 50	10
50 – 60	9
60 – 70	6
70 – 80	6

தீர்வு:

இடைவெளி CI	அலைவெண் f	குவிவு அலைவெண் cf
10 – 20	12	12
20 – 30	19	31
30 – 40	5	36
40 – 50	10	46
50 – 60	9	55
60 – 70	6	61
70 – 80	6	N= 67
	N = 67	

அட்டவணை : 8.2

$Q_1 = \left(\frac{N}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= \frac{67}{4}$ $= 16.75$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு. எனவே Q_1 ஆனது $(20 - 30)$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ளது மற்றும் அதன் தொடர்புடைய மதிப்புகள்

$L = 20$; $\frac{N}{4} = 16.75$; $pcf = 12$; $f = 19$; $c = 10$ ஆகும்.

$$Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \right) \times c$$

$$Q_1 = 20 + \left(\frac{16.75 - 12}{19} \right) \times 10 = 20 + 2.5 = 22.5$$

$Q_3 = \left(\frac{3N}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 50.25$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு. எனவே Q_3 ஆனது $(50–60)$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்து உள்ளது மற்றும் அதன் தொடர்புடைய மதிப்புகள்

$L = 50$, $\left(\frac{3N}{4}\right) = 50.25$; $pcf = 46$, $f = 9$, $c = 10$

$$Q_3 = L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - pcf}{f} \right) \times c$$

$$Q_3 = 50 + \left(\frac{50.25 - 46}{9} \right) \times 10 = 54.72$$

$D_4 = \left(\frac{4N}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 26.8 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு. D_4 ஆனது (20–30) என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ளது மற்றும் அதன் தொடர்புடைய மதிப்புகள்

$L = 20,\ \frac{4N}{10} = 26.8;\ pcf = 12, f = 19,\ c = 10.$

$$D_4 = L + \left(\frac{\frac{4N}{10} - pcf}{f}\right) \times c$$

$$D_4 = 20 + \left(\frac{26.8 - 12}{19}\right) \times 10$$

$$= 27.79$$

$P_{75} = \left(\frac{75N}{100}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 50.25 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு. P_{75} ஆனது (50–60) என்ற இடைவெளியில் அமைந்து உள்ளது மற்றும் அதன் தொடர்புடைய மதிப்புகள்

$L = 50;\ \frac{75N}{100} = 50.25;\ pcf = 46, f = 9, c = 10.$

$$P_{75} = L + \left(\frac{\frac{75N}{100} - pcf}{f}\right) \times c$$

$$= 50 + \left(\frac{50.25 - 46}{9}\right) \times 10$$

$$= 54.72$$

8.1.4 பெருக்குச் சராசரி (Geometric mean)

n – விவரங்கள் அல்லது மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் n – வது வர்க்க மூலம் பெருக்குச் சராசரி ஆகும்.

இரு விவரங்கள் இருப்பின் வர்க்க மூலம் எடுக்க, மூன்று விவரங்கள் இருப்பின் முப்படி மூலம் எடுக்க மற்றும் இவ்வாறே தொடருக.

$$GM = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . X_3 .....X_n} = (X_1, X_2, X3, ...X_n)^{1/n}$$

இங்கு $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ என்பன தொடரின் பல்வேறு மிகை மதிப்பு உறுப்புகளை குறிக்கிறது மற்றும் n என்பது மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

இவ்வாறாக 2, 3, 4 ஆகியவற்றின் பெருக்குச்சராசரி

$$GM = \sqrt[3]{(2)(3)(4)} = 2.885$$

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட எண்களுக்கான பெருக்குச்சராசரி கணக்கிடும் பொழுது.அவைகளின் பெருக்குத்தொகைக்கான n – வது வர்க்கமூலம் காண்பது என்பது மிகக் கடினமானது. எனவே மடக்கையைப் பயன்படுத்திப் பெருக்குச் சராசரியை எளிதாக காணலாம்

பெருக்குச் சராசரி, கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$\log GM = \frac{\log X_1 + \log X_2 + ... + \log X_n}{n}$$

(அல்லது) $\log GM = \left(\frac{\Sigma \log X}{n}\right)$

$GM = Anti\log\left(\frac{\Sigma \log X}{n}\right)$, n என்பது மொத்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை

(i) தொடர்ச்சியற்ற மாறியின் பெருக்குச் சராசரி

$GM = Anti\log\left(\frac{\Sigma f \log X}{N}\right)$; இங்கு $N = \Sigma f$

(ii) தொடர்ச்சியான மாறியின் பெருக்குச் சராசரி

$GM = Anti\log\left[\frac{\Sigma f \log m}{N}\right]$; இங்கு m என்பது மையப்புள்ளி, $N = \Sigma f$

எடுத்துக்காட்டு 8.5

ஓரிடத்தில் வசிக்கும் 10 குடும்பங்களின் ஒரு நாள் வருமானம் (ரூபாயில்) கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

85, 70, 15, 75, 500, 8, 45, 250, 40, 36

தீர்வு:

X	$\log X$
85	1.9294
70	1.8451
15	1.1761
75	1.8751
500	2.6990
8	0.9031
45	1.6532
250	2.3979
40	1.6021
36	1.5563
	$\Sigma\log X = 17.6373$

அட்டவணை : 8.3

$$GM = Anti\log\left(\frac{\Sigma\log X}{n}\right); \text{ இங்கு } n = 10$$

$$GM = Anti\log\left(\frac{17.6373}{10}\right)$$

$$= Anti\log(1.7637)$$

$$GM = 58.03$$

எடுத்துக்காட்டு 8.6

காஞ்சிபுரம் மாவட்டத்தின். ஒரு கிராமத்தில் உள்ள பல்வேறுப் பிரிவு மக்களின், தனிநபர் வருமான விவரங்களும், குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும் கீழேத் தரப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரங்களின் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

மக்களின் (தொழில்சார்ந்த) பிரிவு	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	1990–ல் தனிநபர் வருமானம் ரூபாயில்
நிலக்கிழார்	1	1000
விவசாயிகள்	50	80
கூலித்தொழிலாளர்கள்	25	40
கடன் வழங்குபவர்கள்	2	750
பள்ளி ஆசிரியர்கள்	3	100
கடைக்காரர்கள்	4	150
தச்சு தொழிலாளிகள்	3	120
நெசவாளர்கள்	5	60

தீர்வு:

பெருக்குச் சராசரியின் கணக்கீடு

மக்களின் (தொழில்சார்ந்த) பிரிவு	1990–ல் தனிநபர் வருமானம் X	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை f	$\log X$	$f\log X$
நிலக்கிழார்கள்	1000	1	3.0000	3.0000
விவாசாயிகள்	80	50	1.9031	95.1550
கூலித்–தொழிலாளிகள்	40	25	1.6021	40.0525
கடன் வழங்குபவர்கள்	750	2	2.8751	5.7502
பள்ளி ஆசிரியர்கள்	100	3	2.0000	6.0000
கடைக்காரர்கள்	150	4	2.1761	8.7044
தச்சு தொழிலாளிகள்	120	3	2.0792	6.2376
நெசவாளர்கள்	60	5	1.7782	8.8910
		N = 93		Σ=173.7907

அட்டவணை: 8.4

$$GM = Anti\log\left(\frac{\Sigma f\log X}{N}\right)$$

$$= Anti\log\left(\frac{173.7907}{93}\right)$$

$$= Anti\log(1.8687)$$

$$GM = 73.91$$

எடுத்துக்காட்டு 8.7

கீழேக் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	8
10-20	12
20-30	18
30-40	8
40-50	6

தீர்வு :

பெருக்குச் சராசரியின் கணக்கீடு

மதிப்பெண்கள்	m	f	$\log m$	$f\log m$
0-10	5	8	0.6990	5.5920
10-20	15	12	1.1761	14.1132
20-30	25	18	1.3979	25.1622
30-40	35	8	1.5441	12.3528
40-50	45	6	1.6532	9.9192
		N = 52		$\Sigma f \log m = 67.1394$

அட்டவணை : 8.5

$$GM = Anti\log\left(\frac{\Sigma f \log m}{N}\right)$$

$$= Anti\log\left(\frac{67.1394}{52}\right)$$

$$= Anti\log(1.2911)$$

$$GM = 19.54$$

பெருக்குச் சராசரியின் குறிப்பிடத்தக்கப் பயன்பாடுகள்:

மாறுவீதங்களைச் சராசரிபடுத்துவதென்பது, பெருக்குச் சராசரியின் மிக முக்கியமானப் பயன்பாடாகும். உதாரணமாக, 2006–ம் ஆண்டிலிருந்து 2008–ம் ஆண்டு வரை விலைகள் 5%, 10% மற்றும் 18% என முறையே உயர்கின்றது. கூட்டுச் சராசரி அளவீடுபடி $\left(\frac{5+10+18}{3}=11\right)$ வருடாந்திர சராசரி உயர்வு 11% அல்ல. ஆனால் பெருக்குச் சராசரியின்படி வருடாந்திர சராசரி உயர்வு 10.9% மட்டுமே. மேலும் இச்சராசரி மக்கள் பெருக்கத்தை அளவிடப் பயன்படுகிறது. ஏனெனில் மக்கள் தொகைப் பெருக்கம் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 8.8

1995–ஆம் ஆண்டுக்கான மேல்நிலைச் செலவுகள், முந்தைய ஆண்டை விட 32% அதிகரிக்கிறது. அடுத்த ஆண்டு இச்செலவுகள் 40% அதிகரிக்கிறது. மேலும் அதற்கு அடுத்துவரும் ஆண்டில் 50% ஆக அதிகரிக்கிறது எனில், அந்த மூன்றாண்டுகளின் மேல்நிலைச் செலவின் சராசரி சதவீத உயர்வு வீதத்தைக் கணக்கீடுக.

தீர்வு :

சராசரி சதவீத விகிதங்க ளைக் கணக்கீடு செய்வதற்கு பெருக்கல் சராசரி உகந்தது. இங்கு X என்பது ஓர் ஆண்டின் மேல்நிலைச் செலவை குறிக்கட்டும்.

% அதிகரிப்பு	X	$\log X$
32	132	2.1206
40	140	2.1461
50	150	2.1761
		$\Sigma \log X = 6.4428$

அட்டவணை: 8.6

$$GM = Anti\log\left(\frac{\Sigma \log X}{n}\right)$$

$$= Anti\log\left(\frac{6.4428}{3}\right)$$

$$= Anti\log(2.1476)$$

$$GM = 140.5$$

மேல்நிலைச் செலவின் சராசரி சதவீத உயர்வு வீதம்

$$140.5 - 100 = 40.5\ \%$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் ஒரு மதிப்பு பூஜ்ஜியம் எனில் பெருக்குச் சராசரியை கணக்கிட இயலாது.

8.1.5 இசைச்சராசரி (Harmonic mean)

தனித்த விவரங்களின் தலைகீழ்களின் தலைகீழ் கூட்டுச் சராசரி, இசைச்சராசரி எனப்படும். இது HM என குறிக்கப்படுகிறது

$$H\,M = \frac{n}{\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+.....+\frac{1}{X_n}\right)}$$

எண் விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்பொழுது, இசைச்சராசரியின் கணக்கீடு கடினமாக இருக்கும். கணக்கீட்டை எளிமையாக்க மதிப்புகளின் தலைகீழிகளை, அதற்கான அட்டவணையிலிருந்துப் பெறலாம். இதற்குக் கீழ்காணும் சூத்திரங்களைப் பயன் படுத்தலாம்.

(i) தனித்த விவரங்களின் இசைச்சராசரி

$$HM = \frac{n}{\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+.....+\frac{1}{X_n}\right)} \text{ (அல்லது)}$$

$$HM = \frac{n}{\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)}$$

இங்கு n என்பது விவரங்கள் அல்லது உறுப்புகள் அல்லது மதிப்புகள்

(ii) தொடர்சியற்ற அலைவெண் பரவலுக்கு,

$$HM = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{f}{X}\right)} \text{ இங்கு}$$

N = அலைவெண்களின் கூடுதல் $= \sum f$

(iii) தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவல்

$$HM = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{f}{m}\right)}$$

இங்கு m என்பது மையப்புள்ளி மற்றும் N என்பது மொத்த அலைவெண்

எடுத்துக்காட்டு 8.9

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு, இசைச் சராசரியைக் காண்க.

1, 0.5, 10, 45.0, 175.0, 0.01, 4.0, 11.2

தீர்வு:

X	$\frac{1}{X}$
1	1.0000
0.5	2.0000
10	0.1000
45	0.0222
175	0.0057
0.01	100.0000
4.0	0.2500
11.2	0.0893
	$\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)=103.4672$

அட்டவணை: 8.7

$n = 8$

$$HM = \frac{n}{\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)} = \frac{8}{103.467} = 0.077$$

எடுத்துக்காட்டு 8.10

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு இசைச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	10	20	25	40	50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	20	30	50	15	5

தீர்வு:

மதிப்பெண்கள் X	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f	$\frac{f}{X}$
10	20	2.000
20	30	1.500
25	50	2.000
40	15	0.375
50	5	0.100
	$N = 120$	$\Sigma\left(\frac{f}{X}\right) = 5.975$

அட்டவணை: 8.8

$$HM = \frac{N}{\sum\left(\frac{f}{X}\right)} = \frac{120}{5.975} = 20.08$$

எடுத்துக்காட்டு 8.11

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு இசைச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பு	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
அலைவெண்	8	12	20	6	4

தீர்வு:

இசைச்சராசரியின் கணக்கீடு

மதிப்பு	இடைநிலை m	f	$\left(\frac{f}{m}\right)$
0-10	5	8	1.60
10-20	15	12	0.80
20-30	25	20	0.80
30-40	35	6	0.17
40-50	45	4	0.09
		N = 50	$\sum\left(\frac{f}{m}\right)$ **=3.46**

அட்டவணை: 8.9

$$HM = \frac{N}{\sum\left(\frac{f}{m}\right)} = \frac{50}{3.46} = 14.45$$

இசைச்சராசரியின் சிறப்புப் பயன்பாடுகள்

இசைச்சராசரி அதன் பயன்பாட்டுக் களத்தின் வரையறைக்குட்பட்டது. ஒரு நிறுவனத்தின், சராசரி இலாப வளர்ச்சி வீதத்தினை அல்லது மேற்கொள்கிற பயணத்தின் சராசரி வேகம் அல்லது விற்கக்கூடிய ஒரு பொருளின் சராசரி விலை ஆகியவற்றை கணக்கிடுவதற்கு இசைச்சராசரி பயன்படுகிறது. இவ்வீதம் பொதுவாகத் தலைகீழாக விவரிக்கப்படுகிற இரு வேறு வகையிலான அளவிடும் அலகுகளுக்குகிடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிக்கிறது.

உதாரணமாக, ஒரு நபர் 5 மணி நேரத்தில் 20 கி.மீ. நடைப்பயணம் மேற்கொள்கிறார் எனில், அவருடைய நடை வேகவீதம்

$$\frac{20 \text{ கி.மீ.}}{5 \text{ மணி}} = 4 \text{ கி.மீ.} / \text{மணி}$$

இங்கு முதல் உறுப்பின் அலகு கி.மீ மற்றும் இரண்டாவது உறுப்பின் அலகு மணி அல்லது தலைகீழாக,

$$\frac{5 \text{ மணி}}{20 \text{ கி.மீ.}} = \frac{1}{4} \text{ கி.மீ.} / \text{மணி}$$

இங்கு முதல் உறுப்பின் அலகு மணி மற்றும் இரண்டாம் உறுப்பின் அலகு கி.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

ஒரு மோட்டர் ஓட்டுநர் சமதளப் பரப்பிலிருந்து, மலைப் பிரதேசத்திற்கு 100கி.மீ தூரத்தை சராசரியாக மணிக்கு 30கி.மீ வேகத்தில் பயணிக்கிறார். மீண்டும் அதேப் பாதையில் சராசரியாக மணிக்கு 20கி.மீ வேகத்தில் திரும்புகிறார். எனில், மொத்த தூரம் 200 கிமீ–யையும் பயணித்த அவரது பயணத்தின் சராசரி வேகம் எவ்வளவு?

தீர்வு:

பொதுவாக, இதைக் கணக்கிட ஒருவர் கூட்டுச் சராசரியைப் பயன்படுத்துவார்.

i.e., $\overline{X} = \frac{30+20}{2} = 25$ கி.மீ. / மணி

இது சரியான சராசரி அல்ல. இங்கு இசைச்சராசரியைக் காண்பதே சாலச்சிறந்தது. 30 மற்றும் 20 –ன் இசைச்சராசரி

$$HM = \frac{2}{\left(\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{30}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{5}{60}\right)} = \frac{2(60)}{5}$$

= 24 கி.மீ. / மணி

குறிப்பு

கி.மீ/மணி, கி.மீ/லிட்டர், பாடவேளை/ பருவத்தேர்வு, டன்/மாதம் போன்ற விகிதங்களின் கணக்கிற்கு மைய நோக்கு அளவையான இசைச் சராசரியைப் பயன் படுத்துவதுப் பொருத்தமானது.

8.1.6 சராசரிகளுக்கு இடையேயானத் தொடர்பு (Relationship among the averages)

அனைத்து விதமானப் பரவல்களிலும், மூலஉறுப்புகள், அளவில் வேறுபடும்பொழுது, கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி மற்றும் இசைச்சராசரி ஆகியவற்றின் மதிப்புகளும், பின்வரும் அளவில் மாறுபடும்.

$$AM \geq GM \geq HM$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ அனைத்து எண்களும் சமம் எனில் AM = GM = HM

எடுத்துக்காட்டு 8.13

பின்வரும் விவரங்களுக்கு A.M, G.M மற்றும் H.M. இடையேயுள்ள தொடர்பை சரிபார்க்க.

X	7	10	13	16	19	22	25	28
f	10	22	24	28	19	9	12	16

தீர்வு:

அட்டவணை 8.10–லிருந்து

$$AM = \frac{\sum fX}{N} = \frac{2357}{140} = 16.84$$

$$GM = Anti\log\left(\frac{\sum f\log X}{N}\right)$$

$$= Anti\log\left(\frac{167.209}{140}\right)$$

$$= Anti\log(1.1944) = 15.65$$

$$HM = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{f}{X}\right)} = \frac{140}{9.6852} = 14.46$$

அதாவது, $16.84 > 15.65 > 14.46$

$$\therefore \; AM > GM > HM$$

X	f	Xf	$logX$	$f\,logX$	f/X
7	10	70	0.8451	8.4510	1.4286
10	22	220	1	22.0000	2.2000
13	24	312	1.1139	26.7346	1.8462
16	28	448	1.2041	33.7154	1.7500
19	19	361	1.2788	24.2963	1.0000
22	9	198	1.3424	12.0818	0.4091
25	12	300	1.3979	16.7753	0.4800
28	16	448	1.4472	23.1545	0.5714
	$\sum f = N = 140$	$\sum fX = 2357$		$\sum f\log x = 167.209$	$\sum \frac{f}{x} = 9.6852$

அட்டவணை : 8.10

எடுத்துக்காட்டு 8.14

A என்பவரின் இருசக்கர வாகனம் சராசரியாக ஒரு லிட்டருக்கு 40 கிமீ தூரம் இயங்குகிறது. B என்பவரின் இருசக்கர வாகனம் சராசரியாக ஒரு லிட்டருக்கு 30 கிமீ தூரம் இயங்குகிறது.

(i) ஒவ்வொருவரும் 120 கிமீ பயணிக்கிறார்கள் எனில், சராசரியைக் காண்க.

(ii) ஒவ்வொருவரும் தலா 2 லிட்டர் திரவ எரிபொருள் (பெட்ரோல்) பயன்படுத்துகிறார்கள் எனில், சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) இங்கு இருவரும் கடக்கும் தூரம் மாறாதது. எனவே இங்கு இசைச்சராசரியைக் கொண்டு சராசரியைக் காண்பது பொருத்தமானது.

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{30}} = \frac{2}{\frac{7}{120}}$$

$$= \frac{2\times120}{7} = 34.3 \text{ கிமீ/லிட்டர்}$$

(ii) இங்கு திரவ எரிபொருளின் பயன்பாடு நிலையானது. எனவே இங்கு கூட்டுச் சராசரியை கணக்கிடுவது மிகச் சரியான தீர்வு ஆகும்.

$$\overline{X} = \frac{\text{பயணித்த மொத்த தூரம்}}{\text{திரவ எரிபொருளின் மொத்த பயன்பாடு}}$$

$$\overline{X} = \frac{40\times2+30\times2}{4} = 35$$

∴ எனவே, சராசரி வேகம் = 35 கிமீ/லிட்டர்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

ரூபாய் ஒன்றுக்கு ஒருவர் நான்கு வெவ்வேறு இடங்களில் 1கி.கி, 2 கி.கி, 3கி.கி மற்றும் 4 கி.கி அளவில் தக்காளியை வாங்குகிறார் எனில், சராசரியாக, ஒரு ரூபாய்க்கு எத்தனை கிலோ கிராம் தக்காளி அவரால் வாங்கப்பட்டது?

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஒரு ரூபாய்க்கு என்பதால், இங்கு இசைச்சராசரியை பயன்படுத்துவதே சிறந்தது.

$$\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{4\times12}{25}$$

$= 1.92$ கிலோ கிராம் / ரூபாய்

8.2 சிதறல் அளவைகள் (Measures of dispersion)

ஒரு பரவலின் மையப் பகுதியில் உள்ள விவரங்களின் அடர்வு பற்றியக் கருத்தை சராசரி உருவாக்குகிறது. ஆனால் சராசரியை மட்டும் கொண்டு, ஒரு பரவலை பற்றிய முழுமையான கருத்தைத் தெரிவிக்க இயலாது, என்பதை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டிலிருந்து சுலபமாகப் புரிந்துக் கொள்ளலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட எண் விவரங்களை கருதுக. (i) 7,8,9,10,11 (ii) 3,6,9,12,15 மற்றும் (iii) 1,5,9,13,17.

மேற்கண்ட வகைகள் அனைத்திலும், 5 விவரங்களின் சராசரி 9 என காண்கிறோம். 5 விவரங்களுக்கு சராசரி 9 எனக் கொடுக்கப்பட்டால், முதல் தொடரின் சராசரியா அல்லது இரண்டாவதுத் தொடரின் சராசரியா அல்லது மூன்றாவதுத் தொடரின் சராசரியா அல்லது 5 விவரங்களின் கூடுதல் 45 உடைய வேறு ஏதாவது ஒரு தொடரின் சராசரியா என்ற முடிவுக்கும் நம்மால் வர இயலாது.

எனவே மையப்போக்கு அளவைகள், ஒரு பரவலின் முழுமையான விவரத்தைத் தரப் போதுமானவை அல்ல. எனவே, அவை வேறு சில அளவைகளால் மேம்படுத்தப்பட வேண்டும். அத்தகைய அளவைகளில் ஒன்று சிதறல் ஆகும். எனவே சிதறல் அளவைகளின் பயன்பாடு தேவைபடுகிறது. இது அளவைகளின் பரவலின் தன்மையை வழங்குகிறது.

சிதறல் அளவைகளை பேச்சு வழக்கில் சிதறல்கள் என்கிறோம், சிதறல் அளவைகள் என்பது ஒரு பரவலின், ஒருமைத் தன்மை அல்லது பன்முகத்தன்மைப் பற்றியதாகும். மேற்கூறிய மூன்று தொடரிகளில் முதல் தொடர் இரண்டு அல்லது மூன்றாவது தொடரைக் காட்டிலும் அதிக ஒருமைத்தன்மை (குறைவான சிதறல்கள்) உடையது அல்லது மூன்றாவது தொடர் முதல் அல்லது இரண்டாவது தொடரை விட அதிகப் பன்முகத் தன்மை உடைய (அதிக சிதறல்கள்) விவரங்களைக் கொண்டிருக்கிறது எனக் கூறலாம்.

பல்வேறு சிதறல் அளவைகள், இரண்டு விரிவான வகைகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது

a) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைப் பொறுத்துப் பரவும் விவரங்களை விவரிக்கும் அளவைகள் தூர அளவைகள் எனப்படும்.

   எடுத்துக்காட்டு:– வீச்சு, இடைக்கால்மான வீச்சு (அல்லது) கால்மான விலக்கம்

b) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின், மைய அளவைகளிலிருந்து,விலக்கச்சராசரிகளை விவரிக்கும் அளவைகள்.

   எடுத்துக்காட்டு:– (அ) சராசரி விலக்கம் (ஆ) திட்ட விலக்கம்

8.2.1 கால்மான விலக்கம்

கால்மான விலக்கம் என்பது $QD = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதனை அரை இடைக்கால்மானம் எனவும் அழைக்கலாம். இங்கு Q_1 மற்றும் Q_3 என்பது முறையே முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மானம் ஆகும். $Q_3 - Q_1$ என்பது கால் மானங்களின் வீச்சு ஆகும்.

(i) QDன் தொடர்பான ஒப்பீட்டு அளவைகள்

கால்மான விலக்கம் என்பது ஒரு முழுமையான சிதறல் அளவைகள் ஆகும். QD தொடர்பான சார்பளவைகள் கால்மானக் கெழு எனப்படும். இதனைக் கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.

$$\text{கால்மான விலக்கக்கெழு} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

பல்வேறுப் பரவல்களின் மாறுபாட்டு அளவை ஒப்பிடுவதற்குக் கால்மானக் கெழு பயன்படுகிறது.

(ii) கால்மான விலக்கத்தின் கணக்கீடு

கால்மான விலக்கக் கெழுவின் கணக்கீட்டுமுறை மிகவும் எளிதானது. ஏனெனில் கீழ்கால்மானம் Q_3 மற்றும் மேல்கால்மானம் Q_1 ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டால் போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டு 8.16

கீழ்காணும் விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கத்தையும் அதன் கெழுவையும் காண்க.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7
மதிப்பெண்கள்	20	28	40	12	30	15	50

தீர்வு:

மதிப்பெண்களை ஏறுவரிசையில் எழுதவும்

12 15 20 28 30 40 50

n = எண் விவரங்களின் எண்ணிக்கை = 7

$Q_1 = \left(\frac{(n+1)}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = $\left(\frac{7+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 2 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 15

அதாவது $Q_1 = 15$

$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = $\left(\frac{3 \times 8}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 6 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 40

அதாவது $Q_3 = 40$

$$QD = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{40-15}{2} = 12.5$$

கால்மான விலக்கக் கெழு

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{40-15}{40+15} = \frac{25}{55} = 0.455$$

கால்மான விலக்கக் கெழு QD = 0.455

எடுத்துக்காட்டு 8.17

பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கால்மான விலக்கக் கெழுவைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	10	20	30	40	50	60
எண்ணிக்கை	4	7	15	8	7	2

தீர்வு:

மதிப்பெண்கள்	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்
X	f	cf
10	4	4
20	7	11
30	15	26
40	8	34
50	7	41
60	2	43
		$N=\sum f=43$

அட்டவணை : 8.11

$Q_1 = \left(\dfrac{N+1}{4}\right)$ -வது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \dfrac{(43+1)}{4}$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 11$–வது உறுப்பின் மதிப்பு $= 20$

$Q_3 = \left(\dfrac{3(N+1)}{4}\right)$ -வது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 33$-வது உறுப்பின் மதிப்பு $= 40$

$$QD = \frac{1}{2}\,(Q_3 - Q_1) = \frac{40-20}{2} = 10$$

கால்மானக் கெழு $QD = \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{40-20}{40+20}$$

$$= \frac{20}{60} = 0.333$$

எடுத்துக்காட்டு 8.18

பின்வரும் விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கத்தைக் காண்க

CI	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
f	12	19	5	10	9	6	6

தீர்வு:

கால்மான விலக்கம் கணக்கீடு

CI	f	cf
10 – 20	12	12
20 – 30	19	31
30 – 40	5	36
40 – 50	10	46
50 – 60	9	55
60 – 70	6	61
70 – 80	6	67
	N = 67	

அட்டவணை : 8.12

$Q_1 = \left(\dfrac{N}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\dfrac{67}{4}\right) = 16.75$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

எனவே Q_1 ஆனது (20–30) என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ளது.

$L = 20,\ \dfrac{N}{4} = 16.75,\ pcf = 12,\ f = 19,\ c = 10$

$$Q_1 = \mathrm{L} + \left(\frac{\frac{N}{4} - pcf}{f}\right) \times c$$

$$Q_1 = 20 + \left(\frac{16.75 - 12}{19}\right) \times 10 = 20 + 2.5 = 22.5$$

$Q_3 = \left(\dfrac{3N}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 50.25$

ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

எனவே Q_3 ஆனது (50–60) என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ளது.

$L = 50, \frac{3N}{4} = 50.25, pcf = 46, f = 9, c = 10$

$$Q_3 = L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - pcf}{f} \right) \times c$$

$$Q_3 = 50 + \left[\frac{50.25 - 46}{9} \right] \times 10 = 54.72$$

$$QD = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1)$$

$$= \frac{54.72 - 22.5}{2} = 16.11$$

$\therefore$ QD = 16.11

8.2.2 சராசரி விலக்கம்

ஒரு பரவலில் உள்ள உறுப்புகள் மற்றும் அவற்றின் சராசரி (அல்லது) இடைநிலை ஆகியவற்றின் இடையேயான முழுமையான வேறுபாட்டின் சராசரியே சராசரி விலக்கம் எனப்படுகிறது.

(i) சராசரி விலக்கக் கணக்கீடு (தனித்த விவரங்கள்) (Individual observations)

$X_1, X_2, X_3, ... X_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட n தனித்த விவரங்கள் எனில், இவற்றின் சராசரியைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம் அல்லது இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம் ஆகியவைக் கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

சராசரியை பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம் MD

$$= \frac{\sum |X - \bar{X}|}{n} = \frac{\sum |D|}{n}$$

இங்கு $|D| = |X - \bar{X}|$ மற்றும் n என்பது விவரங்களின் எண்ணிக்கை.

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma |X - \text{இடைநிலை}|}{n} = \frac{\Sigma |D|}{n}$$

இங்கு $|D| = |X - \text{இடைநிலை}|$ மற்றும் N என்பது விவங்களின் எண்ணிக்கை.

குறிப்பு

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் காணப்படும் நிலையில், |D| என்பது குறிகள் நீங்கலாக இடைநிலையிலிருந்து பெறப்படும் உறுப்புகளின் விலக்கம் ஆகும்.

(ii) சராசரி விலக்கம் கணக்கிடும் முறை (தொடர்ச்சியற்ற விவரங்கள்)

சராசரியைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\sum f |X - \bar{X}|}{N} = \frac{\sum f |D|}{N}$$

இங்கு $|D| = |X - \bar{X}|$ மற்றும் N அலைவெண்களின் கூடுதல்.

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$MD = \frac{\sum f |X - \text{இடைநிலை}|}{N} = \frac{\sum f |D|}{n}$$

இங்கு $|D| = |X - \text{இடைநிலை}|$ (குறை மதிப்பு நீங்கலாக) மற்றும் N என்பது விவரங்களின் எண்ணிக்க.

(iii) சராசரி விலக்கம் கணக்கிடும் முறை – தொடர்ச்சியான விவரங்கள்

தொடர்ச்சியான விவரங்களுக்கான சராசரி விலக்கம் கணக்கிடும் முறையில், பல்வேறு இடைவெளிகளின் மையப்புள்ளிகளைக் கண்டு, இவற்றின் விலக்கத்தைச் சராசரி அல்லது இடைநிலையை பொறுத்து காண வேண்டும்.

சராசரியை பொறுத்த சராசரி விலக்கம்

சராசரியைப் பொறுத்த MD

$$= \frac{\sum f |M - \bar{X}|}{N} \text{ அல்லது } = \frac{\sum f |D|}{N}$$

இங்கு M என்பது மைய மதிப்பு,

$|D| = |M - \bar{X}|$ (குறை மதிப்பு நீங்கலாக) மற்றும் N என்பது அலைவெண்களின் கூடுதல்.

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\sum f\,|M-\text{இடைநிலை}|}{N} \text{ அல்லது}$$

$$= \frac{\sum f|D|}{N}$$

இங்கு M என்பது மைய மதிப்பு, $|D| = |M-\text{இடைநிலை}|$ (குறை மதிப்பு நீங்கலாக) மற்றும் N என்பது அலைவெண்களின் கூடுதல்.

(iv) சராசரி விலக்கத்திற்கு தொடர்புடைய அளவை (Relative Measure for Mean Deviation)

சராசரி விலக்கத்திற்கு தொடர்புடைய அளவையே சராசரி விலக்கக் கெழு எனப்படும். மேலும் அது கீழ்கண்டவாறு பெறப்படுகிறது.

சராசரியைப் பொறுத்துச் சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரியைப் பொறுத்துச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{சராசரி}}$$

இடைநிலையைப் பொறுத்துச் சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{இடைநிலையைப் பொறுத்துச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{சராசரி}}$$

குறிப்பு

நடைமுறையில் சராசரி விலக்கம் காண அதிக அளவில் கூட்டுச் சராசரி பயன்படுத்தப்படுகிறது. குறிப்பாக இடைநிலையைப் பொறுத்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிட வேண்டுமெனில் இடைநிலைப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.19

ஐந்து குழுக்களின் வருமானம் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் சராசரியைப் பொறுத்து சராசரி விலக்கம் மற்றும் அதன் விலக்கக் கெழு காண்க.

வருமானம் (₹)	4000	4200	4400	4600	4800

தீர்வு:

$$\text{சராசரி} = \frac{\sum X}{n} = \frac{22000}{5} = 4400$$

வருமானம் (₹)	$\lvert D\rvert = \lvert(X-4400)\rvert$
4000	400
4200	200
4400	0
4600	200
4800	400
$\sum X = 22000$	$\sum\lvert D\rvert = 1200$

அட்டவணை : 8.13

சராசரியைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$MD = \frac{\Sigma|D|}{n};$$

$$\text{MD} = \frac{1200}{5} = 240$$

சராசரி விலக்கக் கெழு $MD = \frac{240}{4400} = 0.055$

எடுத்துக்காட்டு 8.20

கொடுக்கப்பட்ட ஏழு எண் விவரங்களுக்கு இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கத்தையும் அதன் தொடர்புடைய அளவையையும் காண்க. 55, 45, 40, 20, 60, 80, 30.

தீர்வு:

எண் விவரங்களை ஏறுவரிசையில் எழுதுக. 20, 30, 40, 45, 55, 60, 80

இடைநிலை $= \left(\frac{(n+1)}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு (n ஒரு ஒற்றை எண்)

இடைநிலை $= \left(\frac{(7+1)}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$=4$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 45$

X	$\lvert X$ – இடைநிலை$\rvert$ = $\lvert X - 45\rvert$
20	25
30	15
40	5
45	0
55	10
60	15
80	35
	Σ |X – Median| = 105

அட்டவணை : 8.14

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$MD = \frac{\Sigma\lvert X-\text{இடைநிலை}\rvert}{n} = \frac{105}{7} = 15.0$$

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்க கெழு

$$= \frac{14.29}{45} = 0.32$$

எடுத்துக்காட்டு 8.21

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு சராசரியைப் பொறுத்த சராசரி விலக்கம் காண்க.

அளவு	2	4	6	8	10	12	14	16
அலைவெண்	2	2	4	5	3	2	1	1

தீர்வு:

சராசரியைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கத்திற்கான கணக்கீடு

X	f	fX	$\lvert D\rvert = X-8$	f|D|
2	2	4	6	12
4	2	8	4	8
6	4	24	2	8
8	5	40	0	0
10	3	30	2	6
12	2	24	4	8
14	1	14	6	6
16	1	16	8	8
	$N = 20$	$\Sigma fX = 160$		$\Sigma f\lvert D\rvert = 56$

அட்டவணை : 8.15

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{160}{20} = 8$$

சராசரியைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma f\lvert D\rvert}{N} = \frac{56}{20} = 2.8$$

எடுத்துக்காட்டு 8.22

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கத்தையும் அதன் தொடர்பு அளவையையும் காண்க.

X	15	25	35	45	55	65	75	85
அலைவெண்	12	11	10	15	22	13	18	19

தீர்வு:

அளவுகள் X என்பது ஏறுவரிசையில் உள்ளது.

X	f	cf
15	12	12
25	11	23
35	10	33
45	15	48
55	22	70
65	13	83
75	18	101
85	19	120
	N = 120	

அட்டவணை : 8.16

$$\text{இடைநிலை} = \left(\frac{(n+1)}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= \left(\frac{(120+1)}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

= 60.5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 55

குவிவு அலைவெண் உறுப்புக்கு தொடர்புடைய X–ன் மதிப்பு =55

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\sum f\,\lvert X-\text{இடைநிலை}\rvert}{N} = \frac{\sum f\lvert D\rvert}{N}$$

X	f	|D| = |X- 55|	f |D|
15	12	40	480
25	11	30	330
35	10	20	200
45	15	10	150
55	22	0	0
65	13	10	130
75	18	20	360
85	19	30	570
	N = 120		$\Sigma f\,\|D\|=2220$

அட்டவணை : 8.17

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$=\frac{2220}{120}=18.5$$

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கக் கெழு $\dfrac{18.5}{55}=0.34$

எடுத்துக்காட்டு 8.23

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கக் கெழுவைக் காண்க.

வயது (ஆண்டில்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
நபர்களின் எண்ணிக்கை	20	25	32	40	42	35	10	8

விடையை இருதசம இட திருத்தமாக காணவும்.

தீர்வு:

இடைநிலைக்கான கணக்கீடு பின்வருமாறு

X	f	cf
0-10	20	20
10-20	25	45
20-30	32	77
30-40	40	117
40-50	42	159
50-60	35	194
60-70	10	204
70-80	8	N=212

அட்டவணை : 8.18

$\dfrac{N}{2}=\dfrac{212}{2}=106$. குவிவு அலைவெண் 106–க்கான பிரிவு இடைவெளி (30–40) ஆகையால், பிரிவு இடைநிலை அளவுக்கான ஒத்த மதிப்புகள் $L=30, pcf=77, f=40$ மற்றும் $c=10$.

$$\text{இடைநிலை} = L+\left(\frac{\left(\frac{N}{2}\right)-pcf}{f}\right)\times c$$

$$\text{இடைநிலை} = 30+\left(\frac{106-77}{40}\right)\times 10$$

$\therefore$ இடைநிலை $=37.25$ (இருதசம இடதிருத்தமாக)

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கத்திற்கான கணக்கீடு

X	f	M	|D| = |X–37.25|	f|D|
0-10	20	5	32.25	645
10-20	25	15	22.25	556.25
20-30	32	25	12.25	392
30-40	40	35	2.25	90
40-50	42	45	7.75	325.5
50-60	35	55	17.75	621.25
60-70	10	65	27.75	277.5
70-80	8	75	37.75	302
	N=212			$\Sigma f\,\|D\|=3209.5$

அட்டவணை: 8.19

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கம்

$$=\frac{\Sigma f|D|}{N}=\frac{3209.5}{212}=15.14$$

இடைநிலையைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கக் கெழு

$$=\frac{\text{இடைநிலையைப் பொறுத்துச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{சராசரி}}$$

$$=\frac{15.14}{37.25}=0.4064$$

$=0.41$(இருதசம இடதிருத்தமாக).

குறிப்பு

கணக்கை இடைநிலைக்குப் பதிலாக சராசரியைப் பொறுத்தச் சராசரி விலக்கமும் காணலாம்.

பயிற்சி 8.1

1. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு முதல் கால்மானம் மற்றும் மூன்றாம் கால்மானம் ஆகியவற்றைக் காண்க. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு Q_1, Q_3, D_8 மற்றும் P_{67} ஆகியவற்றைக் காண்க:

பங்குகளின் அளவு	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
அலைவெண்	10	18	22	25	40	15	10	8	7

3. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கீழ்கால்மானம், மேல்கால்மானம், 5–வது பத்துமானம், 7 ஆவது பத்துமானம், 60–வது நூறுமானம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தினக்கூலி	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
அலைவெண்	1	3	11	21	43	32	9

4. 31 நபர்களின் எடைகள் கீழ்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரங்களுக்கு பெருக்குச்சராசரியைக் காண்க.

எடை (பவுண்டில்)	130	135	140	145	146	148	149	150	157
அலைவெண்	3	4	6	6	3	5	2	1	1

5. ஒரு பொருளின் விலை 2004–2005 –ல் 5% அதிகரிக்கப்படுகிறது. 2005–2006 – ம் ஆண்டில் 8% –ம் 2006–2007 –ல் 77%–ம் அதிகரிக்கிறது எனில், 2004–2007–ம் ஆண்டு வரை பொருளின் சராசரி விலை ஏற்றத்தைக் கணக்கிடுக.

6. விமானம் ஒரு சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களின் வழியாக முறையே மணிக்கு 100 கி.மீ, 200 கி.மீ, 300 கி.மீ மற்றும் 400 கி.மீ. பறக்கிறது. சதுரப்பக்கங்களின் மீது சுற்றி வரும் விமானத்தின் சராசரி வேகத்தை காண்க.

7. ஒரு நபர் மகிழ்வுந்தில் (Car) 3 நாட்கள் பயணிக்கிறார். நாள் ஒன்றுக்கு 480 கி.மீ தூரம் பயணிக்கிறார். முதல் நாள் அன்று மணிக்கு 48 கி.மீ வேகத்தில் 10 மணி நேரம் பயணிக்கிறார். இரண்டாம் நாள் மணிக்கு 40 கி.மீ வேகத்தில் 12 மணி நேரம் பயணிக்கிறார் மற்றும் கடைசி நாள் அன்று மணிக்கு 32 கி.மீ வேகத்தில்15 மணி நேரம் பயணம் செய்கிறார். அவர் பயணிக்கும் சராசரி வேகத்தை கணக்கிடுக.

8. ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டாரப் பகுதியில் வசிக்கும் 8 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் (ரூபாயில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரங்களின் கூட்டுச்சராசரி, பெருக்கல் சராசரி மற்றும் இசைச் சராசரி ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டு சராசரிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொடர்பை சரிபார்க்க.

குடும்பங்கள்:	A	B	C	D	E	F	G	H
வருமானம் (ரூ.):	70	10	50	75	8	25	8	42

9. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கூட்டுச்சராசரி, இசைச்சராசரி மற்றும் பெருக்கல் சராசரி ஆகியவற்றைக் காண்க. சராசரிகளுக்கு இடையேயான தொடர்பினை சரிபார்.

X	5	15	10	30	25	20	35	40
f	18	16	20	21	22	13	12	16

10. பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ள விவரங்களுக்கு கூட்டுச்சராசரி, பெருக்கல் சராசரி மற்றும் இசைச்சராசரி ஆகியவற்றை கணக்கிடுக. இச்சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகளைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	25	30	20	10

11. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கால்மானம் மற்றும் கால்மான விலக்கக்கெழுவைக் காண்க.

வயது (வருடங்களில்):	20	30	40	50	60	70	80
நபர்களின் எண்ணிக்கை:	13	61	47	15	10	18	36

12. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கம் மற்றும் அதன் தொடர்பு அளவையும் காண்க.

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
f	5	10	13	18	14	8

13. பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலையைப் பொறுத்துச் சராசரி விலக்கத்தையும் அதன் தொடர்பு அளவையும் காண்க.

உயரம் (அங்குலங்களில்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
58	15
59	20
60	32
61	35
62	35
63	22
64	20
65	10
66	8

14. பின்வரும் விவரங்களுக்கு சராசரி விலக்கத்தை அதன் சராசரியைக் கொண்டு காண்க.

பிரிவு இடைவெளி:	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
அலைவெண் f	3	5	12	6	4

15. பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலையைப் பொறுத்து சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

வயது (வருடங்களில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	8
10-20	12
20-30	16
30-40	20
40-50	37
50-60	25
60-70	19
70-80	13

8.3 நிகழ்தகவு

'நிகழ்தகவு' அல்லது 'வாய்ப்பு' என்கிற வார்த்தை அன்றாட உரையாடலில் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேலும் அதன் பொருள் பற்றி பொதுவாக மக்கள் ஓரளவு அறிந்திருக்கிறார்கள். உதாரணமாக,

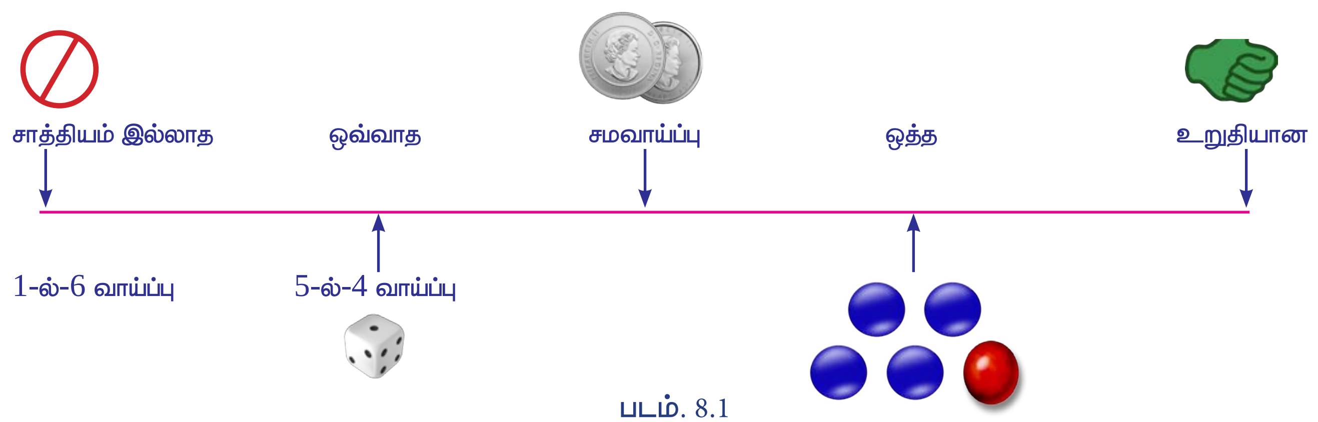
"நாளை மழை வருவதற்கு வாய்ப்பு இருக்கிறது"

"A மற்றும் B அணிகள் ஒரு குறிப்பிட்டப் போட்டியில் வெற்றி பெறுவதற்குச் சமமான வாய்ப்பிருக்கிறது."

சாத்தியம், உத்தேசம் போன்ற வார்த்தைகள் ஒரே விதமான பொருளைத் தருகின்றன. அதாவது, இந்த நிகழ்வு நடைபெறும் என்பது உறுதியில்லை அல்லது அந்த நிகழ்வு நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்புப் கேள்விக்குரியதாக உள்ளது. சமானியர்களின் பேச்சுவழக்கில் நிகழ்தகவு என்கிற வார்த்தை இவ்வாறாக என்ன நடைபெறுகிறது என்பது பற்றி சிறிதளவு உறுதியற்ற நிலையில் காணப்படுகிறது. எவ்வாறாயினும், கணிதவியல் மற்றும் புள்ளியியலில் உறுதியற்ற நிலைமைப் பற்றி சில நிபந்தனைகள் மூலமாக அறிவுப் பூர்வமான, எண் வடிவிலான வாக்கியத்தை அமைக்க முயற்சி செய்கிறோம் மற்றும் சில முறைகளைச் செயல்படுத்தி நிகழ்தகவிற்கான எண் மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம்.

கலிலியோ (1564–1642), என்கிற இத்தாலிய கணிதவியலாளர் முதன்முதலில் சூதாட்டப்பந்தயத்தில்பகடைக்கான கருத்தியலில் சிலப் பிரச்சனைகளைச் சந்திக்கும்பொழுது எண்ணளவில் அளவிடக்கூடிய நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு முதன்முதலில் முயற்சி செய்தார்.

கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளப் படம் நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கருத்துருக்களைப் பிரதிபலிக்கிறது.



படம். 8.1

8.3.1 நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கருத்துருக்கள் (Basic concepts of Probability)

மீள்பார்வை (Recall)

(i) சமவாய்ப்புச் சோதனை (Random Experiment)

ஒரே மாதிரியான அடிப்படையில் ஒரு சோதனைப் பன்முறை திரும்பத் திரும்ப நடத்தப்படுகிறது. மேலும் வெளிப்படுகின்ற மொத்த எண்ணிக்கையை கணக்கிட முடியும். ஆனால் தனித்த முடிவு அதாவது ஒரு தனித்த வெளிப்பாட்டினை முன்கூட்டியே கணிக்க முடியாதவாறு உள்ளச் சோதனையே சமவாய்ப்புச் சோதனை எனப்படும்.

உதாரணமாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல், ஒருப் பகடையை உருட்டுதல் ஒரு சீட்டுக்கட்டில் இருந்து சீட்டு ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுத்தல் என்பன.

(ii) வெளிப்பாடு: (Outcome)

சமவாய்ப்புச் சோதனைகளின் முடிவே வெளிப்பாடு எனப்படும்.

(iii) முயற்சி மற்றும் நிகழ்வு: (Trial and Event)

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்டச் செயல்பாடு முயற்சி எனப்படும். வெளிப்பாடு அல்லது வெளிப்பாடுகளின் சேர்க்கை நிகழ்வுகள் எனப்படும்.

(iv) முழுமையான நிகழ்வுகள் (Exhaustive Events)

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின், சாத்தியப்பட்ட மொத்த வெளிப்பாடுகளின் தொகுப்பே முழுமையான நிகழ்வுகள் எனப்படும்.

(v) சாத்தியமான நிகழ்வுகள் (Favourable Events)

ஒரு சோதனையில் ஒரு நிகழ்வு நிகழும் என்பதை உறுதிபடுத்தும் சாத்திய கூறுகளின் எண்ணிக்கை சாத்தியமான நிகழ்வுகள் எனப்படும்.

(vi) ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive events)

நடைபெறுகின்ற ஏதேனும் ஒரு நிகழ்வு நடைபெறவிருக்கின்ற ஏனைய நிகழ்வுகள் நடைபெறுவதை தவிர்க்கும் எனில், அதாவது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்வுகள் ஒரே சோதனையில் ஒரே நேரத்தில் நடைபெறாது எனில் நிகழ்வுகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள் எனப்படும். நிகழ்வுகள் A மற்றும் B ஆகியவைகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில் $A \cap B = \varnothing$

(vii) சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Equally Likely Events)

ஒரு சோதனையின் நிகழ்ச்சிகளில் (இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட) ஏதேனும்

ஒரு நிகழ்ச்சி மற்றவற்றை விட நிகழக்கூடிய வாய்ப்பு அதிகமுள்ளது என்று எதிர்பார்க்க இயலாதெனில், அச்சோதனையின் நிகழ்ச்சிகள் யாவும் சமவாய்ப்புடைய நிகழ்ச்சிகள் என அழைக்கப்படுகிறது.

(viii) நிகழ்தகவின் தொன்மையான வரையறை (Classical definition of Probability)

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவுகள், 'n' முழுமையான, ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் சமவாய்ப்பு வெளிப்பாடுகளாக உள்ளது அவற்றில் நிகழ்வு E நடைபெறுவதற்கு m சாத்தியக்கூறுகள் உள்ளது. E நிகழ்வின் நிகழ்தகவு 'p', பொதுவாக $P(E)$ என குறிக்கப்படுகிறது.

$$p = P(E) = \frac{\text{சாத்தியக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{முழுமையான நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{m}{n}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

உறுதியற்ற தன்மைக்கான எண்ணியல் அளவை முதலில் வழங்கியவர் ஜேம்ஸ் பெர்னோலி ஆவார்.

(ix) பண்புகள் (Properties)

(i) $0 \le P(E) \le 1$

(ii) நிகழ்தகவின் கூடுதல் '1' –க்கு சமமாகும்.

(iii) $P(E)=0$ எனில், E என்பது சாத்தியமில்லா நிகழ்வு.

உதாரணத்திற்கு: ஒரு நாணயம் சுண்டப்படுகிறது தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு: சோதனையின் மொத்த சாத்தியமான வெளிப்பாடுகள் $\{H,T\}$ ஆகும்.

$n = 2$

தலை விழுவதற்கான சாத்திய வெளிப்பாடுகள் $= \{H\}$.

$m = 1$

தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2}$

(x) நிகழ்தகவின் நவீன வரையறை (Modern Definition of Probability)

நிகழ்தகவிற்கான நவீன அணுகுமுறை என்பது முழுவதும் அடிக்கோள்களை அடிப்படையாகக் கொண்டது மற்றும் அது கணவியல் கருத்துருவாக்கங்களை சார்ந்திருக்கிறது. நிகழ்தகவின் கருத்தியலை அடிகோள்களின் அணுகுமுறையில் கற்க வேண்டுமெனில் சில அடிப்படைக் கருத்துருக்களை வரையறுப்பது அவசியமாகிறது. அவையாவன :

(i) **கூறுவெளி:** ஒரு சோதனையின் ஒவ்வொரு இயலக் கூடிய வெளிப்பாடு கூறு புள்ளி எனவும் மற்றும் கூறு புள்ளிகளின் தொகுப்பு கூறுவெளி எனப்படும் அது S என்று குறிக்கப்படுகிறது.

(ii) **நிகழ்வு:** ஒரு கூறுவெளியின் ஏதேனும் ஒரு உட்கணம் நிகழ்வு எனப்படும்.

(iii) **ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்:** $A \cap B = \phi$ எனில் A மற்றும் B ஆகிய நிகழ்வுகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள் எனப்படும். அதாவது A மற்றும் B ஆகியவை சேராக் கணங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு: $S = \{1,2,3,4,5\}$ என்க.

$A =$ ஒற்றைப் படை எண்கள் $= \{1,3,5\}$ மற்றும்

$B =$ இரட்டைப் படை எண்கள் $= \{2,4\}$ என்க.

$A \cap B = \phi$

$\therefore$ A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சியாகும்.

(xi) கூர்நோக்கு (Observation):

கணத்தின் வாயிலான கூற்றுகள்

(i) $A \cup B \Rightarrow A, B$ நிகழ்ச்சியில் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்வது.

(ii) $A \cap B \Rightarrow A$ மற்றும் B ஆகிய இரண்டும் நிகழும்

(iii) $\overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow A$ மற்றும் B ஆகியவைகள் நிகழாது.

(iv) $A \cap \overline{B} \Rightarrow A$ நிகழும் மற்றும் B நிகழாது.

(xii) நிகழ்தகவின் வரையறை (அடிக்கோள் அணுகுமுறை) (Definition of Probability)

E என்பது சோதனை என்க. S என்பது E– யோடு தொடர்புடைய கூறுவெளி என்க. S–ல் உள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்வோடு $P(A)$ என்று குறிக்கப்படுகின்ற ஒரு மெய் எண்ணை நாம் தொடர்புப்படுத்துவோம். மேலும் $P(A)$) என்பது A–என்ற நிகழ்வின் நிகழ்தகவு எனக் கொண்டால், $P(A)$ கீழ்காணும் அடிக்கோள்களை நிவர்த்திச் செய்யும்.

அடிக்கோள் 1: $P(A) \geq 0$

அடிக்கோள் 2 : $P(S) = 1$

அடிக்கோள் 3 : $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்பன S கூறுவெளியில் உள்ள ஒன்றையொன்று விலக்கும் n நிகழ்வுகள் எனில்

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

(xiii) நிகழ்தகவின் அடிப்படைத் தேற்றங்கள்

தேற்றம் 1:

$P(\varnothing) = 0$, அதாவது சாத்தியமில்லா நிகழ்வின் நிகழ்தகவு பூச்சியமாகும்.

தேற்றம் 2:

S என்பது கூறுவெளி மற்றும் A என்பது S–ல் உள்ள ஒரு நிகழ்வு $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

தேற்றம் 3: கூட்டல் தேற்றம்

A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்வுகள் எனில்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(xiv) கூர்நோக்கு:

(i) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்வுகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள் எனில் $A \cap B = \varnothing$

$$\therefore\ P(A \cap B) = 0$$

$$\Rightarrow\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(ii) A, B, C என்ற ஏதேனும் மூன்று நிகழ்வுகளுக்கு கூட்டல் தேற்றத்தை விரித்துரைக்கலாம்

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

மாணவர்களுக்கு மேற்கூறியக் கருத்துக்கள் நன்கு அறிந்தவை என நம்பப்படுகிறது. நமது தற்போதைய பாடத்திட்டத்தினை கீழ்வரும் பிரிவுகளிலிருந்து தொடங்குவோம்.

8.3.2 சாரா மற்றும் சார்ந்த நிகழ்வுகளின் கருத்துருக்கள் (Independent and Dependent events)

(i) சாரா நிகழ்வுகள்:– (Independent Events)

நிகழக்கூடிய ஒரு நிகழ்வு நிகழக்கூடிய மற்றொரு நிகழ்வைப் பாதிக்காது எனும்பொழுது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்வுகள் சாரா நிகழ்வுகள் எனப்படும். உதாரணமாக, ஒரு நாணயம் இரண்டு முறை சுண்டப்படுகிறது எனில் இரண்டாம் வீச்சின் முடிவை, முதல் வீச்சின் முடிவு எந்த வகையிலும் பாதிக்காது.

(ii) சார்ந்த நிகழ்வுகள்:– (Dependent Events)

ஏதேனும் ஒரு முயற்சியில் சார்ந்த நிகழ்வுகள் என்பது நிகழ்ந்த அல்லது நிகழாத ஒரு நிகழ்வு ஏனைய முயற்சிகளில் நிகழக்கூடிய நிகழ்வுகளைப் பாதிக்கக்கூடியது.

உதாரணமாக, 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு ராணிச்சீட்டை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{52}$ அல்லது $\frac{1}{13}$ ஆகும். ஆனால் அந்த (ராணி) சீட்டு மீண்டும் சீட்டுகட்டில் சேர்க்கப்படவில்லை எனில் மறுபடியும் ராணிச் சீட்டை தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{51}$ ஆகும்.

8.3.3 நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு (Conditional Probability)

A மற்றும் B ஆகியன இரு சார்ந்த நிகழ்வுகள் எனில், நிகழ்வு A ஏற்கனவே நடந்துள்ளபோது, நிகழ்வு B–ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \quad P(A) \neq 0$$

இதேப் போல் $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B) \neq 0$

(i) பெருக்கல் தேற்றம் (Multiplication Theorem)

ஒரே நேரத்தில் நிகழும் இரு நிகழ்வுகள் A, B எனில்

$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$ அல்லது

$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$

குறிப்பு

(i) A மற்றும் B ஆகியன சாரா நிகழ்வுகள் எனில்
$P(A$ மற்றும் $B) = P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

(ii) மேற்கண்ட தேற்றம் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சாரா நிகழ்வுகளுக்கு விரிவாக்கம் செய்ய முடியும். இவ்வாறாக மூன்று நிகழ்வுகளுக்கு பெருக்கல் தேற்றம்,
$P(A$ மற்றும் B மற்றும் $C)$
$= P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B) P(C)$

எடுத்துக்காட்டு 8.24

ஒரு சீரான பகடை உருட்டப்படுகிறது A என்ற நிகழ்வு "பகடையில் தோன்றும் எண் 3'–ன் மடங்கு" எனவும் B நிகழ்வு "பகடையில் தோன்றும் எண் இரட்டை படை எண்" எனில், A மற்றும் B ஆகிய நிகழ்வுகள் சாரா நிகழ்வுகளா என ஆராய்க?

தீர்வு:

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ என்பது கூறுவெளி என அறிகிறோம்.

இங்கு $A = \{3,6\}$; $B = \{2,4,6\}$ எனவே $(A \cap B) = \{6\}$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ மற்றும் $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

தெளிவாக, $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

எனவே A மற்றும் B ஆகியவை சாரா நிகழ்வுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.25

$P(A) = \dfrac{3}{5}$ மற்றும் $P(B) = \dfrac{1}{5}$ என்க.

A, B என்பன சாரா நிகழ்வுகள் எனில் $P(A \cap B)$–ஐ காண்க.

தீர்வு:

A மற்றும் B ஆகியவை சாரா நிகழ்வுகள் என்பதால்

$$P(A \cap B) = P(A)\ \ P(B)$$

கணக்கின்படி $P(A) = \dfrac{3}{5}$ மற்றும் $P(B) = \dfrac{1}{5}$,

எனவே, $P(A \cap B) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{25}$

எடுத்துக்காட்டு 8.26

மூன்று நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன.

A - நிகழ்வு "மூன்று தலைகள் அல்லது மூன்று பூக்கள்"

B - நிகழ்வு "குறைந்தபட்சம் 2 தலைகள்"

C - நிகழ்வு "அதிகபட்சம் 2 தலைகள் " என்று கருதவும் (A,B), (A,C) மற்றும் (B,C), ஆகியவற்றில் எவை சாரா நிகழ்வுகள் ? எவை சார்ந்த நிகழ்வுகள்?

தீர்வு:

இங்கு சோதனையின் கூறுவெளி

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, TTH, THT, TTT}

தெளிவாக,

A = {மூன்று தலைகள் (அல்லது) மூன்று பூக்கள்}
= {HHH, TTT}

B = {குறைந்த பட்சம் 2 தலைகள்}
= {HHH, HHT, HTH, THH} மற்றும்

C = {அதிகபட்சம் 2 தலைகள் }
= {HHT, HTH, HTT, THH, TTH, THT, TTT}

மேலும், $(A\cap B) = \{HHH\}$; $(A\cap C) = \{TTT\}$ மற்றும் $(B\cap C) = \{HHT, HTH, THH\}$

$\therefore\ P(A) = \frac{2}{8}=\frac{1}{4};\ P(B) = \frac{1}{2};\ P(C) = \frac{7}{8}$

மற்றும்

$P(A\cap B) = \frac{1}{8},\ P(A\cap C) = \frac{1}{8},\ P(B\cap C) = \frac{3}{8}$

மேலும் $P(A).\ P(B) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$P(A).\ P(C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{32}$

மற்றும் $P(B).\ P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{16}$

இவ்வாறாக $P(A\cap B) = P(A).\ P(B)$

$P(A\cap C) \neq P(A).P(C)$ மற்றும்

$P(B\cap C) \neq P(B).\ P(C)$

எனவே, $(A,\ B)$ சாரா நிகழ்வுகள் (A,C) மற்றும் ($(B,\ C)$ ஆகியவைகள் சார்ந்த நிகழ்வுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.27

ஒரு புத்தகத்திலுள்ள கணக்குகளில் A என்பவர் 90% கணக்குளையும் மற்றும் B என்பவர் 70% கணக்குளையும் தீர்க்க முடியும். சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு கணக்கைக் குறைந்தபட்சம் அவர்களில் ஒருவர் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு:

A என்பவர் கணக்கை தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{90}{100}=\frac{9}{10}$ மற்றும் B என்பவர் கணக்கை தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

அதாவது, $P(A) = \frac{9}{10}$ மற்றும் $P(B) = \frac{7}{10}$

$P(\bar{A}) = 1-P(A) = \frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

இதேப் போன்று $P(\bar{B}) = 1-P(B) = \frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

P (குறைந்தபட்சம் ஒரு நபர் கணக்கைக் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு) $= P(A\cup B)$

$= 1-P\left(\overline{A\cup B}\right) = 1-P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)$

$= 1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$

$= 1-\frac{3}{100}=\frac{97}{100}$

கணக்கை குறைந்த பட்சம் அவர்களில் ஒருவர் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{97}{100}$

எடுத்துக்காட்டு 8.28

ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் 3 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் இரண்டு பந்துகள், ஒன்றன்பின் ஒன்றாக திருப்பி வைக்காத முறையில் தேர்தெடுக்கப்படுகிறது எனில், இரண்டு பந்துகளும் கருப்பு நிறப்பந்துகளாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

$A,\ B$ என்பன முதல், இரண்டாம் முயற்சியில் எடுக்கப்படும் பந்து கருப்பு நிறப்பந்து என்க.

முதல் முயற்சியில், கருப்பு நிறப் பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}$$

முதலில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டப் பந்து கருப்புநிறப்பந்து எனக் கொடுக்கப்பட்ட நிலையில் இரண்டாம் பந்தும், கருப்பு நிறப்பந்தாக தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(B/A) = \frac{2}{5+2}=\frac{2}{7}$$

$\therefore$ இரண்டு பந்துகளும் கருப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A\cap B) = P(A)\ P(B/A) = \frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$$

எடுத்துக்காட்டு 8.29

ஒரு துப்பாக்கி சுடும் போட்டியில் இலக்கைச் சரியாகச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு A –க்கு $\frac{3}{4}$ B –க்கு $\frac{1}{2}$ மற்றும் C –க்கு $\frac{2}{3}$. அனைவரும் ஒரே நேரத்தில் இலக்கை நோக்கி சுடுகிறார்கள் எனில்,

(i) மூவரும் இலக்கைச் சரியாகச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு

(ii) ஒருவர் மட்டும் இலக்கைச் சரியாகச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு

(iii) குறைந்தது ஒருவராவது இலக்கை சரியாகச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி $P(A)=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{2}{3}$

எனில் $P(\bar{A})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4};\ P(\bar{B})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

மற்றும் $P(\bar{C})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(i) $P(A)$ = (மூவரும் இலக்கை சரியாக சுடுவதற்கான)

$= P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$

(A,B,C சாரா நிகழ்வுகள்)

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$$

(ii) P(ஒருவர் மட்டுமே இலக்கை சரியாக சுடுவதற்கான)

$$=P\{(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\}$$

$$=P\{(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})+P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})$$
$$+P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\}$$

$$=\left(\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}$$

(iii) P(குறைந்தபட்சம் ஒருவர் இலக்கை சுடுவதற்கான)

$=1-P$(ஒருவரும் சுடாமல் இருப்பதற்கான)

$$=1-P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$$

$$=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$$

$$=1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$$

எடுத்துக்காட்டு 8.30

ஒரு சீட்டுகட்டிலிருந்து, மூன்று சீட்டுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக, தேர்தெடுக்கப்படுகின்றன. சீட்டுகள் திரும்ப வைக்கபடாத நிலையில், தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சீட்டுகள் முறையே ஒரு அரசி சீட்டு (Queen), ஒரு அரசன் சீட்டு (a King) மற்றும் ஒரு காலாட்படை (a Jack) வீரன் சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு:

A : அரசி சீட்டைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

B : அரசன் சீட்டைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

C : காலாட்படை வீரன் சீட்டைத் தேர்ந்தெடுத்தல் (jack)

P (அரசி சீட்டைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான)

$= P(A) = \frac{4}{52}$

P(அரசி சீட்டு ஏற்கனவே தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதால் அரசன் சீட்டு தேர்ந்தெடுப்பதற்கான)

$= P(B/A) = \frac{4}{51}$

P (அரசி மற்றும் அரசன் சீட்டுகள் ஏற்கனவே தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதால் ஒரு காலாட் படை வீரன் சீட்டை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான)

$= P(C/AB) = \frac{4}{50}$

இவைகள் சார்ந்த நிகழ்வுகள் ஆகையால் தேவையான கூட்டு நிகழ்வுகளின் நிகழ்தகவு

$P(ABC) = P(A)\ P(B/A)\ P(C/AB)$

$$=\frac{4}{52}\times\frac{4}{51}\times\frac{4}{50}=\frac{64}{132600}$$

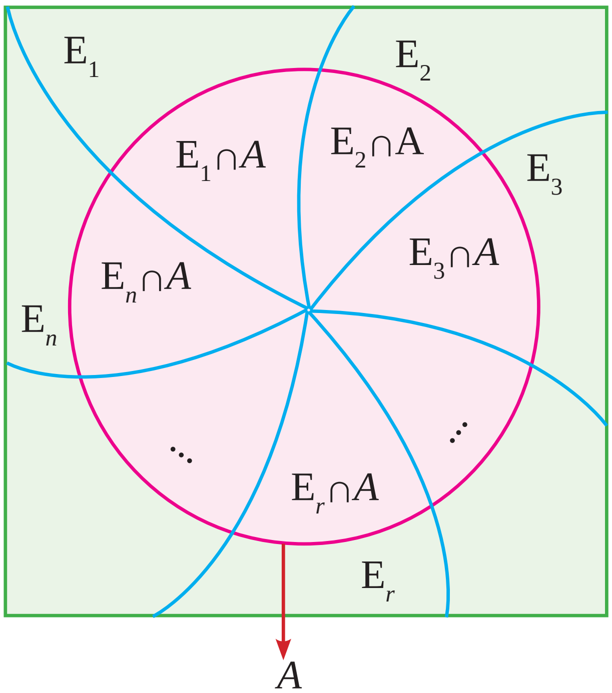
$$=0.00048$$

8.3.4 பேயின் தேற்றம் (Baye's Theorem)

S என்ற கூறுவெளியில், ஒன்றை ஒன்று விலக்கும், முழுமையான நிகழ்ச்சிகள்

$E_1, E_2, E_3..., E_n$ என்க. அதாவது $P(E_i) \neq 0$ $(i = 1,2,3..., n)$, S –ஐச் சார்ந்த A என்ற ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி $P(A) > 0$, எனுமாறு உள்ளது எனில்

$$P(E_i / A) = \frac{P(E_i)P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)}; i = 1, 2, 3, \ldots, n$$



படம். 8.2

இங்கு $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)$

எடுத்துக்காட்டு 8.31

முதல் பையில் 3 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் மற்றும் 4 நீல நிறப்பந்துகளும், இரண்டாவது பையில் 5 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் மற்றும் 6 நீல நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. ஏதேனும் ஒரு பையிலிருந்து, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பந்து சிவப்பு பந்து எனில், அப்பந்து இரண்டாவது பையிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு:

E_1 முதல் பையைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி மற்றும்

E_2 என்பது இரண்டாவதுப் பையைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

A என்பது சிவப்பு நிறப்பந்தைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனில்

$P(A/E_1) = P($முதல் பையில் இருந்து சிவப்பு நிறப்பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சி $I) = \frac{3}{7}$

$P(A/E_2) = P($இரண்டாவது பையில் இருந்து சிவப்பு நிறப்பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சி $II) = \frac{5}{11}$

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சிவப்பு பந்து, இரண்டாவது பையிலிருந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $P(E_2/A)$.

பேயிஸ் தேற்றபப்டி

$$P(E_2/A) = \frac{P(E_2)P(A/E_2)}{\sum_{i=1}^{2} P(E_i)P(A/E_i)}$$

$$= \frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}.\frac{5}{11}}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}\right)} = \frac{35}{68}$$

எடுத்துக்காட்டு 8.32

X என்பவர் 5–ல் 4 முறை உண்மைப் பேசுபவர். ஒரு பகடை உருட்டப்படுகிறது. கிடைத்த எண் 6 என்று திரு.X கூறுகிறார். உண்மையாகவே ஆறு விழுந்துள்ளதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு:

E_1 : X உண்மை பேசுவதற்கான நிகழ்ச்சி;

E_2 : X பொய் பேசுவதற்கான நிகழ்ச்சி;

E : X ஆறு விழுந்துள்ளதாக கூறுகிறார்

$P(E_1) = \frac{4}{5}$; $P(E_2) = \frac{1}{5}$; $P(E/E_1) = \frac{1}{6}$;

$P(E/E_2) = \frac{5}{6}$

பேயின் தேற்றப்படி உண்மையில் ஆறு விழுந்துள்ளதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1)+P(E_2)P(E/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}}{\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}\right)} = \frac{4}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு 8.33

ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள A_1, A_2, A_3 என்ற 3 இயந்திரங்கள் முறையே 1000, 2000, 3000 திருகுகள் ஒவ்வொரு நாளும் உற்பத்தி செய்கின்றன. அவற்றில் A_1 என்பது 1% –ம், A_2 என்பது 1.5%–ம், A_3 என்பது 2%–ம் குறையுள்ள திருகுகளை உற்பத்தி செய்கின்றன. ஒரு நாளின் முடிவில், உற்பத்தியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு திருகு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டபோது, அது குறையுள்ளதாக காணப்பட்டது. அது இயந்திரம் A_1–ன் உற்பத்தியிலிருந்து வந்தது என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு:

$P(A_1)$ = P(இயந்திரம் A_1 உற்பத்தி செய்தத் திருகுகளுக்கான) $= \frac{1000}{6000} = \frac{1}{6}$

$P(A_2)$ = P(இயந்திரம் A_2 உற்பத்தி செய்தத் திருகுகளுக்கான) $= \frac{2000}{6000} = \frac{1}{3}$

$P(A_3)$ = P(இயந்திரம் A_3 உற்பத்தி செய்தத் திருகுகளுக்கான) $= \frac{3000}{6000} = \frac{1}{2}$

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டத் திருகு குறையுடையதாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை B என்க.

$\therefore$ $P(B/A_1)$ = P(குறையுள்ள திருகு இயந்திரம் A_1– லிருந்து வருவதற்கான) = 0.01

$P(B/A_2)$ = P(குறையுள்ள திருகு இயந்திரம் A_2–லிருந்து வருவதற்கான) = 0.015 மற்றும்

$P(B/A_3)$ = P(குறையுள்ள திருகு இயந்திரம் A_3– லிருந்து வருவதற்கான)= 0.02

நாம் காண வேண்டியது $P(A_1/B)$

எனவே பேயின் தேற்றப்படி நாம் பெறுவது

$P\,(A_1/B)$

$$= \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)(0.01)}{\left(\frac{1}{6}\right)(0.01)+\left(\frac{1}{3}\right)(0.015)+\left(\frac{1}{2}\right)(0.02)}$$

$$= \frac{0.01}{0.01+0.03+0.06} = \frac{0.01}{0.1} = \frac{1}{10}$$

பயிற்சி 8.2

1. ஒரு குடும்பத்தில் இரு குழந்தைகள் உள்ளனர். அவ்விருவரில், குறைந்தது ஒருவராவது பெண் மற்றும், இருவரும் பெண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

2. ஒரு பகடை இரு முறை உருட்டப்படுகிறது, அப்போது தோன்றும் எண்களின் கூடுதல் ஆறு என கண்டறியப்படுகிறது. குறைந்தது ஒரு முறையாவது 4 என்ற எண் கிடைக்க நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு என்ன?

3. ஒரு சீரான பகடை இருமுறை உருட்டப்படுகிறது. முதல் முறை உருட்டப்படும் பொழுது ஒற்றைப்படை எண் பெறுவது எனும் நிகழ்வை A எனவும், இரண்டாம் முறை உருட்டப்படும்பொழுது இரட்டைப் படை எண் பெறும் நிகழ்வை B எனவும் கொண்டால் , நிகழ்வுகள் Aயும், Bயும் ஒன்றை ஒன்று சாரா நிகழ்வுகளா என ஆராய்க?

4. ஒரு குறிப்பிட்டக் கணக்கை A, B என்ற இரு நபர்கள் ஒருவரை ஒருவர் சாராமல் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ என்க. இருவரும் ஒரே சமயத்தில் ஒருவரை ஒருவர் சாராமல், தீர்ப்பதற்கு முயல்கின்றனர் எனில், அவர்கள் அந்தக்
   (i) கணக்கை தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) யாரேனும் ஒருவர் மட்டும் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

5. 100 நபர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவிலிருந்து, ஒருவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். குழுவின் விபரம், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. குழுவிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு ஆண், உளவியளாலராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

நபர்	உளவியளாலர்	சமூகநலவாதி	ஜனநாயகவாதி	கூடுதல்
ஆண்	15	25	10	50
பெண்	20	15	15	50
கூடுதல்	35	40	25	100

6. இரண்டு பெட்டிகளில் உள்ள பந்துகளின் விவரங்கள் பின்வருமாறு உள்ளன.

நிறம்/கலன்	வெள்ளை	சிவப்பு	கருப்பு
கலன் 1	10	6	9
கலன் 2	3	7	15

ஒவ்வொரு பெட்டியிலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது

(i) இரண்டும் சிவப்புப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க

(ii) இரண்டும் ஒரே நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. முதல் பையில் 3 சிவப்பு மற்றும் 4 கருப்பு நிறப்பந்துகளும் இரண்டாம் பையில் 5 சிவப்பு மற்றும் 6 கருப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஏதேனும் ஒரு பையிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அது சிவப்பு எனக் கண்டறியப்படுகிறது. அது முதலாம் பையிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

8. முதல் பெட்டியில் 7 வெள்ளை மற்றும் 10 கருப்பு நிறப்பந்துகளும், இரண்டாவது பெட்டியில் 5 வெள்ளை மற்றும் 12 கருப்பு நிறப்பந்துகளும், மூன்றாவது பெட்டியில் 17 வெள்ளைப் பந்துகள் மட்டுமே உள்ளன. ஒருவர் மூன்று பெட்டிகளில் ஏதேனும் ஒன்றைத்தேர்ந்து எடுத்து, தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டப் பெட்டியில் இருந்து ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கிறார். தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட வெள்ளைப் பந்து

(i) முதல் பெட்டியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட நிகழ்தகவு காண்க

(ii) இரண்டாவது பெட்டியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட நிகழ்தகவு காண்க

(iii) மூன்றாவது பெட்டியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட நிகழ்தகவு காண்க.

9. B_1, B_2 மற்றும் B_3 என்பன குமிழ் விளக்குகளை உடைய மூன்று பெட்டிகள் என்க. அவ்விளக்குகளில், சில விளக்குகள் குறையுடையன. பெட்டிகள் B_1, B_2 மற்றும் B_3 –ல் உள்ள குறையுடைய குமிழ் விளக்குகளின் விகிதாச்சாரங்கள் முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ என்க. மூன்று பெட்டிகளில், ஏதேனும் ஒரு பெட்டியிலிருந்து தேர்ந் தெடுக்கப்பட்ட குமிழ்விளக்கு குறையுடையது எனக் கண்டறியப்பட்டால், அந்த விளக்கு, பெட்டி B_1–லிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப் படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

10. ஒரு பந்தயத்தில் உள்ள மூன்று பந்தயக் குதிரைகளை முறையே A, B மற்றும் C என்க. A வெற்றிபெறுவதற்கான வாய்ப்பு B–யைப் போல் இருமடங்காக உள்ளது. B வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு C–யைப் போல் இருமடங்கு உள்ளது எனில், அக்குதிரைகள் ஒவ்வொன்றும் பந்தயத்தில் வெற்றிபெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

11. ஒரு பகடை உருட்டப்படும்பொழுது,

(i) ஒரு பகா எண் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

(ii) மூன்று அல்லது மூன்றை விட பெரிய எண்ணைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

12. ஒன்று முதல் பத்து வரை குறிக்கப்பட்ட 10 சீட்டுகள் ஒருப் பெட்டியில் உள்ளன. பெட்டி நன்கு குலுக்கப்பட்டு, ஒரு சீட்டுச் சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சீட்டு 4 –யை விடப் பெரிய எண் கொண்ட சீட்டு எனில், அதில் உள்ள எண் இரட்டைப்பட எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க

13. ஒரு பள்ளியில் பயிலும்1000 பேர்களில், 450 பேர் மாணவிகள். 450 மாணவிகளில் 20% மாணவிகள் XI-ஆம் வகுப்பில் பயலுகிறார்கள். 1000 பேர்களில் ஒருவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டவர், XI-ஆம் வகுப்பில் உள்ள மாணவியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

14. 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து, 2 சீட்டுகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அவற்றில் ஒன்று ராஜா சீட்டாகவும், மற்றொன்று ராணி சீட்டாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

15. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து, ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அதன்பின் முதல் சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக்கட்டில் சேர்க்கப்படாத நிலையில்,மற்றொரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது.

    (i) இரண்டும் ஏஸ் ஆக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

    (ii) இரண்டும் ஸ்பேட் ஆக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

16. முறையே 20%, 30% மற்றும் 50% பொருட்களை உற்பத்தி செய்யக்கூடிய A, B, Cஎன்ற இயந்திரங்களை ஒரு நிறுவனம் கொண்டுள்ளது. அவற்றின் குறைபாடு சதவீதங்கள் முறையே 7, 3 மற்றும் 5 ஆகும். இந்த உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களிலிருந்து ஒன்று தேர்ந் தெடுக்கப்பட்டுப் பரிசோதிக்கப்படுகிறது. அது குறைபாடுள்ளது எனில், அது இயந்திரம் C-யினால் உற்பத்தி செய்யப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

பயிற்சி 8.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது நிலை அளவை?

    (a) வீச்சு (b) முகடு

    (c) சராசரி விலக்கம் (d) நூற்றுமானம்

2. பொருளாதார வளர்ச்சியின் சராசரியைக் கணக்கிடும்பொழுது பயன்படுத்தப்படும் பொருத்தமான சராசரி?

    (a) நிறையிட்ட சராசரி

    (b) கூட்டுச் சராசரி

    (c) பெருக்கல் சராசரி

    (d) இசைச்சராசரி

3. விவரங்களில் ஒரு உறுப்பு பூச்சியம் எனில், அவ்விவரங்களின் பெருக்கல் சராசரி

    (a) குறை எண்

    (b) மிகை எண்

    (c) பூச்சியம்

    (d) கணக்கிட இயலாது

4. மைய போக்கின் சிறந்த அளவை என்பது

    (a) கூட்டுச்சராசரி

    (b) இசைச்சராசரி

    (c) பெருக்கல் சராசரி

    (d) இடைநிலை

5. 2,3,4 ஆகிய எண்களின் இசைச்சராசரி

    (a) $\frac{12}{13}$ (b) 12

    (c) $\frac{36}{13}$ (d) $\frac{13}{36}$

6. 8 மற்றும் 18 ஆகியவற்றின் பெருக்கல் சராசரி

    (a) 12 (b) 13

    (c) 15 (d) 11.08

7. A.M.,G.M. மற்றும் H.M.-களுக்கு இடையேயான பொருத்தமானத் தொடர்பு
   (a) $A.M.<G.M.<H.M.$
   (b) $G.M.\geq A.M.\geq H.M.$
   (c) H.M.≥G.M.≥A.M.
   (d) $A.M.\geq G.M.\geq H.M.$

8. இசைச்சராசரி என்பது தலைகீழ்
   (a) மதிப்புகளின் இடை நிலை
   (b) மதிப்புகளின் பெருக்கல் சராசரி
   (c) மதிப்புகளின் கூட்டுச்சராசரி
   (d) மதிப்புகளின் கால்மானம்

9. பின்வருவனவற்றுள் எது இடைநிலையைக் குறிக்கும்;
   (a) Q_1 (b) Q_2 (c) Q_3 (d) D_2

10. 10,14,11,9,8,12,6 ஆகியவற்றின் இடைநிலை
   (a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 9

11. 11,12,13,14 மற்றும் 15 ஆகியவைகளின் கூட்டுச் சராசரி
   (a) 15 (b) 11 (c) 12.5 (d) 13

12. 1,2,3, …, n என்பதன் சராசரி $\frac{6n}{11}$, எனில் n–ன் மதிப்பு
   (a) 10 (b) 12 (c) 11 (d) 13

13. பின்வரும் எவ்விவரங்களுக்கு மற்ற சராசரிகளை விட இசைச்சராசரி சிறந்தது
   (a) வேகம் அல்லது வீதங்கள்
   (b) உயரம் அல்லது நீளம்
   (c) 0 மற்றும் 1 என்பன போன்ற ஈரடிமானம்.
   (d) விகிதங்கள் அல்லது விகிதாச்சாரங்கள்

14. முதல் கால்மானம் என்பதை பின்வருமாறும் அழைக்கலாம்.
   (a) இடைநிலை
   (b) கீழ்க்கால்மானம்
   (c) முகடு
   (d) மூன்றாம் பத்துமானம்

15. $Q_1 = 30$ மற்றும் $Q_3 = 50$, எனில் கால்மான விலக்கக் கெழு
   (a) 20 (b) 40 (c) 10 (d) 0.25

16. இடைநிலை = 45 மற்றும் அதன் சராசரி விலக்க கெழு 0.25 எனில், இடைநிலையை பொறுத்த சராசரி விலக்கம்
   (a) 11.25 (b) 180
   (c) 0.0056 (d) 45

17. A யும், B யும் ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்
   (a) $P(A\cap B)=0$ (b) $P(A\cap B) = 1$
   (c) $P(A\cup B)=0$ (d) $P(A\cup B) = 1$

18. A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்வுகள் சார்பற்றவை எனில்,
   (a) $P(A\cap B)=0$
   (b) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
   (c) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$
   (d) $P(A\cup B)= P(A)\times P(B)$

19. A,B என்ற இரு நிகழ்வுகள் ஒன்றை ஒன்று சார்ந்த நிகழ்வுகள் எனில், நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(B/A)$ என்பது
   (a) $P(A)\ P(B/A)$ (b) $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
   (c) $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ (d) $P(A)\ P(A/B)$

20. சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஸ்பேடு சீட்டை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு
   (a) 1/52 (b) 1/13
   (c) 4/13 (d) 1/4

21. ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெளிப்பாடு, மற்றோர் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வை பாதிக்கவில்லை எனில், அவ்விரு நிகழ்ச்சிகள்
   (a) ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்
   (b) ஒன்றை ஒன்று சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள்

(c) ஒன்றை ஒன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள்

(d) ஒன்றை ஒன்று சாரா நிகழ்ச்சிகள்

22. ஒரு சோதனையின் கூறுவெளி $S=\{E_1,E_2,\ldots,E_n\}$ எனில், $\sum_{i=1}^{n}P(E_i) =$

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

23. இரு பகடை உருட்டப்படும் போது இருபகடையில் ஒவ்வொன்றிலும் இரட்டை பகா எண் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

(a) 1/36 (b) 0

(c) 1/3 (d) 1/6

24. சாத்தியமற்ற நிகழ்வின் நிகழ்தகவு என்பது

(a) 1 (b) 0 (c) 0.2 (d) 0.5

25. A, B என்ற நிகழ்வில் குறைந்தபட்சம் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்வு நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

(a) $P(A\cup B)$ (b) $P(A\cap B)$

(c) $P(A/B)$ (d) $(A\cup B)$

இதர கணக்குகள்

1. கீழ்காணும் விவரங்களுக்கு பெருக்கல் சராசரியைக் காண்க.

நெல்லின் விளைச்சல் (டன்னில்)	பண்ணைகளின் எண்ணிக்கை
7.5-10.5	5
10.5-13.5	9
13.5-16.5	19
16.5-19.5	23
19.5-22.5	7
22.5-25.5	4
25.5-28.5	1

2. ஒரு பங்கு முதலீட்டாளர், ஒரு நிறுவனத்தின், ₹1500 மதிப்புள்ள பங்குகளை ஒவ்வொரு மாதமும் வாங்குகிறார். முதல் நான்கு மாதங்களில், அவர் வாங்கிய பங்குகளில் ஒரு பங்கின் விலை முறையே ₹10, ₹15, ₹20 மற்றும் ₹30 ஆகும். இந்த நான்கு மாதங்களில் வாங்கப்பட்ட பங்குகளுக்கு செலுத்தப்பட்ட சராசரி விலையைக் காண்க. உனது விடையை சரிபார்.

3. பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலையைப் பொறுத்து சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

மதிப்பு	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
அலைவெண்	6	7	15	16	4	2

4. பின்வரும் விவரங்களுக்கு சராசரியைப் பொறுத்து சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.

X	2	5	6	8	10	12
f	2	8	10	7	8	5

5. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கத்தையும் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழுவையும் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	0	10	20	30	40	50	60	70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	150	142	130	120	72	30	12	4

6. ஒரு திருகு தயாரிக்கும் தொழிற்சாலையின் மொத்த உற்பத்தியில் 30%, 40% மற்றும் 30% உற்பத்தியினை முறையே இயந்திரங்கள் A, B மற்றும் C ஆகியவை உருவாக்குகின்றன. உற்பத்தியில் 2%, 4% மற்றும் 6% திருகுகள் பழுதுள்ளவையாக உள்ளன. உற்பத்தியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு திருகு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அது பழுதானது எனக் கண்டு பிடிக்கப்படுகிறது. அந்த பழுதான திருகு இயந்திரம் C–ன் மூலம் உருவாக்கப் பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

7. 3 ஆண்கள் மற்றும் 2 பெண்களிலிருந்து இரண்டு நபர் கொண்ட ஒரு குழு அமைக்கப்பட வேண்டும் எனில் அந்தக் குழுவில்
   (i) பெண்கள் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.
   (ii) ஒரே ஒரு ஆண் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.
   (iii) ஆண்களே இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

8. ஒரு பழுது பார்க்கும் நிலையத்தில் முறையே A, B மற்றும் C என்ற கார்கள் (மகிழுந்துகள்) 50%, 30% மற்றும் 20% உள்ளன. 5%, 7% மற்றும் 3% மகிழுந்துகளில் உள்ள கண்ணாடிகள் சுத்தம் செய்யபடவில்லை. சுத்தம் செய்யப்பட்ட மகிழுந்துகள் சோதனை செய்யப்படுகின்றன, எனில் கண்ணாடி சுத்தம் செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

9. நாளிதழ் வாசிப்பவர் கணக்கெடுப்பின்படி 30 வயதுக்குமேல் உள்ள ஆண் வாசிப்பாளர்கள் 0.30 மற்றும் 30 வயதுக்குக் கீழ் உள்ள ஆண் வாசிப்பாளர்கள் 0.20 விகிதம் என உள்ளது. 30 வயதுக்குக் கீழ் உள்ள வாசிப்பாளர்களின் விகிதம் 0.80. சமவாய்ப்பின்படி தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு ஆண் வாசிப்பாளர் 30 வயதுக்குக் கீழ் உள்ளவராய் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

10. ஒரே இலக்கை நோக்கி துப்பாக்கி 1 மற்றும் துப்பாக்கி 2 ஆகியன சுடுகின்றன. சராசரியாக ஒரே நேரத்தில் துப்பாக்கி–1, 9 முறையும், துப்பாக்கி–2, 10 முறையும் சுடுகின்றன. இரண்டு துப்பாக்கிகளின் துல்லியத்தன்மை ஒன்று போல் அமைவதில்லை. சராசரியாக துப்பாக்கி–2 சுடுகின்ற 10 முறைகளில் 7 முறைகள் இலக்கின் மீது சுடப்படுகிறது. அப்படி சுடப்படும் நேரத்தில் இலக்கின் மீது ஒரு குண்டு சரியாக சுடப்படுகிறது. ஆனால் அது எந்தத் துப்பாக்கியில் இருந்து சுடப்பட்டது என்பது தெரியவில்லை. அந்த இலக்கானது துப்பாக்கி 2–ல் சுடப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தொகுப்புரை

- ஒரு வரிசையை நான்கு சம பாகங்களாக பிரிக்கக் கூடிய ஒரு அளவை என்பது கால்மானங்கள் எனப்படும்
- ஒரு வரிசையை பத்து சம பாகங்களாக பிரிக்கக் கூடிய ஒரு அளவை என்பது பத்துமானங்கள் எனப்படும்
- ஒரு வரிசையை நூறு சம பாகங்களாக பிரிக்கக் கூடிய ஒரு அளவை என்பது நூற்றுமானங்கள் எனப்படும்.
- $Q_2 = D_5 = P_{50} =$ இடை நிலை
- கால்மானங்களுக்கு இடையேயான வீச்சு $= Q_3 - Q_1$
- இசைச் சராசரி = $= \dfrac{n}{\dfrac{1}{X_1}+\dfrac{1}{X_2}+\dfrac{1}{X_3}+\cdots\dfrac{1}{X_n}} = \dfrac{n}{\sum \dfrac{1}{X}}$
- $\text{QD} = \dfrac{Q_3-Q_1}{2}$
- தனித்த தொடருக்கான சராசரியை பொறுத்துச் சராசரி விலக்கம் $\text{MD} = \dfrac{\sum|X-\bar{X}|}{n} = \dfrac{\sum|D|}{n}$

- A மற்றும் B ஆகியன இரு சார்ந்த நிகழ்வுகள் எனில், நிகழ்வு B ஏற்கனவே நடந்துள்ளபோது, நிகழ்வு A –ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு,

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ P(B)\neq 0$$

- பேயின் தேற்றம் (Baye's Theorem):

S என்ற கூறுவெளியில், ஒன்றை ஒன்று விலக்கும், முழுமையான நிகழ்ச்சிகள் என்க. $E_1, E_2, E_3,..., E_n$ அதாவது $P(E_i)\neq 0$ $(i=1,2,3\ldots,n)$, S –ஐச் சார்ந்த A என்ற ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி $S=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ எனில் $P(A)>0$,

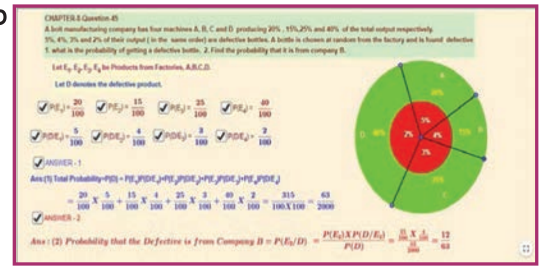
$$P(E_i/A)=\frac{P(E_i)P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(E_i)P(A/E_i)}\ ;\quad i=1,2,3\ldots,\ n\ ;$$

இங்கு $\quad P(A) = P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)P(A/E_i)$

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
அலைவெண் / நிகழ்வெண்	Frequency
ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள்	Mutually exclusive events/ disjoint events
கால்மான விலக்கம்	Quartile deviation
கால்மானம்	Quartile
கூறுவெளி	Sample space
சம வாய்ப்புள்ள நிகழ்வுகள்	Equally likely events
சமவாய்ப்பு சோதனை	Random experiment
சராசரி விலக்கம்	Mean deviation
சார்பில்லா நிகழ்வுகள்	Independent events
சார்பு நிகழ்வுகள்	Dependent events
தனித்த தொடர்	Discrete series
தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள்	Grouped data
தொடர்ச்சியான தொடர்	Continuous series
நிகழ்தகவு	Probability
நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு	Conditional probability
நூற்றுமானம்/ சதமானம்	Percentile
பதின்மானம்	Decile
முகடு	Mode
முழுமையான நிகழ்வுகள்	Exhaustive events
வீச்சு	Range

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



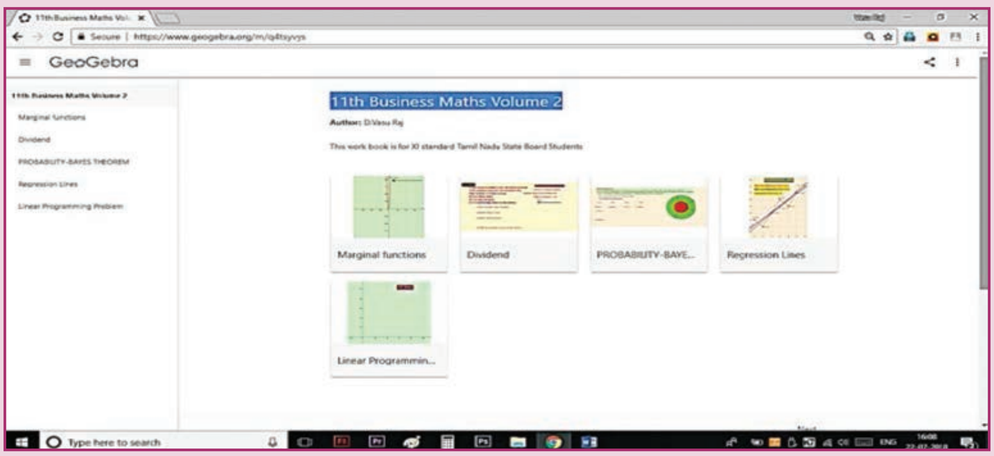
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "11th Business Maths Volume–2" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் இருக்கும்.

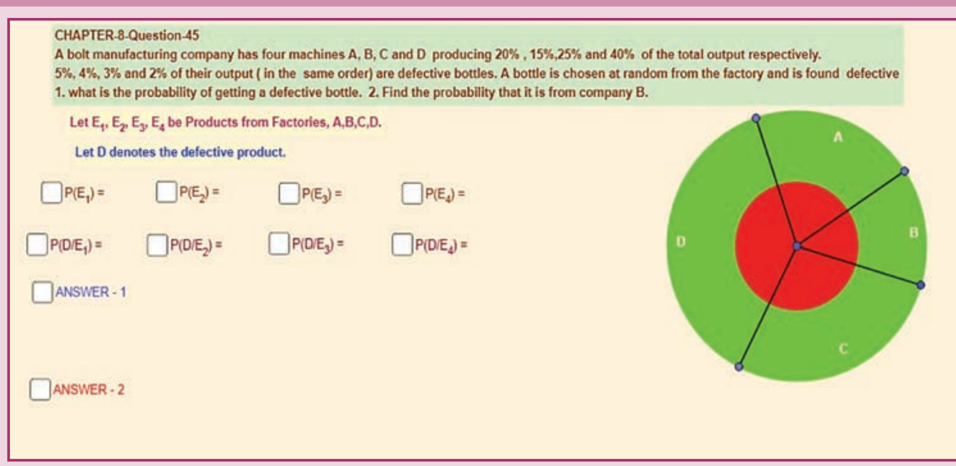
படி - 2

"Probability–Bayes theorem" என்பதைத் தேர்வு செய்து, கொடுத்திருக்கும் கட்டங்களைத் தேர்வு செய்து, படிப்படியாக நிகழ்தகவினை அறிக. Select the work sheet "Probability–Bayes theorem" Find each probabilities step by step as shown and Click on the respective boxes to see the answers.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/q4tsyvys (or) scan the QR Code

அத்தியாயம்

9

ஒட்டுறவு மற்றும் தொடர்புப் போக்கு பகுப்பாய்வு

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துக்கொள்ள இயலும்

- கார்ல் பியர்சன் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் கருத்துரு மற்றும் அதனைக் கணக்கிடும் முறைகள்.
- ஸ்பியர்மேனின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு
- தொடர்பு போக்குகளின் கருத்துரு மற்றும் தொடர்பு போக்குக் கெழு.
- y ன் மீது x ன் தொடர்பு போக்கு கோடுகள் மற்றும் x ன் மீது y ன் தொடர்பு போக்கு கோடுகள்.

9.1 ஒட்டுறவு

அறிமுகம்

முந்தைய பாடத்தில் நாம் ஒரே ஒரு மாறியின் பண்புகளைக் கற்றோம். உதாரணமாக, மதிப்பெண்கள், நிறைகள், உயரங்கள், மழைப்பொழிவுகள், விலைகள், விற்பனைகள் போன்றவைகள் ஆகும். இவ்வகைப் பகுப்பாய்வுகள் ஒற்றை மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு எனப்படும். சில நேரங்களில் இரு மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்பதில் நாம் விருப்பம் கொள்வோம். உதாரணமாக பொருளின் விலை மற்றும் அதன் விற்பனை, தந்தையின் உயரம் மற்றும் மகனின் உயரம், விலை மற்றும் தேவை, விளைச்சல் மற்றும் மழை பொழிவு, உயரம் மற்றும் எடை போன்றவை ஆகும். இவ்வாறாக ஒட்டுறவின் கருத்துருவானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயானத் தொடர்பை ஒன்றையொன்று சார்ந்து, ஏற்ற இறக்கம் காணும் இருமாறிகளின் படியை அல்லது நீட்சியை அளவிடுவதும், பகுப்பாய்வு செய்வதுமான புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு ஒட்டுறவாகும்.

கார்ல் பியர்சன்

9.1.1 ஒட்டுறவின் பொருள் (Meaning of Correlation)

ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை குறிக்கின்றது. ஒரு மாறியின் மாற்றம் மற்ற மாறியில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்தினால் அவ்விரு மாறிகளையும் ஒட்டுறவு மாறிகள் (தொடர்புள்ள மாறிகள்) என்போம்.

9.1.2 ஒட்டுறவின் வகைகள் (Types of correlation)

ஒட்டுறவு பலப் பிரிவுகளாக வகைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது. அவற்றுள் முக்கியமானவை

(i) நேரிடை ஒட்டுறவு

(ii) எதிரிடை ஒட்டுறவு

நேரிடை மற்றும் எதிரிடை ஒட்டுறவானது மாறிகளின் மாற்றத்தின் திசையைச் சார்ந்தது.

நேரிடை ஒட்டுறவு (Positive Correlation)

இரு மாறிகளின் மதிப்புகளும் ஒரே திசையில் மாறுபட்டால், அதாவது, ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்பொழுது, அதனுடன் தொடர்புடைய மற்றோரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரித்தாலோ அல்லது ஒரு மாறியின் மதிப்பு குறையும்பொழுது அதனுடன் தொடர்புடைய மற்றோரு மாறியின் மதிப்பு குறைந்தாலோ, அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ளத் தொடர்பை நேரிடை ஒட்டுறவு என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் (Example)

(i) தனி மனிதர்களின் உயரம் மற்றும் எடை
(ii) விலை மற்றும் அளிப்பு
(iii) மழைப்பொழிவு மற்றும் பயிர்களின் விளைச்சல்
(iv) வருவாய் மற்றும் செலவு

எதிரிடை ஒட்டுறவு (Negative Correlation)

இரு மாறிகளின் மதிப்புக்கள் எதிர் திசையில் மாறுபட்டால், அதாவது ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது (அல்லது குறையும் பொழுது) அதனுடன் தொடர்புடைய மற்ற மாறியின் மதிப்பு குறைந்தாலோ (அல்லது அதிகரித்தாலோ) அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை எதிரிடை ஒட்டுறவு என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் (Example)

(i) விலை மற்றும் தேவை
(ii) திருப்பிச் செலுத்த வேண்டியக் காலம் மற்றும் சுலப மாதத்தவணை
(iii) பயிர்களின் விளைச்சல் மற்றும் விலை

ஒட்டுறவு இன்மை (No Correlation)

ஒரு மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் மதிப்பு மற்றொரு மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் மதிப்பிற்குக் காரணமாக அமையவில்லை எனில், அவ்விரு மாறிகளும் ஒட்டுறவு அற்றவை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு: (For example)

தனி மனிதனின் நிறை மற்றும் அவரின் தலை முடியின் நிறம் அல்லது தனிமனிதனின் உயரம் மற்றும் அவரின் தலை முடியின் நிறம் ஆகியவற்றிற்கிடையே பூச்சிய ஒட்டுறவு இருப்பதை நாம் கண்டிப்பாக பார்க்க இயலும்.

எளிய ஒட்டுறவு (Simple correlation)

இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவு, எளிய ஒட்டுறவு எனப்படும். இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவு, பன்முக ஒட்டுறவு எனப்படும்.

பின்வருவன ஒட்டுறவுக் கெழுவின் கணித முறைகளாகும்.

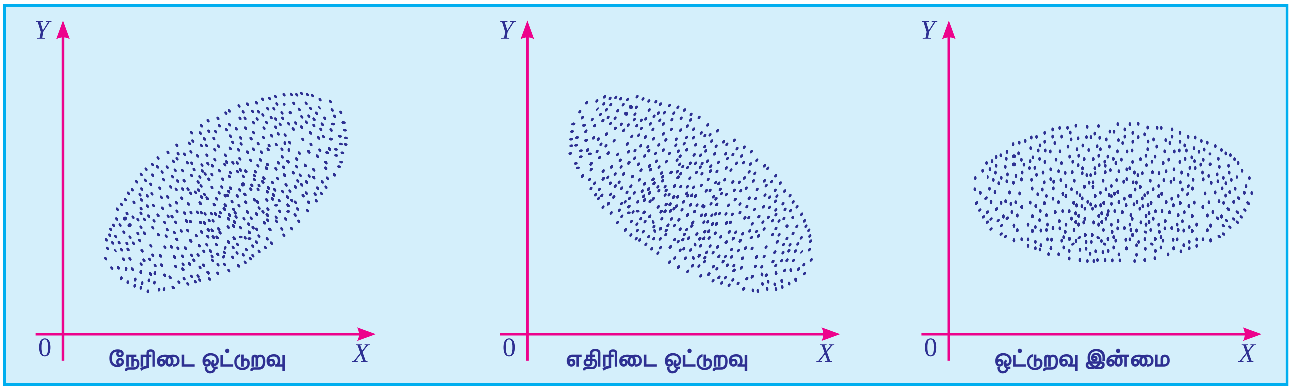
(i) சிதறல் விளக்கப்படம் (வரைபடம்) (Scatter diagram)

(ii) கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக்கெழு (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

9.1.3 சிதறல் விளக்கப்படம் (Scatter Diagram)

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \ldots (X_N, Y_N)$ என்பவை X மற்றும் Y மாறிகளின் N இணை மதிப்புகள் என்க. X ன் மதிப்புகளை x அச்சுத் திசையிலும் அதனுடன் தொடர்புடைய, Y –ன் மதிப்புகளை y அச்சுத் திசையிலும் குறிக்கும்பொழுது கிடைக்கப் பெறும் வரைபடம் சிதறல் விளக்கப்படம் என அழைக்கப்படுகிறது. X மற்றும் Y மாறிலிகளின்மதிப்புக்களுக்கிடையே உள்ளத் தொடர்பை இவ்விளக்கப் படம் பிரதிபலிக்கின்றது.

எளிய நேர்கோட்டு ஒட்டுறவிற்கான சிதறல் விளக்கப்படங்கள் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 9.1

(i) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் மேல்நோக்கியப் போக்கினைக் கொண்டிருந்தால், மாறிகளுக் கிடையே நேரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.

(ii) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் கீழ்நோக்கியப் போக்கினைக் கொண்டிருந்தால், மாறிகளுக்கிடையே எதிரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.

(iii) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் எவ்வித போக்கினையும் கொண்டிருக்கவில்லை எனில், அம்மாறிகள் ஒட்டுறவு அற்றது எனலாம்.

9.1.4 கார்ல்பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு (Karl Pearson's Correlation Coefficient)

தலைசிறந்த உயிரியல் ஆய்வாளரும் மற்றும் புள்ளியல் நிபுணருமான கார்ல் பியர்சன் என்பவர் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர்க்கோட்டு தொடர்பின் அளவை விவரிக்க (அளக்கக்கூடிய) கணித முறையை உருவாக்கினர். நடைமுறையில், பெருமளவில் பயன்படுத்தப்படும் கார்ல்பியர்சனின் முறையானது, பியர்சனின் ஒட்டறவுக்கெழு என அழைக்கப்படுகிறது. இது r என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$r = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

இங்கு $\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{N}\sum(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2}$$

எனவே கார்ல்பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுவதற்கானச் சூத்திரம்

$$r = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான விளக்கம்: (Interpretation of Correlation coefficient)

ஒட்டுறவுக் கெழு -1 லிருந்து $+1$ க்கு இடையே ஓர் மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

குறியீட்டில் $-1 \le r \le +1$

- $r = +1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவு முழுமையான நேரிடை ஒட்டுறவு எனப்படும்.
- $r = -1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவு முழுமையான எதிரிடை ஒட்டுறவு எனப்படும்.
- $r = 0$ எனில் மாறிகளுக்கிடையே எவ்வித தொடர்பும் இல்லை அதாவது ஒட்டுறவு அற்றது எனப்படும்.

எனவே ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஒட்டுறவின் அளவு மற்றும் திசையை விவரிக்கிறது.

ஒட்டுறவுக் கெழுவை காணும் முறைகள் (Methods of computing Correlation Coefficient)

(i) சராசரியைப் பொறுத்து விலக்கம் எடுக்கப்படும் போது: (When deviations are taken from Mean)

ஒட்டுறவை அளக்கும் பல்வேறு கணித முறைகளுள் பெருமளவில் நடைமுறையில் பயன்படுத்தப்படுவது, பிரபலமாக பியர்சனின் ஒட்டறவுக் கெழு என அழைக்கப்பெறும் கார்ல் பியர்சன் முறை ஆகும்.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2}} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

இங்கு $x = (X_i - \overline{X})$ மற்றும் $y = (Y_i - \overline{Y})$; $i = 1, 2 \ldots N$

உருப்படிகளின் விலக்கங்கள் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் பொழுது மட்டுமே இம்முறையை பயன்படுத்த வேண்டும்.

கணக்குகளின் தீர்வு காண படிகள்: (Steps to solve the problems)

(i) இரண்டு தொடர்களின் சராசரி, அதாவது $\bar{X}$ மற்றும் $\bar{Y}$ –ஐ காண்க.

(ii) இரண்டு தொடர்களின் விலக்கங்கள் முறையே $\bar{X}$ மற்றும் $\bar{Y}$ களிலிருந்து எடுத்து இதனை x மற்றும் y எனக் குறிப்பிடுக.

(iii) x மற்றும் y ஆகியவற்றின் விலக்கங்களின் வர்க்க கூடுதல் கணக்கிட்டு, அவற்றை $\sum x^2$ மற்றும் $\sum y^2$ எனக் குறிப்பிடுக.

(iv) x மற்றும் y களின் விலக்கங்களைப் பெருக்கி, அவற்றின் கூடுதல் $\sum xy$ காண்க.

(v) $\sum xy$, $\sum x^2$ மற்றும் $\sum y^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை மேற்கண்டச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

பின்வரும் விவரங்களுக்கு கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக

X:	6	8	12	15	18	20	24	28	31
Y:	10	12	15	15	18	25	22	26	28

தீர்வு:

X	$x=(X-18)$	x^2
6	–12	144
8	–10	100
12	–6	36
15	–3	9
18	0	0
20	2	4
24	6	36
28	10	100
31	13	169
$\sum X = 162$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 598$

Y	$y=(Y-19)$	y^2	xy
10	–9	81	108
12	–7	49	70
15	–4	16	24
15	–4	16	12
18	–1	1	0
25	6	36	12
22	3	9	18
26	7	49	70
28	9	81	117
$\sum Y = 171$	$\sum y = 0$	$\sum y^2 = 338$	$\sum xy = 431$

அட்டவணை 9.1

$$N=9,\ \bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{162}{9} = 18,\ \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{171}{9} = 19$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

இங்கு $x=(X-\bar{X})$ மற்றும் $y=(Y-\bar{Y})$

$$\Sigma xy = 431,\ \Sigma x^2 = 598,\ \Sigma y^2 = 338$$

$$r = \frac{431}{\sqrt{598 \times 338}} = \frac{431}{449.582} = +0.959$$

(ii) மதிப்புகள் மாற்றமில்லாமல் எடுக்கப்படும்பொழுது (விலக்கமில்லாமல்) (When actual values are taken (without deviation))

மதிப்புகள் குறிப்பிடத்தக்க அளவில் சிறியதாக இருக்கும் நிலையில் பின்வரும் சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \times \sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.2

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக

X	12	9	8	10	11	13	7
Y	14	8	6	9	11	12	3

தீர்வு:

இரண்டு தொடர்களில் உள்ள எண் விவரங்கள் சிறிய எண்களாக உள்ளன. எனவே சராசரி அல்லது ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கு எடுக்காமல் ஒட்டுறவுக் கெழுவினை காணலாம்.

X	Y	X^2	Y^2	XY
12	14	144	196	168
9	8	81	64	72
8	6	64	36	48
10	9	100	81	90
11	11	121	121	121
13	12	169	144	156
7	3	49	9	21
$\sum X = 70$	$\sum Y = 63$	$\sum X^2 = 728$	$\sum Y^2 = 651$	$\sum XY = 676$

அட்டவணை 9.2

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \times \sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{7(676) - (70)(63)}{\sqrt{7(728) - (70)^2} \times \sqrt{7(651) - (63)^2}}$$

$$= \frac{322}{339.48}$$

$$r = +0.95$$

(iii) ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் எடுக்கப்படும் நிலையில் (When deviations are taken from an Assumed mean)

சராசரி முழு எண்ணாக இல்லாத நிலையில், அதாவது X மற்றும் Y தொடர்களில் சரசாரி 20.167 மற்றும் 29.23 எனில் மேற்கண்ட முறையில் ஒட்டுறவுக் காணும்பொழுது கணக்கீடு கடினமானதாகவும், அதிக நேரம் எடுப்பதாகவும் இருக்கும். அவ்வாறான நிலையில் ஊகச் சராசரி முறை மூலம் ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காணலாம். விலக்கமானது ஊகச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் நிலையில் பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$r = \frac{N\Sigma\, dx\, dy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{N\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2} \times \sqrt{N\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

இங்கு $dx = X - A$ மற்றும் $dy = Y - B$. A மற்றும் B என்பன ஊகச் சராசரிகள்.

குறிப்பு

ஊகச் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தும்பொழுது எந்த மதிப்பை ஊகச் சராசரியாக எடுத்தாலும் ஒரே விடைதான் கிடைக்கும். இருந்தபோதிலும் ஊகச் சராசரியைச் சராசரிக்கு அருகாமையில் எடுக்கும்போது, கணக்கீடு எளிமையானதாக இருக்கும்.

ஊகச் சராசரி கணக்குகளின் தீர்வு காண படிகள் (Steps to solve the problems)

(i) X தொடருக்கு ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் எடுத்து, இவ்விலக்கங்களை dx எனக் குறித்து Σdx காண்க.

(ii) Y தொடருக்கு ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் எடுத்து, இவ்விலக்கங்களை dy என குறித்து Σdy காண்க.

(iii) dx–ஐ வர்க்கப்படுத்தி Σdx^2 காண்க.

(iv) dy–ஐ வர்க்கப்படுத்தி Σdy^2 காண்க.

(v) dx மற்றும் dy ஆகிய இரண்டையும் பெருக்கிக் $\Sigma dx\, dy$ காண்க.

(vi) $\Sigma\, dxdy$, $\Sigma\, dx$, $\Sigma\, dy$, $\Sigma\, dx^2$ மற்றும் $\Sigma\, dy^2$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை மேலேக் கொடுக்கப்பட்டச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

எடுத்துக்காட்டு 9.3

பின்வருவனவற்றுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க. மேலும் அதன் உட்பொருளை வெளிப்படுத்து.

தந்தையின் உயரம் (அங்குலங்களில்)	65	66	67	67	68	69	71	73
மகனின் உயரம் (அங்குலங்களில்)	67	68	64	68	72	70	69	70

தீர்வு:

தந்தையின் உயரம் (அங்குலங்களில்) X எனவும், மகனின் உயரம் (அங்குலங்களில்) Y எனவும் கொள்க.

X	$dx = (X-67)$	dx^2
65	-2	4
66	-1	1
67	0	0
67	0	0
68	1	1
69	2	4
71	4	16
73	6	36
$\sum X = 546$	$\sum dx = 10$	$\sum dx^2 = 62$

Y	$dy = (Y-68)$	dy^2	$dxdy$
67	−1	1	2
68	0	0	0
64	-4	16	0
68	0	0	0
72	4	16	4
70	2	4	4
69	1	1	4
70	2	4	12
$\sum Y = 548$	$\sum dy = 4$	$\sum dy^2 = 42$	$\sum dxdy = 26$

அட்டவணை 9.3

$$r = \frac{N\,\Sigma dx\,dy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{N\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2} \times \sqrt{N\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

இங்கு

$\Sigma dx = 10,\ \Sigma dx^2 = 62,\ \Sigma dy = 4,\ \Sigma dy^2 = 42$ மற்றும் $\Sigma dxdy = 26$

$$r = \frac{(8 \times 26) - (10 \times 4)}{\sqrt{(8 \times 62) - (10)^2} \times \sqrt{(8 \times 42) - (4)^2}}$$

$$r = \frac{168}{\sqrt{396} \times \sqrt{320}}$$

$$r = \frac{168}{355.98} = 0.472$$

$$r = +0.472$$

தந்தையரின் உயரங்கள் மற்றும் அவர்களுக்கு தொடர்புடைய மகன்களின் உயரங்கள் ஆகியவற்றிற்கிடையே நேரடியான ஒட்டுறவு உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9.4

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

$N=9,\ \sum X = 45,\ \sum Y = 108,\ \Sigma X^2 = 285,$
$\Sigma Y^2 = 1356,\ \Sigma XY = 597.$

தீர்வு:

ஒட்டுறவுக் கெழு

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{9(597) - (45 \times 108)}{\sqrt{9(285) - (45)^2} \times \sqrt{9(1356) - (108^2)}}$$

$r = +0.95$

எடுத்துக்காட்டு 9.5

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

$$\Sigma xy = 120,\ \Sigma x^2 = 90,\ \Sigma y^2 = 640$$

தீர்வு:

$\Sigma xy = 120,\quad \Sigma x^2 = 90,\ \Sigma y^2 = 640$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} = \frac{120}{\sqrt{90(640)}} = \frac{120}{\sqrt{57600}}$$

$$= \frac{120}{240} = 0.5$$

9.2 தர ஒட்டுறவுக் கெழு (Rank correlation)

9.2.1 ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு (Spearman's Rank Correlation Coefficient)

1904–ல் சார்லஸ் எட்வர்ட் ஸ்பியர்மென் என்ற பிரிட்டிஷ் உளவியல் வல்லுனரால் ஒட்டுறவுக் கெழுவைத் தரத்தின் மூலம் காணும்

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 231 08-12-2021 21:55:45

முறையைக் கண்டுபிடித்தார். இம்முறை தரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இம்முறை தர பண்புகளான அதாவது அறிவு, அழகு, நடத்தை, குணம் போன்றவைகளை அளவீடு செய்யப் பயன்படுகிறது. இதனை பியர்சனின் ஒட்டுறவுக்கெழு போல் எண்ணளவில் அளவீடு செய்ய இயலாது.

தனித்த விவரங்களுக்கு மட்டுமே தர ஒட்டுறவுக் கெழுவை பயன்படுத்த இயலும். இம்முறையில் பெரும்பாலும் முடிவு தோராயமானது, ஏனெனில் இம்முறையில் உண்மையான மதிப்பு கணக்கில் கொள்ளப்படுவதில்லை. ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு "row" என்று உச்சரிக்கப்பட்டு, 'ρ' என்றக் குறியீட்டின் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு காண்பதற்கான சூத்திரம்,

$$\rho = 1-\frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)} \text{ (அல்லது)}$$

$$\rho = 1-\frac{6\Sigma d^2}{N^3-N}$$

இங்கு d = இரண்டு தரங்களின் வேறுபாடு = $R_X - R_Y$ மற்றும்

N = இணை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

தர ஒட்டுறவுக் கெழு -1லிருந்து $+1$ க்கு இடையே ஓர் மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

குறியீட்டில் $-1 \le \rho \le +1$

ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவு கணக்கிடும் பொழுது, நாம் இரண்டு வகையான கணக்குகளை காணலாம்

(i) தரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது

(ii) தரங்கள் கொடுக்கப்படாத பொழுது

எடுத்துக்காட்டு 9.6

புள்ளியியல் மற்றும் கணிதவியலில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற தரவரிசைகள் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

புள்ளியியல்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
கணிதவியல்	1	4	2	5	3	9	7	10	6	8

தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு:

R_X என்பது புள்ளியியல் பாடத்தில் மாணவர்கள் பெற்றத் தரவரிசை என்க. R_Y என்பது கணிதவியல் பாடத்தில் மாணவர்கள் பெற்றத் தரவரிசை என்க.

R_X	R_Y	$d = R_X - R_Y$	d^2
1	1	0	0
2	4	-2	4
3	2	1	1
4	5	-1	1
5	3	2	4
6	9	-3	9
7	7	0	0
8	10	-2	4
9	6	3	9
10	8	2	4
			$\sum d^2 = 36$

அட்டவணை 9.4

தர ஒட்டுறவுக் கெழு கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\rho = 1-\frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6(36)}{10(10^2-1)}$$

$$= 1-0.218$$

$$\therefore \rho = 0.782$$

எடுத்துக்காட்டு 9.7

அழகுப் போட்டியில் பங்கேற்ற 10 போட்டியாளர்களுக்கு, மூன்று நீதிபதிகள் அளித்தத்தரவரிசைகீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

முதல் நீதிபதி	1	4	6	3	2	9	7	8	10	5
இரண்டாம் நீதிபதி	2	6	5	4	7	10	9	3	8	1
மூன்றாம் நீதிபதி	3	7	4	5	10	8	9	2	6	1

தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் பயன்படுத்தி எந்த இரு நீதிபதிகளுக்கு அழகியல் கருத்தில் பொதுவான அணுகுமுறை உள்ளது எனக் காண்க?

தீர்வு:

R_X, R_Y, R_Z என்பன முறையே முதல், இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நீதிபதிகள் போட்டியாளர்களுக்கு அளித்தத் தரவரிசையைக் குறிக்கின்றது.

R_X	R_Y	R_Z	$d_{XY} = R_X - R_Y$	$d_{YZ} = R_Y - R_Z$	$d_{ZX} = R_Z - R_X$
1	2	3	-1	-1	2
4	6	7	-2	-1	3
6	5	4	1	1	-2
3	4	5	-1	-1	2
2	7	10	-5	-3	8
9	10	8	-1	2	-1
7	9	9	-2	0	2
8	3	2	5	1	-6
10	8	6	2	2	-4
5	1	1	4	0	-4

d^2_{XY}	d^2_{YZ}	d^2_{ZX}
1	1	4
4	1	9
1	1	4
1	1	4
25	9	64
1	4	1
4	0	4
25	1	36
4	4	16
16	0	16
$\sum d^2_{XY} = 82$	$\sum d^2_{YZ} = 22$	$\sum d^2_{ZX} = 158$

அட்டவணை 9.5

$$\rho_{XY} = 1 - \frac{6\Sigma d^2_{XY}}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(82)}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - 0.4969 = 0.5031$$

$$\rho_{YZ} = 1 - \frac{6\Sigma d^2_{YZ}}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(22)}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{132}{990} = 1 - 0.1333 = 0.8667$$

$$\rho_{ZX} = 1 - \frac{6\Sigma d^2_{ZX}}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(158)}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - 0.9576 = 0.0424$$

இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நீதிபதிகளுக்கு இடையேயான தரஒட்டுறவுக் கெழு அதாவது ρ_{YZ} என்பது மூன்று கெழுக்களிடையே, மிகை மற்றும் அதிக நிறை கொண்டுள்ளது. எனவே, இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நீதிபதிகளுக் கிடையே அழகியல் பற்றி ஒரு பொதுவான அணுகுமுறை காணப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.8

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குத் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவை காண்க.

பாடம் 1	பாடம் 2
40	45
46	46
54	50
60	43
70	40
80	75
82	55
85	72
87	65
90	42
95	70

தீர்வு:

X என்பது பாடம் 1 எனவும் மற்றும் Y என்பது பாடம் 2 எனவும் கருதவும்.

X	Y	R_X	R_Y	$d = R_X - R_Y$	d^2
40	45	1	4	–3	9
46	46	2	5	–3	9
54	50	3	6	–3	9
60	43	4	3	1	1
70	40	5	1	4	16
80	75	6	11	–5	25
82	55	7	7	0	0
85	72	8	10	–2	4
87	65	9	8	1	1
90	42	10	2	8	64
95	70	11	9	2	4
					$\sum d^2 = 142$

அட்டவணை 9.6

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(142)}{11(11^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{852}{1320} = 0.354$$

பயிற்சி 9.1

1. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

X	5	10	5	11	12	4	3	2	7	1
Y	1	6	2	8	5	1	4	6	5	2

2. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

விலை (₹)	14	19	24	21	26	22	15	20	19
விற்பனை (₹)	31	36	48	37	50	45	33	41	39

3. கணவர்கள் மற்றும் அவர்தம் மனைவியர்களின் வயதிற்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவை காண்க.

கணவர்களின் வயது	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
மனைவிகளின் வயது	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

4. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து X மற்றும் Y தொடர்களுக்கிடையே ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

விவரங்கள்	X	Y
இணை சோடிகளின் விவரங்களின் எண்ணிக்கை	15	15
கூட்டுச் சராசரி	25	18
திட்ட விலக்கம்	3.01	3.03
சராசரியிலிருந்துப் பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்	136	138

X மற்றும் Y தொடர்களுக்கு முறையே அவற்றின் சராசரிகளிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் பெருக்கல்களின் கூடுதல் 122 ஆகும்.

5. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக்கெழு கணக்கிடுக

X	25	18	21	24	27	30	36	39	42	48
Y	26	35	48	28	20	36	25	40	43	39

6. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினை காண்க.

X	78	89	96	69	59	79	68	62
Y	121	72	88	60	81	87	123	92

7. கணக்காளர் பதவிக்கு விண்ணப்பம் செய்த 11 விண்ணப்பதாரர்களுக்கு ஒரு நிறுவனம் நடத்திய போட்டித் தேர்வில் திறனாய்வுத் தேர்வு மற்றும் தர்க்க அறிவுத்தேர்வில்

அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

விண்ணப்பதாரர்	தர்க்க அறிவுத் தேர்வு	திறனாய்வுத் தேர்வு
A	20	30
B	50	60
C	28	50
D	25	40
E	70	85
F	90	90
G	76	56
H	45	82
I	30	42
J	19	31
K	26	49

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

8. பத்து மாணவர்கள் வணிகவியல் மற்றும் கணக்குப் பதிவியல் பாடத்தில் பெற்றத் தரங்கள் பின்வருமாறு

வணிகவியல்	6	4	3	1	2	7	9	8	10	5
கணக்குப் பதிவியல்	4	1	6	7	5	8	10	9	3	2

இரு பாடங்களில் மாணவர்களின் அறிவு எந்த அளவிற்குத் தொடர்புடையது?

9. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டச் சமீபத்தியப் பழுது வேலைகளின் மதிப்பிடப்பட்ட விலை மற்றும் அசல் விலை பதிவுச் செய்யப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பிடப்பட்ட செலவு	300	450	800	250	500	975	475	400
அசல் செலவு	273	486	734	297	631	872	396	457

ஸ்பியர்மென்னின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

10. ஒரே ஆண்டில் படித்த 10 மாணவர்கள் A மற்றும் B பாடங்களில் பெற்ற தரங்கள் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக.

A–ன் தரவரிசை	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B –ன் தரவரிசை	6	7	5	10	3	9	4	1	8	2

9.3 தொடர்புப் போக்கு பகுப்பாய்வு (Regression Analysis)

அறிமுகம்

இதுவரையில் நாம் இரு மாறிகளுக் கிடையேயான திசை மற்றும் உறவின் வலிமை ஆகியவற்றை அளவிடும் ஒட்டுறவுப் பகுப்பாய்வினைப் பற்றிக் கற்றோம். இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மாறியின் மதிப்பிலிருந்து மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை நாம் மதிப்பிடவோ அல்லது கணிக்கவோ இயலும். எடுத்துக் காட்டாக, விலை மற்றும் தேவை என்பன ஒட்டுறவுப் பெற்றவை. கொடுக்கப்பட்ட விலைக்கு ஏற்ப எதிர்பார்க்கப்படும் தேவையின் அளவையோ அல்லது கொடுக்கப்பட்ட தேவையின் அளவிற்கேற்ப தேவைப்படும் விலையின் அளவையோ நாம் காணலாம்.

"தொடர்புப் போக்கு" என்பதன் பொருள் யாதெனில் "சராசரியை நோக்கி பின்நோக்கி செல்லுதல்" என்பதாகும். சர் பிரான்ஸிஸ் கால்டன் (1822 – 1911) என்ற ஒரு பிரிட்டன் உயிர் நுட்பவியலாளர், மரபுவழித் தொடர்கிற குணாதிசயங்களை ஆராயும் பொழுது இதனை முதன் முதலில் பயன்படுத்தினார். மிகவும் உயரமான அல்லது குள்ளமான பெற்றோர்களின் வாரிசுகளின் மக்கள் தொகையானது சராசரியான உயரத்தை அடைவதைக் கால்டன் கண்டார். ஆனால் தற்போது தொடர்புப் போக்கு என்கிற வார்த்தை உயிர்நுட்பவியலில் தொடர்பு இல்லாமல் புள்ளியியலில் மட்டும் சாதகமாக பயன்படுத்தப்படும் ஓர் வார்த்தையாக உள்ளது.

வரையறை 9.1

தொடர்புப் போக்கு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ளச் சராசரித் தொடர்பை கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் அலகில் அறியும் கணக்கியல் அளவு ஆகும்.

9.3.1 சார்புள்ள மாறி மற்றும் சார்பற்ற மாறி (Dependent and independent variables)

வரையறை 9.2

தொடர்புப் போக்கு ஆய்வில் இரு வகையான மாறிகள் உள்ளன. கணிக்கக்கூடிய மாறி சார்புள்ள மாறி எனவும் கணிப்பதற்குப் பயன்படக்கூடிய மாறி சார்பற்ற மாறி எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

ஒரு மாறியின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால் மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிட தொடர்புக் போக்கு நமக்கு பயன்படுகிறது. ஒரு மாறியின் மதிப்பு தெரியாத நிலையில், அதனை மதிப்பிடுவதற்கு, அதனுடன் தொடர்புடைய மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை பயன்படுத்தும் புள்ளியியல் முறை, தொடர்புப் போக்கு எனப்படும்.

9.3.2 தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகள் (Regression Equations)

தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகள் என்பன தொடர்புப் போக்கு கோடுகளின் இயற்கணித அமைப்பாகும். இரண்டு தொடர்புப் போக்கு கோடுகள் உள்ளதால், இரண்டு தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகள் உள்ளன. கொடுக்கப்பட்ட Y–ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்திற்கேற்ப X–ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தை விவரிக்க Y–ன் மீதான X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு பயன்படுத்தப்படுகிறது மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட X–ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்திற்கேற்ப Y–ன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தை விவரிக்க X–ன் மீதான Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு பயன்படுத்தப்படுகிறது. தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் (i) Y–ன் மீதான X–ன் சமன்பாடு (ii) X–ன் மீதான Y–ன் சமன்பாடு மற்றும் அவற்றின் கெழுக்கள் பல்வேறு வகைகளில் கீழ்கண்டவாறு விவரிக்கப்படுகிறது.

வகை 1: கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை அவ்வாறே எடுத்துக்கொள்ளும் பொழுது

X மற்றும் Y மாறிகளில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை அவ்வாறே எடுத்துக்கொள்ளும் பொழுது இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் மற்றும் அவைகளின் கெழுக்கள் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதப்படுகின்றது.

(i) Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு :

$$X-\overline{X} = b_{xy}(Y-\overline{Y})$$

இங்கு X தொடரின் சராசரி $\overline{X}$,

Y தொடரின் சராசரி $\overline{Y}$,

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2}$$ என்பது

Y–ன் மீதான X–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு மற்றும் r என்பது X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக்கெழு, σ_x மற்றும் σ_y ஆகியன முறையே X மற்றும் Y திட்ட விலக்கங்கள் ஆகும்.

(ii) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$$

இங்கு X தொடரின் சராசரி $\overline{X}$,

Y தொடரின் சராசரி $\overline{Y}$,

$$b_{yx} = r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}$$ என்பது

X–ன் மீதான Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு மற்றும் r என்பது X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழு, σ_x, σ_y ஆகியன முறையே X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் திட்ட விலக்கங்கள் ஆகும்.

வகை 2 : X மற்றும் Y ஆகியவைகளின் கூட்டுசராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள் பெற்று கணக்கிடுதல்

X மற்றும் Y ஆகியவைகளின் மதிப்புகளுக்கு பதிலாக X மற்றும் Y தொடர்களின் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் கண்டு கணக்கிடுவது மிக எளிது. அவ்வாறான நிலையில் இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் மற்றும் அவைகளின் கெழுக்கள் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதப்படுகின்றது.

(i) Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$X-\overline{X} = b_{xy}\ (Y-\overline{Y})$$

இங்கு X தொடரின் சராசரி $\overline{X}$,

Y தொடரின் சராசரி $\overline{Y}$,

$b_{xy} = r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$ என்பது Y−ன் மீதான X−ன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு, $x = (X-\overline{X})$ மற்றும் $y = (Y-\overline{Y})$

(ii) X−ன் மீது Y−ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$$

இங்கு X தொடரின் சராசரி $\overline{X}$,

Y தொடரின் சராசரி $\overline{Y}$,

$b_{yx} = r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ என்பது Y−ன் மீதான X−ன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு,

$x = (X-\overline{X})$ மற்றும் $y = (Y-\overline{Y})$

குறிப்பு

ஒட்டுறவுக் கெழு σ_X, σ_Y காண்பதற்குப் பதிலாக Σxy, Σy^2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுவைக் காணலாம்.

வகை 3: ஊகச் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கம் பெறுதல்

X மற்றும் Y மாறிகளின் சராசரிகள் பின்னமாக இருக்கையில் ஊகச் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கங்கள் பெறப்பட்டு கணக்கீடுகளை எளிதாக்க முடியும். இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் மற்றும் அவைகளின் கெழுக்கள் கீழ்கண்டவாறு எழுதப்படுகின்றது.

(i) X−ன் மீது Y−ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$$

$$b_{yx} = \frac{N\Sigma dxdy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}$$

(ii) Y−ன் மீது X−ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

$$X-\overline{X} = b_{xy}(Y-\overline{Y})$$

$$b_{xy} = \frac{N\Sigma dxdy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}$$

இங்கு $dx=X-A$, $dy=Y-B$, A மற்றும் B ஆகியவைகள் ஊகச் சராசரிகள் அல்லது X மற்றும் Y ஆகியவற்றிலிருந்து முறையே பெறப்படும் தன்னிச்சையான மதிப்புகள் ஆகும்.

தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் பண்புகள்

(i) ஒட்டுறவுக் கெழுவானது தொடர்புப் போக்குக்கெழுக்களின் பெருக்கல் சராசரி ஆகும். $r = \pm\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$

(ii) ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மதிப்பு 1−ஐ விடப் பெரியது எனில் மற்றொன்றின் மதிப்பு 1−ஐ விடச் சிறியதாகத் தான் இருக்கும்.

(iii) இரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் ஒரே குறியைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.9

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள் மற்றும் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளை காண்க.

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	9	8	10	12	11	13	14

தீர்வு:

X	Y	X^2	Y^2	X^Y
1	9	1	81	9
2	8	4	64	16
3	10	9	100	30
4	12	16	144	48
5	11	25	121	55
6	13	36	169	78
7	14	49	196	98
$\Sigma X = 20$	$\Sigma Y = 77$	$\Sigma X^2 = 140$	$\Sigma Y^2 = 875$	$\Sigma XY = 334$

அட்டவணை 9.7

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{28}{7} = 4,$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{77}{7} = 11$$

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy} = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\,\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2}$$

$$= \frac{7(334)-(28)(77)}{7(875)-(77)^2}$$

$$= \frac{2338-2156}{6125-5929} = \frac{182}{196}$$

$$\therefore b_{xy} = 0.929$$

(i) Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$X-\overline{X} = b_{xy}(Y-\overline{Y})$

$X-4 = 0.929(Y-11)$

$X-4 = 0.929Y-10.219$

$\therefore$ Y–ன் மீது X–ன் தொடர்பு போக்குச் சமன்பாடு $X = 0.929Y-6.219$

(ii) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\,\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}$$

$$= \frac{7(334)-(28)(77)}{7(140)-(28)^2}$$

$$= \frac{2338-2156}{980-784}$$

$$= \frac{182}{196}$$

$$\therefore b_{yx} = 0.929$$

(iii) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$

$Y-11 = 0.929\,(X-4)$

$Y = 0.929X-3.716+11$

$Y = 0.929X+7.284$

$\therefore$ X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு $Y = 0.929X + 7.284$

எடுத்துக்காட்டு 9.10

கீழேத் தரப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு X மற்றும் Y–ன் சராசரிகளிலிருந்து விலக்கம் கண்டு Y–ன் மீதான X மற்றும் X–ன் மீதான Y–ன் இரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களைக் காண்க.

விலை (ரூபாய்களில்)	10	12	13	12	16	15
தேவைப்படும் அளவு	40	38	43	45	37	43

விலை ₹ 20 எனும்போது எதிர் பார்க்கப்படும் தேவையை மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

X	$x = (X-13)$	x^2
10	–3	9
12	–1	1
13	0	0
12	–1	1
16	3	9
15	2	4
$\sum X = 78$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 24$

Y	$y = (Y-41)$	y^2	xy
40	–1	1	3
38	–3	9	3
43	2	4	0
45	4	16	–4
37	–4	16	–12
43	2	4	4
$\sum Y = 246$	$\sum y = 0$	$\sum y^2 = 50$	$\sum xy = -6$

அட்டவணை 9.8

(i) Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X-\overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y})$$

$$\overline{X} = \frac{78}{6} = 13, \quad \overline{Y} = \frac{246}{6} = 41$$

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} = \frac{-6}{50} = -0.12$$

$X-13 = -0.12(Y-41)$

$X-13 = -0.12Y+4.92$

$X = -0.12Y+17.92$

(ii) X–ன் மீது Y-ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y-\overline{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$$

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = -\frac{6}{24} = -0.25$$

$$Y-41 = -0.25\,(X-13)$$

$$Y-41 = -0.25\,X+3.25$$

$$Y = -0.25\,X+44.25$$

$X= 20$, எனில் Y- ன் மதிப்பு

$$Y = -0.25\,(20)+44.25$$

$$= -5+44.25$$

$= 39.25$ (விலை ₹ 20 எனும் போது வாய்ப்புத் தேவை 39.25)

எடுத்துக்காட்டு 9.11

கீழ்க்கண்டவற்றிலிருந்து X –ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மற்றும் X=55 எனும்போது Y–ன் மதிப்பீடு காண்க.

X	40	50	38	60	65	50	35
Y	38	60	55	70	60	48	30

தீர்வு:

X	Y	dx = (X–48)	dx^2	dy = (Y–50)	dy^2	dxdy
40	38	–8	64	–12	144	96
50	60	2	4	10	100	20
38	55	–10	100	5	25	–50
60	70	12	144	20	400	240
65	60	17	289	10	100	170
50	48	2	4	-2	4	-4
35	30	-13	169	-20	400	260
$\sum X=$ 338	$\sum Y=$ 361	$\sum dx=$ 2	$\sum dx^2=$ 774	$\sum dy=$ 11	$\sum dy^2=$ 1173	$\sum dxdy=$ 732

அட்டவணை 9.9

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{338}{7} = 48.29$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{361}{7} = 51.57$$

(i) X ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{N\Sigma dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2}$$

$$= \frac{7(732)-(2)(11)}{7(774)-(2)^2}$$

$$= \frac{5124-22}{5418-4}$$

$$= \frac{5102}{5414}$$

$$= 0.942$$

$$b_{yx} = 0.942$$

(ii) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$$

$$Y-51.57 = 0.942(X-48.29)$$

$$Y = 0.942X-45.49+51.57$$

$$= 0.942 \times -45.49+51.57$$

$$Y = 0.942X+6.08$$

$\therefore$ X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$Y= 0.942X+6.08$

எனும்பொழுது Y–ன் மதிப்பீடு $X= 55$

$Y = 0.942(55)+6.08=57.89$

எடுத்துக்காட்டு 9.12

பின்வரும் தொடர்புப் போக்குச் சமன் பாட்டுகளிலிருந்து X, Y மாறிகளின் சராசரிகள் மற்றும் அவற்றிற்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவினை காண்க.

$2Y–X–50 = 0$

$3Y–2X–10 = 0$

தீர்வு:

$2Y–X–50 = 0$ ... (1)

$3Y–2X–10 = 0$ ... (2)

(1) யும் (2) யும் தீர்க்க

நாம் பெறுவது $Y = 90$

$Y = 90$ என (1) ல் பிரதியிட

$X = 130$

ஆகையால் $\overline{X} = 130$ மற்றும் $\overline{Y} = 90$

ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுதல்

(1) ஐ X–ன் மீது Y–ன் சமன்பாடாகக் கொள்க

$2Y = X+50$

$Y = \frac{1}{2}X+25 \quad b_{yx} = \frac{1}{2}$

(2) ஐ Y ன் மீது X ன் சமன்பாடாகக் கொள்க

$3Y-2X-10 = 0$

$2X = 3Y-10$

$X = \frac{3}{2}Y-5 \quad b_{xy} = \frac{3}{2}$

ஒட்டுறவுக் கெழு $r = \pm\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$

$r = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}} = 0.866$

குறிப்பு

மேலேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளக் கணக்கில் ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மதிப்பு ஒன்றை விடப் பெரியதாகவும் மற்றும் மற்றொரு கெழுவின் மதிப்பு ஒன்றை விட சிறியதாகவும் இருப்பதைக் கவனிக்கலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் மீதான நம்முடைய அனுமானம் சரியானது ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.13

மாறிகள் X, Y–ன் சராசரிகளையும் அவற்றிக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

$4X-5Y+33 = 0$

$20X-9Y-107 = 0$

தீர்வு:

$4X-5Y+33 = 0 \quad \dots (1)$

$20X-9Y-107 = 0 \quad \dots (2)$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ தீர்க்க,

நாம் பெறுவது $Y = 17$

Y–ன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட,

நாம் பெறுவது $X=13$

எனவே $\overline{X} = 13$ மற்றும் $\overline{Y} = 17$

ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுதல்

சமன்பாடு (1) என்பதனை Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு என்க.

$4X = 5Y-33$

$X = \frac{1}{4}(5Y-33)$

$X = \frac{5}{4}Y-\frac{33}{4}$

$b_{xy} = \frac{5}{4} = 1.25$

சமன்பாடு (2) என்பதனை X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு என்க.

$9Y = 20X-107$

$Y = \frac{1}{9}(20X-107)$

$Y = \frac{20}{9}X-\frac{107}{9}$

$b_{yx} = \frac{20}{9} = 2.22$

ஆனால் இது சாத்தியமல்ல ஏனெனில் இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் மதிப்புமே, ஒன்றை விட பெரியதாக இருக்கிறது. எனவே நம்முடைய மேற்கண்ட அனுமானம் தவறு. எனவே சமன்பாடு (1) என்பதனை X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனவும் மற்றும் சமன்பாடு (2) என்பதனை Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனவும் கருதவும். ஆதலால் நாம் பெறுவது,

$b_{yx} = \frac{4}{5} = 0.8$ மற்றும் $b_{xy} = \frac{9}{20} = 0.45$

ஒட்டுறவுக் கெழு $r = \pm\sqrt{b_{xy}\times b_{xy}}$

$r = \sqrt{0.45\times 0.8} = 0.6$

எடுத்துக்காட்டு 9.14

கீழ்கண்ட அட்டவணை விற்பனை மற்றும் விளம்பரச் செலவுகளைக் காண்பிக்கிறது.

விவரங்கள்	விற்பனை	விளம்பரச் செலவு (₹ கோடிகளில்)
சராசரி	40	6
திட்ட விலக்கம்	10	1.5

ஒட்டுறவுக் கெழு $r = 0.9$. தீர்மானிக்கப்பட்ட விளம்பரச் செலவு ₹ 10 கோடி. எனில், விற்பனையை மதிப்பீடு செய்க.

தீர்வு:

X என்பது விற்பனை மற்றும் Y என்பது விளம்பர செலவு என்க

$\overline{X}=40, \overline{Y}=6, \sigma_x=10, \sigma_y=1.5$ மற்றும் $r=0.9$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

y–ன் x-ன் மீது தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X-\overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y})$$

$$X-40 = (0.9)\frac{10}{1.5}(Y-6)$$

$$X-40 = 6Y-36$$

$$X = 6Y+4$$

விளம்பரச் செலவு ₹ 10 கோடி அதாவது $Y = 10$ எனில், விற்பனை $X = 6(10)+4 = 64$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.15

இரண்டு குறியீட்டு எண்களின் வரிசைகள் உள்ளன. P என்பது விலை குறியீட்டையும் மற்றும் S என்பது பொருட்களின் இருப்பையும் குறிக்கிறது. P–ன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே 100 மற்றும் 8 ஆகும். S –ன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே 103 மற்றும் 4. இரண்டு குறியீட்டு எண்களின் வரிசைக்கு இடையேயான ஒட்டுறவு கெழு 0.4. இவ்விவரங்களை கொண்டு, S ன் மீது P ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மற்றும் P ன் மீது S–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

X என்பது P–ன் விலை மற்றும் Y என்பது S –ன் இருப்பு என்க.

P–ன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கங்கள் ஆகியவை முறையே $\overline{X}=100$, $\sigma_x=8$. மேலும் S–ன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே $\overline{Y} = 103$, $\sigma_Y = 4$ என கருதவும். இரண்டு வரிசைக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு $r(X,Y) = 0.4$ ஆகும்.

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X-\overline{X} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y})$$

$$X-100 = (0.4)\frac{8}{4}(Y-103)$$

$$X-100 = 0.8(Y-103)$$

$X-0.8Y-17.6 = 0$ அல்லது $X = 0.8Y+17.6$

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு $Y-\overline{Y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$

$$Y-103 = (0.4)\frac{4}{8}(X-100)$$

$$Y-103 = 0.2(X-100)$$

$$Y-103 = 0.2X-20$$

$Y = 0.2X+83$ அல்லது $0.2X-Y+83=0$

எடுத்துக்காட்டு 9.16

5 இணைகளின் உறுப்புகளுக்கான முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $\Sigma X=15$, $\Sigma Y=25$, $\Sigma X^2=55$, $\Sigma Y^2=135$, $\Sigma XY=83$ தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க. மேலும் முதல் கோட்டில் $Y=12$ எனில் X-ன் மதிப்பும் இரண்டாம் கோட்டில் $X=8$ எனில் Y–ன் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு $N=5$, $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{15}{5}=3$,

$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{25}{5}=5$ மற்றும்

தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy}=\frac{N\Sigma XY-\Sigma X\Sigma Y}{N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2}=\frac{5(83)-(15)(25)}{5(135)-(25)^2}=0.8$$

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 241 08-12-2021 21:56:07

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X-\overline{X} = b_{xy}(Y-\overline{Y})$$
$$X-3 = 0.8(Y-5)$$
$$X = 0.8\,Y-1$$

$Y=12$, எனும் பொழுது X–ன் மதிப்பீடு

$$X = 0.8\,(12)-1=8.6$$

தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{N\Sigma XY-\Sigma X\Sigma Y}{N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}$$
$$= \frac{5(83)-(15)(25)}{5(55)-(15)^2}=0.8$$

இவ்வாறாக $b_{yx}=0.8$ எனில் X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y-\overline{Y} = b_{yx}(X-\overline{X})$$
$$Y-5 = 0.8(X-3)$$
$$Y = 0.8X+2.6$$

$X=8$ எனும் பொழுது Y–ன் மதிப்பீடு

$$Y = 0.8(8)+2.6$$
$$Y = 9$$

எடுத்துக்காட்டு 9.17

இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் என்பன $3X+2Y=26$ மற்றும் $6X+3Y=31$ ஆகும். ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு:

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$3X+2Y = 26$$
$$2Y = -3X+26$$
$$Y = \frac{1}{2}(-3X+26)$$
$$Y = -1.5X+13$$
$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -1.5$$
$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=-1.5$$

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$6X+3Y = 31$$
$$X = \frac{1}{6}(-3Y+31)=-0.5Y+5.17$$
$$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0.5$$
$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=-0.5$$
$$r = \pm\sqrt{b_{xy}.b_{yx}}$$
$$= -\sqrt{(-1.5).(-0.5)}$$

(அதாவது இரண்டு தொடர்பு போக்குக் கெழுக்களும் r–ம் குறை குறியீடு பெற்றதாக இருக்கும்.)

$$\therefore \quad r = -0.866$$

எடுத்துக்காட்டு 9.18

ஒட்டுறவு ஆய்வின் மீதான ஆய்வகச் சோதனையில் கிடைக்கப்பெற்ற இரண்டு தொடர்பு சமன்பாடுகள் $2X-Y+1=0$ மற்றும் $3X-2Y+7=0$ ஆகும். X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் சராசரியைக் காண்க. மேலும் X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் தொடர்பு போக்குக் கெழுக்கள் மற்றும் ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

தீர்வு:

இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க நமக்கு X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் சராசரிகள் கிடைக்கும்

$$2X-Y = -1 \qquad \dots (1)$$
$$3X-2Y = -7 \qquad \dots (2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2)–லிருந்து நாம் பெறுவது $X=5$ மற்றும் $Y=11$

எனவே, தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகள் $\overline{X}=5$ மற்றும் $\overline{Y}=11$ சராசரிகளின் வழியே செல்கிறது.

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$3X-2Y=-7$$
$$2Y = 3X+7$$
$$Y = \frac{1}{2}(3X+7)$$

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 242 08-12-2021 21:56:09

$$Y = \frac{3}{2}X+\frac{7}{2}$$

$$\therefore\ b_{yx} = \frac{3}{2}\,(>1)$$

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$2X-Y = -1$$

$$2X = Y-1$$

$$X = \frac{1}{2}\,(Y-1)$$

$$X = \frac{1}{2}\,Y-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ b_{xy} = \frac{1}{2}$$

தொடர்புப் போக்கு கெழுக்கள் மிகை மதிப்பை பெற்றிருக்கும்.

$$r = \pm\sqrt{b_{xy}.b_{yx}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= 0.866$$

$$\therefore\ r = 0.866$$

எடுத்துக்காட்டு 9.19

$3X-2Y=5$ மற்றும் $X-4Y=7$ என்ற தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளுக்கு

(i) தொடர்பு போக்குக் கெழுக்கள் மற்றும்

(ii) ஒட்டுறவுக் கெழு ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

(i) முதலில் கொடுக்கப்பட்ட X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மற்றும் Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு ஆகியவற்றை இயல்பான வடிவில் மாற்றியமைக்கவும். பின்பு தொடர்பு போக்குக் கெழுக்களை கண்டுபிடிக்கவும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்

$$3X-2Y = 5 \qquad \ldots (1)$$

$$X-4Y = 7 \qquad \ldots (2)$$

X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்கு $3X-2Y = 5$ என்க.

$$3X = 2Y+5$$

$$X = \frac{1}{3}\,(2Y+5)$$

$$X = \frac{1}{3}\,(2Y+5)$$

$$X = \frac{2}{3}\,Y+\frac{5}{3}$$

Y–ன் மீது X–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy} = \frac{2}{3}\,(<1)$$

X–ன் மீது Y– ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X-4Y = 7$$

$$-4Y = -X+7$$

$$4Y = X-7$$

$$Y = \frac{1}{4}\,(X-7)$$

$$Y = \frac{1}{4}X-\frac{7}{4}$$

$\therefore X$–ன் மீது Y தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{1}{4}\,(<1)$$

(ii) **ஒட்டுறவுக் கெழு (Coefficient of correlation)**

இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் மிகை குறியீடு பெற்றிருப்பதால் r–ம் மிகை குறியீடு பெற்றதாக இருக்கும் மற்றும்

$$r = \sqrt{b_{yx}\,.\,b_{xy}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$= 0.4082$$

$$\therefore\ r = 0.4082$$

பயிற்சி 9.2

1. கீழே தரப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

பொருளியலில் மதிப்பெண்கள்	25	28	35	32	31	36	29	38	34	32
புள்ளியியலில் மதிப்பெண்கள்	43	46	49	41	36	32	31	30	33	39

(a) இரண்டு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள்.

(b) பொருளியல் மற்றும் புள்ளியியல் பாடங்களின் மதிப்பெண்களுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு.

(c) பொருளியலில் 30 மதிப்பெண்கள் பெற்ற நிலையில் புள்ளியியலில் பெரிதும் பெற வாய்ப்பான மதிப்பெண் ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. தந்தையர் மற்றும் அவர்தம் மகன்களின் உயரங்கள் (செ.மீ–ல்) கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தந்தையின் உயரம்:	158	166	163	165	167	170	167	172	177	181
அவர்தம் மகனின் உயரம்:	163	158	167	170	160	180	170	175	172	175

இவற்றிக்கான தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளைக் காண்க. மேலும் தந்தையின் உயரம் 164 செ.மீ எனும்போது மகனின் உயரத்தை மதிப்பிடுக.

3. 17 வயது மாணவர்களின் குழுவிலிருந்து 10 மாணவர்கள் கொண்டக் கூறில், உயரம் (அங்குலங்களில்) X மற்றும் Y நிறை (பவுண்ட்) உள்ள விவரங்கள் பின்வருமாறு

X	61	68	68	64	65	70	63	62	64	67
Y	112	123	130	115	110	125	100	113	116	125

69 அங்குலம் உயரம் உள்ள மாணவனின் நிறையை மதிப்பிடுக.

4. பின்வரும் விவரங்களுக்கான இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் கணக்கிடுக. $N=20$, $\sum X=80$, $\sum Y=40$, $\sum X^2=1680$, $\sum Y^2=320$ மற்றும் $\sum XY=480$

5. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு, மழைப் பொழிவு 29 எனில், இயலக்கூடிய விளைச்சல் என்ன.

விவரங்கள்	மழைப்பெழிவு	விளைச்சல்
சராசரி	25``	ஓர் ஏக்கருக்கு 40 அலகுகள்
திட்ட விலக்கம்	3``	ஓர் ஏக்கருக்கு 6 அலகுகள்

மழைப்பொழிவு மற்றும் விளைச்சலுக்கான ஒட்டுறவு கெழு 0.8 ஆகும்.

6. பின்வரும் விவரங்கள் குறிப்பது, விளம்பர செலவு (₹ லட்சங்களில்) அவற்றுடன் தொடர்புடைய விற்பனைகள் (₹ கோடிகளில்)

விளம்பர செலவு	40	50	38	60	65	50	35
விற்பனைகள்	38	60	55	70	60	48	30

விளம்பர செலவு ₹ 30 லட்சங்கள் எனும் போது தொடர்புடைய விற்பனையை மதிப்பிடுக.

7. பின்வரும் விவரங்கள் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விவரங்கள்	X	Y
சராசரி	36	85
திட்ட விலக்கம்	11	8

X மற்றும் Y களுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு 0.66 எனில்

(i) இரு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள்

(ii) $X=10$ எனும் பொழுது பொருத்தமான Y–ன் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. (X_i, Y_i) விவரங்கள் பின்வருவன (1,4) (2,8) (3,2) (4,12) (5, 10) (6, 14) (7, 16) (8, 6) (9, 18) எனில் X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. தங்குமிடம் செலவு (X) உணவு மற்றும் பொழுது போக்கு செலவு (Y) ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு அறியும் வகையில் ஆய்வு நடத்தப்பட்டு, கண்டறியப்பட்ட ஆய்வில் முடிவுகள் பின்வறுமாறு:

விவரங்கள்	சராசரி	திட்டவிலக்கம்
தங்குமிடம் செலவு (₹)	178	63.15
உணவு மற்றும் பொழுது போக்கு செலவு (₹)	47.8	22.98
ஒட்டுறவுக் கெழு	0.43	

தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு காண்க. மேலும், தங்குமிடம் செலவு ₹ 200 எனில் உணவு மற்றும் பொழுது போக்கு மீதான இயலக்கூடிய செலவை காண்க.

10. X மற்றும் Y மாறிகளின் 5 விவரங்களின் (X,Y)–க்கான பெறப்பட்ட பின்வரும் முடிவுகள் $\sum X=15$, $\sum Y=25$, $\sum X^2=55$, $\sum Y^2=135$, $\sum XY=83$. தொடர்புப் போக்கு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க. மேலும் $Y = 8$ எனில் இயலக்கூடிய X–ம், $X = 12$ எனில் இயலக்கூடிய Y–ம் காண்க.

11. கண்டறியப்பட்ட இரு தொடர்பு போக்கு $4X-5Y+33=0$ மற்றும் $20X-9Y-107=0$. X ,Yக்கு இடையிலான சராசரி மதிப்புகள் மற்றும் ஒட்டுறவுக்கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

12. ஒட்டுறவுக்கெழு பகுப்பாய்வின் இரு தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளாவன $2X=8-3Y$ மற்றும் $2Y=5-X$ ஆகும். தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள் மற்றும் ஒட்டுறவுக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

பயிற்சி 9.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

1. பின்வருனவற்றில் எவை நேரிடை ஒட்டுறவுக்கான எடுத்துக்காட்டாகும்?
   (a) வருவாய் மற்றும் செலவு
   (b) விலை மற்றும் தேவை
   (c) திருப்பிச் செலுத்தும் காலம் மற்றும் சுலப மாதத் தவணை
   (d) நிறை மற்றும் வருவாய்

2. இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரே திசையில் நகரும் எனில் ஒட்டுறவு
   (a) எதிரிடை
   (b) நேரிடை
   (c) முழுமையான நேரிடை
   (d) ஒட்டுறவு இன்மை

3. இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் எதிர்த்திசையில் நகரும் எனில் ஒட்டுறவு
   (a) எதிரிடை
   (b) நேரிடை
   (c) முழுமையான நேரிடை
   (d) ஒட்டுறவு இன்மை

4. ஒட்டுறவுக் கெழு அமைவது
   (a) 0 முதல் ∞ வரை
   (b) -1 முதல் $+1$
   (c) -1 முதல் 0
   (d) -1 முதல் ∞

5. $r(X,Y) = 0$ எனில் மாறிகள் X மற்றும் Y பெற்றிருப்பது
   (a) நேரிடை ஒட்டுறவு
   (b) எதிரிடை ஒட்டுறவு
   (c) ஒட்டுறவு இன்மை
   (d) முழுமையான நேரிடை ஒட்டுறவு

09_11th_BM-STAT_Ch-9-TM.indd 245 08-12-2021 21:56:13

6. N=25, $\sum X$=125, $\sum Y$=100, $\sum X^2$=650, $\sum Y^2$=436, $\sum XY$=520 என்ற விவரங்களில் இருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவானது

(a) 0.667 (b) −0.006

(c) −0.667 (d) 0.70

7. N=11, $\sum X$=117, $\sum Y$=260, $\sum X^2$=1313, $\sum Y^2$=6580, $\sum XY$=2827 என்ற பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவானது

(a) 0.3566 (b) −0.3566

(c) 0 (d) 0.4566

8. ஒட்டுறவுக் கெழு என்பது

(a) $r(X,Y)=\dfrac{\sigma_x \sigma_y}{\operatorname{cov}(x,y)}$

(b) $r(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$

(c) $r(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_y}$

(d) $r(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x}$

9. தாக்கத்தை ஏற்படுத்தக் கூடிய அல்லது கணித்துச் சொல்லப்படக் கூடிய மாறி என்பது

(a) சார்ந்த மாறி

(b) சார்பற்ற மாறி

(c) தொடர்புப் போக்கு

(d) விளக்கமளிக்கும் மாறி ஆகும்

10. தாக்கத்தை ஏற்படுத்தக் கூடிய அல்லது கணித்துச் சொல்வதற்கு பயன்படுத்தப்படக் கூடிய மாறி

(a) சார்ந்த மாறி

(b) சார்பற்ற மாறி

(c) விளக்கமளிக்கும் மாறி

(d) தொடர்புப் போக்குடையது

11. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது

(a) $r=\pm\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$

(b) $r=\dfrac{1}{b_{xy}\times b_{yx}}$

(c) $r=b_{xy}\times b_{yx}$

(d) $r=\pm\sqrt{\dfrac{1}{b_{xy}\times b_{yx}}}$

12. Y– ன் மீதான X– ன் ஒட்டுறவுக் கெழு

(a) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}$

(b) $b_{yx}=\dfrac{N\Sigma\,dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}$

(c) $b_{yx}=\dfrac{N\Sigma dxdy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2}$

(d) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma xy-(\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}\times\sqrt{N\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}}$

13. X ன் மீதான Y –ன் ஒட்டுறவுக் கெழு

(a) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\,\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}$

(b) $b_{yx}=\dfrac{N\Sigma dxdy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\Sigma dy^2-(\Sigma dy)^2}$

(c) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma dx\,dy-(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N\Sigma dx^2-(\Sigma dx)^2}$

(d) $b_{xy}=\dfrac{N\Sigma xy-(\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}\times\sqrt{N\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}}$

14. ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கெழு குறையாக இருக்கும் நிலையில் மற்றொன்று

(a) குறை (b) மிகை

(c) பூச்சியம்

(d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

15. X மற்றும் Y என்பன இரு மாறிகள் எனில் அதிக பட்சமாக இருப்பது

(a) ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கோடு

(b) இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்

(c) மூன்று தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்

(d) பல தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள்

16. Y–ன் மீதான X–ன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு மதிப்பிடுவது

(a) கொடுக்கப்பட்ட Y –ன் மதிப்பிற்கு X

(b) கொடுக்கப்பட்ட X –ன் மதிப்பிற்கு Y

(c) Y–லிருந்து X மற்றும் X–லிருந்து Y

(d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

17. (X,Y) மாறிகளின் மதிப்புகளின் சிதறல் விளக்கப்படம் விளக்கும் கருத்தானது

(a) சார்புகளின் மீதான தொடர்பு

(b) தொடர்புப் போக்கு வடிவம்

(c) பிழைகளின் பரவல்

(d) தொடர்பு இன்மை

18. X–ன் மீதான Y–ன் தொடர்புப் போக்கு கெழு 2 எனில், Y–ன் மீதான X–ன் தொடர்புப் போக்கு கெழு

(a) $\leq \frac{1}{2}$ (b) 2

(c) $> \frac{1}{2}$ (d) 1

19. இரண்டு மாறிகள் இறங்கு திசையில் நகர்கிறது எனில் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது

(a) நேரிடை

(b) எதிரிடை

(c) முழுமையான எதிரிடை

(d) ஒட்டுறவு இன்மை

20. X மற்றும் Y என்ற இரு மாறிகளுக் கிடையேயான நேர்க்கோட்டு தொடர்பின் அளவை அளவிடும் கணிதமுறையை அறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) கார்ல் பியர்சன்

(b) ஸ்பியர்மென்

(c) கிரக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன்

(d) யா லன் சூ

21. தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி

(a) (X,Y) (b) $(\overline{X},\overline{Y})$

(c) $(0,0)$ (d) (σ_x,σ_y)

22. தொடர்புப்போக்கைஅறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) R.A பிஷர்

(b) சர்ஃபிரான்சிஸ் கால்டன்

(c) கார்ல் பியர்சன்

(d) இவர்களில் எவரும் இல்லை

23. $r=-1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு

(a) முழுமையான நேரிடையானது

(b) முழுமையான எதிரிடையானது

(c) எதிரிடையானது

(d) ஒட்டுறவு இன்மை

24. ஒட்டுறவுக் கெழு விவரிப்பது

(a) எண்ணளவு மற்றும் திசை

(b) எண்ணளவு மட்டும்

(c) திசை மட்டும்

(d) எண்ணளவு இல்லை மற்றும் திசை இல்லை

25. $Cov(x,y)=-16.5$, $\sigma_x^2=2.89$, $\sigma_y^2=100$. எனில் ஒட்டுறவு கெழுவைக் காண்க.

(a) -0.12 (b) 0.001

(c) -1 (d) -0.97

இதர கணக்குகள்

1. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவினை காண்க.

X	35	40	60	79	83	95
Y	17	28	30	32	38	49

2. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக்கு கெழுவினை கணக்கிடுக.

$\sum X=50$, $\sum Y=-30$, $\sum X^2=290$, $\sum Y^2=300$, $\sum XY=-115$, $N=10$

3. கீழேயுள்ள விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

4. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக.

$\sum X=125$, $\sum Y=100$, $\sum X^2=650$, $\sum Y^2=436$, $\sum XY=520$, $N=25$

5. சமீபத்திய பழுது நீக்கு வேலைகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. மேலும் எதிர்ப்பார்க்கப்பட்ட செலவு ,அசல் செலவு பதியப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பிடப்பட்ட செலவு	30	45	80	25	50	97	47	40
அசல் செலவு	27	48	73	29	63	87	39	45

ஸ்பியர்மனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பினைக் கணக்கிடுக

6. பின்வரும் ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வில் A மற்றும் B என்ற இரு பாடங்களின் மதிப்பெண்கள் தொடர்புடையவை A–ன் சராசரி மதிப்பெண் = 39.5. B–ன் சராசரி மதிப்பெண் = 47.5 A–ன் மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம் =10.8 மற்றும் B–ன் மதிபபெண்களின் திட்டவிலக்கம் = 16.8. A மற்றும் B ஆகியவற்றின் மதிப்பெண்களுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக்கெழு 0.42. பாடம் A–ல் 51 மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவன் பாடம் B–ல் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பெண்ணை மதிப்பிடுக.

7. X மற்றும் Y என்பன தொடர்புபடுத்தப்பட்ட இணை மாறிகள். அவற்றின் 10 விபரங்களுக்கான முடிவுகள், $\sum X=55$, $\sum XY=350$, $\sum X^2=385$, $\sum Y=55$, X ன் மதிப்பு 6. Y ன் மதிப்பை தீர்மானிக்கவும்.

8. X-ன் மீது Y-ன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

X	1	2	3	4	5	8	10
Y	9	8	10	12	14	16	15

9. பின்வரும் விவரங்களை பயன்படுத்தி (i) X–ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
(ii) சோதனைச் செலவு ₹ 82 எனும்பொழுது விநியோகிக்கப்பட்ட குறையுள்ள பொருட்களின் அளவை மதிப்பிடுக. $\sum X=424$, $\sum Y=363$, $\sum X^2=21926$, $\sum Y^2=15123$, $\sum XY=12815$, $N=10$. இங்கு X என்பது சோதனைச் செலவு, Y என்பது விநியோகிக்கப்பட்ட குறை பொருட்கள் ஆகும்.

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு,

விவரங்கள்	X (₹)	Y (₹)
சராசரி	6	8
திட்ட விலக்கம்	5	$\frac{40}{3}$

X மற்றும் Y ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழு $\frac{8}{15}$.

(i) X – ன் மீது Y–ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

(ii) X = ₹ 100 எனும்போது மிகப் பொருத்தமான Y–ன் மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

நிகழ்வு ஆய்வு–1

திரு. பீன் 2018 ஆம் ஆண்டு மார்ச் மாதம் 1 ஆம் தேதி சென்னையில் திருவல்லிக்கேணியில் உள்ள ஒரு பல்பொருள் அங்காடிக்கு சென்று 15 வகையான உணவு வகைகளை தேர்ந்தெடுக்கிறார். அனைத்து வகையான உணவு பெட்டிகளிலும் சத்து விவரங்கள் பற்றிய தகவல் இடம்பெற்றுள்ளது. திரு பீன் ஒவ்வொரு உணவு பொருளையும் கண்டு அதில் பதிவு செய்யப்பட்டுள்ள கொழுப்பு (gm /100 gms) மற்றும் சோடியம் உள்ளடக்கம் (mgs/100gms) அளவை கண்டறிந்து பின்வருமாறு அட்டவணையில் பதிவு செய்துள்ளனர்.

வ. எண்.	உற்பத்தி பொருட்கள்	கொழுப்பு (gm / 100gms)	சோடியம் (mg / 100gms)
1	பேரீட்சை பழங்கள்	0.4	74.4
2	அப்பளம்	0.26	1440
3	சத்து பானம்	1.8	136
4	குளோப்ஜாமூன் பவுடர்	10.4	710
5	கோதுமை	2.2	4.97

6	அத்தி பழங்கள்	0.14	2
7	உருளை – பச்சை பட்டாணி கலவை	5	440
8	பாப்கார்ன்	2.32	51.38
9	பெருங்காயம்	0.37	40
10	காளான்	31	11.73
11	பழரசம்	0.1	74
12	இனிப்பு மிட்டாய்	0.8	0.09
13	ரவை	9	575
14	பிஸ்கட்	19.7	498
15	நொருக்கு தீனி	33.5	821

மேலே குறிப்பிடப்பட்ட உணவு உள்ளடக்கங்களுக்கிடையில் சில புள்ளிவிவர உறவை திரு.பீன் நிர்மானிக்க விரும்புகிறார். ஆய்வுக்கு உட்படுத்தப்படும் மாறிகள் X மற்றும் Y முறையே ஒவ்வொரு உணவு பொருட்களின் கொழுப்பு உள்ளடக்கம் மற்றும் சோடியம் உள்ளடக்கத்தின் அளவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கிறது. ஆகையால் திரு பீன் ஒவ்வொரு உணவு பொருட்களுக்கான ஒரு ஜோடி மதிப்புகள் (X , Y) பெறுகிறார். மேலும் திரு. பீன் அனைத்து 15 பொருட்களின் சராசரி கொழுப்பு உள்ளடக்கம் $\overline{X}$ =7.8 (gm/100gms) மற்றும் சராசரி சோடியம் உள்ளடக்கம் $\overline{Y}$ =325.23 (gm/100gms). என்பதை காண்கிறார். மேலும், பழச்சாறில் உள்ள கொழுப்பு குறைந்தபட்சம் அளவு 0.1(gm/100gms) என்று அறியப்பட்டது. இதனால் அனைத்து 15 உணவுகள் உள்ள கொழுப்பு 0.1 (gm/100 gms)-லிருந்து 33.5(gm/100gms) வரை உள்ளது. இதே போல், இனிப்பு மிட்டாயில் உள்ள சோடியம் உள்ளடக்கம் குறைந்தபட்ச அளவு 0.09 (mg/100gms) மற்றும் அப்பளத்தில் உள்ள சோடியம் உள்ளடக்கம் அதிகபட்ச அளவு 1440(mg/100gms).

ஆகையால் அனைத்து 15 பொருட்களின் கொழுப்பு உள்ளடக்கம் மற்றும் சோடியம் உள்ளடக்கம் ஆகியவற்றின் வீச்சு அளவை முறையே33.4gmமற்றும்1439.91(mg/100gms) அனைத்து விவரங்களின் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு தனி விவரத்தின் மாறுபாட்டை அறிய திரு. பீன் விரும்பினார். திட்ட விலக்கம் என அழைக்கப்படும் மற்றொரு சிதறல் அளவையை காண முயற்சி மேற்கொண்டார். அனைத்து 15 உணவு பொருட்களின் கொழுப்பு உள்ளடக்கத்தின் சராசரி விலக்கம் 11.3 (gm/100gm) மற்றும் சோடியம் உள்ளடக்கத்திள் சராசரி விலக்கம் 420.14 (mg/100gms) மேலும் திரு. பீன் மாறிகள் X மற்றும் Y ஆகியவற்றிற்கு இடையேயான தொடர்பைக் கண்டுபிடிப்பதில் ஆர்வம் கொண்டார். எனவே ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு மேற்கொள்ளப்பட்டது. ஒட்டுறவுக் கெழு $r(X,Y)$=0.2285 என்பது சோடியம் உள்ளடக்கம் மற்றும் கொழுப்பு உள்ளடக்கம் ஆகியவற்றிற்கிடையே 22.85% நேரிடையான தொடர்பு உள்ளதை குறிக்கிறது. இந்த ஆய்வில் இருந்து திரு. பீன் ஒவ்வொரு உணவு பொருளின் பெட்டிகளிலும் இடம் பெற்றுள்ள ஊட்டச்சத்து தகவல் போதுமானது என திருப்திப்படுவதாக அறிகிறார்.

நிகழ்வு ஆய்வு–2

2018 பிப்ரவரி 20 முதல் 2018 மார்ச் 1 வரையிலான பத்து நாட்களுக்கு இரு இடங்களில், சென்னை சந்தை மற்றும் மும்பை சந்தை ஆகியவற்றில் தங்கம் விலை (கிராமுக்கு) தொடர்பான விவரங்களை நாங்கள் சேகரித்தோம் மற்றும் அளவை கீழே பதியப்பட்டுள்ளது.

தேதி	சென்னை X	மும்பை Y
பிப்ரவரி 20	2927	2923
பிப்ரவரி 21	2912	2910
பிப்ரவரி 22	2919	2907
பிப்ரவரி 23	2912	2920
பிப்ரவரி 24	2921	2919
பிப்ரவரி 25	2921	2919
பிப்ரவரி 26	2927	2925
பிப்ரவரி 27	2924	2918
பிப்ரவரி 28	2908	2902
மார்ச் 1	2893	2895

சென்னை சந்தையில் தங்கத்தின் விலை அதன் தாக்கத்தை மும்பை சந்தையின் மீது ஏற்படுத்தும் என்பதை நாம் ஒத்துக்கொள்ள இயலுமா?

சென்னை சந்தையில் தங்கத்தின் விலை (கிராமுக்கு) X எனவும் மும்பை சந்தையில் தங்கத்தின் விலை (கிராமுக்கு) Y எனவும் கொள்க. மேற்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்ட விவரத்திலிருந்து சென்னை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையின் ஏற்றம் ₹2893 (கிராமுக்கு) லிருந்து ₹ 2927 (கிராமுக்கு) வரையும் மும்பை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையில் ஏற்றம் ₹2895 (கிராமுக்கு) –லிருந்து ₹2925 (கிராமுக்கு) வரையும் உள்ளது. மேலும் பிப்ரவரி 20 முதல் பிப்ரவரி 24 வரையிலான தேதியிட்ட நாட்களில் தங்க விலை வீதத்தில் சில அலைவுகளும் பிப்ரவரி 24 மற்றும் 25. ஒரே மாதிரியாகவும் உள்ளது குறிப்பிடத்தக்கது. இது தங்க சந்தைகளுக்கு விடுமுறை காரணமாக இருக்கலாம். தங்க விலை வீதம் பிப்ரவரி 27 முதல் மார்ச் 1 வரை வேகமாக குறைவது அட்டவணையிலிருந்து தெளிவாகிறது. இதே போன்ற ஏற்ற இறக்கம் மும்பை சந்தையில் பிப்ரவரி 20 முதல் 24 ஆம் தேதி வரையும் 24 மற்றும் 25 ஆம் தேதிகளில் ஒரே மாதிரியாகவும், பிப்ரவரி 27 முதல் மார்ச் 1 வரை வேகமாகவும் குறைந்து வருகின்றன. எனவே, தங்க சந்தை வீதத்தில் சந்தை போக்கு இரண்டு சந்தைகளிலும் ஒரே நிலையில் உள்ளது. இந்த 10 நாட்களில் சென்னை சந்தையில் சராசரி தங்க விலை ₹2916.4 (கிராமுக்கு) மற்றும் மும்பை சந்தையில் சராசரி தங்க விலை ₹2913.8 (கிராமுக்கு) என்பதை நாம் காண்கிறோம்.

10 நாட்களில் தங்க விலைகளுக்கிடையேயான மாறுபாடு

அனைத்து விவரங்களின் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு தனி விவரத்தின் மாறுபாட்டை காண வேண்டும். திட்ட விலக்கத்தை சிறந்த அளவையாக நாம் பயன்படுத்தலாம். இந்த ஆய்வில், தங்கத்தின் விலையானது, சராசரி விலக்கமாக சென்னை சந்தையில் ₹ 10 (தோராயமாக) மும்பை சந்தையில் ₹ 9 (தோராயமாக) என தெரிய வருகிறது. இரண்டு நகரங்களுக்கும் இடையே உள்ள விலைகளின் நிலைத்தன்மையை சரிபார்க்க. மாறுபாட்டின் சதவீதத்தை வெளிப்படுத்துகின்ற மாறுவிகிதக் கெழுவை நாங்கள் முயற்சிக்கிறோம். சென்னை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையின் மாறுவிகிதக் கெழுவானது

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\overline{X}} \times 100 = \frac{10}{2916.4} \times 100 = 0.343\%$$

இதே போல், மும்பை சந்தையில் தங்கத்தின்விலையின்மாறுவிகிதக்கெழுவானது

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\overline{Y}} \times 100 = \frac{9}{2913.8} \times 100 = 0.31\%$$

இக்கெழுக்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம் மும்பை சந்தையில் தங்கத்தின் விலையானது, மிகவும் நிலையானதாக இருப்பதை நாம் கண்டறிந்துள்ளோம்.

மேலும் இரண்டு மாறிகள் X மற்றும் Y –க்கு இடையேயான நேர்கோட்டு உறவை ஆராய்வதற்கு ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு முடிவு $r(X,Y) = 0.8682$. என காண்கிறோம். இது மும்பை சந்தை மற்றும் சென்னை சந்தைக்கு இடையே தங்கத்தின் விலையில் நேரிடையான ஒட்டுறவு உள்ளது என்பதை இது குறிக்கிறது.

தொடர்புப் போக்குக் கோட்டை கண்டுபிடிப்பதை இங்கு அறிவுபூர்வமானதாக உணருகிறீர்களா?

தொகுப்புரை

- ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை குறிக்கின்றது.
- சிதறல் வரைபடம் என்பது இரு மாறிகளுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவை காணுவதற்கான ஒரு வரைபட கருவி ஆகும்.
- கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழு $r(x,y)=\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$
- ஒட்டுறவுக் கெழு -1 லிருந்து $+1$ க்கு இடையே ஓர் மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும். குறியீட்டில் $-1\leq r\leq 1$
- $r=+1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவு முழுமையான நேரிடை ஒட்டுறவு எனப்படும்.
- $r=-1$, எனில் மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவு முழுமையான எதிரிடை ஒட்டுறவு எனப்படும்.
- $r=0$, எனில் மாறிகளுக்கிடையே எவ்வித தொடர்பும் இல்லை அதாவது ஒட்டுறவு இல்லை எனலாம் .
- தர ஒட்டுறவு கருத்தியல் பண்பளவையின் குணங்கள் அளவிடுகிறது.
- ஸ்பியர்மெனின் தர ஒட்டுறவு கெழு சூத்திரம் (ρ)

  $\rho = 1-\dfrac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$ இங்கு $d = R_X-R_Y$, N = இணை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
- ஒட்டுறவு மாறிகளின் இடையே உள்ள நேரிடை தொடர்பை விளக்குகின்றது. ஆனால் தொடர்புப் போக்கு ஒரு மாறியின் மதிப்பை பயன்படுத்தி மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை கணக்கிட உதவுகின்றது.
- (i) Y –ன் மீதான X –ன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு $X-\overline{X}=b_{xy}(Y-\overline{Y})$

  (ii) X –ன் மீதான Y –ன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு $Y-\overline{Y}=b_{yx}(X-\overline{X})$
- இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள், சராசரிகளின் வழியே செல்கின்றது.

  $b_{xy}= r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ மற்றும் $b_{yx} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ஆகிய சூத்திரங்கள் மூலம் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள் கணக்கிடப்படுகின்றன.

- ஒட்டுறவுக் கெழுவின் பண்புகள்

(i) $r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$

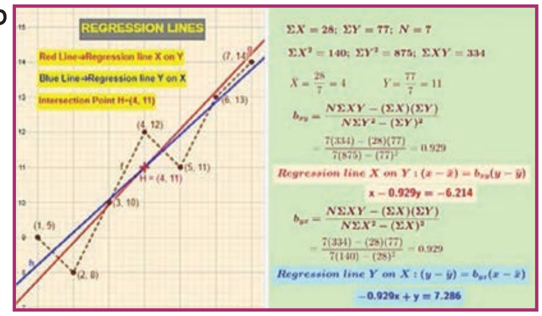
(ii) இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் எண் ஒன்றை விட பெரியதாக இருக்க முடியாது.

(iii) இரண்டு தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் ஒரே குறியீட்டை உடையதாக இருக்கும்.

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
அசாதாரனமான	Abnormal
இருமாறி பகுப்பாய்வு	Bivariate analysis
ஊகிக்கப்பட்ட சராசரி	Assumed Mean
எதிர்மறை ஒட்டுறவு	Negative Correlation
ஏற்ற இறக்கம்	fluctuate
ஒட்டுறவு	Corrleation
ஒருமாறி பகுப்பாய்வு	Univariate analysis
சமவாய்ப்பு மாறிகள்	Random variables
சார்ந்த மாறி	Relative Variable
தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு	Regression analysis
தோராயமாக	Approximate
நேரிடை ஒட்டுறவு	Positive Correlation
பண்புகள்	Characteristics
பொருத்தமுடைய	Closeness
விலக்கம்	Deviations

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



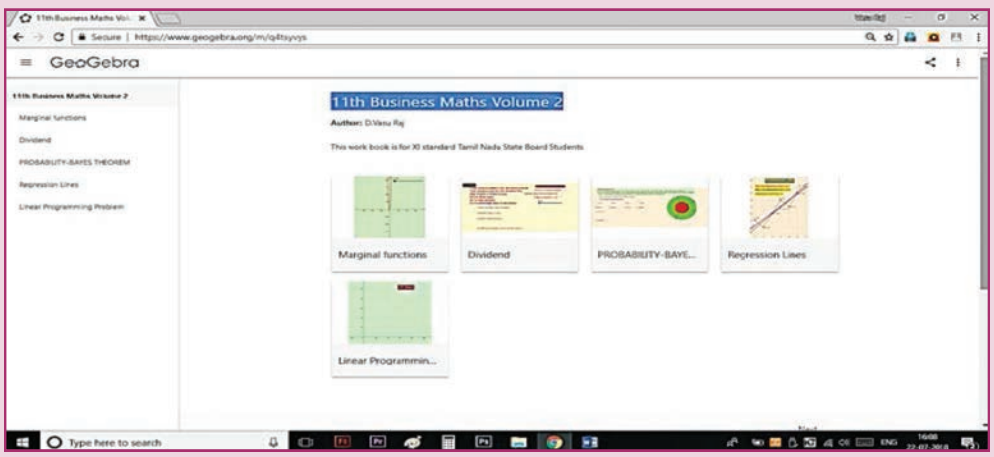
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் **"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS"** பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் இருக்கும்.

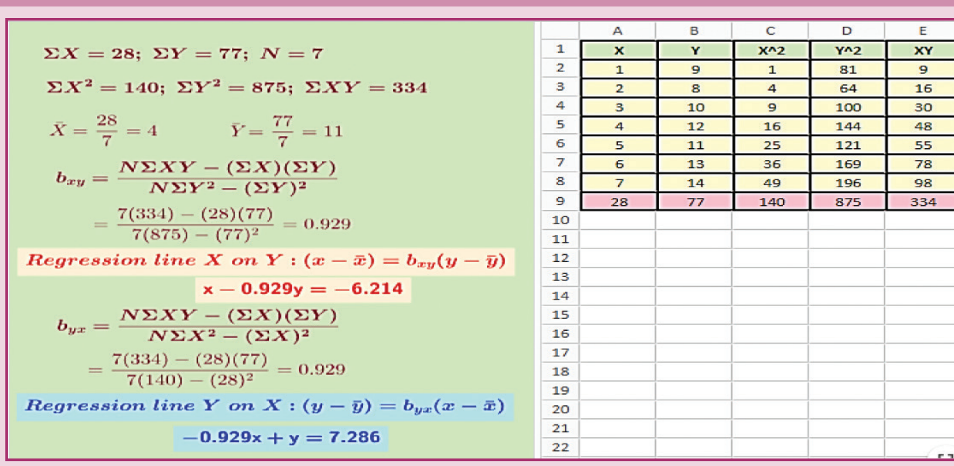
படி - 2

"Regression lines" என்பதைத் தேர்வு செய்து, கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் படிகளைக் கொண்டு தரவுகளைக் கணக்கிட்டுச் சரிபார்க்கவும். வரைபடத்தில் x யைச் சார்ந்த y யும், y யைச் சார்ந்த x யும், அவை இரண்டு கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளையும் மீளாய்வு செய்க. New Problem என்னும் விரிதாளில் X (x ன் சராசரி) மற்றும் Y (y ன் சராசரி)மதிப்புகளை உள்ளீடு செய்து புதிய கணக்குகளைச் செய்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/q4tsyvys (or) scan the QR Code

அத்தியாயம் 10

செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்த பின் மாணவர்கள் கீழ்க்கண்டவைகளை புரிந்த கொள்ள முடியும்.

- நேரியல் செயல் திட்டக் கணக்குகளை வடிவமைத்தல்.
- நேரியல் செயல் திட்டக் கணக்குகளுக்கான தீர்வுகளை வரைபடம் மூலம் காணல்.
- திட்டத்தின் வலையமைப்பை வரைதல்.
- தீர்வுக்கு உகந்த பாதையைக் கொண்டு திட்டம் முடிய ஆகும் காலம் கணக்கிடல்.

அறிமுகம்

இரண்டாம் உலகப் போரின்போது இங்கிலாந்து நாட்டு நிர்வாகத்தினர், அறிவியலாளர்கள், பொறியியலாளர்கள் மற்றும் கணிதவியலாளர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவை அமைத்து, ஆகாயம் மற்றும் நிலப் பாதுகாப்புக்குத் தேவையான வியூகங்கள் மற்றும் செயல்பாடுகள் பற்றி ஆராய்ந்தனர். போருக்கு தேவையான வெடிபொருள்கள், உணவு மற்றும் இதர பொருள்கள் ஆகிய அளவான இராணுவ வளங்களில் சிறந்த பயன்பாட்டிற்குரியவற்றை கணிப்பது அவர்களின் நோக்கமாக இருந்தது. இதுதான் செயல்முறை ஆராய்ச்சிக்காக உருவாக்கப்பட்ட முதல் குழு. இராணுவ செயல்முறைகள் குறித்து ஆராய்ச்சி செய்ததமையால் செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி எனப்பெயர்வரக் காரணமாயிற்று. இந்த செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சிக் குழு சுரங்க செயல்பாட்டிற்கான வியூகங்களை உருவாக்குதல், புதிய விமான வடிவமைப்பை கண்டுபிடிப்பது மற்றும் கடல் சுரங்கங்கள் திட்டமிடல் ஆகியவற்றிற்கு உதவி புரிந்தது. இப்போருக்குப் பின் தொழிற்சாலை நிர்வாகிகள் தங்களுடைய சிக்கலான பிரச்சனைகளுக்குத் தீர்வு காண செயல் முறைகள் ஆராய்ச்சிக் குழுவின் உதவியை நாடினர்.

செயல்முறை ஆராய்ச்சியை அனைவரும் ஏற்றுக்கொள்ளும்படி ஒரே மாதிரியாக வரையறுக்க முடியாது. UK செயல்முறை ஆராய்ச்சிக் குழு சார்பாக செயல்முறை ஆராய்ச்சியானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது, "தொழிற்சாலைகள், வணிகம், அரசாங்கம் மற்றும் இராணுவம் ஆகியவற்றிக்குப் பயன்படுத்தப்படும் இயந்திரங்கள், பொருள்கள், மனிதர்கள் மற்றும் பணம் ஆகியவற்றால் ஏற்படும் சிக்கலான பிரச்சனைக்குத் தீர்வு காணப் பயன்படும் அறிவியல் முறை ஆகும்.


L.V.காண்ட்ரோவிச்

செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி மாதிரி என்பது ஒரு பொருளின் பிரதிநிதித்துவம் அல்லது சில வாழ்வியல் சூழலின் அமைப்பு ஆகும். இந்த மாதிரியின் நோக்கமானது குறிப்பிடத் தக்க காரணிகள் மற்றும் அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பை கண்டறிதல் ஆகும். இங்கு நாம் நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கு மற்றும் வலையமைப்பு பகுப்பாய்வு ஆகிய இரண்டு வகைகளைப் பற்றி மட்டும் படிக்க உள்ளோம்.

10.1. நேரியல் திட்டமிடல் கணக்குகள்

ரஷ்ய கணித வல்லுநரான L.V. காண்ட்ரோவிச் என்பவர் முதன்முறையாக நேரியல் திட்டமிடல் கணக்குகளைத் தீர்க்க கணித மாதிரிகளைப் பயன்படுத்தினார். அவர் 1939–ல் உற்பத்தியில் உருவாகும் பலவகையான பிரச்சினைகளைக் கணித வடிவில் வரையறை செய்ய முடியும் என்றும், எனவே அவற்றை எண்மான முறையில் தீர்க்க

10_11th_BM-STAT_Ch-10-TM.indd 254 08-12-2021 21:57:49

இயலும் என்றும் குறிப்பிட்டுக் காட்டினார். இந்த முடிவெடுக்கும் நுணுக்கம் அல்லது முறை பிற்காலத்தில் ஜார்ஜ் B. டான்ட்சிக் எனும் வல்லுநரால் மேம்படுத்தப்பட்டது. அவர் பொது நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கை உருவாக்கினார். மேலும் அவர் அத்தகைய கணக்குகளைத் தீர்க்க பயன்படும் எளிய நேரிடல் முறையை (simplex method 1947) மேம்படுத்தினார். கருத்தியல், பயன்பாடு, கணக்கீடுகள் ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் நோக்கும்போது இன்று நேரியல் திட்டமிடல், உகந்த தீர்வு நுணுக்கங்களில் மிகச்சிறந்த ஒன்றாக இருக்கிறது.

வரையறை

நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கு என்பது கிடைக்கக் கூடிய அளவான வள ஆதாரங்களை ஒதுக்கீடு செய்து உகம (மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு) மதிப்பினை காண்பதற்கான ஒரு கணிதவியல் அமைப்பு உத்தியாகும்.

கணித அடிப்படையில், நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கின் பொதுவடிவத்தைக் கீழே உள்ளவாறு கூறலாம்.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq$ (அல்லது = அல்லது$\geq$) b_1

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq$ (அல்லது = அல்லது$\geq$) b_2

… …. …. ….

… …. …. ….

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq$ (அல்லது = அல்லது$\geq$) b_m

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

என்ற **கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க** $Z = c_1x_1 + c_2\ x_2 + \ldots + c_n\ x_n$ - ன் **மீப்பெருமதிப்பு** அல்லது **மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.**

LPP–ன் சுருக்கமான வடிவம்

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq$ (அல்லது = அல்லது$\geq$) b_i ,

$i = 1,2,3,\ldots,m$ (1)

மற்றும் $x_j \geq 0$ ... (2)

என்ற **கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க** $Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ **மீப்பெருமதிப்பு** அல்லது **மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.**

சில பயனுள்ள வரையறைகள்

குறிக்கோள் சார்பு (Objective function):

உகம மதிப்பு (மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு) காண வேண்டிய நேரியல் சார்பு $Z = c_1\ x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ என்பது குறிக்கோள் சார்பு ஆகும்.

தீர்மான மாறிகள் (Decision variables):

குறிக்கோள் சார்பின் உகம மதிப்பைக் காண்பதற்கு தேவைப்படும் x_j , $j = 1,2,3,\ldots,n,$ எனும் மாறிகள் தீர்மான மாறிகள் ஆகும்.

கட்டுப்பாடுகள் (Constraints):

அளவான வள ஆதாரங்களைப் பயன் படுத்துவதற்கானக் குறிப்பிட்ட வரையறைகள், கட்டுப்பாடுகள் ஆகும்.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq$ (அல்லது = அல்லது$\geq$) b_i ,

$i = 1,2,3,\ldots, m$ என்பவைகள் கட்டுப்பாடுகள்.

தீர்வுகள் (Solutions):

எல்லா கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யக் கூடிய தீர்மான மாறிகளின் (x_j, j=1,2,3,…, n) தொகுப்பு மதிப்புகள் அந்தக் கணக்கின் தீர்வுகள் ஆகும்.

ஏற்புடையத் தீர்வு (Feasible solution):

குறை குறியற்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு எல்லாக் கட்டுபாடுகளையும் நிறைவு செய்யும் தீர்மான மாறிகளின் மதிப்புகளின் தொகுப்பு ஏற்புடையத் தீர்வு ஆகும்.

உகமத் தீர்வு (Optimal solution):

குறிக்கோள் சார்பின் பெரும அல்லது சிறும மதிப்பைத் தரும் ஏற்புடையத் தீர்வு, உகமத் தீர்வு என்றழைக்கப்படும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

விவசாயிகளுக்கு இடர்பாடுகளை சிறுமமாகவும் மற்றும் இலாபத்தை பெருமமாகவும் அளிக்கக்கூடிய நல்ல மகசூல் பெறுவதற்கு நேரியல் திட்டமிடல் கணக்குகள் உதவுகிறது.

தீர்வுக்கு உகந்தப் பகுதி (Feasible region):

ஒரு நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கில் குறை குறியற்ற நிபந்தனைகள் $x_j \geq 0$ உட்பட்ட எல்லாக் கட்டுப்பாடுகளையும் சேர்ந்துக் கணிக்கக் கூடிய பொதுவான, அக்கணக்கின் தீர்வுக்கு உகந்த பகுதி (அல்லது ஏற்புடைய பகுதி) எனப்படும்.

10.1.1 நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கின் கணிதவியல் அமைப்பை உருவாக்குதல் (Mathematical formulation of a linear programming problem)

ஒரு நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கை ஒரு கணித வடிவமாக அமைப்பதற்கு பின்வரும் வழிமுறைகளைக் கையாள வேண்டும்.

(i) தீர்மான மாறிகளைக் கண்டறிய வேண்டும்.

(ii) குறிக்கோள் சார்பினை மீப்பெரிதாக்க அல்லது மீச்சிறிதாக்க என அடையாளம் கண்டு அதை தீர்மான மாறிகளைக் கொண்டு நேரியல் சார்பாக எழுத வேண்டும்.

(iii) கணக்கில் உள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்கு ஏற்றாற்போல் தீர்மான மாறிகளை அசமன்பாடுகளாகவோ அல்லது சமன்பாடுகளாகவோ எழுத வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.1

ஒரு மர வியாபாரி மேசை, நாற்காலி ஆகிய இரு பொருள்களை மட்டுமே வியாபாரம் செய்கிறார். அவரிடம் முதலீடு ₹10,000/- உள்ளது. மேலும் 60 எண்ணிக்கையிலான பொருள்களை மட்டுமே வைப்பதற்கான இடவசதியும் உள்ளது. ஒரு மேசையின் விலை ₹500/- மற்றும் ஒரு நாற்காலியின் விலை ₹200/- ஆகும். அவர் வாங்குகின்ற எல்லாப் பொருள்களையும் விற்றுவிடுவார். ஒரு மேசையிலிருந்து ₹50 இலாபமும், ஒரு நாற்காலியிருந்து ₹15 இலாபமும் பெறுகிறார் எனில், அவர் மீப்பெரு இலாபம் பெறுவதற்கான நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கினை வடிவாக்குக.

தீர்வு:

(i) **மாறிகள்**

(ii) x_1, x_2 முறையே மேசை மற்றும் நாற்காலிகளின் எண்ணிக்கை என்க.

(iii) **குறிக்கோள் சார்பு**

x_1 மேசைகளின் இலாபம் = $50\, x_1$

x_2 நாற்காலிகளின் இலாபம் = $15\, x_1$

மொத்த இலாபம் = $50\, x_1 + 15x_2$

இதனை $Z = 50x_1 + 15x_2$, என எழுதலாம் மீப்பெரு இலாபம் பெற $Z = 50x_1 + 15x_2$,–ஐ மீப்பெரிதாக்க வேண்டும்.

(iv) **கட்டுப்பாடுகள்**

வியாபாரியிடம் அதிக பட்சமாக 60 பொருள்களை வைப்பதற்கான இடவசதி உள்ளது.

$x_1 + x_2 \leq 60$

x_1 மேசைகளின் விலை = ₹ $500x_1$

x_2 நாற்காலிகளின் விலை = ₹ $200x_2$

மொத்த விலை = $500x_1 + 200x_2$,

மொத்த விலை 10000க்கு மேல் இருக்கக் கூடாது.

$500x_1 + 200x_2 \leq 10000$

$5x_1 + 2x_2 \leq 100$

(v) **குறை குறியற்ற நிபந்தனைகள்:**

மேசை மற்றும் நாற்காலிகளின் எண்ணிக்கை குறை குறியற்றவை என்பதால்

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ ஆகும்.

எனவே நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கு (L.P.P) கீழ்க்கண்ட வடிவத்தைப் பெறுகிறது.

$x_1+x_2 \le 60$

$5x_1 + 2x_2 \le 100$

$x_1, x_2 \ge 0$ என்ற **கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,**

$Z = 50x_1+15x_2$–ன் **மீப்பெருமதிப்பைக் காண்க.**

எடுத்துக்காட்டு 10.2

ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மூன்று வகையான பொருள்கள் A, B மற்றும் C ஆகியவைகள் ஒரு அலகிற்கு முறையே ₹ 20, ₹25 மற்றும் ₹15 என இலாபம் ஈட்டுகிறது. ஒரு அலகு உற்பத்திக்கு தேவையான வள ஆதாரங்கள் மற்றும் மொத்த இருப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தி	P_1	P_2	P_3	மொத்த இருப்பு
மனித நேரம் / அலகு	6	3	12	200
இயந்திர நேரம் / அலகு	2	5	4	350
மூலப்பொருள்கள் / அலகு	1 கி.கி	2 கி.கி	1 கி.கி	100 கி.கி

இவற்றிக்கு நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கினை வடிவமைக்கவும்.

தீர்வு:

(i) **மாறிகள்**

x_1 , x_2, x_3 என்பவை முறையே உற்பத்தி செய்யப்பட வேண்டிய பொருள்கள் P_1, P_2 மற்றும் P_3 ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கை என்க.

(ii) **குறிக்கோள் சார்பு**

x_1 அலகுகள் கொண்ட உற்பத்தி பொருள் P_1 –ன் இலாபம் = $20x_1$

x_2 அலகுகள் கொண்ட உற்பத்தி பொருள் P_2 –ன் இலாபம்= $25x_2$

x_3 அலகுகள் கொண்ட உற்பத்தி பொருள் P_3–ன் இலாபம் = $15x_3$

மொத்த இலாபம் = $20x_1 + 25x_2 + 15x_3$

மொத்த இலாபம் மீப்பெரிதாக்கப்பட,

$Z = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3$–ஐ மீப்பெரிதாக்க வேண்டும்.

(iii) **கட்டுப்பாடுகள் :** $6x_1 + 3x_2 + 12x_3 \le 200$

$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 350$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 100$

(iv) **குறை குறியற்ற நிபந்தனைகள்:**

A, B மற்றும் C ஆகிய உற்பத்தி பொருள்களின் எண்ணிக்கை குறை குறியற்றவை எனவே $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

இந்த நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கை (L.P.P) நாம் கணித வடிவில் அமைப்போம்.

$6x_1 + 3x_2 + 12x_3 \le 200$

$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 350$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 100$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க, $Z = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3$ –ன் மீப்பெருமதிப்பைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 10.3

ஒரு இல்லத்தரசி F_1 மற்றும் F_2 என்ற இரண்டு வகையான உணவுகளைக் குறைந்த பட்சம் 6 அலகுகள் வைட்டமின் A மற்றும் 9 அலகுகள் வைட்டமின் B உள்ள கலவையாக அமைக்க விரும்புகிறார். F_1 வகை உணவு ஒரு கிலோ ₹ 50 மற்றும் F_2 வகை உணவு ஒரு கிலோ ₹ 70 என உள்ளது. F_1 வகை உணவில் ஒரு கிலோவிற்கு 4 அலகு வைட்டமின் A யையும் மற்றும் 6 அலகு வைட்டமின் B யையும் உள்ளடக்கியுள்ளது. F_2 என்ற உணவில் ஒரு கிலோவிற்கு 5 அலகு வைட்டமின் A யையும் மற்றும் 3 அலகு வைட்டமின் Bயையும் உள்ளடக்கியுள்ளது. இந்த கலவையின் விலையைக் குறைக்கும் விதத்தில் மேற்கண்டவற்றை நேரியல் திட்டமிடல் கணக்காக அமைக்கவும்.

தீர்வு:

(i) **மாறிகள்:**

(ii) கலவையில் F_1 உணவு x_1 கி.கி மற்றும் F_2 உணவு x_2 கி.கி உள்ளது என்க.

(iii) **குறிக்கோள் சார்பு:**

x_1 கி.கி F_1 உணவின் விலை = $50\,x_1$

x_2 கி.கி, F_2 உணவின் விலை = $70x_2$

விலையானது சிறுமமாக்கப்படவேண்டும்.

எனவே $Z = 50x_1 + 70\,x_2$ –ஐ மீச்சிறிதாக்குக.

(iv) **கட்டுப்பாடுகள்:**

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து நாம் பின்வரும் அட்டவணையை அமைப்போம்

வளங்கள்	உணவு (கிகி)		தேவை
	$F_1\,(x_1)$	$F_2\,(x_2)$	
வைட்டமின் A (அலகுகள்/கிகி)	4	5	6
வைட்டமின் B (அலகுகள்/கிகி)	6	3	9
விலை(₹/கிகி)	50	70	

அட்டவணை 10.1

$4x_1+5x_2 \geq 6$ (குறைந்தப்பட்சம் 6 அலகுகள் வைட்டமின் A தேவைப்படுவதால்)

$6x_1+3x_2 \geq 9$ (குறைந்தப்பட்சம் 9 அலகுகள் வைட்டமின் B தேவைப்படுவதால்)

(v) **குறை குறியற்ற நிபந்தனைகள்:**

வைட்டமின் A மற்றும் வைட்டமின் B அளவுகள் குறை குறியற்றவையாக இருப்பதால், $x_1, x_2 \geq 0$

எனவே நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கை (LPP) நாம் கணித வடிவில் அமைப்போம்.

$4\,x_1+5x_2 \geq 6$

$6\,x_1+3x_2 \geq 9$

மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$Z = 50\,x_1 + 70x_2$ –ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 10.4

ஒரு மென் பானம் (Soft drinks) தயாரிக்கும் நிறுவனம், இரண்டு குப்பி ஆலைகள் C_1 மற்றும் C_2– ஐக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு ஆலையும் மூன்று விதமான மென் பானங்கள் S_1, S_2 மற்றும் S_3–ஐத் தயாரிக்கின்றன. இரு ஆலைகளிலும் ஒரு நாளில் தயாரித்து இருப்பு வைக்கப்படும் குப்பிகளின் எண்ணிக்கை, பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தயாரிப்பு	ஆலை	
	C_1	C_2
S_1	3000	1000
S_2	1000	1000
S_3	2000	6000

ஒரு சந்தைக் கணக்கெடுப்பு ஏப்ரல் மாதத்தில் S_1 குப்பிகள் 24000மும் S_2 குப்பிகள் 16000–ம் S_3 குப்பிகள் 48000–ம் தேவைபடுவதைக் குறிக்கின்றது. ஒரு நாள் P மற்றும் Q ஆலைகள் முறையே செயல்படுபவதற்கான செலவு ₹ 600 மற்றும் ₹ 400 ஆகிறது. ஏப்ரல் மாதம் ஒவ்வொரு ஆலையும் குறைந்தபட்சத் தயாரிப்புச் செலவில் சந்தைத் தேவையை எதிர்நோக்குவதற்கு எத்தனை நாட்கள் செயல்பட வேண்டும் எனக் காண்க. மேற்கண்டக் கணக்கை நேரியல் திட்டமிடல் வகையில் அமைக்கவும்.

தீர்வு:

(i) **மாறிகள்:** C_1, C_2 என்ற ஆலைகள் செயல்படத் தேவையான நாட்களை x_1, x_2 என்க.

(ii) **குறிக்கோள் சார்பு:** மீச்சிறிதாக்கு $Z = 600\,x_1 + 400\,x_2$

(iii) **கட்டுப்பாடுகள்:** $3000x_1 + 1000x_2 \geq 24000$ (24000 குப்பிகள் Aக்குத் தேவைப் படுவதால் 24000க்குக் குறையாமல் இருக்க வேண்டும்)

$1000\,x_1 + 1000\,x_2 \geq 16000$

$2000\,x_1 + 6000\,x_2 \geq 48000$

(iv) **குறை குறியற்ற நிபந்தனைகள்:** ஆலைகளின் வேலை நாட்கள் குறை குறியற்றவையாக இருக்கும். எனவே x_1, x_2 ≥ 0. இந்த நேரியத் திட்டமிடல் கணக்கை (L.P.P) கணிதவடிவில் அமைப்போம்.

$3000\ x_1 + 1000\ x_2 \geq 24000$

$1000\ x_1 + 1000\ x_2 \geq 16000$

$2000\ x_1 + 6000\ x_2 \geq 48000$

மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 600\ x_1 + 400\ x_2$ –ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

10.1.2 நேரியல் திட்டமிடல் கணக்குகளுக்கு (LPP) வரைபடம் மூலம் தீர்வு காணல் (Solution of LPP by graphical method)

நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கை அமைத்த பிறகு, குறிக்கோள் சார்பின் உகமத் தீர்வை (பெருமம் அல்லது சிறுமம் மதிப்பு) நாம் காண வேண்டும். இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரியல் திட்டமிடல் கணக்குகளுக்கு வரைபடம் முறை மூலம் தீர்வு காணலாம். இரு மாறிகளுக்கு மேல் உள்ள நேரியல் திட்டமிடல் கணக்குகளை வரைபடம் மூலம் தீர்க்க இயலாது.

மேற்குறிப்பிட்ட முறை மூலம் தீர்வு காண்பதற்கான முக்கியப் படிகள்

(i) கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றைக் கணித வடிவமைப்பில் எழுதுதல்.

(ii) கணக்கில் உள்ள கட்டுப்பாடுகளைச் சமன்பாடு வடிவில் எழுதி வரைபடமாக வரைதல்

(iii) ஏற்புடையப் பகுதி (தீர்வுப் பகுதியை) காணுதல்.

(iv) ஒவ்வொரு முனைப் புள்ளியின் (முடிவுப் புள்ளியின்) ஆயத்தொலைகளின் உகந்த பகுதியைக் காண்க. முனைகளின் ஆயத்தொலைகளைப் பார்வைக் கணிப்பு மூலமாகவோ அல்லது அந்தப் புள்ளி வழியேச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலமாகவோ காணலாம்.

(v) முனைப்புள்ளிகளின் மதிப்பை குறிக்கோள் சார்பில் சமனிடுவதன் மூலம் குறிக்கோள் சார்புகளின் மதிப்புகளை கணக்கிடலாம்.

(vi) கொடுக்கப்பட்ட கணக்கில் மீப்பெரு மதிப்பைக் காணவேண்டும் எனில் மேலே கணக்கிடப்படும் மதிப்புகளில் மிகப்பெரிய மதிப்பே உகம மதிப்பு ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட கணக்கில் மீச்சிறு மதிப்பைக் காணவேண்டும் எனில் மேலே கணக்கிடப்படும் மதிப்புகளில் மிகச்சிறிய மதிப்பே உகம மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.5

கீழ்க்கண்ட நேரியத் திட்டமிடல் கணக்கை (LPP) தீர்க்க.

$x_1 + 4x_2 \leq 24,\ 3x_1 + x_2 \leq 21$

$x_1 + x_2 \leq 9$ மற்றும் $x_1,\ x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 2\ x_1 + 5x_2$ –ன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க ஏற்புடைய பகுதியைக் காண்க.

இரண்டு பொதுவான தீர்மான மாறிகள் x_1 மற்றும் x_2 குறை குறியற்றவையாக $(x_1,\ x_2 \geq 0)$ இருப்பதால் ஏற்புடையப் பகுதி, முதல் கால்மானப் பகுதியில் அமையும் அனைத்துக் கட்டுப்பாடுகளையும் சமன்பாடு வடிவில் எழுதுக.

$x_1 + 4x_2 = 24$

$3x_1 + x_2 = 21$

$x_1 + x_2 = 9$

$x_1 + 4x_2 = 24$ என்ற நேர்க்கோடானது $(0,\ 6)$ மற்றும் $(24,\ 0)$ என்றப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும்.

[$x_1 + 4x_2 = 24$ இல் $x_1=0$ எனப் பிரதியிட $x_2 = 6$ எனக் கிடைக்கும்.

அதேபோல் $x_2 = 0$ எனப் பிரதியிட $x_1 = 24$ எனக் கிடைக்கும்.]

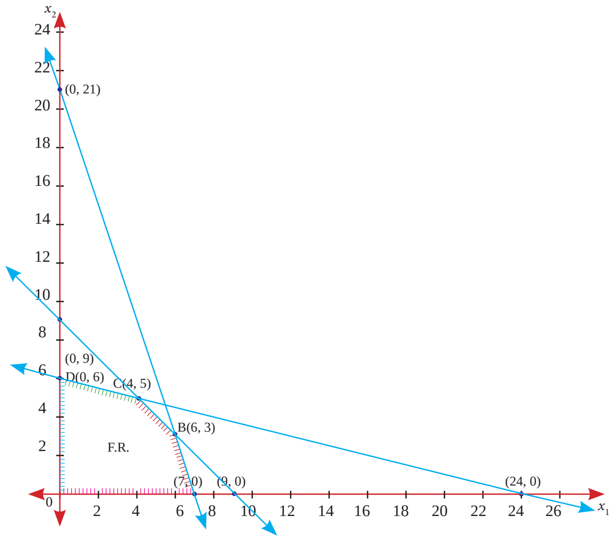
$x_1+ 4x_2 = 24$ என்ற கோட்டின் மீதோ அல்லது அதற்குக் கீழோ வரும் புள்ளிகள் $x_1+ 4x_2 \leq 24$ என்ற கட்டுப்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும்.

$3x_1+ x_2 = 21$ என்ற நேர்கோடானது (0, 21) மற்றும் (7, 0) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும்.

$3x_1+ x_2 = 21$ என்ற கோட்டின் மீதோ அல்லது அதற்குக் கீழோ வரும் புள்ளிகள் $3x_1+x_2 \leq 21$ என்ற கட்டுப்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும்.

$x_1+ x_2 = 9$ என்ற நேர்கோடானது (0 , 9) மற்றும் (9 , 0) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும்.

$x_1 + x_2 = 9$ என்ற கோட்டின் மீதோ அல்லது அதற்குக் கீழோ வரும் புள்ளிகள் $x_1+ x_2 \leq 9$ கட்டுப்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும்.



படம் 10.1

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளக் கட்டுப்பாட்டிற்கிணங்க வரைபடமானது வரையப்பட்டுள்ளது. நிழலிடப்பட்ட OABCD என்ற பகுதியே தீர்வுப் பகுதி ஆகும். தீர்வுப் பகுதியின் முனைப்புள்ளிகள் முறையே O(0,0) A(7,0); B(6,3) [$x_1+ x_2= 9$ மற்றும் 3 $x_1 + x_2 = 21$ என்ற வெட்டும் புள்ளி B ஆகும்)];C(4,5) $x_1+ x_2 = 9$ மற்றும் $x_1+ 4x_2 = 24$] என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி C ஆகும்) D(0,6).

முனைப்புள்ளிகள்	$Z = 2x_1 + 5x_2$
O(0,0)	0
A(7,0)	14
B(6,3)	27
C(4,5)	33
D(0,6)	30

அட்டவணை 10.2

குறிக்கோள் சார்பின் பெரும மதிப்பானது C என்ற புள்ளியில் கிடைக்கிறது. எனவே $x_1=4$, $x_2=5$, Z– ன் பெரும மதிப்பு = 33.

எடுத்துக்காட்டு 10.6

கீழ்க்கண்ட நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கைத் தீர்க்க.

$4x_1+x_2 \geq 40$; $2x_1+3x_{22} \geq 90$ மற்றும் x_1, $x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க

$Z= 5x_1+4x_2$ –ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

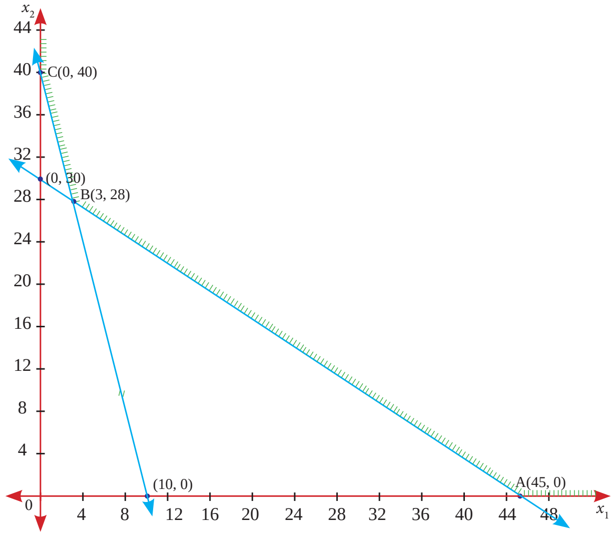
தீர்வு:

x_1 மற்றும் x_2 குறை குறியற்றவையாக இருப்பதால் ஏற்புடைய பகுதி முதல் கால் பகுதியில் அமையும்.

$4x_1+x_2=40$ என்ற நேர்க்கோடானது (0, 40) மற்றும் (10, 0) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும். மேலும் $4x_1+x_2=40$ என்றக் கோட்டின் மீதோ அல்லது அதற்கு மேலோ வரும் புள்ளிகள் $4x_1+x_2 \geq 40$ என்றக் கட்டுப்பாட்டை பூர்த்தி செய்கிறது.

$2x_1+3x_2=90$ என்ற நேர்க்கோடானது (0, 30) மற்றும் (45, 0) என்ற புள்ளிகள் வழியாக செல்லும். மேலும் $2x_1+3x_2 = 90$ என்றக் கோட்டின் மீதோ அல்லது அதற்கு மேலோ வரும் புள்ளிகள் $2x_1+3x_2 \geq 90$ என்றக் கட்டுப்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்கிறது.

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடிற்கிணங்க வரைபடமானது வரையப்பட்டுள்ளது.



படம் 10.2

நிழலிடப்பட்ட ABC என்ற பகுதியே தீர்வுப் பகுதி ஆகும்.

தீர்வு பகுதியின் முனைப்புள்ளிகள் A(45,0), B(3,28), C(0,40)

முனைப்புள்ளிகள்	$Z = 5x_1 + 4x_2$
A(45,0)	225
B(3,28)	127
C(0,40)	160

அட்டவணை 10.3

குறிக்கோள் சார்பின் சிறும மதிப்பானது B(3,28) என்ற புள்ளியில் கிடைக்கிறது.

எனவே $x_1 = 3$, $x_2 = 28$, Z மீச்சிறு மதிப்பு $= 127$

எடுத்துக்காட்டு 10.7

கீழ்க்கண்ட நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கைத் தீர்க்க. $x_1+x_2 \leq 30$; $x_2 \leq 12$;

$x_1 \leq 20$ மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்றக் கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 2x_1+3x_2$ – ன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க ஏற்புடையப் பகுதியைக் காண்க.

இரண்டு பொதுவான தீர்மான மாறிகள் x_1 மற்றும் x_2 குறை குறியற்றவையாக இருப்பதல் $x_1, x_2 \geq 0$ ஆகும். ஏற்புடையப் பகுதி முதல் கால்பகுதியில் அமையும்.

அனைத்துக் கட்டுப்பாடுகளையும் சமன்பாடு வடிவில் எழுதுக.

$x_1 + x_2 = 30$; $x_2 = 12$; $x_1 = 20$

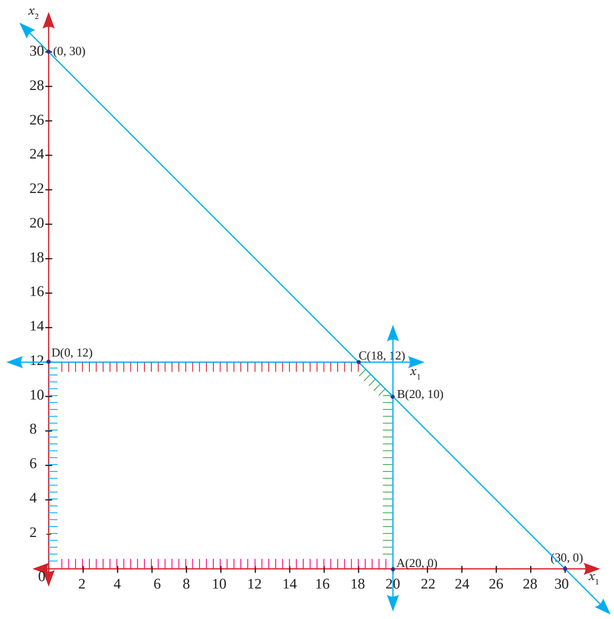
$x_1 + x_2 = 30$ என்ற நேர்கோடானது $(0, 30)$ மற்றும் $(30,0)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும்.

$x_2 = 12$ என்ற கோடானது x_1 க்கு இணையாகச் செல்லும்,

$x_1 = 20$ என்ற கோடானது x_2 க்கு இணையாகச் செல்லும்.

$x_1 + x_2 \leq 30$; $x_2 \leq 12$;

$x_1 \leq 20$ மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்றக் கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க உகந்த தீர்வுப் பகுதி கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 10.3

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளக் கட்டுபாட்டிற்கிணங்க வரைபடமானது வரையப்பட்டுள்ளது. நிழலிடப்பட்ட OABCD என்ற பகுதியே தீர்வுப் பகுதி ஆகும்.

தீர்வுப் பகுதியின் முனைப்புள்ளிகள் முறையே O(0,0); A(20,0); B(20,10); C(18,12) மற்றும் D(0,12).

முனைப்புள்ளிகள்	$Z = 2X_1 + 3X_2$
O (0,0)	0
A (20,0)	40
B (20,10)	70
C (18,12)	72
D (0,12)	36

அட்டவணை 10.4

குறிக்கோள் சார்பின் பெரும மதிப்பானது C–என்ற புள்ளியில் $x_1 = 18$, $x_2 = 12$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே Z – ன் பெரும மதிப்பு = 72.

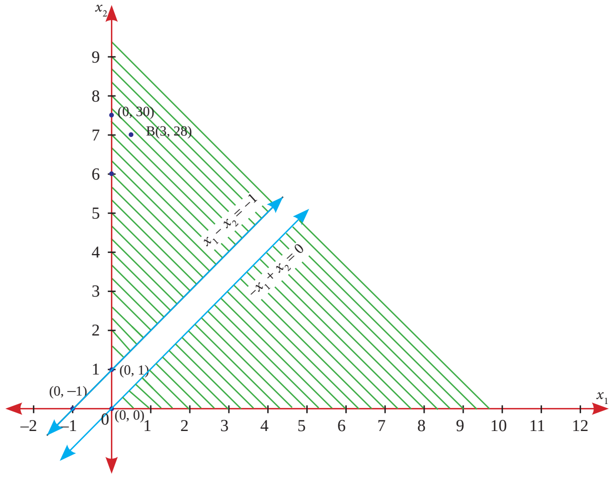
எடுத்துக்காட்டு 10.8

கீழ்க்கண்ட நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கைத் தீர்க்க.

$x_1 - x_2 \le -1$; $-x_1 + x_2 \le 0$ மற்றும் $x_1, x_2 \ge 0$

$Z = 3x_1 + 4x_2$ – ன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:



படம் 10.4

முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க ஏற்புடைய பகுதியைக் காண்க.

$x_1, x_2 \ge 0$ ஆக இருப்பதனால் ஏற்புடைய பகுதி முதல் கால்மானப் பகுதியில் அமையும் அனைத்துக் கட்டுபாடுகளையும் சமன்பாடு வடிவில் எழுதுக.

$x_1 - x_2 = -1$ என்ற நேர்க்கோடானது $(0,1)$ மற்றும் $(-1,0)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும்.

$-x_1 + x_2 = 0$ என்ற நேர்க்கோடானது $(0,0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள $x_1 - x_2 \le -1$; $-x_1 + x_2 \le 0$ மற்றும் $x_1, x_2 \ge 0$ கட்டுபாட்டிற்கிணங்க வரைபடமானது வரையப்பட்டுள்ளது.

கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் பொதுவான பகுதி இல்லை. எனவே நேரியத் திட்டமிடல் கணக்கிற்குத் தீர்வு இல்லை.

பயிற்சி 10.1

1. ஒரு நிறுவனம் A மற்றும் B என்ற பேனாக்களைத் தயார் செய்கிறது. பேனா A ஆனது உயர் தரம் கொண்டது மற்றும் பேனா B என்பது குறைந்த தரம் கொண்டது. பேனா A மற்றும் B முறையே ஒரு பேனாவிற்கு ₹5, ₹3 என இலாபம் ஈட்டுகிறது. பேனா A–ஐ உற்பத்தி செய்யத் தேவைப்படும் மூலப்பொருள்கள் பேனா B–ஐ உற்பத்தி செய்யத் தேவைப்படும் மூலப்பொருள்களைப் போல இரு மடங்கு ஆகும். 1000 பேனாக்கள் மட்டுமே தயாரிக்கப் போதுமான மூலப்பொருள்களின் அளிப்பு உள்ளது. பேனா A–விற்கு சிறப்புக் கிளிப்புகள் தேவைப்படுகிறது, மற்றும் அவ்வாறான கிளிப்புகள் ஒரு நாளைக்கு 400 மட்டுமே கிடைக்கப்பெறுகிறது. பேனா வகை B–க்கு ஒரு நாளைக்கு 700 கிளிப்புகள் கிடைக்கப்பெறுகிறது. இந்தக் கணக்கை நேரியத் திட்டமிடல் முறையில் வடிவமைக்கவும்.

2. A மற்றும் B இரு வகையான பொருள்களை ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்கிறது. இந்த இருவகையான பொருள்களின் மூலம் இலாபம் ₹30/- மற்றும் ₹40/- ஒவ்வொரு கிலோ கிராமுக்கும் கிடைக்கிறது. தேவைப்படும் வளங்கள் மற்றும் கிடைக்கக்கூடிய வளங்கள் ஆகிவற்றின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விவரங்கள்	தேவைகள்		இருப்பின் அளவு மாதத்திற்கு
	பொருள் A	பொருள் B	
மூலப் பொருள்கள் (கி.கி)	60	120	12000
இயந்திரம் இயங்கும் (நேரம் / அலகு)	8	5	600
ஒன்றிணைத்தல் (மனித உழைப்பு நேரம்)	3	4	500

பெரும இலாபத்தை ஈட்ட இந்தக் கணக்கை நேரியத் திட்டமிடல் அமைப்பில் எழுதுக.

3. ஒரு நிறுவனமானது சாதாரணமான மற்றும் தானியங்கி நிலைப்படுத்திகளை உற்பத்தி செய்கிறது. இதற்குத் தேவையான உபகரணங்கள் அனைத்தும் வெளியிலிருந்து வாங்கப்பட்டு ஒன்றிணைத்தல் மற்றும் சோதித்தல் மட்டுமே நிறுவனத்தில் செய்யப்படுகிறது. ஒவ்வொரு சாதாரணமான மற்றும் தானியங்கி ஒன்றிணைத்தல் மற்றும் சோதித்தலுக்கான நேரம் முறையே 0.8 மணி மற்றும் 1.20 மணியாகும். தற்போது ஒரு வாரத்திற்கு 720 மணி நேரம் உற்பத்தி திறனாக கிடைக்கிறது. வார விற்பனைப் பெருமமாக இருப்பதற்கான சந்தை நிலவரம் சாதாரணமான நிலைப்படுத்திக்கு 600 அலகுகளாகவும் தானியங்கி நிலைப்படுத்திக்கு 400 அலகுகளாகவும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. சாதாரண மற்றும் தானியங்கிற்கான இலாபம் அலகு ஒன்றிக்கு ₹100, ₹150 என கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. நேரியல் கணக்கிடல் முறையினை வடிவமைக்கவும்.

4. கீழ்க்கண்ட நேரியல் திட்டமிடல் கணக்குகளை வரைபடம் மூலம் தீர்க்க.

   (i) $30x_1+20x_2\leq 300$ $5x_1+10x_2\leq 110$ மற்றும் $x_1,\ x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 6x_1 + 8x_2$–ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

   (ii) $960x_1 + 640x_2 \leq 15360$; $x_1 + x_2 \leq 20$ மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 22x_1 + 18x_2$ –ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

   (iii) $5x_1+ x_2\geq 10$; $x_1+ x_2\geq 6$; $x_1 + 4x_2 \geq 12$ $x_1,\ x_2\geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 3x_1 + 2x_2$ –ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

   (iv) $3x_1 + x_2 \leq 9$; $x_1 + 2x_2 \leq 8$ மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக் கிணங்க $Z = 40x_1 + 50x_2$ – ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

   (v) $3x_1 + 3x_2 \leq 36$; $5x_1 + 2x_2 \leq 50$; $2x_1 + 6x_2 \leq 60$ மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க $Z = 20x_1 + 30x_2$ –ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

   (vi) $36x_1 + 6x_2 \geq 108$, $3x_1 + 12x_2 \geq 36$, $20x_1 + 10x_2 \geq 100$ மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க $Z = 20x_1 + 40x_2$–ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

10.2 வலையமைப்பு பகுப்பாய்வு (Network Analysis)

போக்குவரத்து அமைப்பான சாலைகள், இரயில் பாதைகள், குழாய் இணைப்புகள் மற்றும் இரத்த நாளங்கள் போன்றவற்றை எளிய வரைபடங்களாகக் காண்பதே வலையமைப்புகள் எனப்படும்.

ஒரு திட்டம் என்பது பல வேலைகளைக் கொண்டதாகும். குறிப்பிட்ட சில வேலைகளை வேறு சில வேலைகள் முடிந்த பின்னரே தொடங்க முடியும். சில வேலைகள் மற்ற வேலைகளைச் சாராமலும் இருக்கலாம். திட்டம் மற்றும் திட்ட நிறைவுக் காலம் தொடர்பான பல வேலைகளின் வரிசைகளை நிர்ணயிப்பதற்கு உதவும் நுட்பமே வலையமைப்பு திட்டமிடல் ஆகும்.

இருவிதமான அடிப்படைத் திட்டமிடல் மற்றும் கட்டுப்படுத்தும் நுட்பங்கள் ஆகியவை வலையமைப்பை பயன்படுத்தி நுண் கணிக்கப்பட்ட அட்டவணையை நிறைவு செய்ய பயன்படுத்துகின்றன. அவையாவன: திட்ட மதிப்பீடு மற்றும் கண்காணிப்பு நுட்பம் (Program Evaluation and Review Technique -PERT) மற்றும் தீர்வுக்குகந்த பாதை முறை (Critical Path Method -CPM) ஆகும். ரெமிங்டன் ரேண்ட் நிறுவனத்தின் J.E. கெய்லி (JE Kelly) என்பவரும் டூபான்ட் நிறுவனத்தின் M.R. வாக்கர் (M.R. Walker) என்பவரும் சேர்ந்து இரசாயன ஆலைகளின் பராமரிப்பை வரிசைப்படுத்துவதில் உதவுவதற்காக 1957 – ல் தீர்வுக்குகந்த பாதை உத்திமுறையை (CPM) மேம்படுத்தினார்கள். இந்த நுணுக்கம், பொதுவாக செயல்களை நடத்துவதற்கான கால அட்டவணை மிகச் சரியாகத் தீர்மானிக்க முடிந்த திட்டங்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

வலையமைப்பின் சில முக்கிய வரையறைகள் (Some important definitions in network)

செயல் (Activity):

நேரம் மற்றும் முயற்சி அல்லது வேறு வகையான வள ஆதாரங்களை உபயோகிக்கும் எந்த தனித்த செயல்பாட்டுக்கும் செயல் என்று பெயர். இது ஆரம்ப நிகழ்வு, இறுதி நிகழ்வு ஆகிய இரண்டு நிகழ்வுகளுக்கு இடையில் இருக்கிறது. பொதுவாகச் செயலைக் குறிக்க அம்புக்குறி உபயோகப்படுத்தப்படுகிறது. அதன் தலைப்பகுதி திட்டத்தின் முன்னேற்ற திசையைக் குறிக்கும்.

நிகழ்வு (Event):

செயல்களின் ஆரம்பம் அல்லது நிறைவைக் குறிப்பது நிகழ்வு எனப்படும். நிகழ்வு என்பது காலத்தைக் குறிக்கும் ஒரு புள்ளி. மேலும் நிகழ்வானது வள ஆதாரத்தை கணக்கில் எடுத்துக் கொள்வதில்லை. தொடக்க மற்றும் இறுதி செயல்கள் ஆரம்ப (தலை) நிகழ்வு மற்றும் இறுதி (வால்) நிகழ்வு என அடையாளம் காணப்படுகிறது. பொதுவாக நிகழ்வு ஒரு எண் வட்டத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. ஆரம்ப நிகழ்வின் (J-வது நிகழ்வு) எண்ணானது இறுதி நிகழ்வு (I-வது நிகழ்வு) எண்ணைவிட பெரியது (J>I)

முந்தைய செயல் (Predecessor Activity):

குறிப்பிட்ட செயல்கள் துவங்குவதற்கு முன்பு நடைபெறுகின்ற முழுமையடைந்த செயல்கள் முந்தைய செயல் எனப்படும். செயல் B உடைய முந்தைய செயல் A, இதனை எளிய முறையில் A<B (அதாவது செயல் A முழுமையடைந்தால் தான் செயல் B ஆரம்பிக்க முடியும்) என குறிப்பிடுவோம்

பிந்தைய செயல் (Successor Activity):

ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட செயல்கள் முழுமையடையாமல் இருந்தால் அடுத்த செயலை துவங்க முடியாது. அவ்வாறு உடனடியாகத் தொடரும் செயலை, பிந்தைய செயல் என்போம்.

வலையமைப்பு (Network):

வலையமைப்பு என்பது தர்க்க அடிப்படையில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட திட்டம் பற்றிய பல்வேறு செயல்களின் வரைபட குறியீடு ஆகும்.

பாதை (Path):

வலையமைப்புப் பாதை என்பது செயல்களின் வரிசை, ஆரம்ப நிகழ்வில் தொடங்கி இறுதி நிகழ்வு வரை செல்வதாகும்.

10.2.1 வலைப்பின்னலை வரைதல் (Construction of network)

வலைப்பின்னலை வரைவதற்கான விதிகள் (Rules for constructing network)

வலைப்பின்னலை வரைவதற்கு பொதுவாகக் கீழ்க்கண்ட விதிகளை பின்பற்ற வேண்டும்.

(i) ஒவ்வொரு செயலும் ஒரே ஒரு அம்புக்குறியால் மட்டுமே குறிக்கப்பட வேண்டும். அதாவது எந்த இரண்டு நிகழ்வுகளும் ஒரே ஒரு அம்புக்குறியால் மட்டுமே இணைக்கப்பட வேண்டும்.

(ii) எந்த இரண்டு செயல்களுக்கும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப மற்றும் இறுதி நிகழ்வுகளை அடையாளப்படுத்த முடியாது.

(iii) குறிப்பிட்ட ஒரு செயலினை அடையாளப்படுத்துவதன் பொருட்டு நிகழ்வுகள் ஒருமைத்தன்மையுடன் வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. ஒரு செயலில் இறுதி நிகழ்வானது தலை நிகழ்வை விட சிறியதாக இருக்க வேண்டும்.

(iv) அம்புக்குறிகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக் கொள்ளக்கூடாது.

(v) அம்புக்குறிகள் நேராக மட்டுமே இருக்க வேண்டும். அவை வளைந்து இருக்கக் கூடாது.

(vi) ஆரம்ப நிகழ்வு மற்றும் இறுதி நிகழ்வு தவிர ஏனைய ஒவ்வொரு நிகழ்வுக்கும் குறைந்தது ஒரு முந்தைய செயல் மற்றும் தொடர் செயல் இருக்க வேண்டும்.

நிகழ்வுகளுக்கு எண் இடல் (Numbering the Events)

தர்க்க தொடர்களின் படி வலையமைப்பு வரைந்த பின்பு, ஒவ்வொரு நிகழ்விற்கும் ஒரு எண்ணை நியமிக்க வேண்டும். அந்த எண் தொடர் வலைப்பின்னலின் தொடர்ச்சியை பிரதிபலிப்பதாக இருக்க வேண்டும்.

நிகழ்வு எண் இடலில் கீழ்க்கண்ட விதிகளை பின்பற்ற வேண்டும்.

(i) நிகழ்வுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் தனித்த எண்கள் வழங்கப்பட வேண்டும்.

(ii) நிகழ்வு எண் இடல் இடதுபக்கத்திலிருந்து வலது புறமாக வரிசை அடிப்படையில் அமைக்கப்படல் வேண்டும்.

(iii) தொடக்க நிகழ்விற்கு 0 அல்லது 1 என்று எண் இட வேண்டும்.

(iv) அம்பின் வால்பகுதியில் உள்ள எண்ணை விட அம்பின் தலைப்பகுதியில் உள்ள எண் எப்போதும் பெரியதாக இருக்க வேண்டும்.

(v) தொடர் நிகழ்வு எண்ணிடலுக்கு இடையே ஏதேனும் தொடர்புடைய செயலை சேர்ப்பதற்கு ஏதுவாகப் போதிய இடைவெளி இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு

வலையமைப்பின் பல்வேறு நிகழ்வுகளுக்கு எண்ணிடும் மேற்கண்ட வழிமுறைகள் **ஃபல்கெர்ஸன்ஸ் விதி** எனப்படும்.

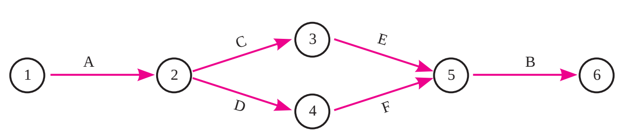
எடுத்துக்காட்டு 10.9

பின்வரும் விபரங்களுக்கு தர்க்க வலையமைப்பு வரைக.

செயல்கள் C மற்றும் D ஆகிய இரண்டும் A வைப் பின்தொடர்கிறது. செயல் E ஆனது C–ஐப் பின்தொடர்கிறது. செயல் F ஆனது செயல் D–ஐப் பின்தொடர்கிறது. செயல் E மற்றும் செயல் F ஆனது B யின் முந்தைய செயல்களாகும்.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கான வலையமைப்பு.



படம் 10.5

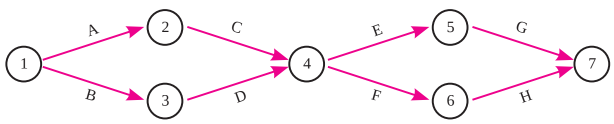
எடுத்துக்காட்டு 10.10

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு வலையமைப்பை உருவாக்குக.

செயல்:	A	B	C	D	E	F	G	H
உடனடி முந்தைய நிகழ்வு	-	-	A	B	C,D	C,D	E	F

தீர்வு:

உடனடி முந்தைய உறவுகளைப் பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட விதிகளின் படி வலையமைப்புகளை உருவாக்குவோம். தேவையான வலையமைப்பினை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் காணலாம்.



படம் 10.6

ஒப்புக்கான செயல் (Dummy activity):

ஒரு செயல் எவ்வித வளங்களையோ அல்லது நேரத்தையே உட்கொண்டிருக்காமல், தொழில் நுட்பச் சார்பினை மட்டுமே விளக்கக் கூடியதாக அமைந்தால் அச்செயல் ஒப்புக்கான செயல் எனப்படும். இதனை புள்ளிக் கோடுகள் (dotted lines) மூலம் குறிக்கலாம்.

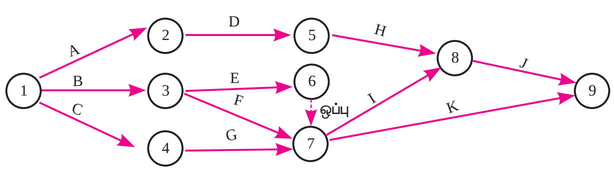
எடுத்துக்காட்டு 10.11

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு திட்டத்தின் செயல்பாடுகளும் மற்றும் அவைகளின் முன்னிலைத் தொடர்புகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கான வலையமைப்பை வரைக.

செயல்:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
முந்தைய செயல்பாடுகள்:	-	-	-	A	B	B	C	D	F	H,I	F,G

தீர்வு:

முன்னிலை தொடர்புகளையும் மற்றும் வலையமைப்பு உருவாக்குவதற்கான விதியைப் பயன்படுத்தி, தேவையான வலைப்பின்னல் வரைபடம் கீழே உள்ள படத்தில் காண்பிக்கப்படுகிறது.



படம் 10.7

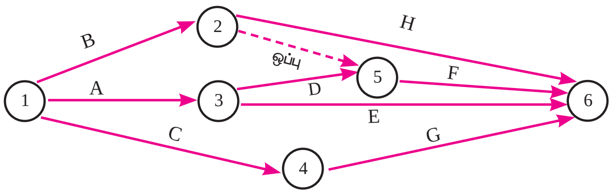
எடுத்துக்காட்டு 10.12

கீழ்கண்ட சூழ்நிலைகளுக்கு ஏற்ப வலையமைப்பு வரைபடத்தை வரைக.

$A<D,E;\ B,\ D<F;\ C<G$ மற்றும் $B<H$.

தீர்வு:

முன்னிலைத் தொடர்புகளையும் மற்றும் வலையமைப்பு உருவாக்குவதற்கான விதியைப் பயன்படுத்தி, தேவையான வலைப்பின்னல் வரைபடம் கீழே உள்ள படத்தில் காண்பிக்கப்படுகிறது.



படம் 10.8

10.2.2 தீர்வுக்குகந்தப் பாதை பகுப்பாய்வு (Critical path analysis)

ஒவ்வொரு செயலுக்கும் அந்த செயல் சிறப்பாக முடிவடைவதற்காக செலவிடப்படும் காலத்தை மதிப்பீடு செய்ய வேண்டும். மதிப்பீடுகள் நேரம், நாட்கள் மற்றும் வாரங்கள் அல்லது ஏதாவது வசதியான அலகு நேரங்களில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். திட்ட மிட்ட நேரம் பொதுவாக வலையமைப்பில் அம்புகுறியின் மேலே எழுதலாம்.

நிகழ்வுகள் மற்றும் செயல்பாடுகள் ஆகியவற்றிகான பல்வேறு நேரங்கள் கணக்கிடும் நோக்கத்திற்காகக் கீழ்கண்ட வார்த்தைகளை நன்கு உகந்த பாதை கணக்கிடுதலில் பயன்படுத்தலாம்.

E_i = நிகழ்வு i –ன் முன்கூட்டி ஆரம்பிக்கக்கூடிய நேரம்

L_j = நிகழ்வு j –ன் சமீபத்திய தொடக்க நேரம்

t_{ij} = செயல் (i,j) –ன் கால அளவு

நேரம் மதிப்பீடுகளைக் குறித்தபின்பு கீழ்க்கண்ட வழிகளில் கணக்கீடுகளை மேற்கொள்ள முடியும்:

a) முன்னோக்கி நகரும் கணக்கீடுகள்

b) பின்னோக்கி நகரும் கணக்கீடுகள்

முன்னோக்கி நகரும் கணக்கீடுகள்: (Forward pass calculations)

திட்டத்தின் ஆரம்ப நேரம் பூச்சியம் எனக் கொண்டு நாம் தொடக்க நிகழ்வு 1–லிருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும். வலையமைப்பை நிகழ்வுகளில் உள்ள எண்களின் ஏறு

வரிசையில் ஒவ்வொரு நிகழ்வாக சென்று இறுதி நிகழ்வில் முடிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு நிகழ்விலும், ஒவ்வொரு செயலுக்கான முந்தைய தொடக்க நேரம் E_i என்பதனைக் கருத்தில் கொண்டு கணக்கிட வேண்டும். E_i என்பது நிகழ்வு i–ன் முந்தைய நிகழ்வு.

இம்முறை கீழே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது:

படி 1: $E_1 = 0$; $i = 1$ (ஆரம்ப நிகழ்வு)

படி 2: i என்ற நிகழ்விலிருந்து ஆரம்பிக்கும் ஒவ்வொரு செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க நேரத்தை (EST) பின் வருமாறு அமைக்கவும்.

$ES_{ij} = E_i$; (i என்ற நிகழ்விலிருந்து தொடங்கும் (i,j) எனும் அனைத்து செயல்களுக்கும்).

படி 3: i என்ற நிகழ்விலிருந்து ஆரம்பிக்கும் ஒவ்வொரு செயலுக்குமான முந்தைய முடிவு நேரத்தை (EFT) கணக்கிட முந்தைய தொடக்க நேரத்தை செயல் எடுத்துகொள்ளும் காலத்துடன் கூட்ட வேண்டும்.

எனவே $EF_{ij} = ES_{ij} + t_{ij} = E_i + t_{ij}$

படி 4: அடுத்த நிகழ்வு j–க்கு $(j > i)$ நகரும் போது j இடத்து முந்தைய தொடக்க நேரத்தை பின்வருமாறு கணக்கிடவேண்டும்.

$E_j =$ பெரும$_i$ $\{EF_{ij}\}$ = பெரும$_i\{E_i + t_{ij}\}$

இவ்வாறு உடனடி முந்தைய செயல்பாடுகள் அனைத்திற்கும் கணக்கிடலாம்.

படி 5: $j=n$ (இறுதி நிகழ்வு) எனில், திட்டத்திற்கான முந்தைய முடிவு நேரத்தை

E_j = பெரும $\{EF_{ij}\}$ = பெரும$\{E_{n-1} + t_{ij}\}$ என கணக்கிடலாம்.

பின்னோக்கி நகரும் கணக்கீடுகள்: (Backward pass calculations)

வலையமைப்பை n என்ற இறுதி நிகழ்வில் தொடங்கி வலையமைப்பின் அனைத்து நிகழ்வுகளின் வழியாக நிகழ்வுகளில் உள்ள எண்களின் இறங்கு வரிசையில் சென்று ஆரம்ப நிகழ்வு 1–ல் முடிக்க வேண்டும். L_j என்பது நிகழ்வு j–ன் சமீபத்திய நிகழ்வு என எடுத்துக்கொண்டு ஒவ்வொரு நிகழ்வுக்கும் அந்தந்த செயலுக்கான சமீபத்திய முடிவுறும் நேரம் மற்றும் சமீபத்திய தொடங்கும் நேரம் ஆகியவற்றை கணக்கிட வேண்டும்.

இம்முறை சுருக்கமாக கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது:

படி 1: $j = n$–க்கு $L_n = E_n$ ஆகும்

படி 2: j என்ற நிகழ்வில் முடிவடையும் ஒவ்வொரு செயலுக்கும் சமீபத்திய முடிவு நேரத்தை (LFT) $LF_{ij} = L_j$ என அமைக்கலாம்.

படி 3: j என்ற நிகழ்வில் முடிவடையும் ஒவ்வொரு செயலுக்குமான சமீபத்திய ஆரம்ப நேரத்தை (LST) கணக்கிட செயல் முடிய ஆகும் காலத்தை சமீபத்திய முடிவு நேரத்திலிருந்து கழிக்க வேண்டும்.

எனவே $LS_{ij} = LF_{ij} - t_{ij} = L_j - t_{ij}$

படி 4: அடுத்த நிகழ்வு i–க்கு $(i < j)$ பின் நோக்கி நகரும்போது i–இடத்து சமீபத்திய ஆரம்ப நேரத்தை (LST) பின் வறுமாறு கணக்கிடவேண்டும்.

L_i = சிறும$_j$ $\{LS_{ij}\}$ = சிறும$_j\{L_j - t_{ij}\}$

படி 5: $j = 1$ (ஆரம்ப நிகழ்வு), எனில்

L_1 = சிறும $\{LS_{ij}\}$ = சிறும$\{L_2 - t_{ij}\}$

தீர்வுக்கு உகந்த பாதை (Critical path)

வலையமைப்பு வரைபடத்தில் செயல்களை இணைக்கும் நீண்ட பாதை தீர்வுக்கு உகந்த பாதையைக் குறிக்கிறது. அதாவது மிக நீண்ட காலம் எடுத்துக்கொள்ளும் பாதை தீர்வுக்கு உகந்த பாதை ஆகும்.

தீர்வுக்கு உகந்த பாதையில் அமைகின்ற (i,j), என்ற செயல் கீழ்கண்ட நிபந்தனைகளை நிவர்த்தி செய்தல் வேண்டும்.

(i) $E_i = L_i$ மற்றும் $E_j = L_j$

(ii) $E_j - E_i = L_j - L_i = t_{ij}$

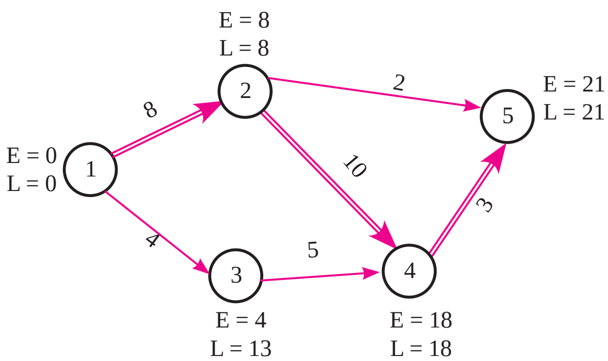
எடுத்துக்காட்டு 10.13

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க நேரம் (EST), முந்தைய முடிவு நேரம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க நேரம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு நேரம் (LFT) ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக:

செயல்	1-2	1-3	2-4	2-5	3-4	4-5
காலம் (நாட்களில்)	8	4	10	2	5	3

தீர்வு:

கீழே ஒவ்வொரு செயலுக்கான வலையமைப்பில் முந்தைய ஆரம்ப நேரம் மற்றும் சமீபத்திய முடிவு நேரம் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.



படம் 10.9

$E_1 = 0$ $\qquad$ $L_5 = 21$

$E_2 = E_1 + t_{12} = 0 + 8 = 8$ $\qquad$ $L_4 = L_5 - t_{45} = 21 - 3 = 18$

$E_3 = E_1 + t_{13} = 0 + 4 = 4$ $\qquad$ $L_3 = L_4 - t_{34} = 18 - 5 = 13$

$E_4 = E_2 + t_{24}$ அல்லது $E_3 + t_{34}$ $\qquad$ $L_2 = L_5 - t_{25}$ அல்லது $L_4 - t_{24}$

$= 8 + 10 = 18$ $\qquad$ $= 18 - 10 = 8$

($E_2 + t_{24}$ அல்லது $E_3 + t_{34}$ பெருமமாக உள்ளதை எடுக்க வேண்டும்) $\qquad$ ($L_5 - t_{25}$ அல்லது $L_4 - t_{24}$ சிறுமமாக உள்ளதை எடுக்க வேண்டும்)

$E_5 = (E_2 + t_{25}$ or $E_4 + t_{45})$ $\qquad$ $L_1 = L_2 - t_{12}$ or $L_3 - t_{13}$

$= 18 + 3 = 21$ $\qquad$ $= 8 - 8 = 0$

($E_2 + t_{25}$ அல்லது $E_4 + t_{45}$ பெருமமாக உள்ளதை எடுக்க வேண்டும்) $\qquad$ ($L_2 - t_{12}$ அல்லது $L_3 - t_{13}$ (சிறுமமாக உள்ளதை எடுக்க வேண்டும்)

இங்கு தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-2-4-5 இரு கோடுகளால் குறிக்கப்படுகிறது.

செயல்	காலம் (t_{ij})	EST	EFT=EST+ t_{ij}	LST=LFT– t_{ij}	LFT
1–2	8	0	8	0	8
1–3	4	0	4	9	13
2–4	10	8	18	8	18
2–5	2	8	10	19	21
3–4	5	4	9	13	18
4–5	3	18	21	18	21

அட்டவணை 10.5

இந்தத் திட்டத்தை நிறைவு செய்யும் நீண்ட காலம் 21 நாட்கள்.

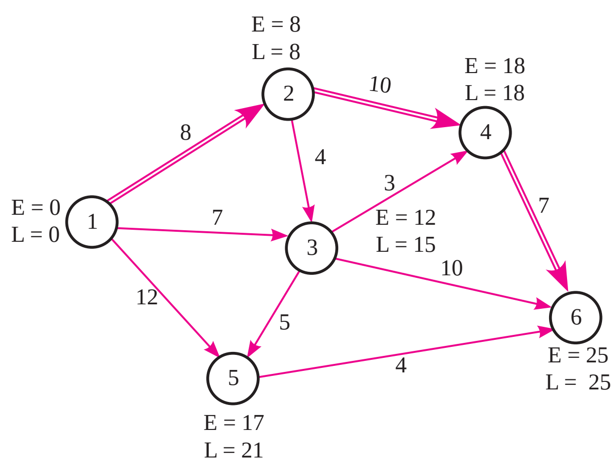
தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-2-4-5 மற்றும் திட்டம் நிறைவு செய்யும் காலம் 21 நாட்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 10.14

கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும், திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க.

செயல்	1-2	1-3	1-5	2-3	2-4	3-4	3-5	3-6	4-6	5-6
காலம் (வாரங்களில்)	8	7	12	4	10	3	5	10	7	4

தீர்வு:



படம் 10.10

செயல்	காலம் (வாரங்களில்)	EST	EFT	LST	LFT
1-2	8	0	8	0	8
1-3	7	0	7	8	15
1-5	12	0	12	9	21
2-3	4	8	12	11	15
2-4	10	8	18	8	18
3-4	3	12	15	15	18
3-5	5	12	17	16	21
3-6	10	12	22	15	25
4-6	7	18	25	18	25
5-6	4	17	21	21	25

அட்டவணை 10.6

தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-2-4-6 மற்றும் திட்டம் நிறைவு செய்யும் காலம் 25 வாரங்கள்

பயிற்சி: 10.2

1. கீழ்க்கண்ட செயல்களைக் கொண்ட திட்டத்தின் வலையமைப்பை வரைக. செயல்கள் A, D, E ஒரே நேரத்தில் ஆரம்பிக்கப்படும்; B, C>A; G, F>D, C; H>E, F.

2. கீழ்க்கண்ட நிகழ்வுகளை கொண்ட திட்டத்தின் வலையமைப்பை வரைக.

நிகழ்வுகள்	1	2	3	4	5	6	7
உடனடி முந்தைய நிகழ்வு	-	1	1	2,3	3	4,5	5,6

3. கீழ்க்கண்ட செயல்களைக் கொண்ட திட்டத்தின் வலையமைப்பை வரைக. செயல்கள் A, B, C ஒரே நேரத்தில் ஆரம்பிக்கப்படும் A<F, E; B<D, C; E, D<G

4. கட்டுமானத் திட்டத்தின் செயல்கள் மற்றும் அது தொடர்பான தகவல்கள் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் தரப்படுள்ளது.இதற்கான வலையமைப்பை வரைக.

செயல்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
உடனடி முந்தைய செயல்கள்	-	-	-	A	B	B	C	D	E	H,I	F,G

5. கட்டுமானத் திட்டத்தின் செயல்கள் மற்றும் அதுத் தொடர்பானத் தகவல்கள் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் தரப்படுள்ளது. இதற்கான வலையமைப்பை வரைக. மேலும் எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும், திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க.

செயல்	0-1	1-2	1-3	2-4	2-5	3-4	3-6	4-7	5-7	6-7
காலம் (வாரங்களில்)	3	8	12	6	3	3	8	5	3	8

6. ஒரு திட்டத்திற்கான பல்வேறு செயல்கள் மற்றும் அதற்கான நேரம் கீழேத் தரப்பட்டுள்ளது.

செயல்	1-2	1-3	2-4	3-4	3-5	4-9	5-6	5-7	6-8	7-8	8-10	9-10
நேரம்	4	1	1	1	6	5	4	8	1	2	5	7

இதற்கான வலையமைப்பை வரைக. மேலும் எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும், திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க

7. கீழே தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கு வலையமைப்பை வரைக. மேலும் எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும், திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க.

வேலை	1-2	1-3	2-4	3-4	3-5	4-5	4-6	5-6
காலம்	6	5	10	3	4	6	2	9

8. ஒரு திட்டத்தின் செயல்களும் அவற்றுக்கான கால அளவுகளும் (நாட்களில்) பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

செயல்	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5
கால அளவு	5	8	6	7	5	4	8

இதற்கான வலையமைப்பை வரைக. மேலும் எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும், திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க.

9. ஒரு திட்டத்தின் கால அட்டவணை பின்வருமாறு:

செயல்	1-2	1-6	2-3	2-4	3-5	4-5	6-7	5-8	7-8
கால அளவு (நாட்களில்)	7	6	14	5	11	7	11	4	18

இதற்கான வலையமைப்பை வரைக. மேலும் எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும், திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க.

10. ஒரு கட்டுமானத் திட்டத்தின் செயல்கள் மற்றும் அது தொடர்பான தகவல்கள் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் தரப் பட்டுள்ளது.

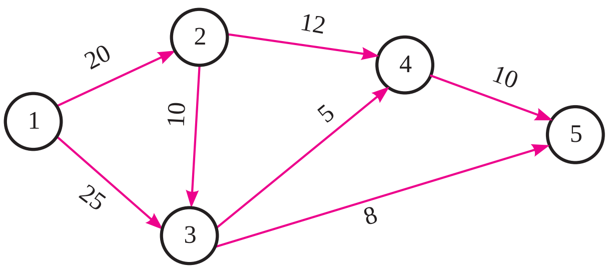
செயல்	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	4-5
கால அளவு (வாரங்களில்)	22	27	12	14	6	12

இதற்கான வலையமைப்பை வரைக. மேலும் எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும் திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க.

பயிற்சி 10.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வலைபின்னலுக்குத் தீர்வுக்குகந்தப் பாதை



(a) 1 – 2 – 4 – 5 (b) 1– 3– 5

(c) 1 – 2 – 3 – 5 (d) 1 – 2 – 3 – 4 – 5

2. கொடுக்கப்பட்ட நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கு $2x_1 + x_2 \le 40$, $2x_1 + 5x_2 \le 180$, $x_1, x_2 \ge 0$. என்றக் கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க $z = 3x_1 + 4x_2$ என்ற குறிக் கோள் சார்பை மீப்பெரிதாக்க கிடைக்கும் ஏற்புடைய முனைப் புள்ளி.

(a) $x_1 = 18, x_2 = 24$

(b) $x_1 = 15, x_2 = 30$

(c) $x_1 = 2 \cdot 5, x_2 = 35$

(d) $x_1 = 20 \cdot 5, x_2 = 19$

3. (i,j) என்ற செயலானது தீர்வுக்கு உகந்த பாதையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளில் ஒன்று

(a) $E_j - E_i = L_j - L_i = t_{ij}$

(b) $E_i - E_j = L_j - L_i = t_{ij}$

(c) $E_j - E_i = L_i - L_j = t_{ij}$

(d) $E_j - E_i = L_j - L_i \ne t_{ij}$

4. வலைப்பின்னலை வரைவதற்கு பின்பற்ற வேண்டிய கீழ்க்கண்ட விதிகளில் எந்த ஒன்று தவறான கூற்று?

(a) ஒவ்வொரு செயலும் ஒரே ஒரு அம்புக்குறியால் மட்டுமே குறிக்கப் பட வேண்டும் அதாவது எந்த இரண்டு நிகழ்வுகளும் ஒரே ஒரு அம்புக்குறியால் மட்டுமே இணைக்கப் பட வேண்டும்.

(b) எந்த இரண்டு செயல்களுக்கும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப மற்றும் இறுதி நிகழ்வுகளை அடையாளப் படுத்த முடியும்.

(c) குறிப்பிட்ட ஒரு செயலினை அடையாளப்படுத்துவதன் பொருட்டு நிகழ்வுகள் ஒருமைத்தன்மையுடன் வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. ஒரு செயலில் இறுதி நிகழ்வானது தலை நிகழ்வை விட சிறியதாக இருக்க வேண்டும்.

(d) அம்புக்குறிகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்ளக்கூடாது.

5. நிகழ்வு எண் இடலில் பின்பற்ற வேண்டிய கீழ்க்கண்ட விதிகளில் எந்த ஒன்று தவறான கூற்று?

(a) நிகழ்வுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் தனித்த எண்கள் வழங்கப்பட வேண்டும்.

(b) நிகழ்வு எண் இடல் இடது பக்கத்திலிருந்து வலது புறமாக வரிசை அடிப்படையில் அமைக்கப் படல் வேண்டும்.

(c) தொடக்க நிகழ்விற்கு 0 அல்லது 1 என்று எண் இட வேண்டும்.

(d) அம்பின் வால்பகுதியில் உள்ள எண்ணை விட அம்பின் தலைப் பகுதியில் உள்ள எண் எப்போதும் சிறியதாக இருக்க வேண்டும்.

6. கொடுக்கப்பட்ட நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கில் மீப்பெருமங்கள் அல்லது மீச்சிறுமங்கள் தீர்வானது எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.

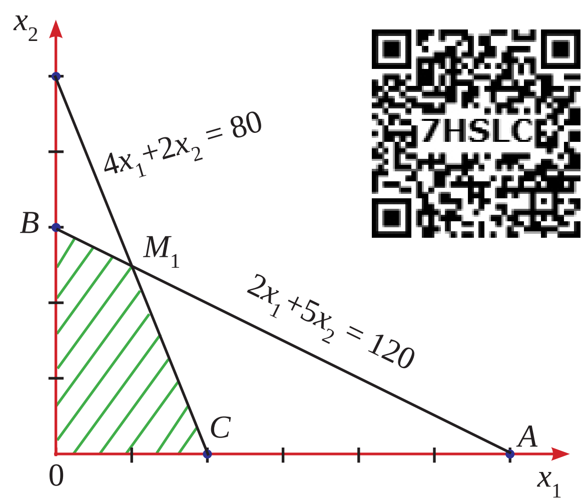
(a) ஒரு தீர்வு

(b) ஒரு ஏற்புடைய தீர்வு

(c) ஒரு உகம தீர்வு

(d) இவற்றில் ஏதுவுமில்லை

7. கொடுக்கப்பட்ட வரைபடத்தில் M_1–ன் ஆயத்தொலைவுகள்



(a) $x_1 = 5, x_2 = 30$

(b) $x_1 = 20, x_2 = 16$

(c) $x_1 = 10, x_2 = 20$

(d) $x_1 = 20, x_2 = 30$

8. $2x + 5y \leq 10 \quad x \geq 0, \; y \geq 0$ என்றக் கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 3x + 5y$ என்ற குறிக்கோள் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு.

(a) 6 (b) 15 (c) 25 (d) 31

9. $2x + y \leq 20, x + 2y \leq 20, x > 0\,, y > 0$ என்றக் கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க $Z = x + 3y$ என்ற குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு.

(a) 10 (b) 20 (c) 0 (d) 5

10. பின்வருவனவற்றின் எது சரி அல்ல?

(a) மீச்சிறிதாக்குதல் அல்லது மீப்பெரிதாக்குதலே நமது குறிக்கோள் ஆகும்.

(b) கட்டுப்பாடுகளை நாம் அவசியமாகக் குறிப்பிட வேண்டும்.

(c) தீர்மான மாறிகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

(d) தீர்மான மாறிகள் கட்டுபாடற்றவையாக இருக்கும்.

11. வலையமைப்பு சூழலில் கீழ்க்கண்டவற்றில் எது சரியல்ல?

(a) வலையமைப்பு என்பது வரைபட அமைப்பு.

(b) ஒரு திட்ட வலையமைப்பில் பல ஆரம்ப மற்றும் இறுதி நிகழ்வு (கணு) இருக்கமுடியாது.

(c) அம்புகுறி வரைபடம் மூடிய வலையமைப்பாக இருக்கும்.

(d) செயலைக் குறிக்கும் அம்புக்குறி நீளம் மற்றும் வடிவம் கொண்டிராது.

12. வலையமைப்புப் பகுப்பாய்வின் குறிக்கோளானது,

(a) மொத்த திட்ட செலவினை சிறுமமாக்குதல்.

(b) மொத்த திட்ட காலத்தை சிறுமமாக்குதல்.

(c) உற்பத்தித் தாமதம், குறிக்கீடுகள், முரண்பாடுகள் ஆகியவற்றை சிறுமமாக்குதல்.

(d) மேற்கண்ட அனைத்தும்.

13. வலையமைப்பு கணக்குகளால் திட்டத்திற்கு கிடைக்கும் நன்மைகள்

(a) அட்டவணைப்படுத்துதல்

(b) திட்டமிடல்

(c) கட்டுப்படுத்துதல்

(d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

14. CPM என்பதன் விரிவாக்கம்

(a) தீர்வுக்கு உகந்த பாதை முறை

(b) செயலிழப்பு திட்ட மேலாண்மை

(c) சிக்கலான திட்ட மேலாண்மை

(d) தீர்வுக்கு உகந்த பாதை மேலாண்மை

15. $x_1 + x_2 \leq 1$, $5x_1 + 5x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 2x_1 + 3x_2$ -ஐ, வரைபட தீர்வு முறையில் மீப்பெரிதாக்கும் போது,

(a) ஏற்புடைய தீர்வு இல்லை

(b) ஒரே ஒரு உகந்த தீர்வு

(c) பல உகமத் தீர்வுகள்

(d) இவற்றில் எதுவும் இல்லை

இதர கணக்குகள்

1. ஒரு நிறுவனம் A மற்றும் B என்ற இருவகைப் பொருள்களைத் தயார் செய்து, முறையே ₹3 மற்றும் ₹4 என இலாபம் ஈட்டுகிறது. M_1 மற்றும் M_2 என்ற இயந்திரங்கள் இந்த இரண்டுப் பொருள்களைத் தயார் செய்கின்றன. A என்ற பொருளைத் தயாரிக்க M_1–க்கு ஒரு நிமிடமும் மற்றும் M_2–க்கு இரண்டு நிமிடங்களும் ஆகின்றன. B என்ற பொருளைத் தயாரிக்க M_1–க்கு ஒரு நிமிடமும் மற்றும் M_2–க்கு ஒரு நிமிடமும் ஆகின்றன. ஒரு வேலைநாளில் M_1 இயந்திரம், 7 மணி 30 நிமிடங்களுக்கு மேல் வேலை செய்வதில்லை. M_2 இயந்திரம் 10 மணி நேரம் தான் வேலை செய்கிறது. பெரும இலாபம் கிடைக்க இந்த கணக்கை நேரியல் திட்டமிடல் அமைப்பில் எழுதுக.

2. ஒரு நிறுவனம் A மற்றும் B என்ற இரு அளவில் தலைவலி மாத்திரைகளைத் தயார் செய்கிறது. A–ல் 2 மில்லிகிராம் ஆஸ்பிரினும், 5 மில்லிகிராம் பை–கார்பனேட்டும் மற்றும் 1 மில்லிகிராம் கொடைனும் உள்ளது. B– ல் ஒரு மில்லி கிராம் ஆஸ்பிரினும் 8 மில்லி கிராம் பைகார்பனேட் மற்றும் 6 மில்லிகிராம் கொடைனும் உள்ளது. உடனடி வலி நிவாரணத்திற்கு குறைந்த பட்சம் 12 மில்லிகிராம் ஆஸ்பிரினும் 74 மில்லிகிராம் பை–கார்பனேட்டும் மற்றும் 24 மில்லிகிராம் கொடைனும் தேவை என உணரப்படுகிறது. ஒரு நோயாளி உடனடி நிவாரணம் பெற குறைந்தது எத்தனை மாத்திரைகளை உட்கொள்ள

வேண்டும் என்பதைத் தீர்மானிக்க. இந்தக் கணக்கை நேரியல் திட்டமிடல் முறையில் எழுதுக.

3. $x_1 + x_2 \le 50;\ 3x_1 + x_2 \le 90$ மற்றும் $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 4x_1 + x_2$ –ன் சிறும மதிப்பைக் காண்க.

4. $x_1 + 2x_2 \ge 10;\ 3x_1 + 4x_2 \le 24$ மற்றும் $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 200x_1 + 500x_2$ –ன் சிறும மதிப்பைக் காண்க.

5. $x_1 + x_2 \le 6, x_1 \le 4; x_2 \le 5,$ மற்றும் $x_1, x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 3x_1 + 5x_2$ –ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

6. $x_1 + x_2 \le 50;\ 3x_1 + x_2 \le 90$ மற்றும் $x_1, x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 60x_1 + 15x_2$ –ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

7. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயல்களுக்கு வலைப்பின்னல் வரைக.

செயல்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
முந்தைய செயல்	–	A	A	A	B	C	C	C,D	E,F	G,H	I,J

8. கீழேக் கொடுக்கப்பட்ட செயல்களுக்கு வலைபின்னல் வரைக.

செயல்	A	B	C	D	E	F	G
முந்தைய செயல்	-	-	A	A	B	C	D,E

9. ஒரு திட்டத்தின் கால அட்டவணை பின்வருமாறு

செயல்	1-2	2-3	2-4	3-5	4-6	5-6
கால அளவு (நாட்களில்)	6	8	4	9	2	7

இதற்கான வலையமைப்பை வரைக. மேலும் எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும், திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க

10. பின்வரும் அட்டவணை ஒரு திட்டத்திற்கான விவரங்களைக் கொடுக்கிறது.

செயல்	1-2	1-3	2-3	3-4	3-5	4-6	5-6	6-7
கால அளவு (நாட்களில்)	5	10	3	4	6	6	5	5

இதற்கான வலையமைப்பை வரைக. மேலும் எல்லா திட்ட செயலுக்கும் முந்தைய தொடக்க காலம் (EST), முந்தைய முடிவு காலம் (EFT), சமீபத்திய தொடக்க காலம் (LST) மற்றும் சமீபத்திய முடிவு காலம் (LFT) காண்க. தீர்வுக்கு உகந்த பாதையையும், திட்டம் முடிவடைய ஆகும் காலத்தையும் காண்க.

தொகுப்புரை

- நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கு என்பது கிடைக்கக் கூடிய அளவான வளங்களை ஒதுக்கீடு செய்து குறிக்கோள் உகம (மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு) மதிப்பினை காண்பதற்கான ஒரு கணிதவியல் அமைப்பு உத்தியாகும்.

- LPP –ன் சுருக்கமான வடிவம்:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq (\text{அல்லது} = \text{அல்லது} \geq) b_i,\ \ i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

மற்றும் $x_j \geq 0$ கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ மீப்பெருமதிப்பு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க .

- **குறிக்கோள் சார்பு** $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ என்ற உகமப்படுத்தக் கூடிய (மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு) சார்பு, குறிக்கோள் சார்பு ஆகும்.

- **தீர்மான மாறிகள்** குறிக்கோள் சார்பின் உகம மதிப்பை(மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு) காண்பதற்கு தேவைப்படும் $x_j,\ j = 1,2,3,\ldots,n$, எனும் மாறிகள் தீர்மான மாறிகள் ஆகும்.

- **தீர்வுகள்** எல்லா கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யக் கூடிய தீர்மான மாறிகளின் $x_j, j = 1,2,3,\ldots,n$ தொகுப்பு மதிப்புகள் அந்தக் கணக்கின் தீர்வுகள் ஆகும்.

- **ஏற்புடையத் தீர்வு** குறையற்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு எல்லாக் கட்டுபாடுகளையும் நிறைவு செய்யும் தீர்மான மாறிகளின் மதிப்புகளின் தொகுப்பு ஏற்புடையத் தீர்வு ஆகும்.

- **உகமத் தீர்வு** குறிக்கோள் சார்பின் உகம (பெரும அல்லது சிறும) மதிப்பைத் தரும் ஏற்புடையத் தீர்வு, உகமத் தீர்வு என்றழைக்கப்படும்.

- **தீர்வுக்கு உகந்தப் பகுதி** ஒரு நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கில் குறையற்ற நிபந்தனைகள் $x_j \geq 0$ உட்பட்ட எல்லாக் கட்டுப்பாடுகளையும் சேர்த்துக் கணிக்கக் கூடிய பொதுவானப் பகுதி, அக்கணக்கின் ஏற்புடையப் பகுதி (அல்லது தீர்வுப் பகுதி) எனப்படும்.

- இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கிற்கான உகந்தத் தீர்வை வரைபட முறை மூலம் காணலாம்.

- ஏற்புடைய பகுதியின் முனைப்புள்ளிகளில் ஏதாவதொன்று நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கின் உகந்த மதிப்பு ஆகும்.

- வலையமைப்பு என்பது தர்க்க அடிப்படையில் ஒழுங்கப்படுத்தப்பட்ட திட்டம் பற்றிய பல்வேறு செயல்களின் வரைப்பட குறியீடு ஆகும்.

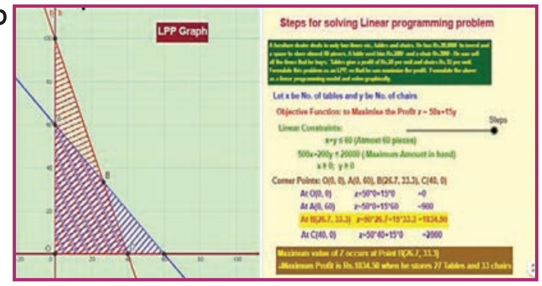
- நேரம் மற்றும் முயற்சி அல்லது வேறு வகையான வள ஆதாரங்களை உபயோகிக்கும் எந்த தனித்த செயல்பாட்டுக்கும் செயல் என்று பெயர்.

- நிகழ்வு என்பது செயல்களின் ஆரம்பம் அல்லது நிறைவைக் குறிப்பதாகும். நிகழ்வு எந்த வள ஆதாரத்தையோ நேரத்தையோ எடுத்துக்கொள்வதில்லை.
- வலையமைப்பு வரைபடத்தில் நீண்ட தொடர்ச்சியான சங்கிலி போன்ற செயல்கள், தீர்வுக்கு உகந்த பாதையைக் குறிக்கிறது. அதாவது மிக நீண்ட காலம் எடுத்துக் கொள்ளும் பாதை தீர்வுக்கு உகந்த பாதை ஆகும்.

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
ஆரம்ப நிகழ்வு	head event
இறுதி நிகழ்வு	tail event
ஏற்புடைய தீர்வு	feasible solution
ஒப்புக்கான செயல்	dummy activities
சமீபத்திய தொடங்கும் நேரம்	latest start time
செயல்பாடு	activity
தர்க்க தொடர் வரிசை	logical sequence
தீர்மான மாறிகள்	decision variables
தீர்வுக்கு உகந்த பகுப்பாய்வு	critical path analysis
தீர்வுக்கு உகந்த முறை	critical path method
நிகழ்வு	event
நேரியல் திட்டமிடல் கணக்கு	linear programming problem
பண்புத் தொகை	abstract
பிந்தைய செயல்	successor activity
பின் நோக்கி செல்லும் கணக்கீடு	backward pass calculations
முந்தைய செயல்	predecessor activity
முன் நோக்கி செல்லும் கணக்கீடு	forward pass calculations
முன்கூட்டியே தொடங்கும் நேரம்	earliest start time
வலையமைப்பு பகுப்பாய்வு	network analysis
உகம / உகந்த	optimal

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



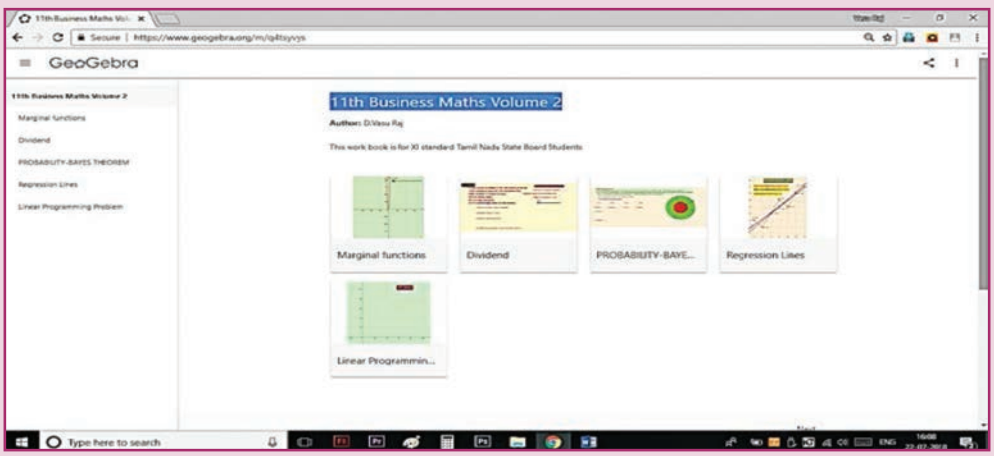
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "**11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS**" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் இருக்கும்.

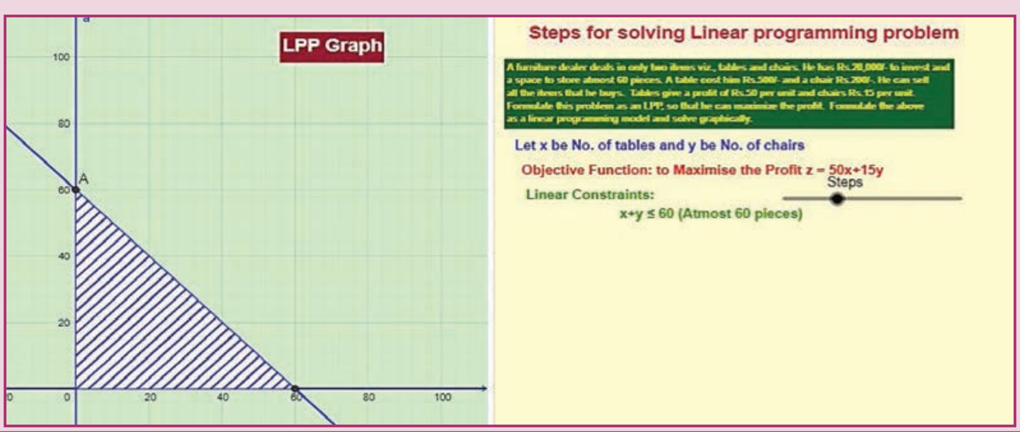
படி - 2

"Linear Programming Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்து, கணக்குகளைச் செய்வதற்கு உள்ள படிகளை அறிய வலப்புறம் உள்ள நழுவலை நகர்த்தவும். கொடுத்திருக்கும் கணக்குகளைச் செய்து இடப்புறம் உள்ள வரைபடத்தில் காண்கவும். "Inequality video" என்பதைச் சொடுக்கி, காணொளியில் விரிவாகக் காண்க.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/q4tsyvys (or) scan the QR Code

விடைகள்

1. அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகள்

பயிற்சி 1.1

1.(i) $M_{11} = -1 \quad M_{12} = 0 \quad M_{21} = 20 \quad M_{22} = 5$

$A_{11} = -1 \quad A_{12} = 0 \quad A_{21} = -20 \quad A_{22} = 5$

(ii) $M_{11} = -12 \quad M_{12} = 2 \quad M_{13} = 23 \quad M_{21} = -16 \quad M_{22} = -4 \quad M_{23} = 14$

$M_{31} = -4 \quad M_{32} = -6 \quad M_{33} = 11$

$A_{11} = -12 \quad A_{12} = -2 \quad A_{13} = 23 \quad A_{21} = 16 \quad A_{22} = -4 \quad A_{23} = -14$

$A_{31} = -4 \quad A_{32} = 6 \quad A_{33} = 11$

2. 20   3. $\frac{1}{2}$ 4. −30   5. $\frac{13}{2}, 2$ 6. 0

பயிற்சி 1.2

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3.(i) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\frac{1}{151}\begin{bmatrix} -22 & -46 & -7 \\ -13 & 14 & -11 \\ 5 & -17 & -19 \end{bmatrix}$

7. $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 10. $\lambda = \frac{7}{4}$ 11. $p = 2, q = -3$

பயிற்சி 1.3

1. $x = 1, y = 1$ 2.(i) $x = 3, y = -2, z = 1$

(ii) $x = -1, y = 2, z = 3$ (iii) $x = 1, y = -1, z = 2$ 3. 17.95, 43.08, 103.85

4. 3000, 1000, 2000   5. 13,2,5   6. 700, 600, 300

பயிற்சி 1.4

1. சாத்தியமானது 2. சாத்தியமானதல்ல 3. சாத்தியமானது
4. $A = 27.82$ டன்கள் $B = 98.91$ டன்கள் 5. 181.62, 84.32
6. 34.16, 17.31, 7. 42 மற்றும் 78

பயிற்சி 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(b)	(d)	(b)	(b)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(d)	(c)	(b)	(a)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(c)	(c)	(c)	(b)	(a)	(d)	(b)	(b)	(d)	(d)	(b)	(a)	

இதர கணக்குகள்

1. $x = 3. x = -1$ 2. 0 6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 8. $x = 1, y = 2, z = 3$ 9. $x = 20, y = 30, z = 50$

10. ₹1200 கோடிகள், ₹1600 கோடிகள்

2. இயற்கணிதம்

பயிற்சி 2.1

1. $\frac{13}{x-2} - \frac{10}{x-1}$ 2. $\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+1}$

3. $\frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)} - \frac{1}{3(x+2)^2}$ 4. $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$

5. $\frac{-4}{9(x+2)} + \frac{4}{9(x-1)} - \frac{1}{3(x-1)^2}$ 6. $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{9}{(x-2)^3}$

7. $\frac{-7}{2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{9}{2(x+2)}$ 8. $\frac{1}{5(x+2)} + \frac{4(x-2)}{5(x^2+1)}$

9. $\frac{3}{16(x-1)} - \frac{3}{16(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2}$ 10. $\frac{1-x}{5(x^2+4)} + \frac{1}{5(x+1)}$

பயிற்சி 2.2

1. 64 2. 10 3. 3 4.336 5. 85

பயிற்சி 2.3

1. 6 2. 14400 3. 1680 4. $\frac{13!}{4!\,3!\,2!\,2!}$

5. (a) $\frac{7!}{2}$ (b) 7! 6. CHAT என்ற வார்த்தையின் தரம் = 9.

பயிற்சி 2.4

1. 4
2. $8C_4 + 8C_3 = 9C_4 = 126$
3. 210 cards
4. 20
5. 25200
6. 671
7. $\frac{13!}{7!\,6!} \times 9! \times 9!$
8. 11

9.(i) 1365 (ii) 1001 (iii) 364

10.(i) 186 (ii) 186

பயிற்சி 2.6

1.(i) $16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

(ii) $x^7 + \frac{7x^6}{y} + \frac{21x^5}{y^2} + \frac{35x^4}{y^3} + \frac{35x^3}{y^4} + \frac{21x^2}{y^5} + \frac{7x}{y^6} + \frac{1}{y^7}$

(iii) $x^6 + 6x^3 + 15 + \frac{20}{x^3} + \frac{15}{x^6} + \frac{6}{x^9} + \frac{1}{x^{12}}$

2.(i) 10, 40,60,401 (ii)995009990004999

3. 11440 $x^9\, y^4$

4.(i) $11C_5 x$, $\frac{11C_5}{x}$ (ii) $\frac{8C_4(81)}{16}x^{12}$ (iii) $\frac{-10C_5(6)^5}{x^5}$

5.(i) $9C_6\,\frac{2^6}{3^6}$ (ii) $-32(15C_5)$ (iii) 7920.

பயிற்சி 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(c)	(d)	(c)	(a)	(c)	(d)	(b)	(b)	(c)	(b)	(d)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(a)	(c)	(a)	(c)	(a)	(c)	(a)	(b)	(c)	(d)	(b)	(a)	

இதர கணக்குகள்

1. $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3}$
2. $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2}$
3. $\frac{1}{x+2} + \frac{5}{x-3} - \frac{3}{(x-3)^2}$
4. $\frac{3}{x-2} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}$

5. (i) $\frac{7}{2}$ (ii) $\frac{7}{24}$ (iii) 12

6.(a) 720 (b) 7776 (c) 120 (d) 6

7. 74 ways
8. 85 ways
9. 210
10. 544

3. பகுமுறை வடிவியல்

பயிற்சி 3.1

1. $x^2-2x-6y+10=0$
2. $x^2+y^2-6x+4y-3=0$
3. $3x^2+3y^2-4x-14y+15=0$
4. $\left(\frac{15}{2},\ 0\right)$
5. $2x-3y+21=0$

பயிற்சி 3.2

1. 45°
2. 4 அலகுகள்
4. $a=5$
5. $y=1500x+100000$, 95 தொலைகாட்சிபெட்டிகளின் விலை ₹ 2,42,500

பயிற்சி 3.3

1. $a=6,\ c=6$
2. $2x-y+2=0$ மற்றும் $6x-2y+1=0$
3. $2x+3y-1=0$ மற்றும் $2x+3y-2=0$
4. $\theta=\tan^{-1}(7)$

பயிற்சி 3.4

1.(i) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$ (ii) $x^2+y^2-4=0$

2.(i) $C(0,0)$, $r=4$ (ii) $C(11,2)$, $r=10$

(iii) $C\left(\frac{-2}{5},\frac{4}{5}\right)$, $r=2$ (iv) $C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{5}{\sqrt{2}}$

3. $x^2+y^2+6x+4y-51=0$
4. $x^2+y^2-4x-6y+11=0$
5. $x^2+y^2-5x-2y+1=0$
6. $x^2+y^2-x-y=0$
7. $x^2+y^2-16x+4y-32=0$
8. $x^2+y^2-2x-12y+27=0$
9. $x^2+y^2=9$

பயிற்சி 3.5

1. $x+2=0$
2. R வட்டத்தினுள் அமையும், P வட்டத்திற்கு வெளியே அமையும் Q வட்டத்தின் மேல் அமையும்.
3. $\sqrt{20}$ அலகுகள்
4. $p=\pm\ 20.$

பயிற்சி 3.6

1. $9x^2+16y^2+24xy+34x+112y+121=0$
2. $k=1$, செவ்வகலத்தின் நீளம் $=1$, குவியம் $F\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$

3.

அச்சு	முனை	குவியம்	இயக்குவரையின் சமன்பாடு	செவ்வகலம்
$y = 4$	$V(1, 4)$	$F(3, 4)$	$x + 1 = 0$	8 அலகுகள்

4.

கணக்கு	அச்சு	முனை	குவியம்	இயக்குவரையின் சமன்பாடு	செவ்வகலம்
(a) $y^2 = 20x$	$y = 0$	$V(0, 0)$	$F(5, 0)$	$x = -5$	20 அலகுகள்
(b) $x^2 = 8y$	$x = 0$	$V(0, 0)$	$F(0, 2)$	$y = -2$	8 அலகுகள்
(c) $x^2 = -16y$	$x = 0$	$V(0, 0)$	$F(0, -4)$	$y = 4$	16 அலகுகள்

5. $(x-15)^2 = 5(y-55)$. முனையில் வெளியீடு மற்றும் சராசரி செலவு 15 கிலோ மற்றும் ₹ 55.

6. $x = 5$ மாதங்கள்

பயிற்சி 3.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(b)	(c)	(c)	(c)	(b)	(c)	(a)	(c)	(a)	(b)	(c)	(a)	(d)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(a)	(a)	(d)	(a)	(c)	(b)	(b)	(a)	(d)	(b)	(b)	(b)	

இதர கணக்குகள்

1. $3x + y - 8 = 0$ 2. $y = 6x + 3000$ 4. $p = 1, p = 2$ 6. $a = 9, b = 8$

7. $(-1, -2)$ கோட்டின் மீது, $(1, 0)$ கோட்டின் மேல்புறம் $(-3, -4)$ கோட்டின் கீழ்புறம்

8. $(-2, -7)$ 9. $y^2 = -\frac{9}{2}x$

10. அச்சு : $y = 2$, முனை : $(1, 2)$, குவியம் : $(2, 2)$,
இயக்குவரையின் சமன்பாடு : $x = 0$ மற்றும் செவ்வகலத்தின் நீளம் : 4 அலகுகள்

4. திரிகோணமிதி

பயிற்சி 4.1

1.(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{-16\pi}{9}$

2.(i) $22^\circ 30'$ (ii) 324^0 (iii) $-171^\circ 48'$ (iv) 110°

3.(i) முதல் கால்பகுதி (ii) மூன்றாம் கால்பகுதி (iii) இரண்டாம் கால்பகுதி.

4.(i) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (iv) 1

(v) $\sqrt{2}$ 10. $\frac{-7}{2}$

பயிற்சி 4.2

1.(i) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ (ii) $-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$ (iii) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

2.(i) $\sin 92^\circ$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\cos 80^\circ$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.(i) $\frac{-33}{65}$ (ii) $\frac{-16}{65}$ (iii) $\frac{16}{33}$

6. $\frac{2}{11}$, $\alpha+\beta$ முதல் கால்பகுதியில் அமையும் 7. $\pm\sqrt{2}-1$

9.(i) $\frac{9}{13}$ (ii) $-\frac{828}{2197}$ 10. $-\frac{44}{125}, -\frac{117}{44}$ 14. $\sqrt{2}-1$

பயிற்சி 4.3

1.(i) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{4}-\cos\frac{A}{2}\right)$ (ii) $\frac{1}{2}\left(-\sin 2A+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(iii) $\frac{1}{2}\left(\sin 4A-\sin\frac{2A}{3}\right)$ (iv) $\frac{1}{2}(\sin 10\theta - \sin 4\theta)$

2.(i) $2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2}$ (ii) $2\cos 3A\cos A$

(iii) $2\sin 2\theta\cos 4\theta$ (iv) $-2\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

பயிற்சி 4.4

1.(i) $\frac{-\pi}{6}$ (ii) $\frac{-\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{3\pi}{4}$

4. $x=\frac{1}{6}$ 5. $x=\frac{1}{2}$

6.(i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 7. $\frac{-33}{65}$ 10. $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$

பயிற்சி 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(b)	(a)	(c)	(b)	(b)	(d)	(a)	(d)	(a)	(c)	(c)	(d)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(c)	(b)	(a)	(c)	(b)	(c)	(c)	(b)	(c)	(a)	(b)	(d)	

இதர கணக்குகள்

4. $\frac{3}{\sqrt{10}}$ மற்றும் $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ 6.(i) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (ii) $2-\sqrt{3}$

7. $\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{2}}{12}$ 9. $\frac{56}{33}$ 10. $\frac{\pi}{4}-x$

5. வகை நுண்கணிதம்

பயிற்சி 5.1

1.(i) ஒற்றைச் சார்பு (ii) இரட்டைச் சார்பு

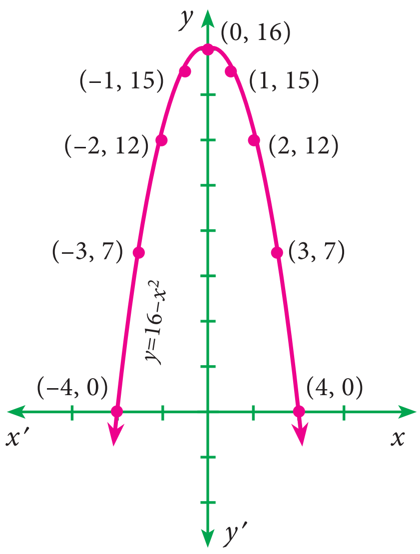
(iii) ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல மற்றும் இரட்டைச் சார்பும் அல்ல (iv) இரட்டைச் சார்பு

(v) ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல மற்றும் இரட்டைச் சார்பும் அல்ல

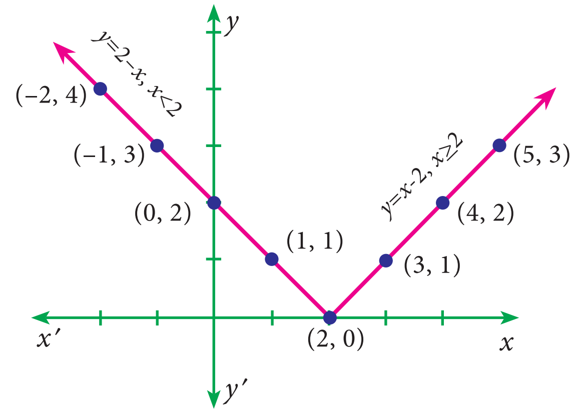
2. $k = 0$ 5. $\frac{1-x}{3+x}$, $\frac{3x+1}{x-1}$

6.(i) e (ii) 0 (iii) $3e$ (iv) 0

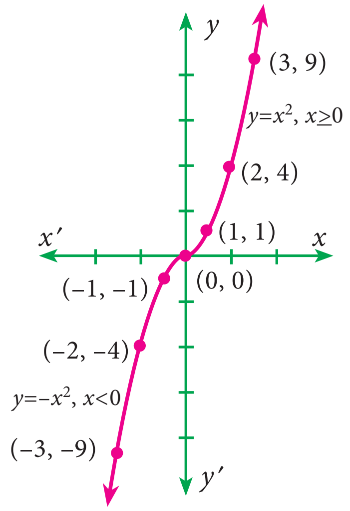
7.(i)



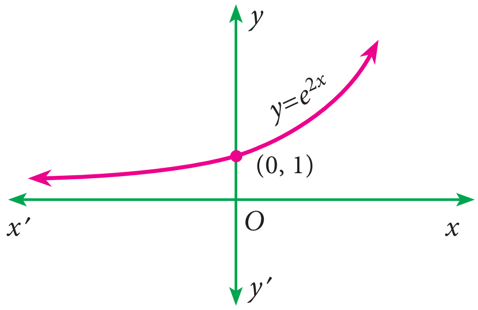
(ii)



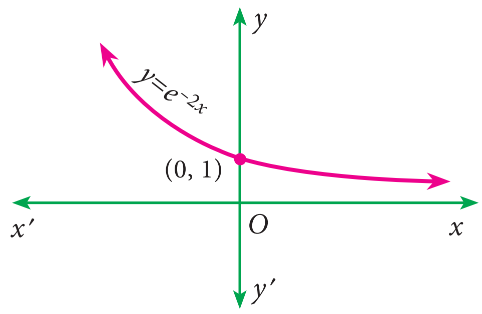
(iii)



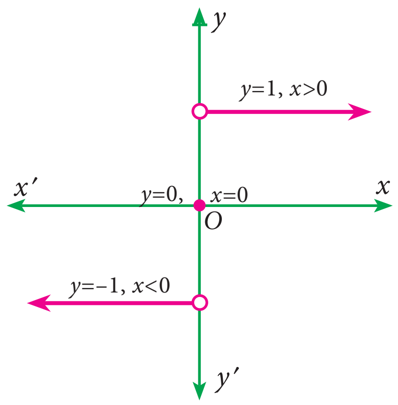
(iv)



(v)



(vi)



பயிற்சி 5.2

1.(i) $\frac{10}{3}$ (ii) 0 (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) 1

(v) $\frac{15}{16}a^{-\frac{1}{24}}$ (vi) 9

2. $a = \pm 1$ 3. $n = 7$ 4. $\frac{28}{5}$ 5. $f(-2) = 0$

பயிற்சி 5.3

1.(a) $x = 2$ –ல் தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகும். (b) $x = 3$ –ல் தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

பயிற்சி 5.4

(i) $2x$ (ii) $-e^{-x}$ (iii) $\frac{1}{x+1}$

பயிற்சி 5.5

1.(i) $12x^3 - 6x^2 + 1$ (ii) $\frac{-20}{x^5} + \frac{6}{x^4} - \frac{5}{x^2}$ (iii) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + e^x$

(iv) $-\frac{3+x^2}{x^2}$ (v) $x^2 e^x (x+3)$ (vi) $3x^2 - 4x - 1$

(vii) $4x^3 - 3\cos x - \sin x$ (viii) $1 - \frac{1}{x^2}$

2.(i) $\frac{xe^x}{(1+x)^2}$ (ii) $\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$ (iii) $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

3.(i) $x\cos x + \sin x$ (ii) $e^x(\sin x + \cos x)$

(iii) $e^x\left(1 + \frac{1}{x} + x + \log x\right)$ (iv) $\cos 2x$ (v) $e^x x^2 (x+3)$

4.(i) $\sin 2x$ (ii) $-\sin 2x$ (iii) $\frac{-3}{2}\cos x \sin 2x$ (iv) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(v) $n(ax^2+bx+c)^{n-1}(2ax+b)$ (vi) $2x(\cos(x^2))$ (vii) $\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

11_11th_BM-STAT_Answers_TM.indd 284 08-12-2021 21:59:24

பயிற்சி 5.6

1.(i) $-\dfrac{y}{x}$ (ii) $\dfrac{y-2x}{2y-x}$ (iii) $-\dfrac{(x^2+ay)}{(y^2+ax)}$ 3. $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1-4x+3y}{1+4x-3y}\right)$

பயிற்சி 5.7

1.(i) $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]$ (ii) $(\sin x)^x\left[x\cot x+\log(\sin x)\right]$

(iii) $(\sin x)^{\tan x}[1+\sec^2 x\log(\sin x)]$

(iv) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x^2+x+1)}}\left\{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right\}$

பயிற்சி 5.8

1.(i) $-\dfrac{1}{t^2}$ (ii) $t\cos t$ (iii) $-\tan\theta$ (iv) $\cot\dfrac{\theta}{2}$

2. $-\tan x$ 3. $\dfrac{\sin 2x}{2x}$

பயிற்சி 5.9

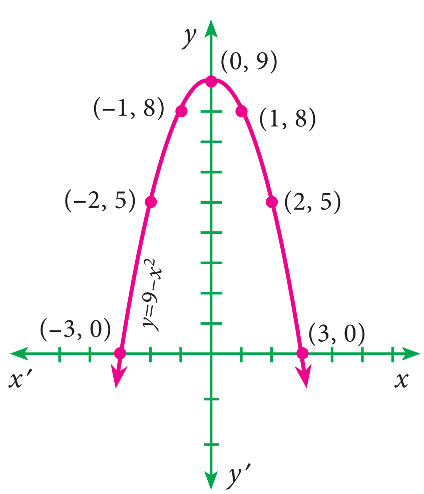
1.(i) $9y$ (ii) $-\dfrac{1}{x^2}+a^x(\log a)^2$ (iii) $-\dfrac{1}{a}\operatorname{cosec}^3\theta$

பயிற்சி 5.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(c)	(a)	(b)	(a)	(a)	(c)	(a)	(d)	(a)	(a)	(d)	(b)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(a)	(a)	(a)	(c)	(b)	(d)	(a)	(a)	(c)	(a)	(b)	(d)	

இதர கணக்குகள்

2.



4. $-\dfrac{1}{10}$

6.(i) $x=1$ ல் தொடர்ச்சியானது மற்றும் வகையிடத்தக்கது

(ii) $x=2$ ல் தொடர்ச்சியற்றது மேலும் வகையிடத்தக்கதல்ல

6. வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

பயிற்சி 6.1

1. $AC = \frac{1}{10}x^2 - 4x - 20 + \frac{7}{x}$, $AVC = \frac{1}{10}x^2 - 4x - 20$, $AFC = \frac{7}{x}$,

   $MC = \frac{3}{10}x^2 - 8x - 20$, $MAC = \frac{1}{5}x - 4 - \frac{7}{x^2}$

2. $C = ₹\,\frac{121}{6}$, $AC = ₹\,\frac{29}{12}$, $MC = ₹\,\frac{2}{3}$

3. $AC = x^2 - 2$, $MC = 3x^2 - 2$, $AR = 14 - x$, $MR = 14 - 2x$

4. $\eta_d = \frac{2}{x}$

5(i) $\eta_d = \frac{a - bx}{2bx}$, $x = \frac{a}{3b}$ (ii) $\eta_d = \frac{a - bx^2}{2bx^2}$, $x = \sqrt{\frac{a}{3b}}$

6. $\eta_s = \frac{4p^2}{2p^2 + 5}$, $\frac{36}{23}$

7. $MR = \frac{50 - 2x}{5}$, 10, 0

8. $\eta_s = \frac{p}{2(p - b)}$, 1

11. $\eta_d = 4$

12. $P = -\frac{x^2}{100} + 160x - 120$, $AP = \frac{-x}{100} + 160 - \frac{120}{x}$, ₹ 147.90

    $MP = \frac{-x}{50} + 160$, ₹159.80, $MAP = -\frac{1}{100} + \frac{120}{x^2}$, ₹ 1.19

13. $x = -8, 2$

15. $\eta_d = \frac{p}{10 - p}$, $|\eta_d| = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ மீள்த்தன்மைக் கொண்டது.

16. $p_E = 30$, $x_E = 40$ அலகுகள்

17. $x = 2100$ அலகுகள், $p = ₹130$

18. $x = 6$ அலகுகள்

பயிற்சி 6.2

1. $x > 5$ எனும் போது AC என்பது கூடும் மதிப்பாக அமைகிறது.
3. $x \approx 46$, எனும் போது P என்பது மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது. மீப்பெரு லாபம் ₹ 1107.68.
4. $x = 220$ எனும் போது வருவாய் மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது.
5. இடம்சார்ந்த சிறுமம் -71, இடம்சார்ந்த பெருமம் 54

பயிற்சி 6.3

1.

பொருட்கள்	EOQ அலகுகளில்	சிறும சரக்கு நிலைச் செலவு	EOQ ரூபாயில்	EOQ வருட வழங்குதலில்	வருட கோரிக்கைகளின் எண்ணிக்கை
A	2000	₹4	40	2.5	0.4
B	200	₹20	200	0.5	2
C	2627	₹52.54	525.40	0.19	5.26

2 (i) ≈913 அலகுகள்/ கோருதல் (ii) ≈ ₹20, 066 / வாரம்.

பயிற்சி 6.4

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\left(cy + d\right), \dfrac{\partial z}{\partial y} = c\left(ax + b\right)$

பயிற்சி 6.5

1. 23, 25 3. −2, 8 4. 0.8832, 2.2081 5. $-\frac{4}{3}, -8$ 6. $\dfrac{10}{79}, -\dfrac{3}{79}$

பயிற்சி 6.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(d)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(c)	(b)	(a)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(a)	(c)	(b)	(b)	(a)	(b)	(b)	(b)	(b)	(c)

இதர கணக்குகள்

1. $AC = \dfrac{10}{x} - 4x^2 + 3x^3, MC = -12x^2 + 12x^3, MAC = \dfrac{-10}{x^2} - 8x + 9x^2$

2.(i) $\eta_s = \dfrac{1}{x+1}$ (ii) $\eta_d = \dfrac{3}{x}$

3. $\eta_s = \dfrac{4p^2}{2p^2+5}, \dfrac{4}{7}$

6. TC ஆனது $[0.20] \cup [30, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் கூடுகிறது மற்றும் என்ற இடைவெளியில் [20, 30] குறைகிறது.

7. $x = 3$ எனும்போது TC சிறுமத்தை அடைகிறது.

7. நிதியியல் கணிதம்

பயிற்சி 7.1

1. ₹ 68,429 2. ₹ 1,20,800 3. ₹ 18,930 4. ₹ 500
5. ₹ 23,79,660 6. ₹ 14,736 7. ₹ 8,433 8. ₹ 1,17,612
9. ₹ 14,339 10. ₹ 1,000

பயிற்சி 7.2

1. ₹ 8,184   2. ₹ 2,250   3. 900 பங்குகள்

4.(i) 242   (ii) ₹ 3630   (iii) $12\frac{1}{2}\%$

5.(i) ₹ 5,000   (ii) ₹ 480   (iii) 9.6%   6. ₹ 897.50

7. ₹ 7000, ₹ 6500   8. 99 பங்குகள்

9.(i) ₹ 945   (ii) ₹ 960 இரண்டாவது முதலீடே சிறந்தது.

10.(i) 1400   (ii) 1400. ஒரே முதலீட்டிற்கு இரு சரக்கு முதல்களும் சமமான வருமானம் தருகின்றன.எனவே இரண்டும் சமமான சரக்கு முதல்களாகும்

பயிற்சி 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(a)	(b)	(c)	(c)	(d)	(c)	(a)	(b)	(a)	(b)	(b)	(b)	(a)	(a)	(b)

இதர கணக்குகள்

1. ₹ 9282   2. ₹ 15,638   3. ₹ 4,327; ₹ 1,25,780; ₹ 29,334; ₹ 1,39,560.

4. தேவைப்படும் மாதங்கள் ≈ 24   5. ₹ 12,500

6. ₹ 13,250, ₹ 36,443.75, இயந்திரம் B வாங்கலாம்

7. 270, 216, 300, 450

8. ₹ 700, ₹ 900, ₹ 200, 2.5%   9. 1500 பங்குகள், ₹ 625   10. 20%

8. விவரப் புள்ளியியல் மற்றும் நிகழ்தகவு

பயிற்சி 8.1

1. $Q_1 = 6$, $Q_3 = 18$ 2. $Q_1 = 5$, $Q_3 = 6.5$, $D_8 = 6.5$ மற்றும் $P_{67} = 6$

3. $Q_1 = 47.14$, $Q_3 = 63.44$, $D_5 = 55.58$, $D_7 = 61.56$ மற்றும் $P_{60} = 58.37$

4. $GM = 142.5$ lbs   5. $GM = 26.1\%$

6. 192 கிமீ/மணி   7. 38.92 கிமீ/மணி

8. $AM=36$ $GM=25.46$ $HM=17.33$

9. $AM=21.96$ $GM=18.31$ $HM=14.32$

10. $AM=33$, $GM=29.51$, $HM=24.10$

11. $Q_1 = 30$, $Q_3 = 70$, $Q_D = 20$, QD -ன் கெழு $= 0.4$

12. QD= 11.02 , QD -ன் கெழு= 0.3384

13. இடைநிலை = 61, MD =1.71

14. சராசரி = 13, MD = 4.33

15. இடைநிலை = 45.14 , MD = 14.83

பயிற்சி 8.2

1. 1/3
2. 2/5
3. A மற்றும் B என்பன சாரா நிகழ்வுகள்
4. (i) 2/3 (ii) $\frac{1}{2}$
5. 3/10
6. (i) 42/625 (ii) 207/625
7. 35/68
8. (i) 7/29 (ii) 5/29 (iii) 17/29
9. 4/11
10. P(A)=4/7 P(B) = 2/7 P(C) = 1/7
11. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$
12. $\frac{1}{2}$
13. 0.2
14. 0.012
15. (i) 1/221 (ii) 1/17
16. P(C/D)= 0.5208

பயிற்சி 8.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(c)	(d)	(a)	(c)	(a)	(d)	(c)	(b)	(a)	(d)	(c)	(a)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(b)	(d)	(a)	(a)	(b)	(c)	(d)	(d)	(b)	(a)	(b)	(a)	

இதர கணக்குகள்

1. 16.02 tons
2. 16
3. இடைநிலை=28, MD = 10.16
4. சராசரி =7.5, MD =2.3
5. QD=10, QD-ன் கெழு=0.5
6. 0.45
7. (i) 3/10 (ii) 3/5 (iii) 1/10
8. 0.948
9. 0.727
10. 0.393

9. ஒட்டுறவு மற்றும் தொடர்புப் போக்குப் பகுப்பாய்வு

பயிற்சி 9.1

1. 0.575
2. 0.947
3. 0.996
4. 0.891
5. 0.225
6. −0.0735
7. 0.9
8. 0.224
9. 0.905
10. −0.37

பயிற்சி 9.2

1.(a) $Y=-0.66X+59.12$; $X=-0.234Y+40.892$

(b) $r=-0.394$ (c) $Y= 39.32$

2. $Y=0.6102X+66.12$; $X=0.556Y+74.62$ மகனின் உயரம் = 166.19

3. $Y=2.3X-35.67$; மாணவனின் எடை = 125.79 lb

4. $Y=0.24X+1.04$; $X=1.33Y+1.34$

5. $Y=1.6X$; இயலக்கூடிய விளைச்சல் = 46.4 அலகுகள்/ ஏக்கர்

6. $Y=0.942X+6.08$; இயலக்கூடிய விற்பனை = ₹34.34 (கோடிகளில்)

7. $Y=0.48X+67.72$; $X=0.91Y-41.35$; $Y=72.52$

8. $b_{yx}=1.33$; $Y=1.33X+3.35$

9. $Y=0.1565X+19.94$; உணவு மற்றும் பொழுது போக்கு மீதான இயலக்கூடிய செலவு $(Y) = 51.24$

10. $X=0.8Y-1$ மற்றும் Y=8 எனில் இயலக்கூடிய X –ன் மதிப்பு = 5.4

$Y=0.8X+2.6$ மற்றும் X=12 எனில் இயலக்கூடிய Y –ன் மதிப்பு = 12

11. $\bar{X} = 13$; $\bar{Y} = 17$ மற்றும் $r = 0.6$

12. $b_{xy} = -\frac{3}{2}; b_{yx} = -\frac{1}{2}; r = -0.866$

பயிற்சி 9.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(a)	(b)	(a)	(b)	(c)	(a)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(a)	(c)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(a)	(b)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(b)	(a)	(d)	

இதர கணக்குகள்

1. 0.906
2. 0.382
3. 0.95
4. 0.667
5. 0.905
6. $Y=0.653X+21.71$; B-ன் மதிப்பெண்கள் = 55.67
7. $Y=0.576X+2.332$; $Y=5.788$
8. $Y=0.867X+7.913$;
9. $Y=-0.652X+63.945$, $Y=10.481\approx 10$
10. $b_{yx}=1.422$, $Y = 141.67$

10. செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி

பயிற்சி: 10.1

1. $2x_1 + x_2 \le 1000$; $x_1 \le 400; x_2 \le 700$ மற்றும் $x_1, x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 5x_1 + 3x_2$ என்ற குறிக்கோள் சார்பின் பெரும மதிப்பைக் காண்க

2. $60x_1 + 120x_2 \le 12000$ $8x_1 + 5x_2 \le 600; 3x_1 + 4x_2 \le 500$ மற்றும் x_1 , $x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 30x_1 + 40x_2$ என்ற குறிக்கோள் சார்பின் பெரும மதிப்பு காண்க.

3. $0.8x_1 + 1.2x_2 \le 720; x_1 \le 600;$ $x_2 \le 400$ மற்றும் $x_1, x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 100x_1 + 150x_2$ என்ற குறிக்கோள் சார்பின் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

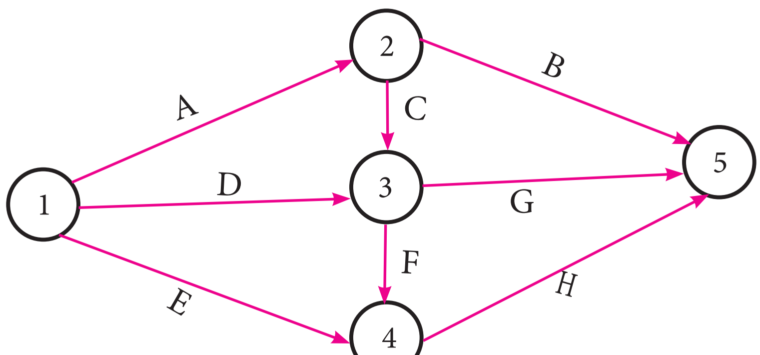
4.(i) $x_1 = 4$; $x_2 = 9$ மற்றும் $Z_{max} = 96$ (ii) $x_1 = 8$; $x_2 = 12$ மற்றும் $Z_{max} = 392$

(iii) $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ மற்றும் $Z_{min} = 13$ (iv) $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ மற்றும் $Z_{max} = 230$

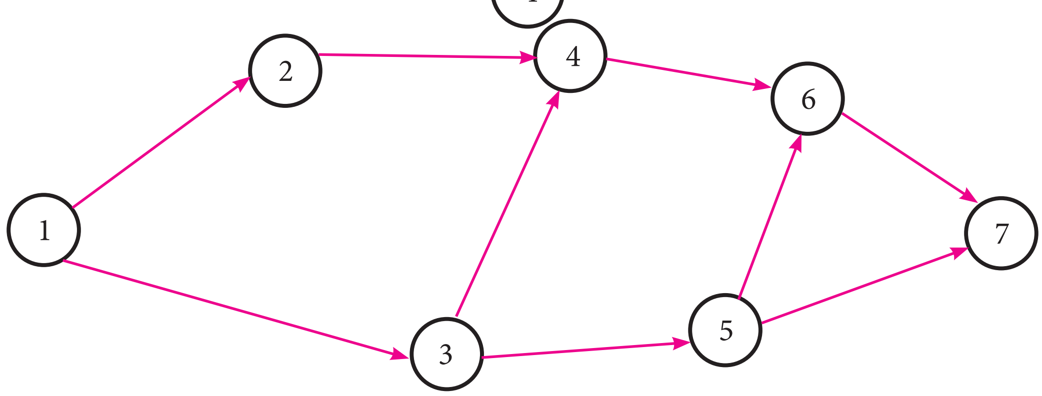
(v) $x_1 = 3$; $x_2 = 9$ மற்றும் $Z_{max} = 330$ (vi) $x_1 = 4$; $x_2 = 2$ மற்றும் $Z_{min} = 160$

பயிற்சி: 10.2

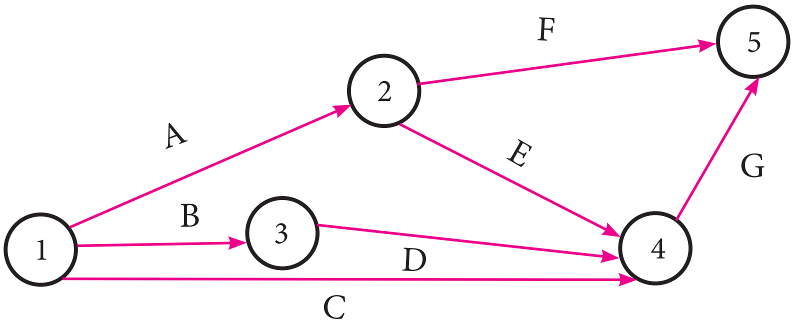
1.



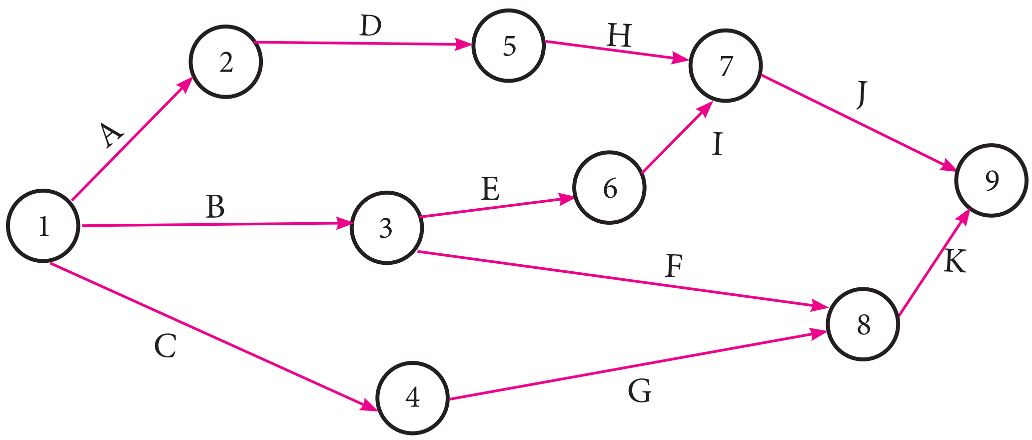
2.



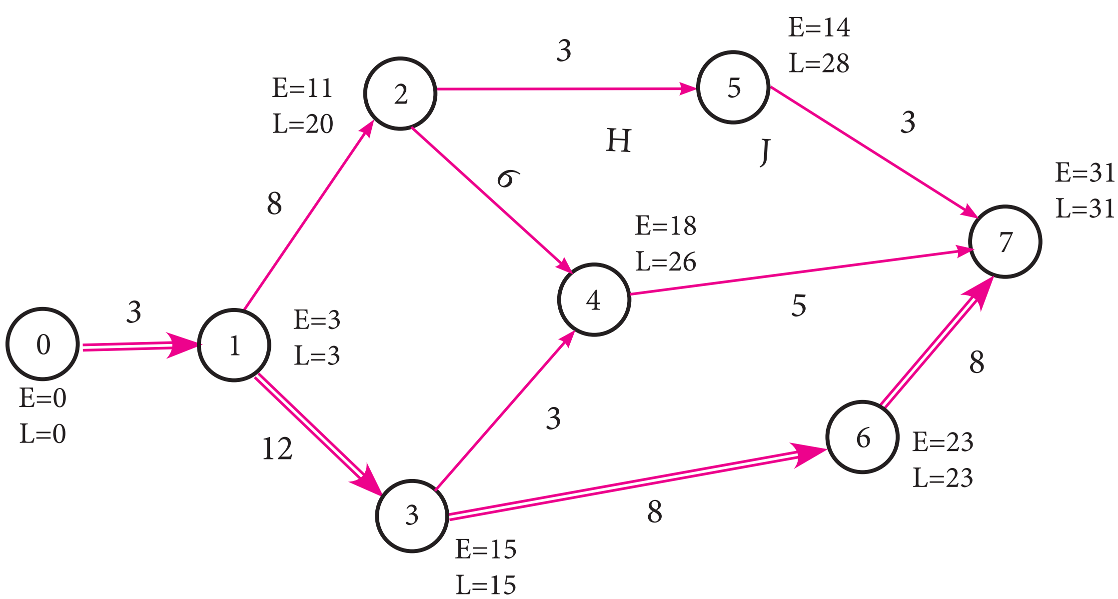
3.



4.

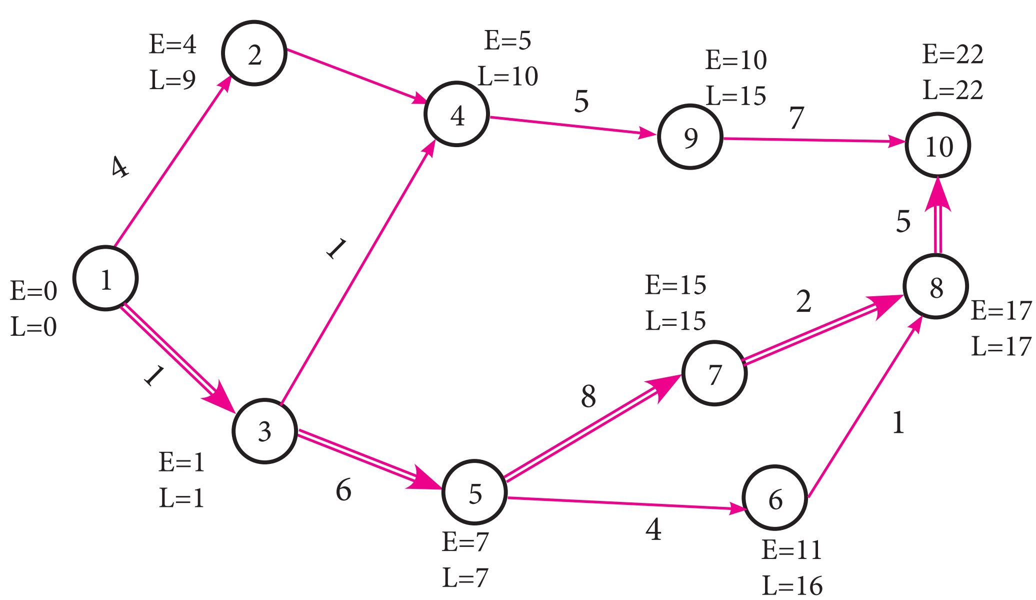


5.



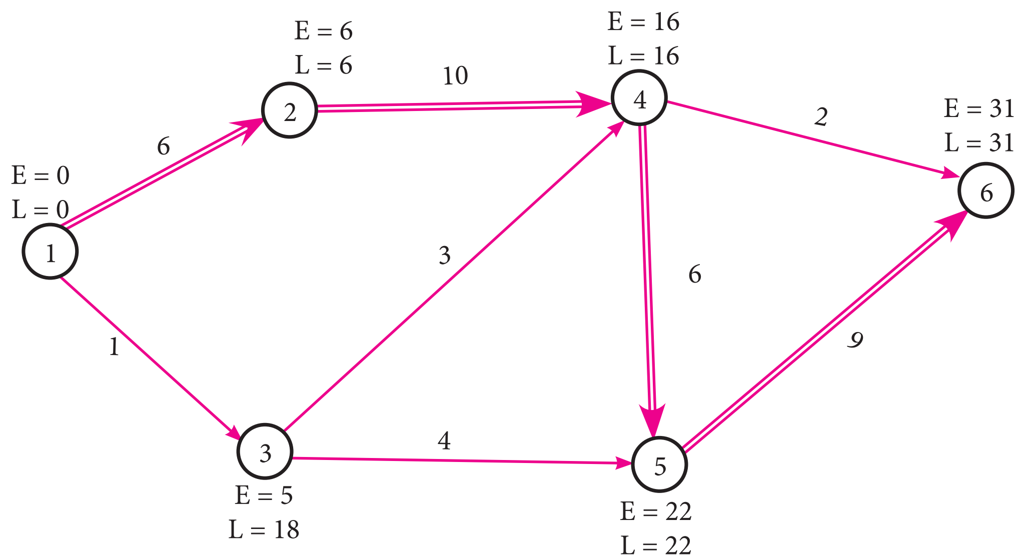
தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 0-1-3-6-7 மற்றும் மொத்தக் கால அளவு 31 வாரங்கள்

6.



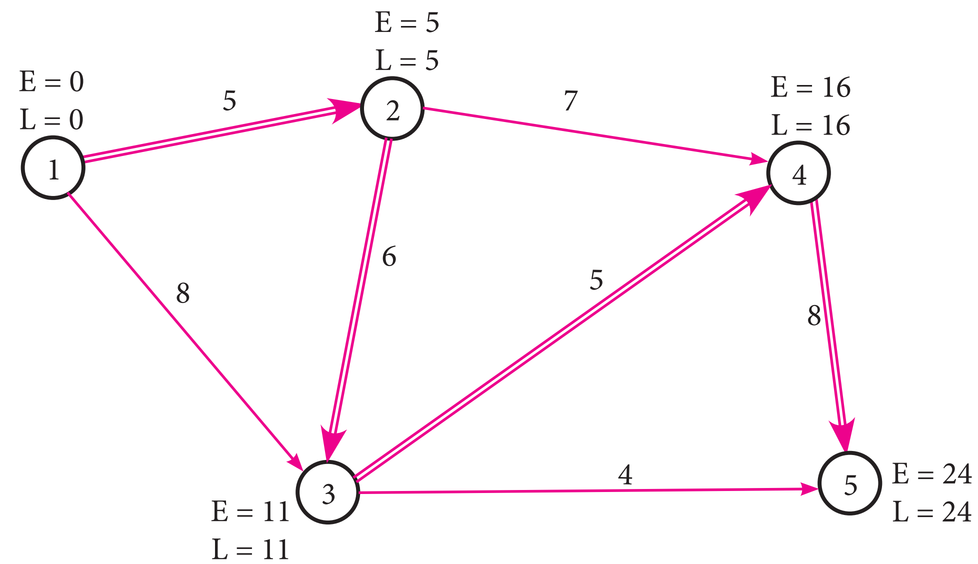
தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-3-5-7-8-10 மற்றும் மொத்தக் கால அளவு 22 அலகுகள்

7.



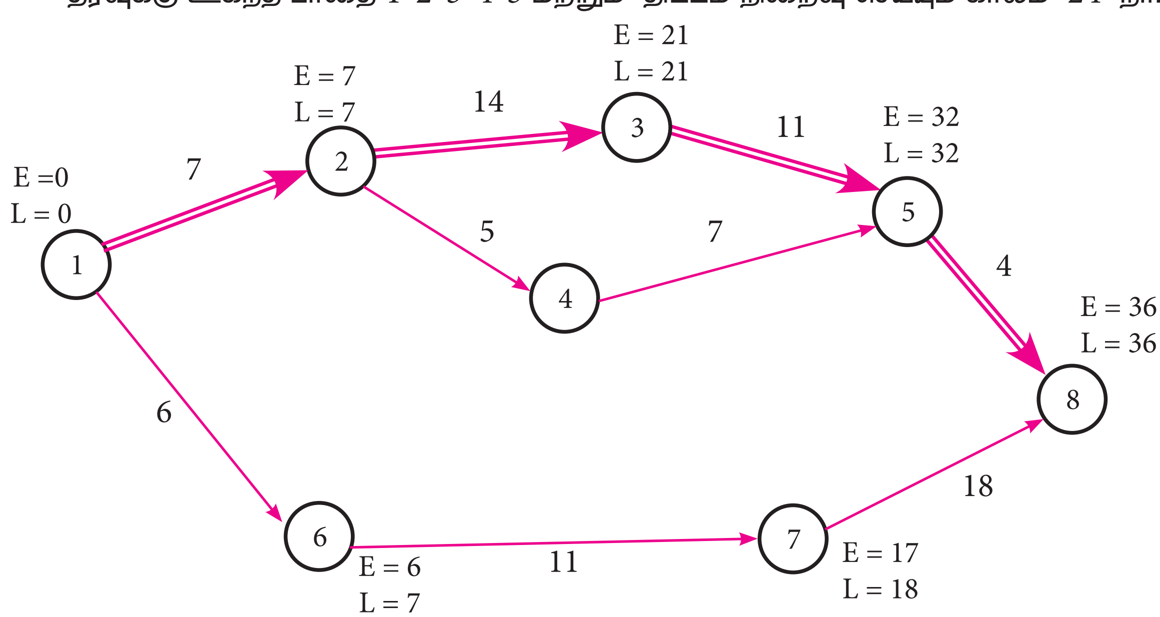
தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-2-4-5-6 மற்றும் மொத்தக் கால அளவு 31 நாட்கள்

8



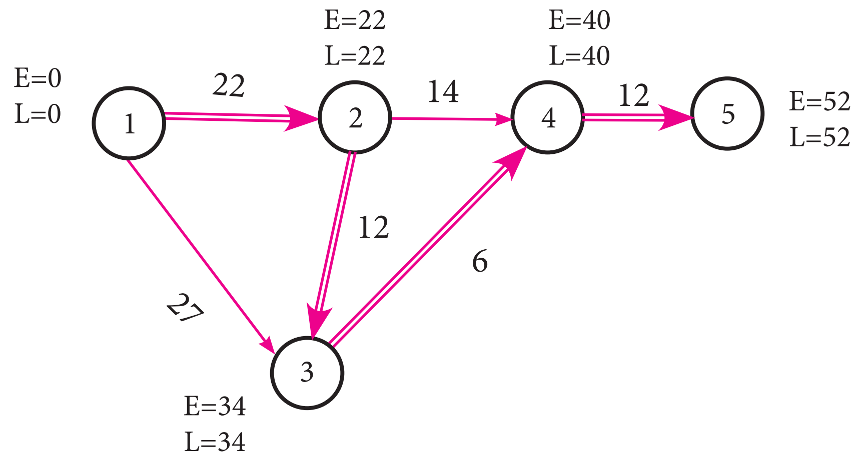
தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-2-3-4-5 மற்றும் திட்டம் நிறைவு செய்யும் காலம் 24 நாட்கள்

9.



தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-2-3-5-8 மற்றும் திட்டம் நிறைவு செய்யும் காலம் 36 நாட்கள்

10.



தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-2-3-4-5 மற்றும் திட்டம் நிறைவு செய்யும் காலம் 52 நாட்கள்

பயிற்சி-10.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(d)	(c)	(a)	(b)	(d)	(c)	(c)	(b)	(c)	(d)	(d)	(b)	(d)	(a)	(a)

இதர கணக்குகள்

1. $x_1 + x_2 \leq 450$; $2x_1 + x_2 \leq 600$ மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க $Z = 3x_1 + 4x_2$ என்ற குறிக்கோள் சார்பின் பெரும மதிப்பு காண்க

2. $2x_1 + x_2 \geq 12; 5x_1 + 8x_2 \geq 74;$ $x_1 + 6x_2 \geq 24$ மற்றும் $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க $Z = x_1 + x_2$ என்ற குறிக்கோள் சார்பின் சிறும மதிப்பு காண்க

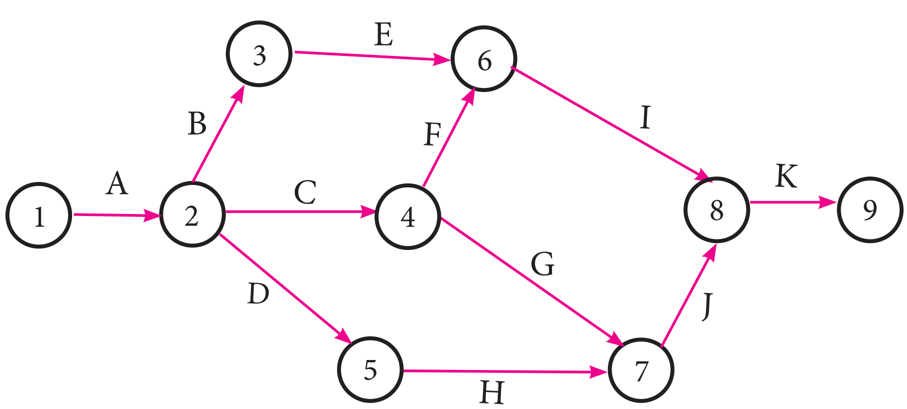
3. x_1=30; x_2 = 0 மற்றும் Z_{max} = 120

4. x_1 = 4; x_2 = 3 மற்றும் Z_{min} = 2300

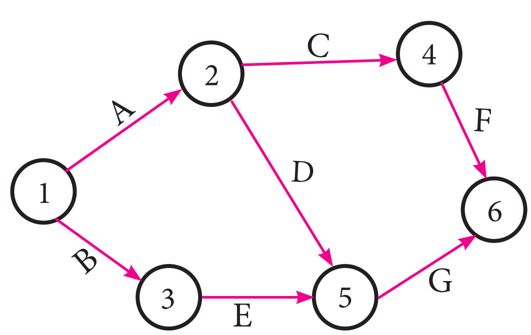
5. x_1 = 1 ; x_2 = 5 மற்றும் Z_max= 28

6. x_1 = 20; x_2=30 மற்றும் Z_{max} = 1650

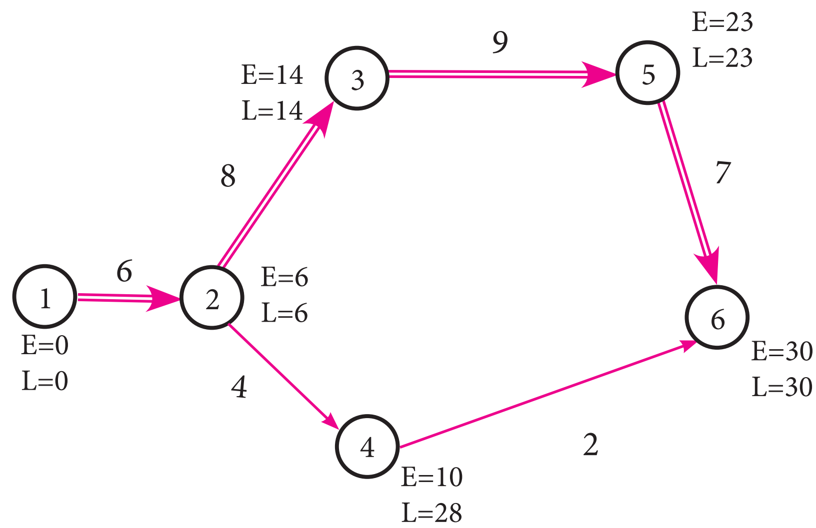
7.



8.

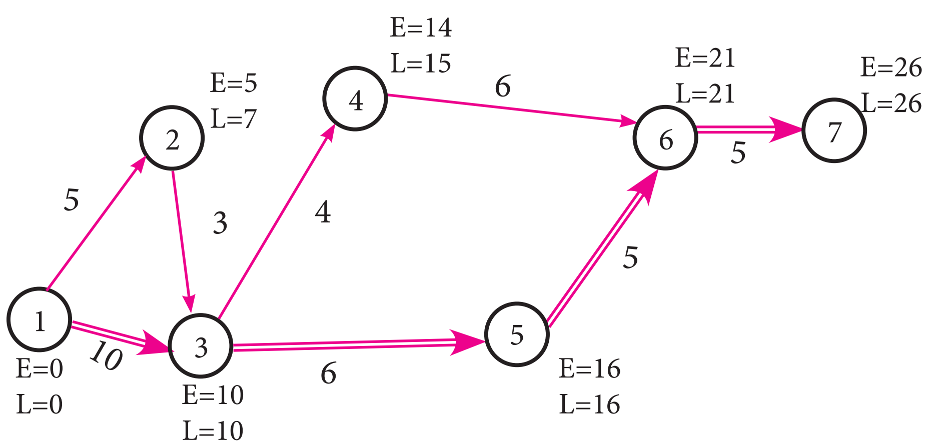


9.



தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-2-3-5-6 மற்றும் திட்டம் நிறைவு செய்யும் காலம் 30 நாட்கள்

10.



தீர்வுக்கு உகந்த பாதை 1-3-5-6-7 மற்றும் திட்டம் நிறைவு செய்யும் காலம் 26 நாட்கள்

மடக்கை அட்டவணை

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

மடக்கை அட்டவணை

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

எதிர் மடக்கை அட்டவணை

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.000	1.002	1.005	1.007	1.009	1.012	1.014	1.016	1.019	1.021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.01	1.023	1.026	1.028	1.030	1.033	1.035	1.038	1.040	1.042	1.045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.02	1.047	1.050	1.052	1.054	1.057	1.059	1.062	1.064	1.067	1.069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.03	1.072	1.074	1.076	1.079	1.081	1.084	1.086	1.089	1.091	1.094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.04	1.096	1.099	1.102	1.104	1.107	1.109	1.112	1.114	1.117	1.119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.05	1.122	1.125	1.127	1.130	1.132	1.135	1.138	1.140	1.143	1.146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.06	1.148	1.151	1.153	1.156	1.159	1.161	1.164	1.167	1.169	1.172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.07	1.175	1.178	1.180	1.183	1.186	1.189	1.191	1.194	1.197	1.199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.08	1.202	1.205	1.208	1.211	1.213	1.216	1.219	1.222	1.225	1.227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.09	1.230	1.233	1.236	1.239	1.242	1.245	1.247	1.250	1.253	1.256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.10	1.259	1.262	1.265	1.268	1.271	1.274	1.276	1.279	1.282	1.285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.11	1.288	1.291	1.294	1.297	1.300	1.303	1.306	1.309	1.312	1.315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.12	1.318	1.321	1.324	1.327	1.330	1.334	1.337	1.340	1.343	1.346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.13	1.349	1.352	1.355	1.358	1.361	1.365	1.368	1.371	1.374	1.377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.14	1.380	1.384	1.387	1.390	1.393	1.396	1.400	1.403	1.406	1.409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.15	1.413	1.416	1.419	1.422	1.426	1.429	1.432	1.435	1.439	1.442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.16	1.445	1.449	1.452	1.455	1.459	1.462	1.466	1.469	1.472	1.476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.17	1.479	1.483	1.486	1.489	1.493	1.496	1.500	1.503	1.507	1.510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.18	1.514	1.517	1.521	1.524	1.528	1.531	1.535	1.538	1.542	1.545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.19	1.549	1.552	1.556	1.560	1.563	1.567	1.570	1.574	1.578	1.581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.20	1.585	1.589	1.592	1.596	1.600	1.603	1.607	1.611	1.614	1.618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.21	1.622	1.626	1.629	1.633	1.637	1.641	1.644	1.648	1.652	1.656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.22	1.660	1.663	1.667	1.671	1.675	1.679	1.683	1.687	1.690	1.694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.23	1.698	1.702	1.706	1.710	1.714	1.718	1.722	1.726	1.730	1.734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.24	1.738	1.742	1.746	1.750	1.754	1.758	1.762	1.766	1.770	1.774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.25	1.778	1.782	1.786	1.791	1.795	1.799	1.803	1.807	1.811	1.816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.26	1.820	1.824	1.828	1.832	1.837	1.841	1.845	1.849	1.854	1.858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.27	1.862	1.866	1.871	1.875	1.879	1.884	1.888	1.892	1.897	1.901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.28	1.905	1.910	1.914	1.919	1.923	1.928	1.932	1.936	1.941	1.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.29	1.950	1.954	1.959	1.963	1.968	1.972	1.977	1.982	1.986	1.991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.30	1.995	2.000	2.004	2.009	2.014	2.018	2.023	2.028	2.032	2.037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.31	2.042	2.046	2.051	2.056	2.061	2.065	2.070	2.075	2.080	2.084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.32	2.089	2.094	2.099	2.104	2.109	2.113	2.118	2.123	2.128	2.133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.33	2.138	2.143	2.148	2.153	2.158	2.163	2.168	2.173	2.178	2.183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.34	2.188	2.193	2.198	2.203	2.208	2.213	2.218	2.223	2.228	2.234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.35	2.239	2.244	2.249	2.254	2.259	2.265	2.270	2.275	2.280	2.286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.36	2.291	2.296	2.301	2.307	2.312	2.317	2.323	2.328	2.333	2.339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.37	2.344	2.350	2.355	2.360	2.366	2.371	2.377	2.382	2.388	2.393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.38	2.399	2.404	2.410	2.415	2.421	2.427	2.432	2.438	2.443	2.449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.39	2.455	2.460	2.466	2.472	2.477	2.483	2.489	2.495	2.500	2.506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
0.40	2.512	2.518	2.523	2.529	2.535	2.541	2.547	2.553	2.559	2.564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.41	2.570	2.576	2.582	2.588	2.594	2.600	2.606	2.612	2.618	2.624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.42	2.630	2.636	2.642	2.649	2.655	2.661	2.667	2.673	2.679	2.685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
0.43	2.692	2.698	2.704	2.710	2.716	2.723	2.729	2.735	2.742	2.748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.44	2.754	2.761	2.767	2.773	2.780	2.786	2.793	2.799	2.805	2.812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.45	2.818	2.825	2.831	2.838	2.844	2.851	2.858	2.864	2.871	2.877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.46	2.884	2.891	2.897	2.904	2.911	2.917	2.924	2.931	2.938	2.944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.47	2.951	2.958	2.965	2.972	2.979	2.985	2.992	2.999	3.006	3.013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.48	3.020	3.027	3.034	3.041	3.048	3.055	3.062	3.069	3.076	3.083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
0.49	3.090	3.097	3.105	3.112	3.119	3.126	3.133	3.141	3.148	3.155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

எதிர் மடக்கை அட்டவணை

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	3.162	3.170	3.177	3.184	3.192	3.199	3.206	3.214	3.221	3.228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
0.51	3.236	3.243	3.251	3.258	3.266	3.273	3.281	3.289	3.296	3.304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.52	3.311	3.319	3.327	3.334	3.342	3.350	3.357	3.365	3.373	3.381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.53	3.388	3.396	3.404	3.412	3.420	3.428	3.436	3.443	3.451	3.459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.54	3.467	3.475	3.483	3.491	3.499	3.508	3.516	3.524	3.532	3.540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.55	3.548	3.556	3.565	3.573	3.581	3.589	3.597	3.606	3.614	3.622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0.56	3.631	3.639	3.648	3.656	3.664	3.673	3.681	3.690	3.698	3.707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.57	3.715	3.724	3.733	3.741	3.750	3.758	3.767	3.776	3.784	3.793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.58	3.802	3.811	3.819	3.828	3.837	3.846	3.855	3.864	3.873	3.882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0.59	3.890	3.899	3.908	3.917	3.926	3.936	3.945	3.954	3.963	3.972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0.60	3.981	3.990	3.999	4.009	4.018	4.027	4.036	4.046	4.055	4.064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0.61	4.074	4.083	4.093	4.102	4.111	4.121	4.130	4.140	4.150	4.159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4.169	4.178	4.188	4.198	4.207	4.217	4.227	4.236	4.246	4.256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	4.266	4.276	4.285	4.295	4.305	4.315	4.325	4.335	4.345	4.355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.64	4.365	4.375	4.385	4.395	4.406	4.416	4.426	4.436	4.446	4.457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.65	4.467	4.477	4.487	4.498	4.508	4.519	4.529	4.539	4.550	4.560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.66	4.571	4.581	4.592	4.603	4.613	4.624	4.634	4.645	4.656	4.667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0.67	4.677	4.688	4.699	4.710	4.721	4.732	4.742	4.753	4.764	4.775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.68	4.786	4.797	4.808	4.819	4.831	4.842	4.853	4.864	4.875	4.887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
0.69	4.898	4.909	4.920	4.932	4.943	4.955	4.966	4.977	4.989	5.000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
0.70	5.012	5.023	5.035	5.047	5.058	5.070	5.082	5.093	5.105	5.117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
0.71	5.129	5.140	5.152	5.164	5.176	5.188	5.200	5.212	5.224	5.236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5.248	5.260	5.272	5.284	5.297	5.309	5.321	5.333	5.346	5.358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0.73	5.370	5.383	5.395	5.408	5.420	5.433	5.445	5.458	5.470	5.483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0.74	5.495	5.508	5.521	5.534	5.546	5.559	5.572	5.585	5.598	5.610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5.623	5.636	5.649	5.662	5.675	5.689	5.702	5.715	5.728	5.741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0.76	5.754	5.768	5.781	5.794	5.808	5.821	5.834	5.848	5.861	5.875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0.77	5.888	5.902	5.916	5.929	5.943	5.957	5.970	5.984	5.998	6.012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0.78	6.026	6.039	6.053	6.067	6.081	6.095	6.109	6.124	6.138	6.152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6.166	6.180	6.194	6.209	6.223	6.237	6.252	6.266	6.281	6.295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0.80	6.310	6.324	6.339	6.353	6.368	6.383	6.397	6.412	6.427	6.442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0.81	6.457	6.471	6.486	6.501	6.516	6.531	6.546	6.561	6.577	6.592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6.607	6.622	6.637	6.653	6.668	6.683	6.699	6.714	6.730	6.745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.83	6.761	6.776	6.792	6.808	6.823	6.839	6.855	6.871	6.887	6.902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0.84	6.918	6.934	6.950	6.966	6.982	6.998	7.015	7.031	7.047	7.063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7.079	7.096	7.112	7.129	7.145	7.161	7.178	7.194	7.211	7.228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7.244	7.261	7.278	7.295	7.311	7.328	7.345	7.362	7.379	7.396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.87	7.413	7.430	7.447	7.464	7.482	7.499	7.516	7.534	7.551	7.568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.88	7.586	7.603	7.621	7.638	7.656	7.674	7.691	7.709	7.727	7.745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0.89	7.762	7.780	7.798	7.816	7.834	7.852	7.870	7.889	7.907	7.925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0.90	7.943	7.962	7.980	7.998	8.017	8.035	8.054	8.072	8.091	8.110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0.91	8.128	8.147	8.166	8.185	8.204	8.222	8.241	8.260	8.279	8.299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0.92	8.318	8.337	8.356	8.375	8.395	8.414	8.433	8.453	8.472	8.492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0.93	8.511	8.531	8.551	8.570	8.590	8.610	8.630	8.650	8.670	8.690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.94	8.710	8.730	8.750	8.770	8.790	8.810	8.831	8.851	8.872	8.892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.95	8.913	8.933	8.954	8.974	8.995	9.016	9.036	9.057	9.078	9.099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9.120	9.141	9.162	9.183	9.204	9.226	9.247	9.268	9.290	9.311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9.333	9.354	9.376	9.397	9.419	9.441	9.462	9.484	9.506	9.528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0.98	9.550	9.572	9.594	9.616	9.638	9.661	9.683	9.705	9.727	9.750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9.772	9.795	9.817	9.840	9.863	9.886	9.908	9.931	9.954	9.977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

12_11th_BM-STAT_LogTable_TM.indd 299 08-12-2021 22:00:23

அடுக்குச்சார்புக்கான அட்டவணை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.00000000	2.71828183	7.38905610	20.08553692	54.59815003	148.41315910	403.42879349	1096.63315843	2980.95798704	8103.08392758
0.01	1.01005017	2.74560102	7.46331735	20.28739993	55.14687056	149.90473615	407.48332027	1107.65450490	3010.91711288	8184.52127494
0.02	1.02020134	2.77319476	7.53832493	20.49129168	55.70110583	151.41130379	411.57859573	1118.78661775	3041.17733294	8266.77708126
0.03	1.03045453	2.80106583	7.61408636	20.69723259	56.26091125	152.93301270	415.71502938	1130.03061019	3071.74167327	8349.85957218
0.04	1.04081077	2.82921701	7.69060920	20.90524324	56.82634281	154.47001503	419.89303489	1141.38760663	3102.61319033	8433.77705601
0.05	1.05127110	2.85765112	7.76790111	21.11534442	57.39745705	156.02246449	424.11303004	1152.85874278	3133.79497129	8518.53792457
0.06	1.06183655	2.88637099	7.84596981	21.32755716	57.97431108	157.59051632	428.37543686	1164.44516577	3165.29013436	8604.15065402
0.07	1.07250818	2.91537950	7.92482312	21.54190268	58.55696259	159.17432734	432.68068157	1176.14803425	3197.10182908	8690.62380571
0.08	1.08328707	2.94467955	8.00446891	21.75840240	59.14546985	160.77405593	437.02919472	1187.96851851	3229.23323664	8777.96602703
0.09	1.09417428	2.97427407	8.08491516	21.97707798	59.73989170	162.38986205	441.42141115	1199.90780061	3261.68757023	8866.18605226
0.10	1.10517092	3.00416602	8.16616991	22.19795128	60.34028760	164.02190730	445.85777008	1211.96707449	3294.46807528	8955.29270348
0.11	1.11627807	3.03435839	8.24824128	22.42104440	60.94671757	165.67035487	450.33871517	1224.14754609	3327.57802989	9045.29489144
0.12	1.12749685	3.06485420	8.33113749	22.64637964	61.55924226	167.33536962	454.86469450	1236.45043347	3361.02074508	9136.20161642
0.13	1.13882838	3.09565650	8.41486681	22.87397954	62.17792293	169.01711804	459.43616068	1248.87696691	3394.79956514	9228.02196918
0.14	1.15027380	3.12676837	8.49943763	23.10386686	62.80282145	170.71576832	464.05357086	1261.42838910	3428.91786799	9320.76513183
0.15	1.16183424	3.15819291	8.58485840	23.33606458	63.43400030	172.43149032	468.71738678	1274.10595517	3463.37906548	9414.44037876
0.16	1.17351087	3.18993328	8.67113766	23.57059593	64.07152260	174.16445561	473.42807483	1286.91093291	3498.18660376	9509.05707757
0.17	1.18530485	3.22199264	8.75828404	23.80748436	64.71545211	175.91483748	478.18610609	1299.84460280	3533.34396362	9604.62469001
0.18	1.19721736	3.25437420	8.84630626	24.04675355	65.36585321	177.68281099	482.99195635	1312.90825825	3568.85466082	9701.15277293
0.19	1.20924960	3.28708121	8.93521311	24.28842744	66.02279096	179.46855293	487.84610621	1326.10320561	3604.72224646	9798.65097920
0.20	1.22140276	3.32011692	9.02501350	24.53253020	66.68633104	181.27224188	492.74904109	1339.43076439	3640.95030733	9897.12905874
0.21	1.23367806	3.35348465	9.11571639	24.77908622	67.35653981	183.09405819	497.70125129	1352.89226737	3677.54246627	9996.59685944
0.22	1.24607673	3.38718773	9.20733087	25.02812018	68.03348429	184.93418407	502.70323202	1366.48906071	3714.50238251	10097.06432815
0.23	1.25860001	3.42122954	9.29986608	25.27965697	68.71723217	186.79280352	507.75548350	1380.22250409	3751.83375209	10198.54151171
0.24	1.27124915	3.45561346	9.39333129	25.53372175	69.40785184	188.67010241	512.85851094	1394.09397087	3789.54030817	10301.03855791
0.25	1.28402542	3.49034296	9.48773584	25.79033992	70.10541235	190.56626846	518.01282467	1408.10484820	3827.62582144	10404.56571656
0.26	1.29693009	3.52542149	9.58308917	26.04953714	70.80998345	192.48149130	523.21894011	1422.25653720	3866.09410048	10509.13334045
0.27	1.30996445	3.56085256	9.67940081	26.31133934	71.52163562	194.41596245	528.47737788	1436.55045304	3904.94899215	10614.75188643
0.28	1.32312981	3.59663973	9.77668041	26.57577270	72.24044001	196.36987535	533.78866383	1450.98802511	3944.19438198	10721.43191645
0.29	1.33642749	3.63278656	9.87493768	26.84286366	72.96646850	198.34342541	539.15332908	1465.57069720	3983.83419453	10829.18409859
0.30	1.34985881	3.66929667	9.97418245	27.11263892	73.69979370	200.33680997	544.57191013	1480.29992758	4023.87239382	10938.01920817
0.31	1.36342511	3.70617371	10.07442466	27.38512547	74.44048894	202.35022839	550.04494881	1495.17718919	4064.31298371	11047.94812878
0.32	1.37712776	3.74342138	10.17567431	27.66035056	75.18862829	204.38388199	555.57299245	1510.20396976	4105.16000827	11158.98185341
0.33	1.39096813	3.78104339	10.27794153	27.93834170	75.94428657	206.43797416	561.15659385	1525.38177199	4146.41755226	11271.13148552
0.34	1.40494759	3.81904351	10.38123656	28.21912671	76.70753934	208.51271029	566.79631138	1540.71211367	4188.08974147	11384.40824018
0.35	1.41906755	3.85742553	10.48556972	28.50273364	77.47846293	210.60829787	572.49270901	1556.19652784	4230.18074313	11498.82344515
0.36	1.43332941	3.89619330	10.59095145	28.78919088	78.25713442	212.72494645	578.24635639	1571.83656296	4272.69476640	11614.38854204
0.37	1.44773461	3.93535070	10.69739228	29.07852706	79.04363170	214.86286770	584.05782889	1587.63378304	4315.63606270	11731.11508747
0.38	1.46228459	3.97490163	10.80490286	29.37077111	79.83803341	217.02227542	589.92770766	1603.58976783	4359.00892620	11849.01475419
0.39	1.47698079	4.01485005	10.91349394	29.66595227	80.64041898	219.20338555	595.85657969	1619.70611293	4402.81769423	11968.09933225
0.40	1.49182470	4.05519997	11.02317638	29.96410005	81.45086866	221.40641620	601.84503787	1635.98443000	4447.06674770	12088.38073022
0.41	1.50681779	4.09595540	11.13396115	30.26524426	82.26946350	223.63158768	607.89368106	1652.42634686	4491.76051155	12209.87097633
0.42	1.52196156	4.13712044	11.24585931	30.56941502	83.09628536	225.87912250	614.00311413	1669.03350774	4536.90345519	12332.58221972
0.43	1.53725752	4.17869919	11.35888208	30.87664275	83.93141691	228.14924542	620.17394801	1685.80757337	4582.50009296	12456.52673161
0.44	1.55270722	4.22069582	11.47304074	31.18695817	84.77494167	230.44218346	626.40679981	1702.75022115	4628.55498456	12581.71690655
0.45	1.56831219	4.26311452	11.58834672	31.50039231	85.62694400	232.75816591	632.70229281	1719.86314538	4675.07273551	12708.16526367
0.46	1.58407398	4.30595953	11.70481154	31.81697651	86.48750910	235.09742437	639.06105657	1737.14805735	4722.05799763	12835.88444790
0.47	1.59999419	4.34923514	11.82244685	32.13674244	87.35672301	237.46019276	645.48372697	1754.60668558	4769.51546949	12964.88723127
0.48	1.61607440	4.39294568	11.94126442	32.45972208	88.23467268	239.84670737	651.97094627	1772.24077593	4817.44989687	13095.18651418
0.49	1.63231622	4.43709552	12.06127612	32.78594771	89.12144588	242.25720686	658.52336322	1790.05209184	4865.86607325	13226.79532664
0.50	1.64872127	4.48168907	12.18249396	33.11545196	90.01713130	244.69193226	665.14163304	1808.04241446	4914.76884030	13359.72682966

அடுக்குச்சார்புக்கான அட்டவணை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.51	1.66529119	4.52673079	12.30493006	33.44826778	90.92181851	247.15112707	671.82641759	1826.21354282	4964.16308832	13493.99431650
0.52	1.68202765	4.57222520	12.42859666	33.78442846	91.83559798	249.63503719	678.57838534	1844.56729405	5014.05375679	13629.61121401
0.53	1.69893231	4.61817682	12.55350614	34.12396761	92.75856108	252.14391102	685.39821149	1863.10550356	5064.44583482	13766.59108401
0.54	1.71600686	4.66459027	12.67967097	34.46691919	93.69080012	254.67799946	692.28657804	1881.83002516	5115.34436165	13904.94762458
0.55	1.73325302	4.71147018	12.80710378	34.81331749	94.63240831	257.23755591	699.24417382	1900.74273134	5166.75442718	14044.69467150
0.56	1.75067250	4.75882125	12.93581732	35.16319715	95.58347983	259.82283632	706.27169460	1919.84551337	5218.68117245	14185.84619960
0.57	1.76826705	4.80664819	13.06582444	35.51659315	96.54410977	262.43409924	713.36984313	1939.14028156	5271.12979019	14328.41632413
0.58	1.78603843	4.85495581	13.19713816	35.87354085	97.51439421	265.07160579	720.53932925	1958.62896539	5324.10552531	14472.41930224
0.59	1.80398842	4.90374893	13.32977160	36.23407593	98.49443016	267.73561971	727.78086990	1978.31351375	5377.61367541	14617.86953434
0.60	1.82211880	4.95303242	13.46373804	36.59823444	99.48431564	270.42640743	735.09518924	1998.19589510	5431.65959136	14764.78156558
0.61	1.84043140	5.00281123	13.59905085	36.96605281	100.48414964	273.14423800	742.48301872	2018.27809772	5486.24867780	14913.17008727
0.62	1.85892804	5.05309032	13.73572359	37.33756782	101.49403213	275.88938323	749.94509711	2038.56212982	5541.38639368	15063.04993840
0.63	1.87761058	5.10387472	13.87376990	37.71281662	102.51406411	278.66211763	757.48217064	2059.05001984	5597.07825281	15214.43610708
0.64	1.89648088	5.15516951	14.01320361	38.09183673	103.54434758	281.46271848	765.09499302	2079.74381657	5653.32982444	15367.34373205
0.65	1.91554083	5.20697983	14.15403865	38.47466605	104.58498558	284.29146582	772.78432554	2100.64558942	5710.14673375	15521.78810420
0.66	1.93479233	5.25931084	14.29628910	38.86134287	105.63608216	287.14864256	780.55093713	2121.75742858	5767.53466250	15677.78466809
0.67	1.95423732	5.31216780	14.43996919	39.25190586	106.69774243	290.03453439	788.39560446	2143.08144525	5825.49934952	15835.34902351
0.68	1.97387773	5.36555597	14.58509330	39.64639407	107.77007257	292.94942992	796.31911202	2164.61977185	5884.04659134	15994.49692704
0.69	1.99371553	5.41948071	14.73167592	40.04484696	108.85317981	295.89362064	804.32225214	2186.37456223	5943.18224271	16155.24429358
0.70	2.01375271	5.47394739	14.87973172	40.44730436	109.94717245	298.86740097	812.40582517	2208.34799189	6002.91221726	16317.60719802
0.71	2.03399126	5.52896148	15.02927551	40.85380653	111.05215991	301.87106828	820.57063945	2230.54225819	6063.24248804	16481.60187677
0.72	2.05443321	5.58452846	15.18032224	41.26439411	112.16825267	304.90492296	828.81751148	2252.95958057	6124.17908811	16647.24472945
0.73	2.07508061	5.64065391	15.33288702	41.67910816	113.29556235	307.96926838	837.14726595	2275.60220079	6185.72811120	16814.55232047
0.74	2.09593551	5.69734342	15.48698510	42.09799016	114.43420168	311.06441098	845.56073585	2298.47238312	6247.89571226	16983.54138073
0.75	2.11700002	5.75460268	15.64263188	42.52108200	115.58428453	314.19066029	854.05876253	2321.57241461	6310.68810809	17154.22880929
0.76	2.13827622	5.81243739	15.79984295	42.94842598	116.74592590	317.34832892	862.64219579	2344.90460528	6374.11157799	17326.63167502
0.77	2.15976625	5.87085336	15.95863401	43.38006484	117.91924196	320.53773265	871.31189399	2368.47128836	6438.17246436	17500.76721836
0.78	2.18147227	5.92985642	16.11902095	43.81604174	119.10435004	323.75919042	880.06872411	2392.27482054	6502.87717335	17676.65285301
0.79	2.20339643	5.98945247	16.28101980	44.25640028	120.30136866	327.01302438	888.91356183	2416.31758219	6568.23217547	17854.30616767
0.80	2.22554093	6.04964746	16.44464677	44.70118449	121.51041752	330.29955991	897.84729165	2440.60197762	6634.24400628	18033.74492783
0.81	2.24790799	6.11044743	16.60991822	45.15043887	122.73161752	333.61912567	906.87080695	2465.13043529	6700.91926702	18214.98707751
0.82	2.27049984	6.17185845	16.77685067	45.60420832	123.96509078	336.97205363	915.98501008	2489.90540804	6768.26462527	18398.05074107
0.83	2.29331874	6.23388666	16.94546082	46.06253823	125.21096065	340.35867907	925.19081248	2514.92937342	6836.28681562	18582.95422504
0.84	2.31636698	6.29653826	17.11576554	46.52547444	126.46935173	343.77934066	934.48913473	2540.20483383	6904.99264036	18769.71601992
0.85	2.33964685	6.35981952	17.28778184	46.99306323	127.74038985	347.23438048	943.88090667	2565.73431683	6974.38897011	18958.35480204
0.86	2.36316069	6.42373677	17.46152694	47.46535137	129.02420211	350.72414402	953.36706749	2591.52037541	7044.48274457	19148.88943544
0.87	2.38691085	6.48829640	17.63701820	47.94238608	130.32091690	354.24898027	962.94856581	2617.56558819	7115.28097317	19341.33897375
0.88	2.41089971	6.55350486	17.81427318	48.42421507	131.63066389	357.80924171	972.62635979	2643.87255970	7186.79073580	19535.72266207
0.89	2.43512965	6.61936868	17.99330960	48.91088652	132.95357405	361.40528437	982.40141722	2670.44392068	7259.01918349	19732.05993893
0.90	2.45960311	6.68589444	18.17414537	49.40244911	134.28977968	365.03746787	992.27471561	2697.28232827	7331.97353916	19930.37043823
0.91	2.48432253	6.75308880	18.35679857	49.89895197	135.63941441	368.70615541	1002.24724229	2724.39046634	7405.66109828	20130.67399118
0.92	2.50929039	6.82095847	18.54128746	50.40044478	137.00261319	372.41171388	1012.31999453	2751.77104573	7480.08922969	20332.99062831
0.93	2.53450918	6.88951024	18.72763050	50.90697767	138.37951234	376.15451382	1022.49397962	2779.42680452	7555.26537625	20537.34058145
0.94	2.55998142	6.95875097	18.91584631	51.41860130	139.77024956	379.93492954	1032.77021496	2807.36050830	7631.19705565	20743.74428576
0.95	2.58570966	7.02868758	19.10595373	51.93536683	141.17496392	383.75333906	1043.14972818	2835.57495047	7707.89186111	20952.22238178
0.96	2.61169647	7.09932707	19.29797176	52.45732595	142.59379590	387.61012424	1053.63355724	2864.07295251	7785.35746218	21162.79571750
0.97	2.63794446	7.17067649	19.49191960	52.98453084	144.02688737	391.50567075	1064.22275054	2892.85736422	7863.60160548	21375.48535043
0.98	2.66445624	7.24274299	19.68781664	53.51703423	145.47438165	395.44036816	1074.91836700	2921.93106408	7942.63211550	21590.31254971
0.99	2.69123447	7.31553376	19.88568249	54.05488936	146.93642350	399.41460993	1085.72147619	2951.29695948	8022.45689535	21807.29879823

துணை நூற் பட்டியல்

1. Introduction to Matrices, S.P. Gupta, S. Chand & Company.
2. Matrices, Shanthi Narayanan, S. Chand & Company.
3. Matrices and Determinants, P.N. Arora, S. Chand & Company.
4. Topics in Algebra, I.N. Herstein, Vikas Publishing Company.
5. Algebra A Complete Course, R.D. Sharma, Sultan Chand & Sons.
6. Analytical Geometry, T.K. Manicavachagon Pillay, S. Narayanan, S. Viswanathan Publishers.
7. Analytical Geometry, P.K. Mittal, Shanthi Narayanan, Durai Pandiyan, S. Chand & Company.
8. Trigonometry, R.D. Sharma, Sulatan Chand & Sons.
9. A Text Book of Trigonometry, M.D. Raisingania and Aggarwal.
10. Trigonometry, D.C. Sharma, V.K. Kapoor, Sulatan Chand & Sons.
11. Trignonometry, S. Arumugam, S. Narayanan, T.K. Manicavachagon Pillay, New Gama Publications, S. Viswanathan Printers and Publishers Pvt. Ltd.
12. Calculus, Mohammed Arif, S. Narayanan, T.K. Manicavachagon Pillay, S. Viswanathan Printers and Publishers Pvt. Ltd.
13. Differential and Integral Calculus, N. Piskunov, Mir Publishers, Moscow.
14. Differential and Integral Calculus, Schamum's Outline Series, Frank Ayres.
15. Calculus (Volume I & II), Tom. M. Apostol, John Wiley Publications.
16. Calculus: An Historical Approach, W.M. Priestly (Springer)
17. Calculus with Analytic Geometry (Second Edition) George F. Simmons, The Mcgraw Hill.
18. Application of Differentiation, S. Narayanan, T.K. Manicavachagon Pillay, S. Viswanathan Printers and Publishers Pvt. Ltd.
19. Application of Differentiation, P.N. Arora, S. Arora, S. Chand & Company.
20. Financial Mathematics, O.P. Malhotra, S.K. Gupta, Anubhuti Gangal, S. Chand & Company.
21. Financial Mathematics, Kashyap Trivedi, Chirag Trivedi, Pearson India Education Services Pvt. Ltd.
22. Descriptive Statistics, Richard I. Levin, David S. Rubin, Prentice Hall Inc., Englewood, N.J., U.S.A.
23. Statistical Methods, S.K. Gupta, Prentice Hall Inc., Englewood, N.J., U.S.A.
24. Descriptive Statistics, Anderson, Sweenas, Williams, Library of Congress Cataloging in Publication Data.
25. Correlation and Regression Analysis, Dr. S.P. Gupta, P.K. Gupta, Dr. Manmohan, Sultan Chand & Sons.
26. Correlation and Regression Analysis, John S. Croucher, Mc Graw-Hill Australia Pvt. Limited.
27. Operations Research, Dr. S.P. Gupta, P.K. Gupta, Dr. Manmohan, Sultan Chand & Sons.
28. Operations Research, A. Ravindran, James J. Solberg, Willey Student Edition.
29. Operations Research, Nita H. Shah, Ravi, M. Gor, Hardik Soni, Kindle Edition.
30. Operations Research, Frederick S. Hilton, Gerald J. Lieberman, Mc Graw Hill Education.
31. Business Mathematics and Statistics, HSC First & Second Year, Tamil Nadu Text Book Corporation.
32. Mathematics, HSC First & Second Year, Tamil Nadu Text Book Corporation.
33. Statistics, HSC First & Second Year, Tamil Nadu Text Book Corporation.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் – மேல் நிலை முதலாமாண்டு
வல்லுநர்கள், மேலாய்வாளர்கள் மற்றும் நூலாசிரியர்கள் பெயர் பட்டியல்

பாடத் தயாரிப்புக்குழு தலைவர்

திரு. ந. இரமேஷ்
இணைப் பேராசிரியர் (ஓய்வு),
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்), நந்தனம், சென்னை.

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் மா. ரெ. சீனிவாசன்
பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்,
புள்ளியியல் துறை, சென்னை பல்கலைக் கழகம், சென்னை.

முனைவர் தெ. அறிவுடைநம்பி
இணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை, அண்ணா பல்கலைக் கழகம், சென்னை.

பாடப் பொருள் வல்லுநர்கள்

முனைவர் வேணு பிரகாஷ்
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறை தலைவர்,
புள்ளியியல் துறை, மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை.

முனைவர் இரா. திருமலைச்சாமி
இணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்), நந்தனம், சென்னை.

முனைவர் ச. ஜெ. வெங்கடேசன்
இணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்), நந்தனம், சென்னை.

திருமதி மே. திலகம்
உதவிப் பேராசிரியர்,
புள்ளியியல் துறை, மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

பாடக்குழு பொறுப்பாளர்

திரு. இரவிகுமார் ஆறுமுகம்
துணை இயக்குநர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை.

பாட நூல் ஒருங்கிணைப்பாளர்

திரு. சு. பாபு
உதவி பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக் குழு

புத்தக வடிவமைப்பாளர்

யோகேஷ் பலராமன்
மனோகர் இராதாகிருஷ்ணண்
அடிசன், பிரசாந்த். சி

QC

இராஜேஷ் தங்கப்பன்
ஜெரால்டு வில்சன்

அட்டை வடிவமைப்பு

கதிர் ஆறுமுகம்

ஒருங்கிணைப்பு

ரமேஷ்

தட்டச்சு

பெ. துளசி
DIET, சென்னை.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. தி.பி. சுவாமி நாதன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி, பல்லாவரம் சென்னை

திரு. ஹரி. வெங்கடேஷ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
சர் இராமசாமி முதலியார் மேல்நிலைப்பள்ளி, அம்பத்தூர், சென்னை.

திரு. ஆ. மாரியப்பன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அறிஞர் அண்ணா நகராட்சி ஆண்கள், மேல்நிலைப் பள்ளி, செங்கல்பட்டு,
காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

திரு. எஸ்.எப். முகமது முகைதீன் சுலைமான்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி, பல்லாவரம், சென்னை.

திரு. த. ராஜ சேகர்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அரசு ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி, குரோம் பேட்டை, காஞ்சிபுரம்.

திருமதி. அ. சுகன்யா
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி, கோவிலம்பாக்கம், காஞ்சிபுரம்.

திரு. வெ. கணேசன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
நேரு அரசினர் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி, நங்கைநல்லூர், சென்னை.

பாடப் பொருள் வாசிப்பாளர்கள்

திரு. ஜேம்ஸ் குழந்தை ராஜ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
புனித சூசையப்பர் மேல்நிலைப் பள்ளி, செங்கல்பட்டு, காஞ்சிபுரம்.

திருமதி பியுலா சுகுணா சீலி
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
P.G. கார்லி மேல்நிலைப் பள்ளி, தாம்பரம்.

திருமதி S. சுபாஷினி
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அரசு பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி, குன்றத்தூர், காஞ்சிபுரம்.

திரு. கா. சரவணன்
கிரேஸ் மெட்ரிக் மேல்நிலைப் பள்ளி, போரூர், சென்னை.

ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

தா. வாசுராஜ்
பட்டதாரி ஆசிரியர் (கணிதம்) (ஓய்வு)
ஊ.ஒ.ந.நி. பள்ளி, கொசப்பூர், திருவள்ளுர் மாவட்டம்.

விரைவுக் குறியீடு மேலாண்மைக் குழு

இரா. ஜெகநாதன்
இடைநிலை ஆசிரியர், (மா.தி.ஒ.)
ஊ.ஒ.ந.நி. பள்ளி, கணேசபுரம்– போளுர், திருவண்ணாமலை மாவட்டம்.

ந. ஜெகன்
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அ.ஆ.மே.நி. பள்ளி, உத்திரமேரூர், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

ஜே.எப். பால் எட்வின் ராய்
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
ஊ.ஒ.ந.நி. பள்ளி, இராக்கிப்பட்டி, வீரபாண்டி, சேலம் மாவட்டம்.

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

குறிப்பு

குறிப்பு

குறிப்பு

13_11th_BM-STAT_Reference-TM.indd 306 08-12-2021 22:01:57