தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை முதலாம் ஆண்டு

கணிதவியல்

தொகுதி 1

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு – *2018*

திருத்திய பதிப்பு – *2019, 2020, 2022*

(புதிய பாடத்திட்டத்தின்கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

இந்தப் புத்தகத்தினை எவ்வாறு பயன்படுத்த வேண்டும்

கணிதப் பாடத்தின் வாய்ப்புகள்	• உயர்கல்வி வாய்ப்புகள், படிப்புகள், நிறுவனங்கள் போட்டித் தேர்வுகள் பற்றிய கருத்துகள். • மாணவர்கள் உயர்கல்வி நிலையை அடையத் தேவையான கல்வி உதவித்தொகை வாய்ப்புகள் பற்றிய வழிகாட்டுதல்கள்.
கற்றல் நோக்கங்கள்	• பாடப்பகுதியின் பொதுப்பார்வை • பாடப்பகுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் கற்றல் அடைவுகள் பற்றிய தெளிவு
உனக்குத் தெரியுமா?	• ஆழமாகவும் அகலமாகவும் கற்பதற்குத் தேவைப்படும் அதிகப்படியானத் தகவல்களைப் பெறும் ஆர்வத்தினை வளர்க்கும் வகையில் பாடப்பொருள் சார்ந்த கூடுதல் தகவல்கள்.
	• எடுத்துக்காட்டுகளுடன் பாடக் கருத்துகளின் காட்சிப்பதிவுகள். • காட்சிப்படங்கள், அசைவுப்படங்கள் கற்பித்தல் நிகழ்வுகள்.
தகவல் தொழில் நுட்பம்	• பாடப்பொருளைக் கற்பதற்கான கவன வீச்சினை அதிகரித்தல். • பாடப்பொருளைப் புரிந்துகொண்டு வலுப்படுத்துவதற்குப் பாடப்பொருளைக் காட்சிப்படுத்துதல். • ஒரு பாடப்பொருளை மற்ற பாடப்பொருள்களோடு இணைத்தல். • மின்னியல் திறன்களை வகுப்பறைக் கற்றலுடன் இணைத்து ஆய்வுக் கற்றலினை மாணவருக்கு அளித்தல்.
பாடத்தொகுப்பு	• ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியின் இறுதியிலும் கற்ற பாடப்பொருளை நினைவு கூறுவதற்காகத் தரப்பட்டுள்ள மீள்நோக்கக் குறிப்புகள்.
மதிப்பிடுதல்	• மாணவர்கள் கருத்துகளைப் புரிந்து கொண்டதை மதிப்பிடுதல் மற்றும் பயிற்சி கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்கான அறிவை பெறச் செய்தல்.
மேற்கோள் நூல்கள்	• மேலும் கற்பதற்கான குறிப்புதவி நூல்களின் பட்டியல்.
உயர்நிலைச் சிந்தனைக்கான வாய்ப்புகள்	• JEE, KVPY, Math Olympiad போன்ற போட்டித் தேர்வுகளில் மாணவர்களின் பங்கேற்பினை ஊக்கப்படுத்த உயர்நிலைச் சிந்தனைக்கான வினாக்கள் மற்றும் கருத்துகள் இடம் பெற்று இருத்தல்.
கலைச்சொற்கள்	• அடிக்கடிப் பயன்படுத்தப்படும் கணிதக் கலைச்சொற்களும் அவற்றுக்கான தமிழ்ச் சொற்களும்.

கணிதம் கற்றல்

பாடப்பொருளினை முழுமையாகப் புரிந்துகொள்வதே சரியான கற்றலாகும். ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியும் அறிமுகம், கற்றல் நோக்கங்கள், பல்வேறு வரையறைகள், தேற்றங்கள், முடிவுகள் மற்றும் எடுத்துக்காட்டுகளுடன் வழங்கப்பட்டுள்ளன. இதனடிப்படையில் விரைவான மற்றும் வலுவான மீள் கற்றலுக்காகக் கணக்குத் தீர்வுகளும், தீர்க்க வேண்டிய கணக்குகளும் அளிக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றை பயிற்சி செய்வதன் மூலமாக ஒருவர் தம் கணிதத் திறனை வளர்த்துக்கொள்ள முடியும். எனவே, மாணவர்களுக்கு அடிப்படைக் கருத்துகளை விளக்கிக் கணக்குகளைச் செய்துகாட்டுவதுடன் அதை அடியொற்றி மாணவர்களுக்கு பிற கணக்குகளைத் தீர்க்க முயல வைப்பதும் ஆசிரியர் பணியாகும். உயர்நிலைக் கணிதத்திற்கான அடித்தளமாக இம்மேல்நிலை முதலாமாண்டு திகழ்வதால், இப்பாடப்புத்தகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு பாடக் கருத்திலும் மாணவர்கள் மிக கவனம் செலுத்த வேண்டும்.

பொருளடக்கம்

மின்னூல்

மதிப்பீடு

மேல்நிலைக் கல்வியினை முடித்த மாணவர்களுக்கான வாய்ப்புகள்

மருத்துவம் சார்ந்த படிப்புகள்	
JEE(முதல்நிலை மற்றும் சிறப்புநிலை)	உயிர்த்தகவல்கள் (Bio Informatics)
NEET, JIPMER, AIIMS	MBBS / B.D.S
பொறியியல் சார்ந்த படிப்புகள்	
JEE (முதல்நிலை மற்றும் சிறப்புநிலை)	B.E / B.Tech / B.Arch in IITs and NITs (இந்தியத் தொழில்நுட்ப நிறுவனங்கள் மற்றும் தேசியத் தொழில்நுட்ப நிறுவனங்கள்)
B.Tech.	Avionics / Aerospace விமானத் தொழில்நுட்பம்
B.Tech. /M.Tech.	Dual degree programme in IIST, Trivandram. இந்திய அறிவியல் தொழில்நுட்ப நிறுவனம், திருவனந்தபுரம் இரட்டைப் பட்டப்படிப்பு
B.E.	வேளாண்மைப் பொறியியல் (தமிழ்நாடு வேளாண்மைப் பல்கலைக்கழகம் நடத்தும் நுழைவுத்தேர்வு) (http://www.tnau.ac.in/)
CET.	கடல் சார் படிப்புகளுக்கான பொது நுழைவுத் தேர்வு (www.imu.edu.in)
BITS.	பிர்லா அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப நுழைவுத் தேர்வு (www.bits–pilani.ac.in)
NATA.	கட்டிடவியலில் தேசியத் திறனறித் தேர்வு (www.nata.in)
IIIT–A	இந்தியத் தகவல் தொழில்நுட்பவியல் நிறுவனம் – அலகாபாத் (சேர்க்கைத் தேர்வு) (https://www.iiita.ac.in/)
IISER– KVPY/IIT–JEE/NEET	இளம் விஞ்ஞானி ஊக்குவிப்புத் தேர்வு IIT / EE / NEET – (https://www.iiseradmission.in/)
அடிப்படை அறிவியல் படிப்புகள்	
TIFR	டாடா அடிப்படை ஆய்வுகள் மற்றும் தொழில்நுட்ப நுழைவுத் தேர்வு (www.tifr.res.in) (univ.tifr.res.in/gs2018/)
NEST, NISER	தேசிய அறிவியல் கல்வி மற்றும் ஆராய்ச்சி நிறுவனம் (www.nestexam.in) (www.niser.ac.in)
IISC	இந்திய அறிவியல் நிறுவனம் (www.iisc.ac.in)
RIE	கல்வியியல் கல்வி நிறுவனங்கள் www.riebbs.ac.in; www.riemysore.ac.in; http://rieajmer.raj.nic.in/; www.riebhopal.ac.in; http://nerie.nic.in/
CEE	பொது நுழைவுத் தேர்வு https://ncert–cee.kar.nic.in/
CUCET	மத்தியப் பல்கலைக்கழக பொது நுழைவுத் தேர்வு https://cucetexam.in/
GATE	பொறியியல் பட்டதாரித் திறன் தேர்வு (http://gate.iitg.ac.in/)
NET	CSIR மற்றும் UGC தேசியத் தகுதித் தேர்வு (https://cbsenet.nic.in/)
JAM	இணைந்த சேர்க்கைத் தேர்வு (முதுகலைப் படிப்புகளுக்கானது) (http://jam.iitb.ac.in); (http://jam.iitd.ac.in); (http://www.iitg.ac.in/gate–jam/)
ISI (Indian Statistical Institute)	http://www.isibang.ac.in/; https://www.isid.ac.in/; https://www.isichennai.res.in/;
IISER – KVPY / IIT – JEE / NEET	https://www.iiseradmission.in/; http://www.iiserpune.ac.in/; http://www.iiserbpr.ac.in/; https://www.iiserb.ac.in/; http://www.iiserkol.ac.in/; http://www.iisermohali.ac.in/; http://www.iisertvm.ac.in/ ; http://www.iisertirupati.ac.in/

+2 முடித்தபின் மேற்படிப்புக்கான வாய்ப்புகள்

இளங்கலைப் படிப்புகள்:	
B.Sc	கணக்கு / பயன்பாட்டு கணிதம் / புள்ளியியல் (Mathematics/ Applied Matematics / Statistics)
B.Sc	இயற்பியல், வேதியியல் (Physics, Chemistry)
B.Stat (Hons)	புள்ளியியலில் இளங்கலைப் பட்டம் (Bachelor of Statistics)
B. Maths (Hons)	கணக்கியலில் இளங்கலைப் பட்டம் (Bachelor of Mathematics)
B.S–M.S இரட்டைப்பட்டம்	5 ஆண்டு படிப்பு (5 Years Programme)
B.Sc. Ed.	4 ஆண்டு படிப்பு (4 Years Programme)
முதுகலைப் படிப்புகள்:	
M.Sc	கணக்கு / பயன்பாட்டு கணிதம் / புள்ளியியல் (Mathematics/ Applied Matematics / Statistics)
M.Sc	வானியல் (Astronomy)
M.Sc	செயல்பாட்டு ஆய்வியல் (Operational Research)
M.Stat (Hons)	முதுகலைப் புள்ளியியல் படிப்பு (Master of Statistics)
M.Math (Hons)	கணக்கியலில் முதுகலைப் பட்டம் (Master of Mathematics)
M.Sc Ed	6 ஆண்டு படிப்பு (6 Years Programme)
M.Sc	கணக்கு – 5 ஆண்டு ஒருங்கிணைந்த படிப்பு (Mathematics – 5 Years Integrated Programme)

வேலைவாய்ப்பு மற்றும் கல்வி உதவித்தொகை வாய்ப்புகள்

வேலைவாய்ப்புகள்

- விண்வெளி ஆராய்ச்சி நிறுவனம்(ISRO), இராணுவ ஆராய்ச்சி மற்றும் மேம்பாட்டு நிறுவனம்(DRDO), அறிவியல் மற்றும் தொழிற்சாலை ஆராய்ச்சிக்கழகம் (CSIR labs) போன்றவற்றில் அறிவியல் ஆய்வாளர் பணிகள்
- மத்தியக் குடிமைப்பணிகள் ஆணையம் (UPSC)
- பணியாளர்கள் தேர்வு வாரியம்
- இந்தியப் பாதுகாப்புப் பணிகள்
- பொதுத்துறை வங்கிகள்
- வரி உதவியாளர் (Tax Assistant)
- புள்ளியியல் ஆய்வாளர் (Statistical Investigator)
- ஒருங்கிணைந்த பட்டதாரி நிலைத் தேர்வு (Combined Graduate Level Exam)
- தமிழ்நாடு பணியாளர் தேர்வு வாரியம் (TNPSC)
- ஆசிரியப்பணி

நிதிசார் உதவிகள்

- இளங்கலை மற்றும் முதுகலைப் படிப்புகளுக்கான கல்வி உதவித் தொகை
- 10 ஆம் வகுப்பு நிறைவில் நடத்தப்படும் தேசியத் திறனறி தேர்வு (NTSE) (XI வகுப்பு முதல் Ph.D வரை)
- அறிவியல் மற்றும் கணிதப்பாட உயர் கல்விக்கான உதவித் தொகைக்கான பன்னாட்டு ஒலிம்பியாடு(International Olympiad).
- (DST – INSPIRE) அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்பத்துறை இன்ஸ்பயர் கல்வி உதவித்தொகை (இளங்கலை மற்றும் முதுகலைப்படிப்புகள்)
- அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்பத்துறை இன்ஸ்பயர் (DST – INSPIRE) கல்வி உதவித்தொகை (முனைவர் ஆய்வுகள்)
- (UGC – National Fellowships) பல்கலைக்கழக மானியக் குழு தேசிய ஆய்வுப்படிப்பு உதவித்தொகை (முனைவர் ஆய்வுகள்)
- இந்திராகாந்தி ஒரு பெண்குழந்தைக்கான கல்வி உதவித்தொகை (இளங்கலை மற்றும் முதுகலைப் படிப்புகள்)
- சிறுபான்மையினருக்கான மௌலானா ஆஸாத் கல்வித்தொகை (முனைவர் ஆய்வுப்பணி)
- இவற்றுடன் பட்டியலினத்தோர்/ மலை சாதியினர் / உடல் ஊனமுற்றோர் / இதர பிற்பட்ட வகுப்பினருக்கான உதவித்தொகையும் உள்ளன. (பல்கலைக் கழக மானியக்குழு (UGC) மற்றும் அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்பத்துறையின் (DST) இணையத்தளத்தினைப் பார்த்துத் தெளிவு பெறவும்.
- பல்கலைக்கழகக் கல்வி உதவித்தொகை
- தமிழ்நாடு கல்லூரிக் கல்வி உதவித்தொகை.

கணிதப்பாடத்தில் ஆராய்ச்சியினை மேற்கொள்ள இந்தியாவில் உள்ள நிறுவனங்கள்

நிறுவனத்தின் பெயர்	இணையத் தள முகவரி
இந்திய அறிவியல் நிறுவனம், பெங்களூரு	www.iisc.ac.in
சென்னை கணித நிறுவனம், சென்னை	www.cmi.ac.in
டாடா அடிப்படை ஆராய்ச்சி நிறுவனம், மும்பை	www.tifr.res.in
இந்திய விண்வெளி அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப நிறுவனம், திருவனந்தபுரம்	www.iist.ac.in
தேசிய அறிவியல் கல்வி மற்றும் ஆராய்ச்சி நிறுவனம்	www.niser.ac.in
பிர்லா அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப நிறுவனம், பிலானி	www.bits–pilani.ac.in
இந்திய அறிவியல் கல்வி மற்றும் ஆராய்ச்சி நிறுவனம்	www.iiseradmission.in
அண்ணா பல்கலைக்கழகம்	https://www.annauniv.edu/
இந்தியத் தொழில்நுட்ப நிறுவனங்கள்	www.iitm.ac.in
தேசியத் தொழில்நுட்ப நிறுவனங்கள்	www.nitt.edu
மத்தியப் பல்கலைக்கழகங்கள்	www.cucet.ac.in
மாநிலப் பல்கலைக்கழகங்கள்	www.ugc.ac.in
தமிழ்நாடு வேளாண்மைப் பல்கலைக்கழகம்	www.tnau.ac.in
இந்தியத் தகவல் தொழில்நுட்பவியல் நிறுவனம் – அலகாபாத் (சேர்க்கைத் தேர்வு)	www.iiita.ac.in
கணித அறிவியல் நிறுவனம், சென்னை	www.imsc.res.in
ஹைதராபாத் மத்தியப்பல்கலைக்கழகம், ஹைதராபாத்	www.uohyd.ac.in
டெல்லி பல்கலைக்கழகம், டெல்லி	www.du.ac.in
மும்பைப் பல்கலைக்கழகம், மும்பை	www.mu.ac.in
சாவித்திரிபாய் பியூல் பூனே பல்கலைக்கழகம், பூனே	www.unipune.ac.in
இந்தியப் புள்ளியியல் நிறுவனம்	www.iisical.ac.in
மண்டலக் கல்வியியல் நிறுவனம்	www.rieajmer.raj.nic.in

அத்தியாயம் 1

கணங்கள், தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகள்

"பன்மையையும் ஒருமையாகக் காண வைப்பது கணம்"
- கேன்டர்

1.1 அறிமுகம் (Introduction)

கணங்கள், தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகள் மீதான செயல்பாடுகளின் கருத்தாக்கங்கள் கணிதவியலில் முக்கியத்துவமான இடத்தை வகிக்கிறது. ரஷ்யக் கணிதவியலாளர் லூஸின் (Luzin) என்பவர் சார்புகளின் செயல்பாடுகள் பற்றிய கருத்து தற்செயலாக உருவாகிவிடவில்லை என மிகச் சரியாகக் கூறியுள்ளார். அதனைப் பற்றிய கருத்து, காலப்போக்கில் பல மாற்றங்களுக்கு உட்படுத்தப்பட்டுள்ளது. கலிலியோ (Galileo) (1564-1642) என்ற கணிதவியலாளர், பிரபஞ்ச இயக்கங்களின் ஆய்வில் ஒரு கணியம் இன்னொரு கணியத்தினைச் சார்ந்திருப்பதினைத் தெளிவாகப் பயன்படுத்தியுள்ளார். டெகார்டே (Descartes) (1596-1650), இரு மாறிகளில் அமைந்த சமன்பாடுகளை, வடிவியல் வாயிலாக மாறிகளுக்கு இடையேயானத் தொடர்பாகக் குறிப்பிட்டார். லிப்னிட்ஸ் (Leibnitz) (1646–1716) தன்னுடைய 1673 ஆண்டின் ஒரு கையெழுத்து பிரதியில் "சார்பு" என்ற வார்த்தையைப் பயன்படுத்தியுள்ளார். ஒரு வளைவரையின் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் மாறுபடும் மதிப்பைக் குறிக்கும் செயல்பாடாகச் சார்பினைப் பயன்படுத்தியுள்ளார். $y = f(x)$ என்கிற நவீன முறையான வரையறை தந்த பெருமை, காஸின் (Gauss) மாணவரான டிரிச்லெட் (Dirichlet) (1805–1859) என்பவரைச் சாரும். இருபதாம் நூற்றாண்டில், இச்சார்பு கருத்தாக்கங்கள், கணங்கள் மற்றும் எண்சார் அல்லது எண்சார்பற்ற மதிப்புகள் ஆகியவற்றிற்கிடையில் தனித்தன்மை வாய்ந்த பொதுவான ஒத்திசைவிற்கு நீட்டிக்கப்பட்டது.

கேன்டர் (Cantor) (1845–1918) என்பவரால் மேம்படுத்தப்பட்ட கணவியலில் சார்புகள் பற்றிய கருத்து செம்மைப்படுத்தப்பட்டது. இக்காலகட்டத்தில் ஒத்திசைவு பற்றிய கண்ணோட்டத்திலிருந்து தொடர்பு என்ற கண்ணோட்டத்திற்குக் கணிதவியலாளர்கள் மாறத் தொடங்கினர். ஆயினும் சார்பினை, தொடர்பு என்ற கண்ணோட்டத்தில் நோக்காது, கணக்கீட்டு விதியாகவே கருதும் நிலை இன்றும் தொடர்கிறது. தற்கால நவீன வரையறையானது, செயற்கை நுண்ணறிவை உருவாக்கும் நிலைக்கு ஏதுவான வகையில், தொடர்பு வரையறையின் அடிப்படையில் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

மெய்யெண்கள் மற்றும் மெய்யெண்களின் மீதான எண்ணியல் செயல்பாடுகள் பற்றிய கோட்பாடுகளை முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். மேலும் மெய்யெண்களின் கணங்கள், வென்படங்கள், கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கற்பலன்கள், தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகளின் அடிப்படை வரையறைகள் முதலியவற்றைப் பற்றியும் தெரிந்து கொண்டுள்ளோம். எனினும் 'தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகள்' ஆகியவற்றின் கணிதக் கோட்பாடுகளுக்கு ஒரு புதிய பரிணாமத்தினை இங்குக் காணப் போகிறோம். இதனை நன்கு புரிந்து கொள்ள வேண்டுமெனில், கணங்கள் மற்றும் அதன் மீதான செயல்பாடுகளைப் பற்றிய மீள்பார்வை அவசியமாகிறது.

கேன்டர்
1845-1918

கற்றலின் நோக்கங்கள் (Learning objectives)

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- கணங்கள் மற்றும் கார்டீசியன் பெருக்கலின் பண்புகளைப் பட்டியலிடவும் அப்பண்புகளின் வாயிலாக மேற்கொள்ளும் செயல்முறைகள்;
- மாறிகள், மாறிலிகள், இடைவெளிகள் மற்றும் அண்மைப்பகுதிகள் ஆகியவற்றின் கருத்தாக்கங்களை அறிதல்;
- பலவகைத் தொடர்புகளைப் புரிந்து கொள்ளுதல், தேவைப்படும் வகையில் தொடர்புகளை உருவாக்குதல்
- வெவ்வேறு வகைகளில் சார்புகளை விவரித்தல்;
- எளிமையான சார்புகள், சார்புகளின் வகைகள், இருபுறச் சார்பின் நேர்மாறு சார்பு உட்பட அவற்றின் மீதான செயல்பாடுகளை அறிந்திருத்தல்;
- சில சிறப்பு சார்புகளின் வரைபடங்களை அடையாளம் காணுதல்;
- சில கடினமான சார்புகளின் வரைபடங்களைக் காட்சிப்படுத்துதல், ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

1.2 கணங்கள் (Sets)

கடந்த வகுப்புகளில், கணம் என்பது முறையாக வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பாகப் பார்த்தோம். நவீனக் கணிதத்தின் கட்டமைப்பில் ஒன்றாகக் கணங்கள் விளங்குவதால், கணங்களின் கோட்பாட்டைப் பற்றிக் கவனமாகவும் ஆழமாகவும் உள்ளார்ந்து புரிந்து கொள்ள வேண்டும். அதற்கு "முறையாக வரையறுக்கப்பட்டது" என்கிற சொல்லின் உள்ளார்ந்த பொருளினைக் காண்போம்.

கீழ்க்காணும் இரு கூற்றுக்களைக் கவனிக்கவும்:

(i) உதகை ரோஜா தோட்டத்திலுள்ள அழகான மலர்களின் தொகுப்பு.

(ii) தமிழகத்திலுள்ள அனைத்து முதியவர்களின் தொகுப்பு.

இத்தொகுப்புகள் கணங்களாக இருக்க இயலுமா?

"அழகான மலர்கள்" மற்றும் "முதியவர்கள்" என்கிற சொற்கள் முறையாக வரையறுக்கப்படவில்லை. அழகுக்கு அறுதியிட்டு அர்த்தம் கூற இயலாததால், "அழகான மலர்" என்கிற வார்த்தைக்குத் தெளிவான அல்லது முறையான வரையறை இல்லை. அழகு என்பது நபருக்கு நபர், இடத்துக்கு இடம், பொருளுக்குப் பொருள் மாறக் கூடியது. எனவே "உதகை ரோஜா தோட்டத்திலுள்ள அழகான மலர்களின் தொகுப்பு" போன்ற கூற்றுகளை நாம் கணமாகக் கருத இயலாது. இப்போது "உதகை ரோஜா தோட்டத்திலுள்ள சிவப்பு மலர்களின் தொகுப்பு" –ஐ ஒரு கணம் என்று சொல்ல இயலுமா? இதற்கு 'ஆம்' என்பதே நமது பதிலாக அமையும்.

சிலர் அறுபது வயதை முதுமையாகக் கருதுவர். சிலர் அவ்வாறு கருதுவதில்லை. முதுமைக்கான உரிய வயது அளவிற்கு, முறையான வரையறை இல்லை. எனவே இரண்டாவது கூற்றினை,

"தமிழகத்தில் உள்ள 70 வயதைக் கடந்தவர்களின் தொகுப்பு"

என வரையறுக்கும் போது வயது பற்றிய தெளிவான வரையறையுடன், மேற்குறிப்பிட்ட தொகுப்பு ஒரு கணமாக அமையும்.

எனவே, ஒரு கணத்தைப் பற்றிய விவரம், குறிப்பிட்ட பொருள் அந்தக் கணத்தின் உறுப்பாக அமைகிறதா, இல்லையா என்பதை நமக்குத் தெளிவாக்க வேண்டும். எனவே கணமானது, தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு தொகுப்பு ஆகும்.

$\in, \subset, \subseteq, \cup$ மற்றும் $\cap$ போன்ற குறியீடுகளை ஏற்கனவே நாம் பயன்படுத்தியுள்ளோம். அந்தக் குறியீடுகளைச் சரியாகக் குறிப்பிட்ட இடங்களில் பயன்படுத்துவதைப் பற்றிப் புரிந்து கொள்ள, ஒரு கேள்வியுடன் ஆரம்பிக்கலாம்:

"A மற்றும் B என்பன இரு கணங்களாயின், $A \in B$ என எழுதுவது சரியான பொருள் தருமா?"

முதல் பார்வையில், இது எப்போதுமே அர்த்தமற்றது, ஏனெனில், "$\in$ என்ற குறியீட்டை ஒரு உறுப்புக்கும் ஒரு கணத்திற்கும் இடையில் உள்ள தொடர்புக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த வேண்டும் என்றும், அது இரண்டு கணங்களுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்புக்குப் பயன்படுத்தப்படக்கூடாது" என்றும் கூற விழையலாம். இரண்டாவதாகக் கூறியது உண்மை இல்லை என்றாலும், வாக்கியத்தின் முதல் பகுதி உண்மைதான். எடுத்துக்காட்டாக, $A = \{1, 2\}$ மற்றும் $B = \{1, \{1, 2\}, 3, 4\}$ எனும் போது இரு கணங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு, $A \in B$ ஆகும். இப்பகுதியில் நாம் அத்தகைய குறியீடுகளின் செயல்பாடுகளை மேலும் ஆழமாக ஆராய்வோம்.

முந்தைய வகுப்புகளில் நாம் கற்றுக் கொண்டதைப் போன்று, எந்த உறுப்பும் இல்லாத ஒரு கணம் **வெற்று கணம்** அல்லது **வெற்றிடக் கணம்** (empty set) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது பொதுவாக ϕ அல்லது $\{\ \}$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும் $A \subseteq B$ என்ற கூற்றின்படி, A என்னும் ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் B என்னும் கணத்தில் அமைந்திருக்கிறது எனப் பொருள். இப்போது A கணமானது B–யின் **உட்கணம்** (subset) எனவும், B கணமானது A கணத்தின் **மேற்கணம்** அல்லது **மிகைக் கணம்** (super set) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. A மற்றும் B ஆகிய இரு கணங்களுக்கு $A \subseteq B$ மற்றும் $B \subseteq A$ என இருப்பின், இரண்டு கணங்களும் **சம கணங்கள் (equal sets) ஆகும்**. எந்தவொரு A என்கிற கணத்திற்கு வெற்றுக்கணமும் அந்தக் கணமும் எப்போதும் உட்கணங்களாகும். இந்த இரு உட்கணங்களும் **வெள்ளிடை உட்கணங்கள்** (trivial subsets) எனப்படுகின்றன. மேலும் A கணமானது B–ன் உட்கணமாகவும் $A \neq B$ எனவும் இருந்தால் A கணமானது B – இன் **தகு உட்கணம்** (proper subset) எனப்படும். அதாவது B கணத்தில் குறைந்தபட்சம் ஒரு உறுப்பாவது A கணத்தின் உறுப்பாக இருக்காது. A என்னும் ஒரு கணத்தின் உறுப்புகள் அனைத்தும் A என்னும் கணத்திலேயே அமைந்திருப்பதால் $A \subseteq A$ எனலாம். இத்தகைய உட்கணம் **தகா உட்கணம்** (improper subset) எனப்படும். வேறுவிதமாகக் கூறினால், A எனும் எந்த ஒரு வெற்றுக்கணமில்லாத கணமும், A எனும் கணத்தின் தகா உட்கணமே ஆகும். மேலும், $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ஆகும். இதில் $\mathbb{N}$ என்பது இயல் எண்களின் கணம் அல்லது மிகை முழு எண்களின் கணம் எனவும், $\mathbb{W}$ என்பது குறையற்ற முழு எண்களின் கணம் எனவும், $\mathbb{Z}$ என்பது அனைத்து முழு எண்களின் கணம் எனவும், $\mathbb{Q}$ என்பது விகிதமுறு எண்களின் கணம் எனவும் மற்றும் $\mathbb{R}$ என்பது மெய்யெண்களின் கணம் எனவும் குறிப்பிடப்படும். இதில் விகிதமுறா எண்களின் கணம், $\mathbb{R}$–ன் உட்கணமாகவும், மேற்குறிப்பிட்ட வேறு எந்த ஒரு கணத்திற்கும் உட்கணமாக அமையவில்லை என்பதையும் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

A, B என்ற இரு கணங்களின் **சேர்ப்புக் கணம்**,

$A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B\}$ மற்றும் அதன் **வெட்டுக்கணம்**

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ மற்றும் } x \in B\}$$

என்ற வரையறைகளையும் ஏற்கனவே பார்த்துள்ளோம். A மற்றும் B ஆகிய இரு கணங்களுக்குப் பொதுவான உறுப்பு ஏதுமின்றி அமைந்தால் அவை **வெட்டாக் கணங்கள்** (disjoint sets) ஆகும். அதாவது A மற்றும் B ஆகியவை வெட்டாக் கணங்கள் எனில் $A \cap B = \phi$ ஆகும்.

மேலும் சில குறியீடு முறைகளைக் காண்போம். $\sum_{i=1}^{n} a_i$ போன்ற குறியீடு முறைகளை நாம் ஏற்கனவே அறிந்துள்ளோம். இது $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ என்பதன் சுருக்கமே. இதே போன்று $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ மற்றும் $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ஆகியவை முறையே $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ மற்றும் $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன.

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i,$ ஏதோ ஒரு i -க்கு$\}$ என்றும் $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i,$ ஒவ்வொரு i -க்கு$\}$ என்றும் கூறலாம். அதிக எண்ணிக்கையிலானக் கணங்களின் பயன்பாட்டின்போது இக்குறியீடுகள் தேவைப்படுகிறது.

A என்பது ஒரு கணம் எனில், A -ன் அனைத்து உட்கணங்களையும் உள்ளடக்கிய கணம் **அடுக்குக் கணம்** (power set) எனப்படும். இதனை $\mathcal{P}(A)$ எனக் குறிக்கலாம். அதாவது, $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$. A என்ற கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n எனில் $\mathcal{P}(A)$ -ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 2^n ஆகும்.

நிரப்பிக் கணத்தினைப் பற்றி தெரிந்து கொள்ள அனைத்துக்கணத்தைப் பற்றி முழுமையாகத் தெரிந்து கொள்வது அவசியமாகிறது. பொதுவாகக் கணித செயல்பாட்டில் கருத்தில் கொள்ளப்படும் எல்லாக் கணங்களும் உட்கணங்களாக அமையுமாறு ஒரு நிலையான கணம் அமையும். இந்தக் குறிப்பிட்ட கணமே **அனைத்துக்கணம்** (universal set) ஆகும். உதாரணமாக, சூழ்நிலைகளுக்கு ஏற்ப பகா எண்களுக்கு, பகா எண்களை உள்ளடக்கிய ஒரு கணம் அனைத்துக்கணமாக செயல்படும். எனவே $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ஆகிய இவற்றில் ஒன்று பகா எண்களின் கணத்திற்கு அனைத்துக்கணமாக, செயல்படும் இடத்தைப் பொறுத்து அமையும். அனைத்துக் கணத்தினைப் பொதுவாக U எனக் குறிப்பிடுவோம்.

U எனும் அனைத்துக்கணத்தின் உட்கணமான A எனும் ஒரு கணத்திற்கு, **நிரப்பிக்கணம்** A' அல்லது A^c எனக் குறிப்பிடப்பட்டு, $A' = \{x : x \in U$ மற்றும் $x \notin A\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

கணம் B -ல், கணம் A–ன் **கண வேறுபாடு** (set difference) என்பதை $A - B$ அல்லது $A \setminus B$ எனக் குறிப்பிட்டு,

$A - B = \{a : a \in A$ மற்றும் $a \notin B\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும்,

(i) $U - A = A'$ (ii) $A - A = \phi$ (iii) $\phi - A = \phi$ (iv) $A - \phi = A$ (v) $A - U = \phi$.

A மற்றும் B ஆகிய கணங்களின் **சமச்சீர் வேறுபாடு** (symmetric difference) என்பதனை, $A \Delta B$ எனக் குறிப்பிட்டு, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ என வரையறுக்கப் படுகிறது.

உண்மையில், $A \Delta B$ –ல் உள்ள உறுப்புகள், $A \cap B$ –ல் இல்லாமல் $A \cup B$ -ல் மட்டுமே இருக்கும் உறுப்புகளாகும். அதாவது $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ஆகும்.

X என்ற கணமானது **முடிவுறு** (finite set) அல்லது **முடிவுள்ள கணம்** ஆக இருக்க வேண்டுமாயின் கணத்தில் k உறுப்புகள், $k \in \mathbb{N}$ என இருத்தல் வேண்டும். இப்போது இம்முடிவுறு கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை செவ்வெண்மை என்றும் ஆதி எண் (cardinality) என்றும் அழைக்கலாம். இதனை k எனவும், குறியீட்டால் $n(X)$ எனவும் குறிப்பிடுவோம். A என்ற கணம் முடிவுறு கணம் இல்லையெனில் அதனை **முடிவுறாக் கணம்** அல்லது **முடிவிலாக் கணம்** (infinite set) எனவும் குறிப்பிடுவோம். மேலும் $n(A) = 1$ எனில் அதனை **ஒருறுப்பு கணம்** (singleton set) எனக் கூறலாம். குறிப்பாக $n(\phi) = 0$ மற்றும் $n(\{\phi\}) = 1$ என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

1.2.1 கணச் செயல்பாடுகளின் பண்புகள் (Properties of Set Operations)

நாம் ஏற்கனவே அறிந்திருந்த பண்புகளையும் மேலும் தெரிந்திருக்க வேண்டிய சில புதிய பண்புகளையும் முடிவுகளாகக் காண்போம்.

பரிமாற்றுப் பண்புகள் (Commutative)

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$

சேர்ப்புப் பண்புகள் (Associative)

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

பங்கீட்டு பண்புகள் (Distributive)

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

சமனிப் பண்புகள் (Identity)

(i) $A \cup \phi = A$ (ii) $A \cap U = A$

தன்னடுக்குப் பண்புகள் (Idempotent)

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$

உட்கவர் பண்புகள் (Absorption)

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$

டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan Laws)

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(iii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (iv) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

சமச்சீர் வேறுபாட்டு பண்புகள் (Symmetric difference)

(i) $A \Delta B = B \Delta A$ (ii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

(iii) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

வெற்று கணத்திற்கும் அனைத்துக் கணத்திற்குமான பண்புகள் (Empty and universal sets)

(i) $\phi' = U$ (ii) $U' = \phi$

(iii) $A \cup A' = U$ (iv) $A \cap A' = \phi$

(v) $A \cup U = U$ (vi) $A \cap U = A$

செவ்வெண்மைக் குணங்கள் (Cardinality)

(i) A மற்றும் B எனும் எந்த இரு முடிவுறு கணங்களுக்கும்,
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

(ii) A மற்றும் B ஆகியவை வெட்டாக் கணங்களெனில், $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

(iii) A, B மற்றும் C எனும் எந்த மூன்று கணங்களுக்கும்,

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

1.3 கார்டீசியன் பெருக்கல் (Cartesian product)

கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் என்பது வரிசைபடுத்தப்பட்ட உறுப்புகளின் கணமே ஆகும். குறிப்பாக இரு கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடிகளின் கணமாகவும், மூன்று கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மூன்றன் தொகுதி கணமாகவும் அமைகின்றது.

துல்லியமாகக் கூற வேண்டுமாயின், A, B மற்றும் C ஆகிய மூன்று கணங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். A மற்றும் B ஆகிய கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல் (cartesian product), $A\times B$ எனக் குறிக்கப்பட்டு, $A\times B=\{(a,b):a\in A, b\in B\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதே போன்று, A, B மற்றும் C ஆகிய மூன்று கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல்,

$A\times B\times C=\{(a,b,c):a\in A, b\in B, c\in C\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எளிதாக, $A\times A=\{(a,b):a,b\in A\}$ எனலாம்.

$A\times A=\{(a,a):a\in A\}$ என எழுதுவது சரியாக அமையுமா?

கார்டீசியன் பெருக்கலில் உள்ள உறுப்புகள் வரிசைப்படுத்தப்பட்டது என்பதால், வெற்றற்ற கணங்கள் $A=B$ என இருந்தாலன்றி, $A\times B\neq B\times A$ ஆகும். அதாவது தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $A=B$ எனில் $A\times B=B\times A$.

$\mathbb{R}$ என்பது மெய்யெண்களின் கணத்தைக் குறிப்பதால்,

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y,z):x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

குறிப்பாக, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ என்பதனை $\mathbb{R}^2$ எனவும் $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ என்பதனை $\mathbb{R}^3$ எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ என்பது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடிகளின் கணமாகவும், $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ என்பது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மூன்றன் தொகுதி கணமாகவும் உள்ளது.

இப்போது, $A=\{1,2,3\}$ மற்றும் $B=\{2,4,6\}$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$A\times B=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6)\}$. இங்கு $A\times B$ என்பது $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ –ன் உட்கணமாக அமைவதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

$A\times B$ -ல் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை A மற்றும் B கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையின் பெருக்கல் தொகையாகும். அதாவது, $n(A\times B)=n(A)n(B)$ ஆகும். மேலும், $n(A\times B\times C)=n(A)n(B)n(C)$. இங்கு A, B மற்றும் C ஆகியவை முடிவுறு கணங்கள் ஆகும்.

கீழ்க்காணும் கணங்கள் $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ –ன் உட்கணங்கள் என்பது தெளிவாக தெரிகிறது.

(i) $\{(x,2x):x\in\mathbb{R}\}$ (ii) $\{(x,x^2):x\in\mathbb{R}\}$

(iii) $\{(x,\sqrt{x}):x$ ஒரு குறையற்ற மெய்யெண்$\}$ (iv) $\{(x^2,x):x\in\mathbb{R}\}$.

(v) $\{(x,-\sqrt{x}):x$ ஒரு குறையற்ற மெய்யெண்$\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.1 கணம் A ஆனது $A=\{x:x=4n+1, 2\le n\le 5, n\in\mathbb{N}\}$ எனில், A–ன் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு:

$$A=\{x:x=4n+1, n=2,3,4,5\}=\{9,13,17,21\}$$

எனவே $n(A)=4$. $n(\mathcal{P}(A))=2^4=16$

எடுத்துக்காட்டு 1.2 மக்கள்தொகை 5000 உள்ள ஒரு நகரத்தில் நடத்தப்பட்ட ஒரு கணக்கெடுப்பில், மொழி A தெரிந்தவர்கள் 45% , மொழி B தெரிந்தவர்கள் 25% , மொழி C தெரிந்தவர்கள் 10% , A மற்றும் B மொழிகள் தெரிந்தவர்கள் 5% , B மற்றும் C மொழிகள் தெரிந்தவர்கள் 4%, A மற்றும் C மொழிகள் தெரிந்தவர்கள் 4% ஆகும். இதில் மூன்று மொழிகளையும் தெரிந்தவர்கள் 3% எனில், மொழி A மட்டும் தெரிந்தவர்கள் எத்தனை பேர்?

தீர்வு:

செவ்வெண்மை மற்றும் வென்படம் என இரு வழிகளில் தீர்வு காணலாம்.

(i) **செவ்வெண்மை மூலம் தீர்வு காணல்**

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து $n(A)=5000$ -ல் $45\%=2250$.

இதே போன்று,

$$n(B)=1250, n(C)=500, n(A\cap B)=250, n(B\cap C)=200, n(C\cap A)=200$$

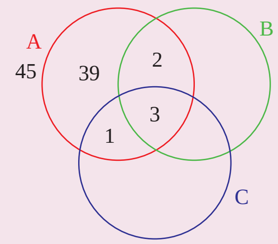
மற்றும் $n(A\cap B\cap C)=150$.

மொழி A மட்டுமே தெரிந்தவர்கள்

$$\begin{aligned} n(A\cap B'\cap C') &= n\{A\cap(B\cup C)'\}=n(A)-n\{A\cap(B\cup C)\}\\ &= n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C).\\ &= 2250-250-200+150=1950. \end{aligned}$$

A மொழி மட்டும் தெரிந்தவர்களின் எண்ணிக்கை 1950.

(ii) **வென்படம் மூலம் தீர்வு காணல்:**



படம் 1.1

படம் 1.1 –லிருந்து, மொழி A மட்டுமே தெரிந்தவர்கள் 39 சதவீதம் ஆகும்.

எனவே மொழி A மட்டுமே தெரிந்தவர்கள் $5000\times\dfrac{39}{100}=1950$.

எடுத்துக்காட்டு 1.3 $((A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C'))\cup((A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C'))=B'\cap C'$ என நிரூபிக்க.

XI_Maths_Ch1_V-1_TM.indd 7 15-12-2021 13:48:40

தீர்வு:

$A\cap B'\cap C'\subseteq A\subseteq A\cup B'\cup C$ என்பது தெளிவு.

எனவே $(A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C')=A\cap B'\cap C'$.

மேலும் $B'\cap C'\subseteq C'\subseteq A\cup B\cup C'$.

எனவே $(A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C')=B'\cap C'$ மேலும், $A\cap B'\cap C'\subseteq B'\cap C'$.

எனவே $((A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C'))\cup((A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C'))=B'\cap C'$

குறிப்பு: வென்படங்கள் மூலம் நிரூபிக்க முயற்சி செய்யவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.4 $X=\{1,2,3,\ldots,10\}$ மற்றும் $A=\{1,2,3,4,5\}$ எனில், $A-B=\{4\}$ என்று உள்ளவாறு அமையக்கூடிய X -ல் உள்ள B உட்கணங்கள், அதாவது $B\subseteq X$ எத்தனை உள்ளது?

தீர்வு:

$\{6,7,8,9,10\}$ எனும் கணத்தின் ஒவ்வொரு உட்கணமாகிய C கணத்திற்கு, $B=C\cup\{1,2,3,5\}$ என எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $A-B=\{4\}$ என்கிற நிபந்தனை பொருந்தும். இதனால் X ல் உள்ள B உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையும், $\{6,7,8,9,10\}$ என்கிற கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையும் சமம். எனவே, B உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $2^5=32$.

எடுத்துக்காட்டு 1.5 A மற்றும் B எனும் இரு கணங்கள், $n(B-A)=2\,n(A-B)=4\,n(A\cap B)$ மற்றும் $n(A\cup B)=14$ என அமைந்தால், $n(\mathcal{P}(A))$ காண்க.

தீர்வு:

$n(\mathcal{P}(A))$ -ஐக் காண $n(A)$ தேவைப்படும்.

$n(A\cap B)=k$ என்க.

எனவே, $n(A-B)=2k$ மற்றும் $n(B-A)=4k$ ஆகும் .

இந்நிலையில், $n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)=7k$.

மேலும், $n(A\cup B)=14$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இதனால் $7k=14,\ k=2$ ஆகும்.

ஆகையால், $n(A-B)=4$ மற்றும் $n(B-A)=8$.

$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)$ என்பதால் $n(A)=6$.

எனவே, $n(\mathcal{P}(A))=2^6=64$.

எடுத்துக்காட்டு 1.6 இரு கணங்களின் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை m மற்றும் k ஆகும். முதல் கணத்திலுள்ள உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை இரண்டாவது கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையை விட 112 அதிகமெனில், m மற்றும் k மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$n(A)=m$ மற்றும் $n(B)=k$ என்று அமையுமாறு இரு கணங்கள் A மற்றும் B என்க. B கணத்தை விட A கணத்தின் எண்ணிக்கை அதிகமெனில், $m>k$. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி $2^m-2^k=112$.

ஆகையால், $2^k(2^{m-k}-1)=2^4\times 7$.

இந்நிலையில் ஒரே சாத்தியக்கூறு $k=4$ மற்றும் $2^{m-k}-1=7$ ஆகும்.

இதனால் $m-k=3$. எனவே $m=7$.

எடுத்துக்காட்டு 1.7 $n(A)=10$ மற்றும் $n(A\cap B)=3$ எனில், $n((A\cap B)'\cap A)$ -ஐ காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}(A\cap B)'\cap A &= (A'\cup B')\cap A=(A'\cap A)\cup(B'\cap A)=\phi\cup(B'\cap A)\\ &= (B'\cap A)=A-B.\end{aligned}$$

எனவே. $n((A\cap B)'\cap A) = n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=7$.

எடுத்துக்காட்டு 1.8 $A=\{1,2,3,4\}$ மற்றும் $B=\{3,4,5,6\}$ எனில், $n((A\cup B)\times(A\cap B)\times(A\Delta B))$ -ஐ காண்க.

தீர்வு:

$n(A\cup B)=6, n(A\cap B)=2$ மற்றும் $n(A\Delta B)=4$.

எனவே, $n((A\cup B)\times(A\cap B)\times(A\Delta B)) = n(A\cup B)\times n(A\cap B)\times n(A\Delta B)$

$=6\times 2\times 4=48$.

எடுத்துக்காட்டு 1.9 $\mathcal{P}(A)$ என்பது A என்ற கணத்தின் அடுக்குக் கணத்தினைக் குறித்தால், $n(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))))$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$\mathcal{P}(\phi)$ கணத்தில் ஒரு உறுப்பு உள்ளதால் $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))$ கணத்தில் 2^1 உறுப்புகளும், $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))$ கணத்தில் 2^2 உறுப்புகளும் இருக்கும். அதாவது 4 உறுப்புகள் இருக்கும்.

பயிற்சி 1.1

1. கீழ்க்காண்பவைகளை பட்டியல் முறையில் எழுதுக.
   (i) $\{x\in\mathbb{N}: x^2<121$ மற்றும் x ஒரு பகா எண்ணாகும்$\}$.
   (ii) $(x-1)(x+1)(x^2-1)=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மிகை மூலங்களின் கணம்.
   (iii) $\{x\in\mathbb{N}: 4x+9<52\}$.
   (iv) $\{x: \frac{x-4}{x+2}=3, x\in\mathbb{R}-\{-2\}\}$.
2. $\{-1, 1\}$ எனும் கணத்தைக் கணக் கட்டமைப்பு முறையில் எழுதுக.
3. கீழ்க்காண்பவனற்றுள் எவை முடிவுள்ள கணம், முடிவில்லாத கணம் என்பதனைக் குறிப்பிடுக.
   (i) $\{x\in\mathbb{N}: x$ என்பது ஒரு இரட்டைப்படை பகா எண்$\}$.
   (ii) $\{x\in\mathbb{N}: x$ என்பது ஒரு ஒற்றைப்படை பகா எண்$\}$.

(iii) $\{x \in \mathbb{Z} : x$ என்பது பத்தை விடக் குறைந்த இரட்டைப்படை எண்$\}$.

(iv) $\{x \in \mathbb{R} : x$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்$\}$.

(v) $\{x \in \mathbb{N} : x$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்$\}$.

4. பின்வருவனவற்றை, தகுந்த A, B, C கணங்களைக் கொண்டு சரிபார்க்கவும்.

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iii) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$.

(iv) $C - (B - A) = (C \cap A) \cup (C \cap B')$.

(v) $(B - A) \cap C = (B \cap C) - A = B \cap (C - A)$.

(vi) $(B - A) \cup C = (B \cup C) - (A - C)$.

5. "ஒரு கணத்திலுள்ள ஓர் உறுப்பு எப்பொழுதும் தன் கணத்திற்கே உட்கணமாக அமையாது" என்ற கூற்றின் உண்மைத்தன்மையை ஆராய்க.

6. $n(\mathcal{P}(A)) = 1024, n(A \cup B) = 15$ மற்றும் $n(\mathcal{P}(B)) = 32$ எனில், $n(A \cap B)$ காண்க.

7. $n(A \cap B) = 3$ மற்றும் $n(A \cup B) = 10$ எனில், $n(\mathcal{P}(A \Delta B))$ காண்க.

8. $A \times A$ என்ற கணத்தில் 16 உறுப்புகள் உள்ளன. மேலும் அதிலுள்ள இரு உறுப்புகள் $(1, 3)$ மற்றும் $(0, 2)$ எனில், A –ன் உறுப்புகளைக் காண்க.

9. $n(A) = 3$ மற்றும் $n(B) = 2$ எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு அமைந்துள்ள இரு கணங்கள் A, B ஆகும். $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ என்பவை $A \times B$ எனும் கணத்திலுள்ள சில உறுப்புகள் எனில், A, B கணங்களைக் காண்க. (இங்கு x, y, z முற்றிலும் வேறுபட்ட உறுப்புகள்)

10. $A \times A$ கணத்தில் 16 உறுப்புகள் உள்ளன. $S = \{(a, b) \in A \times A : a < b\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள இரு உறுப்புகள் $(-1, 2)$ மற்றும் $(0, 1)$ எனில் S இல் உள்ள மீதமுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

1.4 மாறிலிகள், மாறிகள், இடைவெளிகள் மற்றும் அண்மைப்பகுதிகள் (Constants, Variables, Intervals and Neighbourhoods)

இப்பகுதியினை மேலும் தொடர, அடிப்படைத்தேவைகளாக மாறிலிகள், மாறிகள், சாரா மாறிகள், சார்ந்த மாறிகள், இடைவெளிகள் மற்றும் அண்மைப் பகுதிகள் பற்றிய வரையறைகள் அவசியமாகிறது.

1.4.1 மாறிலிகள் மற்றும் மாறிகள் (Constants and variables)

ஒரு குறிப்பிட்ட கணிதச் செயல்முறை முழுவதும் மாறாமல் இருக்கும் அளவை அல்லது கணியம், ஒரு **மாறிலி (constant)** என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு கணிதச் செயல்முறையின்போது மாறுபடும் ஒரு அளவை, **மாறி (variable)** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஏதேனும் ஒரு மாறியின் மதிப்பு பிற மாறிகளின் மதிப்புகளைச் சார்ந்து இல்லாத போது அதனை ஒரு **சாரா மாறி (independent variable)** எனக் கூறுகிறோம். அதேசமயம் அதன் மதிப்பு, பிற மாறிகள் மதிப்புகளைச் சார்ந்து இருப்பின், அது **சார்ந்த மாறி (dependent variable)** என அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு $A=\frac{1}{2}bh$ என நமக்குத் தெரியும். இங்கு $\frac{1}{2}$ என்பது ஒரு மாறிலி மற்றும் A, b, h ஆகியவை மாறிகளாகும். குறிப்பாக b, h ஆகியவை சாரா மாறிகளாகவும், A ஒரு சார்ந்த மாறியாகவும் அமைந்துள்ளது. சாரா மற்றும் சார்ந்த மாறிகள் அவை அமைந்துள்ள இடத்தைப் பொறுத்து அமைகிறது என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். உதாரணமாக, $x+y=1$ என்ற தொடர்பில், x மற்றும் y மாறிகளாகவும் 1 ஒரு மாறிலியாகவும் உள்ளது. x, y ஆகியவற்றில் எது சாரா மாறி ? எது சார்ந்த மாறி ? இங்கு x சாரா மாறியாக எடுத்துக் கொண்டால் y சார்ந்த மாறியாகவும், y சாரா மாறியாக எடுத்துக் கொண்டால் x சார்ந்த மாறியாகவும் அமையும். மேலும் கீழ்க்காணும் உதாரணங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(i) செவ்வகத்தின் பரப்பளவு ; $A = lb$

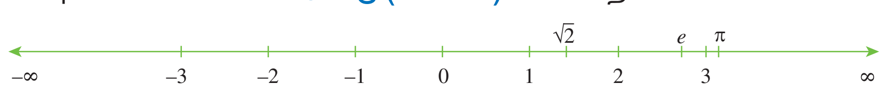
(ii) வட்டத்தின் பரப்பளவு ; $A = \pi r^2$

(iii) கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவு; $V = lbh$

மேற்கண்ட உதாரணங்களில், b, h, l, r முதலியன சாரா மாறிகள், A மற்றும் V சார்ந்த மாறிகள் எனவும், π ஒரு மாறிலி எனவும் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

1.4.2 இடைவெளிகள் மற்றும் அண்மைப்பகுதிகள் (Intervals and Neighbourhoods)

மெய்யெண்களின் கணம் $\mathbb{R}$ -ஐ படம் 1.2–ல் உள்ளபடி ஒரு கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளாகவும், கோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் தனித்த ஒரு மெய்யெண்ணாகவும் கருத இயலும். எனவே ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும், கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகிறது. இதனால் இக்கோட்டினை **மெய்யெண் கோடு (real line)** என்கிறோம்.



படம் 1.2

வலப்பக்கம் மதிப்பு உயர்ந்தும் இடப்பக்கம் மதிப்பு குறைந்தும் அமைவதைக் காணலாம். x ஆனது y -ன் இடப்பக்கமாக அமைந்தால், $x<y$ எனப் பெறும். மேலும், இக்கோட்டில் தொடர்ச்சியற்றத் தன்மை இல்லாததால், எந்த இரண்டு மெய்யெண்களுக்கு இடையேயும் எண்ணிலடங்கா மெய்யெண்கள் அமையும்.

வரையறை 1.1

$\mathbb{R}$ -ன் ஒரு உட்கணமான I ஆனது ஒரு **இடைவெளியாக (interval)** இருக்கவேண்டுமெனில்

(i) I -ல் குறைந்தது இரு உறுப்புகள் இருக்க வேண்டும். மேலும்

(ii) $a,b\in I$ மற்றும் $a<c<b$ எனில், $c\in I$ என இருத்தல் வேண்டும்.

வடிவியல் ரீதியாக, இடைவெளிகள் மெய்யெண்கோட்டிலுள்ள கதிர்களையும் கோட்டுத் துண்டுகளையும் குறிக்கிறது.

இயல் எண்களின் கணம், குறையற்ற முழு எண்களின் கணம், ஒற்றைப்படை எண்களின் கணம், இரட்டைப்படை எண்களின் கணம் போன்றவை இடைவெளிகளாகாது. ஏனெனில் எந்த இரு மெய்யெண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற மெய்யெண்கள் இருப்பதனால் மேற்கண்ட உதாரணங்கள் இடைவெளிகள் ஆகாது.

கீழ்க்காணும் உதாரணங்களைக் கவனிக்கவும்.

(i) பூஜ்ஜியத்தை விடப் பெரிதான மெய்யெண்களின் கணம்.

(ii) 5 -க்கு மேற்பட்டும், 7 –ஐ விடக் குறைவாகவும் உள்ள மெய்யெண்களின் கணம்

(iii) $1 \leq x \leq 3$ எனும் நிபந்தனைக்குட்பட்ட x -மெய்யெண்களின் கணம்.

(iv) $1 < x \leq 2$ எனும் வரம்பிற்குட்பட்ட x -மெய்யெண்களின் கணம்.

மேற்கண்ட நான்கு கணங்களும் இடைவெளிகளைக் குறிக்கின்றன. குறிப்பாக உதாரணம், (i) ஒரு முடிவுறா அல்லது முடிவிலா இடைவெளி ஆகும். (ii), (iii) மற்றும் (iv) ஆகியவை முடிவுறு அல்லது முடிவுள்ள இடைவெளிகளாகும். "முடிவுள்ள இடைவெளி" என்றால் அவ்விடைவெளியில் எண்ணிலடங்கிய மெய்யெண்கள் மட்டும் இருக்கும் என்கிற பொருளன்று. இரு முனைகளும் முடிவுள்ள எண்ணாக இருப்பதனை மட்டுமே குறிக்கிறது. எனவே, முடிவுள்ள மற்றும் முடிவிலா இடைவெளிகள் இரண்டும், முடிவற்ற கணங்களையே குறிப்பிடுகிறது. கோட்டுத்துண்டைக் குறிக்கும் இடைவெளிகள் முடிவுள்ள இடைவெளி எனவும், கதிர்களைக் குறிக்கும் இடைவெளிகளும் மெய்யெண் கோடும் முடிவிலா இடைவெளிகளாகும்.

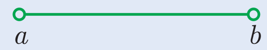
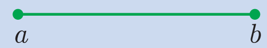
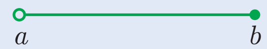
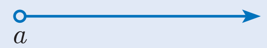
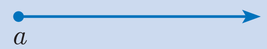
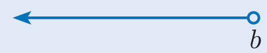
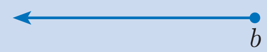
ஒரு முடிவுள்ள இடைவெளியை, **மூடிய இடைவெளி (closed interval)** என்று கூற வேண்டுமாயின் இரு முனைப் புள்ளிகளும் இடைவெளியில் அமைய வேண்டும். **திறந்த இடைவெளி (open interval)** என்று கூற வேண்டுமாயின், இரு முனைப் புள்ளிகளும் இடைவெளியில் அமைதல் கூடாது. மூடிய இடைவெளிக்கு '[ ]' சதுர அடைப்புக்குறியினையும், திறந்த இடைவெளிக்கு சாதாரண '( )' அடைப்புக் குறியினையும் பயன்படுத்துவதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். முதல் இரு உதாரணங்கள் (i) மற்றும் (ii) ஆகியவை திறந்த இடைவெளிகளாகும். மூன்றாவது உதாரணம் மூடிய இடைவெளியாகும். நான்காவது உதாரணம் மூடிய இடைவெளியுமல்ல, திறந்த இடைவெளியுமல்ல. மேற்கண்ட நான்கு உதாரணங்களைக், குறியீடுகளாக $(0,\infty),(5,7),[1,3],(1,2]$ என எழுதலாம்.

குறிப்பாக, $[1,\ 3]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் 1 மற்றும் 3 , மேலும் அதனிடையே உள்ள அனைத்து மெய்யெண்களும் உள்ளன. $(1,\ 3)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் 1 மற்றும் 3 ஆகிய மெய்யெண்கள் இல்லை. ஆனால், அதற்கிடையேயான அனைத்து மெய்யெண்களும் உள்ளன. $(1,\ 2]$ என்ற இடைவெளி மூடியதும் அல்ல; திறந்ததும் அல்ல. குறிப்பாக, 1 என்ற மெய்யெண் இடைவெளியில் இல்லை. ஆனால் 2 என்ற மெய்யெண் உள்ளது. மேலும் அவற்றிற்கு இடையேயான அனைத்து மெய்யெண்களும் உள்ளன.

முடிவிலி குறியீடான ∞ என்பது ஒரு எண் அன்று. குறியீடுகளான $-\infty$ மற்றும் ∞ என்பன மெய்யெண் கோட்டின் முனைகளைக் குறிக்கப் பயன்படுகின்றன. மேலும் $(a,b),[a,b]$ ஆகிய இடைவெளிகள் எப்போதும் $\mathbb{R}$–ன் உட்கணங்களாகும்.

இடைவெளிகளின் வகைகள் (Types of intervals)

இடைவெளிகளில் பல வகை உள்ளன. $a < b$ ஆக இருக்குமாறு $a,b \in \mathbb{R}$ என எடுத்துக் கொள்வோம். கீழ்க்காணும் அட்டவணை வெவ்வேறு வகை இடைவெளிகளை உணர்த்துகிறது. ஒரு புள்ளியை நீக்கி விட்டு ஒரு கோட்டினை வரைய இயலாது. திறந்த வட்டமான "o" குறியீடு, அப்புள்ளி நீக்கப்பட்டுள்ளதாகவும், நிரம்பிய வட்ட குறியீடான '●' ஆனது அப்புள்ளி உள்ளடங்கியது எனவும் பொருள்படும்.

இடைவெளி	குறியிடல் முறை	கணம்	வரைபடம்
முடிவுள்ள இடைவெளி	(a,b)	$\{x : a < x < b\}$	
	$[a,b]$	$\{x : a \le x \le b\}$	
	$(a, b]$	$\{x : a < x \le b\}$	
	$[a, b)$	$\{x : a \le x < b\}$	
முடிவற்ற இடைவெளி	(a, ∞)	$\{x : a < x < \infty\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x : a \le x < \infty\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x : -\infty < x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x : -\infty < x \le b\}$	
	$(-\infty, \infty)$ அல்லது $\mathbb{R}$	$\{x : -\infty < x < \infty\}$ அல்லது மெய்யெண்களின் கணம்	

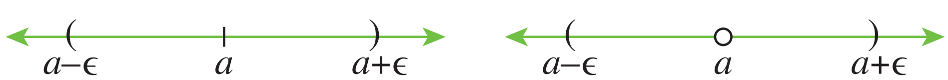
குறியீட்டு வடிவில் எழுதவும்.

(i) $\{x : x \in \mathbb{R}, -2 \le x \le 0\}$ (ii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 8\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbb{R}, -8 < x \le -2\}$ (iv) $\{x : x \in \mathbb{R}, -5 \le x \le 9\}$

அண்மைப் பகுதி (Neighbourhood)

'a' எனும் புள்ளியினை உள்ளடக்கிய எந்தவொரு திறந்த இடைவெளியும் a எனும் புள்ளியின் அண்மைப்பகுதியாகும். 'ϵ' என்பது ஒரு மிகை எண், குறிப்பாக மிகச்சிறியது எனில் a யின் ϵ -அண்மைப் பகுதி என்பது $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ என்ற இடைவெளியாகும். $(a-\epsilon, a+\epsilon)-\{a\}$ என்பது a -ஐ நீக்கிய அண்மைப்பகுதி எனவும் அதனை $0 < |x-a| < \epsilon$ எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது. [படம் 1.3]



[படம் 1.3]

1.5 தொடர்புகள் (Relations)

தொடர்புகளைப் பற்றிய கோட்பாட்டினை, அன்றாட வாழ்க்கையிலிருந்தும், சங்கேத மொழியியலிலிருந்தும், வடிவியலிலிருந்தும், கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கலின் மூலமாகப் பல்வேறு கோணங்களில் அணுகுவோம்.

"அவர் உனக்கு எவ்விதத்தில் உறவினர் அல்லது தொடர்புடையவர்?" என்கிற வினாவைப் பெரும்பாலும் நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் எதிர்கொள்கிறோம். இவ்வினாவிற்கு,

(i) அவர் என் தந்தை.

(ii) அவர் என் ஆசிரியர்.

(iii) அவர் எனக்கு எவ்விதத்திலும் தொடர்பில்லாதவர்.

போன்ற சில சாத்தியமான விடைகள் உள்ளன. இதிலிருந்து தொடர்பு என்கிற சொல்லானது ஒருவரை மற்றொருவருடன் இணைக்கிறது என நாம் அறிகிறோம். இச்சிந்தனையை மேலும் விரிவாக்கி, கணிதத்தில் கணிதவுருக்களை இணைக்கத் தொடர்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்:

(i) $\mathbb{N}$ ல் m எனும் ஒரு எண்ணானது n எனும் எண்ணை வகுத்தால் m ஆனது n உடன் தொடர்புடையது.

(ii) மெய்யெண்களில் $x \le y$ எனில் x ஆனது y–யுடன் தொடர்புடையது.

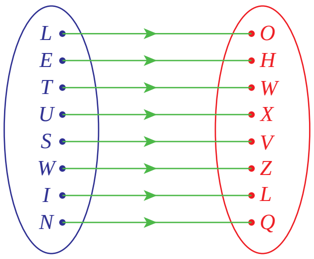
(iii) p எனும் புள்ளி L என்ற கோட்டில் அமைந்தால் p ஆனது L உடன் தொடர்புடையது.

(iv) X எனும் மாணவர் S எனும் பள்ளியுடன் தொடர்புடையவராக இருக்க வேண்டுமெனில் X என்பவர் S–ல் மாணவராக இருக்க வேண்டும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.1 சங்கேத மொழி (Cryptography) : மக்கள் ரகசியத் தன்மை வாய்ந்த தகவல்களைப் பாதுகாக்கச் சங்கேத மொழியை நூற்றாண்டு காலமாக பயன்படுத்தி வருகின்றனர். சங்கேதமொழியைத் திறம்பட இராணுவத்திலும், நிதி நிறுவனங்களிலும், கணினி நிரலர்களும் பயன்படுத்துகின்றனர். சங்கேத மொழியாக்கமும் அச்சங்கேத மொழியை மொழி மாற்றவும் பயன்படுத்தும் முறைகளைப் பற்றிய இயலே சங்கேதமொழியியல் என அழைக்கப்படுகின்றது.

ஒரு செய்தியைச் சங்கேத மொழியாக மாற்ற, பண்டைய காலத்தில் எளிய பிரதியிடல் முறை பயன்படுத்தப்பட்டது. உதாரணமாக, செய்தியிலுள்ள ஒவ்வொரு எழுத்திற்கும் மாற்றாக அகர வரிசையில் அவ்வெழுத்திலிருந்து மூன்றாவதாக வரும் எழுத்தாகப் பிரதியிடப்பட்டது.

இம்முறையை, “LET US WIN” என்ற வாக்கியத்திற்கு பயன்படுத்தினால் “OHW XV ZLQ” என மாறும். இம்முறையை, பேரரசர் ஜூலியஸ் சீசர் பயன்படுத்தியதால் சீசரின் சங்கேதம் என அழைக்கப்படுகிறது. இச்சங்கேத மொழியை மொழி மாற்றம் செய்ய ஒவ்வொரு எழுத்தையும் அதற்கு மூன்று எழுத்துக்களுக்கு முந்தைய எழுத்தாக மாற்றீடு செய்யவேண்டும். இத்தகு முறை, தற்போது திறனறி தேர்வுகளில் வெகுவாகக் கையாளப்படுகிறது. இதனை அம்புக்குறி படம் மூலமும் (படம் 1.4) குறிப்பிடலாம்.



படம் 1.4

இப்போது, $C = \{L, E, T, U, S, W, I, N\}$ மற்றும் $D = \{O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ என எடுத்துக் கொண்டால் $C \times D$ என்ற கார்டீசியன் பெருக்கலின் உட்கணமாக,

$\{(L,O), (E,H), (T,W), (U,X), (S,V), (W,Z), (I,L), (N,Q)\}$ எனும் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடிகளின் கணம் அமைகிறது.

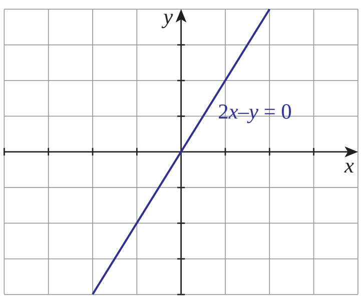
அறிந்துகொள்வோம்

"KDUGZRUN" என்பது "HARDWORK" இன் சங்கேத மொழி எனில் "DFKLHYHPHQW" என்பது "ACHIEVEMENT"–க்கு சங்கேத மொழியாகும்

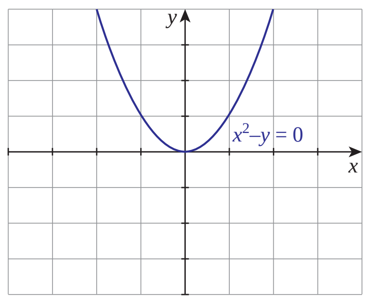
"இதனை $f(x) = x - 3$ எனச் சொல்ல முடியுமா?".

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.2 **வடிவியல் (Geometry):** கீழ்க்காணும் மூன்று சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

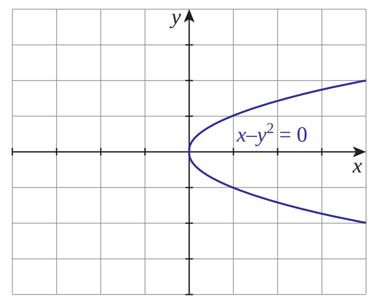
(i) $2x - y = 0$ (ii) $x^2 - y = 0$ (iii) $x - y^2 = 0$



படம் 1.5



படம் 1.6



படம் 1.7

(i) $2x - y = 0$

$2x - y = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நேர்க்கோட்டை அமைக்கின்றது. தெளிவாக $(1,\ 2), (3,\ 6)$ போன்ற புள்ளிகள் இந்நேர்க்கோட்டில் அமையும்போது, $(1,\ 1), (3,\ 5), (4,\ 5)$ போன்ற புள்ளிகள் இந்நேர்க்கோட்டில் அமையவில்லை. x மற்றும் y இடையேயான பகுமுறை தொடர்பு $y = 2x$ ஆகும். எனவே இந்நேர்க்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளையும் $\{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ என எழுதலாம். இக்கணமானது $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ –ன் உட்கணமாகும் (படம் 1.5).

(ii) $\boldsymbol{x^2 - y = 0}$

ஏற்கனவே விவாதித்தபடி, இங்கு x மற்றும் y -க்கு இடையேயான தொடர்பு $y = x^2$ ஆகும். இந்த வளைவரையின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் கணம் $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ ஆகும் (படம் 1.6). இதுவும் கார்டீசியன் பெருக்கலான $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ –ன் உட்கணமாகும்.

(iii) $\boldsymbol{x - y^2 = 0}$

மேற்கண்ட விளக்கங்களிலிருந்து, இங்கு x மற்றும் y க்கு இடையேயான தொடர்பு $y^2 = x$ அல்லது $y = \pm\sqrt{x},\ x \geq 0$ ஆகும். இச்சமன்பாட்டினை $y = +\sqrt{x}$ மற்றும் $y = -\sqrt{x}$ எனவும் பிரித்து எழுதலாம். இவ்வளைவரையின் மீதான புள்ளிகளின் கணம், x எனும் குறையற்ற மெய்யெண்களால் ஆன $\{(x, \sqrt{x})\}, \{(x, -\sqrt{x})\}$ என்கிற புள்ளிகளின் கணம் கணங்களின் சேர்ப்பு ஆகும். மேலும் இது கார்டீசியன் பெருக்கலான $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ –ன் உட்கணங்களாகும் (படம் 1.7).

மேற்கண்ட மூன்று உதாரணங்களிலிருந்து தொடர்பு என்ற சொல்லுக்கு ஓரளவு விளக்கம் தெரியவருகிறது. x உள்ள ஒரு கணத்திற்கும் y உள்ள மற்றொரு கணத்திற்கும் இடையே ஒரு ஒத்திசைவு உள்ளது. நுட்பமான வார்த்தைகளுக்கு, கணிதத்தில் ஏற்றுக் கொள்ளக் கூடிய வரையறை தேவை. எனவே கணிதப் பார்வையில் 'தொடர்பு' என்பதன் வரையறையைக் காண்போம்.

தொடர்பின் வரையறை (Definition of Relation)

$A = \{p, q, r, s, t, u\}$ என்பது மாணவர்களின் கணம் என்க. $B = \{X, Y, Z, W\}$ என்பது பள்ளிகளின் கணம் என்க. கீழ்க்காணும் தொடர்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

"a" எனும் மாணவர் S எனும் பள்ளியில் படித்திருந்தால் அல்லது படிக்கிறார் எனில், மாணவர் $a \in A$ க்கு பள்ளி $S \in B$ யுடன் தொடர்பு எனக் கொள்வோம்.

கீழ்க்காணும் நிலையினை எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது,

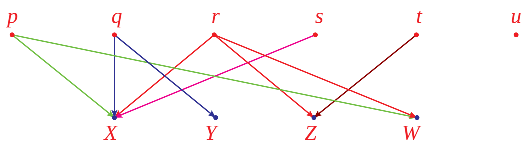
p என்ற மாணவர் X என்ற பள்ளியில் படித்துவிட்டு, தற்போது W என்ற பள்ளியில் படித்துக் கொண்டிருக்கிறார். q என்பவர் X -ல் படித்துவிட்டு தற்போது Y–ல் படித்துக் கொண்டிருக்கிறார். r என்பவர் X மற்றும் Z -ல் படித்துவிட்டு, தற்போது W–ல் படிக்கின்றார். s என்பவர் X என்ற பள்ளியிலேயே தொடர்ந்து படித்துக் கொண்டிருக்கின்றார். t என்பவர் Z இல் படிப்பை முடித்துவிட்டு வேறு பள்ளிகளில் தொடரவில்லை. u என்பவர் இந்த நான்கு பள்ளிகளிலும் படிக்கவில்லை என எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்குத் தொடர்புகள் வெளிப்படையாக இருந்தாலும், ஒரு தொடர்பை எப்போதும் இவ்வகையில் தருவது சாத்தியமில்லை. எனவே வேறு சில வகைகளில் இத்தொடர்பைக் குறிப்பிட இயலுமா என கீழ்க்காணுமாறு முயல்வோம்.

(i)

p	p	q	q	r	r	r	s	t
X	W	X	Y	X	Z	W	X	Z

(ii)



(iii) $\{(p, X), (p, W), (q, X), (q, Y), (r, X), (r, Z), (r, W), (s, X), (t, Z)\}$

(iv) $pRX, pRW, qRX, qRY, rRX, rRZ, rRW, sRX, tRZ$

மேற்கண்ட நான்கு அமைப்புகளில், கணங்களின் அடிப்படையில் தொடர்புகளைக் கையாள்வதற்கு ஏற்ற வகையில் வசதியாக மூன்றாவது அமைப்பு உள்ளது.

மூன்றாவது அமைப்பில் தரப்பட்டுள்ள கணமானது கார்டீசியன் பெருக்கலான $A \times B$ –ன் உட்கணமாகும். மேலும் விளக்க எடுத்துக்காட்டுகளான 1.1 மற்றும் 1.2 ஆகியவற்றிலும் ஒரு கார்டீசியன் பெருக்கலின் ஒரு உட்கணத்தை நம்மால் பெற முடிந்தது என்பதனை நினைவில் கொள்வோம்.

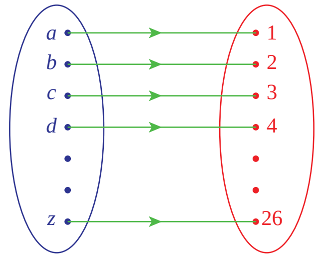
வரையறை 1.2

A மற்றும் B என்பவை இரு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. A -லிருந்து B -க்கு வரையறுக்கப்படும் **தொடர்பு (relation)** R என்பது A மற்றும் B -ன் கார்டீசியன் பெருக்கலின் உட்கணமாகும். குறியீட்டின்படி $R \subseteq A \times B$ ஆகும்.

A -லிருந்து B -க்கு வரையறுக்கப்படும் தொடர்பும் B -லிருந்து A -க்கு வரையறுக்கப்படும் தொடர்பும் வெவ்வேறானவை என்பதைத் தெரிந்து கொள்க.

$\{a \in A : (a, b) \in R$ ஏதோ ஒரு $b \in B\}$ என்ற கணம் தொடர்பின் **சார்பகம் (domain)** எனப்படும். $\{b \in B : (a, b) \in R$ ஏதோ ஒரு $a \in A\}$ என்ற கணம் தொடர்பின் **வீச்சகம் (range)** எனப்படும். எனவே, தொடர்பு R –ன் சார்பகம் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடி உறுப்புகளிலுள்ள முதல் ஆயக்கூறுகளின் கணமாகவும், தொடர்பு R –ன் வீச்சகம் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடி உறுப்புகளிலுள்ள இரண்டாவது ஆயக்கூறுகளின் கணமாகவும் அமையும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.3 கீழ்க்காணும் படத்தினை எடுத்துக் கொள்வோம் [படம் 1.8].

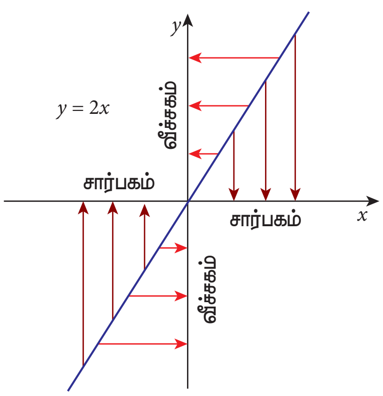


படம் 1.8

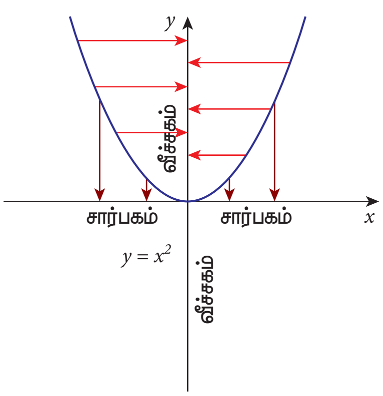
படத்தில் ஆங்கில அகர வரிசை எழுத்துக்கள் இயல் எண்களோடு கோர்க்கப்படுகிறது. ஒரு எளிய சங்கேதமொழி என்பது ஒவ்வொரு எழுத்திற்கும் ஒரு இயல் எண் ஒதுக்கப்படுவதாகும். அதாவது, a -ஐ குறிக்க 1, b -ஐ குறிக்க 2, ..., z -ஐ குறிக்க 26 என்பதாகும். இந்த ஒத்திசைவை $\{(a, 1), (b, 2), ..., (z, 26)\}$ என வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடி கணமாக எழுதலாம். இந்த வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடிகளின் கணம் ஒரு தொடர்பாகும். இந்தத் தொடர்பின் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம் முறையே $\{a, b, ..., z\}$ மற்றும் $\{1, 2, ..., 26\}$ ஆகும்.

இப்போது விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் 1.1 மற்றும் 1.2 ஆகியவற்றில் தொடர்பானது ஒரு கார்டீசியன் பெருக்கலின் உட்கணமாக அமைந்துள்ளதையும் அவை வரையறை 1.2 -ன் நியதிக்கு உட்படுவதையும் நினைவு கூர்வோம்.

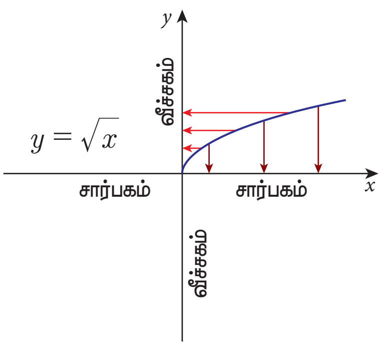
விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.1 -ல் உள்ள தொடர்பின் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம் முறையே $\{L, E, T, U, S, W, I, N\}$ மற்றும் $\{O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டு 1.2 –ல் $2x - y = 0$ என்ற தொடர்பின் சார்பகம் $\mathbb{R}$ மற்றும் வீச்சகமும் $\mathbb{R}$ ஆகும் [படம் 1.9]. $x^2 - y = 0$ என்ற தொடர்பின் சார்பகம் $\mathbb{R}$ மற்றும் அதன் வீச்சகம் $[0, \infty)$ ஆகும் [படம் 1.10]. $x - y^2 = 0$ என்ற தொடர்பின் சார்பகம் $[0, \infty)$ மற்றும் வீச்சகம் $\mathbb{R}$ ஆகும் [படம் 1.11 மற்றும் 1.12].



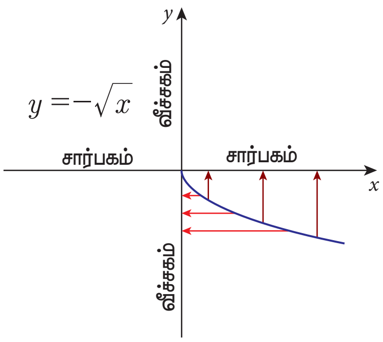
படம் 1.9



படம் 1.10



படம் 1.11



படம் 1.12

தொடர்பின் சார்பகமானது கார்டீசியன் பெருக்கலின் முதல் கணத்தின் உட்கணமாகவும், தொடர்பின் வீச்சகமானது இரண்டாவது கணத்தின் உட்கணம் என்பதும் குறிப்பிடத்தக்கது. வழக்கமாக, இரண்டாவது கணத்தைத் தொடர்பின் **துணைச்சார்பகம் (co–domain)** என அழைக்கப்படுகிறது. ஆகையால் தொடர்பின் வீச்சகம் என்பது சார்பகத்திலுள்ள உறுப்புகளுக்குத் தொடர்புடைய துணைச்சார்பக உறுப்புகளின் தொகுப்பு ஆகும். துணைச்சார்பகத்தின் உட்கணமே தொடர்பின் வீச்சகமாகும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

ϕ மற்றும் $A\times A$ ஆகிய கணங்கள், கார்டீசியன் பெருக்கலான $A\times A$ -ன் உட்கணங்களாக அமைகின்றது. இவ்விரண்டு தொடர்புகள் **உச்சத் தொடர்புகள் (extreme relations)** என அழைக்கப் படுகின்றன. ϕ என்பது **வெற்றுத்தொடர்பு (empty relation)** எனவும் $A\times A$ என்பது **அனைத்துத் தொடர்பு (universal relation)** எனவும் அழைக்கப்படும்.

சார்பகம், துணைச்சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம் பற்றிய மேலான கருத்துக்களை "சார்புகள்" எனும் அடுத்த பகுதியில் விரிவாக ஆராய்வோம்.

A –லிருந்து B–க்கு R ஒரு தொடர்பு மற்றும் $(x, y) \in R$ எனில், இதனை xRy ("x" ஆனது "y" யுடன் தொடர்புடையது என வாசிக்கவும்) எனவும், $(x, y) \notin R$ எனில் $x \not R y$ ("x" ஆனது "y" யுடன் தொடர்பற்றது என வாசிக்கவும்) எனவும் எழுதுவது மரபு.

தொடர்பானது ஒரு கணத்திலிருந்து மற்றொரு கணத்திற்கு என வரையறை செய்யப்பட்டிருந்தாலும் கணித நோக்கில் ஒரே கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்படும் தொடர்பு மிகவும் முக்கியமானதாக அமையும். அதாவது சார்பகமும் துணைச்சார்பகமும் ஒரே கணமாக இருக்கும் தொடர்புகள் மிகுந்த முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகத் திகழ்கின்றன. எனவே ஒரு கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்படும் தொடர்புகளின் மீது கவனம் செலுத்துவோம்.

1.5.1 தொடர்புகளின் வகைகள் (Type of relations)

கீழ்க்காணும் உதாரணங்களைக் கவனிக்கவும்.

(i) $S = \{1, 2, 3, 4\}$ என்க. மேலும் S-ன் மீது $R = \{(1, 1),(1, 3),(2, 3)\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) $S = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ என்க. "m ஆனது n ன் வகுத்தியாக இருந்தால் m ஆனது n உடன் தொடர்புடையது" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(iii) $\mathbb{C}$ என்பது தளத்திலுள்ள அனைத்து வட்டங்களின் கணம் என்க. "C -ன் ஆரமும் C' -ன் ஆரமும் சமமாக இருந்தால் வட்டம் C ஆனது வட்டம் C' உடன் தொடர்புள்ளது" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(iv) அனைத்து மக்களையும் கொண்ட கணம் S -ல் "a என்பவர் b -ன் சகோதரராக இருந்தால் a ஆனது b உடன் தொடர்புடையவர்" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(v) S என்பது அனைத்து மக்களையும் கொண்ட கணம் என்க. S மீது "தாயாக இருந்தால்" எனும் விதியால் தொடர்பினை வரையறுக்கவும்.

இரண்டாவது உதாரணத்தில் ஒவ்வொரு எண்ணும் தனக்குத்தானே வகுபடுவதால் "அனைத்து $a \in S$ க்கும் a ஆனது a உடன் தொடர்புடையது"; இதே கூற்று மூன்றாவது உதாரணத்திற்கும் உண்மையாகும். ஆனால் முதல் உதாரணத்திற்கு "அனைத்து $a \in S$ -க்கும் a ஆனது a உடன் தொடர்புடையது" என்பது உண்மையன்று. ஏனெனில் 2 உடன் 2 தொடர்பில் இல்லை.

"a ஆனது b உடன் தொடர்புடையது எனில் b ஆனது a உடன் தொடர்புடையது" எனும் பண்பினை இவ்வுதாரணங்களின் மூலம் எளிதாகச் சோதித்தறியலாம். இது மூன்றாவது உதாரணத்தில் உண்மையாகிறது. ஆனால் இரண்டாவது உதாரணத்தில் உண்மையல்ல.

"a ஆனது b உடன் தொடர்புடையது மற்றும் b ஆனது c உடன் தொடர்புடையது எனில் a ஆனது c உடன் தொடர்புடையது" என்பதை மிக எளிதாகச் சோதித்தறிய இயலும். இது இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது உதாரணத்தில் உண்மையாகும். ஆனால் ஐந்தாவதில் உண்மையில்லை.

இப்பண்புகளுடன் மேலும் சில பண்புகள் கணித வடிவமைப்பில் அதிகமாக தேவைப்படுகிறது. அவற்றை இங்கு வரையறுக்கலாம்.

வரையறை 1.3

S என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. S இன் மீதான ஒரு தொடர்பு R என்க. இப்போது,

- அனைத்து $a \in S$ க்கும் a ஆனது a உடன் தொடர்புடையதாக இருந்தால் R ஆனது **தற்சுட்டுத் தொடர்பு (reflexive)** எனப்படும்.
- "a ஆனது b உடன் தொடர்புடையது எனில், b ஆனது a உடன் தொடர்புடையதாக அமையும்" என்றால் R ஆனது **சமச்சீர் தொடர்பு (symmetric)** எனப்படும்.
- "a ஆனது b உடன் தொடர்புடையது மற்றும் b ஆனது c உடன் தொடர்புடையது எனும்போது a ஆனது c உடன் தொடர்புடையதாக இருக்கும்" என்றால் R ஆனது **கடப்புத் தொடர்பு (transitive)** எனப்படும்.

இம்மூன்று தொடர்புகள் **அடிப்படைத் தொடர்புகள்** எனப்படும். இம்மூன்று அடிப்படைத் தொடர்புகளை வேறு வடிவத்தில் காண்போம்.

S என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. S இன் மீதான ஒரு தொடர்பு R என்க.

இப்போது R ஆனது,

- அனைத்து $a \in S$ -க்கும், $(a,a) \in R$ எனில், அத்தொடர்பு ஒரு தற்சுட்டு தொடர்பாகும்;
- "$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$" எனில் R- சமச்சீர் தொடர்பாகும்;
- "$(a, b),(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$" எனில் R- கடப்பு தொடர்பு எனப்படும்.

வரையறை 1.4

S என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. S ல் உள்ள ஒரு தொடர்பு R, தற்சுட்டு, சமச்சீர், மற்றும் கடப்பு தொடர்பாக இருப்பின், அது **சமானத் தொடர்பு (equivalance relation)** ஆகும்.

கீழ்க்கண்ட இரு தொடர்புகளைக் கருதுவோம்.

(i) அனைத்து மக்களையும் கொண்டுள்ள கணம் S_1 -ல் தொடர்பு R_1 என்பதை "a என்பவர் b-ன் சகோதரர் எனில், a ஆனது b உடன் தொடர்புடையது" என்ற விதிப்படி வரையறுப்போம்.

(ii) அனைத்து ஆண்களையும் கொண்டுள்ள கணம் S_2 -ல் தொடர்பு R_2 என்பதை "a என்பவர் b-ன் சகோதரர் எனில், a ஆனது b உடன் தொடர்புடையது" என்ற விதிப்படி வரையறுப்போம்.

S_1 மற்றும் S_2 கணங்களின் மீதான தொடர்புகளை வரையறுக்கும் விதிகள் ஒரே மாதிரியாக உள்ளது. ஆனால் கணங்கள் வெவ்வேறானவை. தொடர்பு R_1, கணம் S_1 ல் சமச்சீர் தொடர்பன்று. அதே சமயம் தொடர்பு R_2, கணம் S_2 ல் சமச்சீர் தொடர்பாகும். இதன் மூலம் தொடர்பை வரையறுக்கும் விதிகள் மட்டுமன்றி எந்தக் கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்படுகிறது என்பதுவும் முக்கியமானது என்பது புலப்படுகிறது. எனவே தொடர்பை வரையறுக்கும்போது தொடர்புக்கான விதியுடன் தொடர்புக்கான கணத்தைப் பற்றிய முழு விவரமும் இன்றியமையாதது.

$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ எனும் தொடர்பு $\{1,2,3\}$ என்ற கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்டால் அது தற்சுட்டாகும்; $\{1,2,3,4\}$ என்ற கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்டால் அது தற்சுட்டாகாது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் 1.4

1. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2),(3, 3), (1, 3), (4, 4), (1, 2),(3, 1)\}$. இங்கு $(1, 1),(2, 2),(3, 3)$ மற்றும் $(4, 4)$ ஆகிய அனைத்தும் R –ல் இருப்பதால் அது தற்சுட்டாகும்.மேலும் ஒவ்வொரு உறுப்பு $(a, b)\in R$ -க்கும் உறுப்பு $(b, a)\in R$ -ல் இருப்பதால் அது சமச்சீராகும். ஆனால் $(2, 1), (1, 3) \in R$ மற்றும் $(2,3) \notin R$ என அமைந்துள்ளதால் இது கடப்பு தொடர்பு ஆகாது. எனவே R என்பது சமானத் தொடர்பன்று.

2. தளத்தில் அமைந்துள்ள அனைத்து நேர்க்கோடுகளின் கணம் P என்க. P மீதான தொடர்பு R ஆனது l எனும் நேர்க்கோடு m எனும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக இருந்தால் $l\,R\,m$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இத்தொடர்பு தற்சுட்டு, சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு ஆகுமென்பதால் இது சமானத் தொடர்பு ஆகும்.

3. ஓர் குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளோடு (2 மகள் மற்றும் 1 மகன்) பெற்றோர்கள் இருக்கும் கணம் A என்க. a என்பவர் b–இன் சகோதரியாக இருந்தால் தொடர்பு R ஆனது aRb என வரையறுக்கப் படுகிறது என்க. சற்றே இத்தொடர்பை மிகுந்த கவனத்துடன் நோக்குவோம். வழக்கமாக எந்தப் பெண்ணும் தனக்குத்தானே சகோதரி எனக் கருதுவதில்லை. எனவே அது தற்சுட்டில்லை. மேலும் அது சமச்சீரும் அல்ல. மேலும் தெளிவாக இது கடப்பு தொடர்பும் அல்ல, எனவே இது சமானத் தொடர்பும் அல்ல (ஆனால் கணத்தினை குடும்பத்திலுள்ள பெண்கள் மட்டும் கொண்டுள்ள கணம் என மாற்றும்போது சமச்சீர் தொடர்பாக மாறும். கடப்பாக மாறாது.

4. இயல் எண்களின் கணத்தில், $x + 2y = 21$ எனில் தொடர்பு R ஆனது xRy என வரையறுக்கப்படுகிறது. தொடர்பினை வெளிப்படையாக எழுதும்போது தொடர்பு R ஆனது $\{(1,10),(3, 9), (5, 8),(7, 7), (9, 6), (11, 5), (13, 4), (15, 3),(17, 2), (19, 1)\}$ எனும் கணமாகும். இங்கு $(1, 1)\notin R$ என்பதால் தற்சுட்டு இல்லை; $(1, 10)\in R$ ஆனால் $(10,1) \notin R$ என்பதால் சமச்சீரல்ல. $(3,9),(9,6) \in R$ ஆனால் $(3, 6) \notin R$, எனவே தொடர்பு கடப்பும் அல்ல.

5. $X = \{ 1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $R = \phi$ என்க. இங்கு ϕ ஒரு வெற்று கணமாகும். $(1,1) \notin R$ என்பதால் அது தற்சுட்டு அல்ல. $(y, x) \notin R$ என்று அமையும் வகையில் (x, y) என ஒரு உறுப்பினை R –ல் காண இயலாது என்பதால் இந்தத் தொடர்பு "சமச்சீர் அல்ல" என்பதனை ஏற்க இயலாது. ஆகையால் இது சமச்சீர் தொடர்பாகும். இதே போன்று இது கடப்பும் ஆகும்.

6. அனைத்துத்தொடர்பு எப்போதும் சமானத் தொடர்பாகும்.

7. வெற்று தொடர்பினைச் சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு தொடர்பாகக் கருதலாம்.

8. ஒரு தொடர்புக்கான கணத்தில் ஒற்றை உறுப்பு மட்டும் இருந்தால் அதனைக் கடப்புத் தொடர்பாகக் கருதலாம்.

இப்போது மேலும் சில சிறப்புத் தொடர்புகளைப் பற்றி தெரிந்து கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.10 $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ எனும் கணத்தின் மீது தொடர்பு $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \ldots, (n, n)\}$ எனில், மூன்று அடிப்படைத் தொடர்புகளையும் சோதிக்கவும்.

தீர்வு:

அனைத்து $a \in S$ -க்கும், $(a, a) \in R$ என்பதால் R ஆனது தற்சுட்டாகும்.

$(b, a) \notin R$ என்பதுபோல் அமையுமாறு $(a, b) \in R$ என எந்த உறுப்பும் இல்லை. வேறு விதமாகக் கூறினால் ஒவ்வொரு உறுப்பு $(a, b) \in R$ க்கும் $(b, a) \in R$ எனக் கூற முடியும். இதனால் R ஆனது சமச்சீராகும்.

$(a, c) \notin R$ எனுமாறு (a, b) மற்றும் (b, c) ஆகிய இரு உறுப்புகளை R–ல் காண இயலாது. இதனால் R ஆனது "கடப்பு அல்ல" என்பது உண்மையன்று. எனவே "R ஆனது கடப்பு ஆகும்" என்ற கூற்று உண்மையாகும். எனவே R ஆனது கடப்பு ஆகும்.

இதனால் R ஆனது தற்சுட்டு, சமச்சீர், கடப்புத் தொடர்பு ஆகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பு சமானத் தொடர்பாகும்.

தொடக்கம் முதல் அனைத்துத் தொடர்புகளையும் நாம் R என்ற ஒரே குறியீட்டால் பயன்படுத்தி வருகிறோம். அவ்வாறு மட்டுமே குறிப்பிட வேண்டும் என அவசியம் இல்லை. தொடர்பினைக் குறிக்க, கிரேக்க எழுத்தான ρ (ரோ என வாசிக்கவும்) என்பதை நாம் பயன்படுத்தலாம். சமானத் தொடர்பினைப் பெரும்பாலும் "$\sim$" என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடப் படுகிறது.

தொடர்பானது ஒரு குறிப்பிட்ட வகையான தொடர்பாக இல்லையெனில், சில உறுப்புகளைச் சேர்த்தோ அல்லது நீக்கியோ தேவைப்படும் தொடர்பாக உருவாக்க இயலும். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் இதனை அறிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$S = \{1, 2, 3\}$ மற்றும் $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 1)\}$ என்க.

(i) ρ என்பது தற்சுட்டுத் தொடர்பா? இல்லையெனில் காரணத்தைக் கூறி மேலும் ρ -ஐ தற்சுட்டாக உருவாக்க ρ உடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளை எழுதுக.

(ii) ρ என்பது சமச்சீர் தொடர்பா? இல்லையெனில் காரணம் கூறுக. மேலும் ρ -ஐ சமச்சீராக உருவாக்க ρ உடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளையும், ρ -லிருந்து நீக்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளையும் எழுதுக.

(iii) ρ என்பது கடப்புத் தொடர்பா? இல்லையெனில் காரணம் கூறுக. மேலும் ρ -ஐ கடப்பு தொடர்பாக உருவாக்க ρ லிருந்து நீக்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளையும், சேர்க்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளையும் எழுதுக.

(iv) ρ என்பது சமானத் தொடர்பா? இல்லையெனில் காரணம் கூறுக. மேலும் ρ -ஐ சமானத் தொடர்பாக உருவாக்க அதனுடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளை எழுதுக.

தீர்வு:

(i) $(3, 3)$ என்பது ρ -ல் இல்லை என்பதால் ρ ஆனது தற்சுட்டு அல்ல. $(1, 1)$ மற்றும் $(2, 2)$ ஆகியவை ρ -ல் இருப்பதால் ρ -ஐ தற்சுட்டாக உருவாக்க $(3, 3)$ என்ற உறுப்பினை மட்டும் சேர்த்தால் போதுமானது.

(ii) ρ ஆனது சமச்சீர் அல்ல. ஏனெனில் $(1, 2)$ என்பது ρ -ல் உள்ளது. ஆனால் $(2, 1)$ என்பது ρ -ல் இல்லை. ρ -ஐ சமச்சீராக உருவாக்க $(2, 1)$ என்ற உறுப்பினை மட்டும் சேர்த்தால் போதுமானது. $(1, 2)$ என்ற உறுப்பினை ρ விலிருந்து நீக்கியும் ρ -ஐ சமச்சீராக உருவாக்க இயலும்.

(iii) ρ ஆனது கடப்பு தொடர்பு அல்ல. ஏனெனில் $(3, 1)$ மற்றும் $(1, 3)$ ஆகியவை ρ -ல் உள்ளன. ஆனால் $(3, 3)$ ஆனது ρ -ல் இல்லை. ρ -ஐ கடப்பு தொடர்பாக உருவாக்க $(3, 3)$ஐ சேர்க்க வேண்டும். அவ்வாறு சேர்த்த பின்னரும் தொடர்பானது கடப்புத் தொடர்பாக இல்லை. ஏனெனில் $(3, 1)$ மற்றும் $(1, 2)$ ஆகியவை ρ -ல் உள்ளன. ஆனால் $(3, 2)$ என்பது ρ -ல் இல்லை. எனவே ρ -ஐ கடப்பு தொடர்பாக உருவாக்க $(3, 2)$ -ஐ ρ -ல் சேர்க்க வேண்டும். இப்பொழுது இது கடப்பு தொடர்பாக மாறும். எனவே ρ -ஐ கடப்பு தொடர்பாக உருவாக்க $(3, 3)$ மற்றும் $(3, 2)$ ஆகியவற்றைச் சேர்க்க வேண்டும். ஆனால் $(3, 1)$ஐ நீக்கிவிட்டால் கடப்புத் தொடர்பாக மாறிவிடும்.

(iv) இவ்வாறாக,

- ρ -ஐ தற்சுட்டாக உருவாக்க $(3, 3)$ -ஐ நாம் சேர்க்க வேண்டும்.
- ρ -ஐ சமச்சீராக உருவாக்க $(2, 1)$ -ஐ நாம் சேர்க்க வேண்டும்.
- ρ -ஐ கடப்பு தொடர்பாக உருவாக்க $(3, 3)$ மற்றும் $(3, 2)$ -ஐ சேர்க்க வேண்டும் எனக் கண்டறிந்தோம்.

சமானத் தொடர்பாக ρ -ஐ உருவாக்க மேற்கண்ட உறுப்புகளை நாம் சேர்க்க வேண்டும்.

இந்த உறுப்புகளைச் சேர்த்தபிறகு தொடர்பானது

$\{(1, 1),(2, 2),(3, 3),(1, 2),(2, 1),(1, 3),(3, 1),(3, 2),(2, 3)\}$ என அமையும்.

இந்தத் தொடர்பானது தற்சுட்டு, சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு தொடர்பு எனக் கண்டறியலாம். இதனால் இது சமானத் தொடர்பாகும். எனவே சமானத் தொடர்பை உருவாக்க $(3, 3),(2,1),(3,2)$ மற்றும் $(2, 3)$ ஆகியவற்றை ρ -ல் சேர்க்க வேண்டும்

இப்போது தொடர்புகள் சில பண்புகளைக் கொண்டிருக்குமாறு எவ்வாறு உருவாக்குவது என்பதைக் கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டிலிருந்து நம்மால் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.12 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ என்க. A -ல் கீழ்க்காணும் வகையில் தொடர்புகளை அமைக்கவும்.

(i) தற்சுட்டு, சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு அல்லாத தொடர்பு.

(ii) தற்சுட்டு மற்றும் சமச்சீர் அல்லாமல் கடப்பு தொடர்பு.

(iii) தற்சுட்டு மற்றும் கடப்பு அல்லாமல் சமச்சீராகும் தொடர்பு.

(iv) தற்சுட்டு அல்லாமல் சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு தொடர்பு.

(v) சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு அல்லாமல் தற்சுட்டு தொடர்பு.

(vi) சமச்சீர் அல்லாமல் தற்சுட்டு மற்றும் கடப்பு தொடர்பு.

(vii) கடப்பு அல்லாமல் தற்சுட்டு மற்றும் சமச்சீர் தொடர்பு,

(viii) தற்சுட்டு , சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு தொடர்பு.

தீர்வு

(i) $(1,\ 2)$ என்ற உறுப்பின் மூலம் "சமச்சீர் அல்ல" என உருவாக்கப் பயன்படுத்துவோம். மேலும் $\{(1,\ 2)\}$ என்ற தொடர்பு, வரையறையின்படி கடப்பு ஆகும். $(2,\ 3)$ ஐ சேர்த்து, $(1,\ 3)$ஐ நீக்கினால் தொடர்பானது கடப்பு அல்ல. எனவே தொடர்பு $\{(1,2),(2,3)\}$ என்பது தற்சுட்டு அல்ல, சமச்சீர் அல்ல மற்றும் கடப்பும் அல்ல. இதே போன்று பல உதாரணங்கள் கொடுக்க இயலும்.

(ii) வரையறையின் படி, தொடர்பு $\{(1,2)\}$ என்பது கடப்பு தொடர்பாகவும் அதே நேரத்தில், தற்சுட்டு மற்றும் சமச்சீர் அல்லாமலும் உள்ளதை அறிவோம்.

(iii) $(1,\ 2)$ என்ற உறுப்போடு தொடங்குவோம். நமக்குச் சமச்சீர் தேவை என்பதால் $(2,\ 1)$ என்ற உறுப்பினைச் சேர்க்க வேண்டும். இந்நிலையில் $(1,1)$, $(2,2)$ ஆகிய உறுப்புகள் இல்லாமையால் தொடர்பானது கடப்பும் அல்ல, தற்சுட்டும் அல்ல. இதனால் $\{(1,2),(2,1)\}$ என்பது தற்சுட்டும் அல்ல, கடப்பும் அல்ல. ஆனால் இது சமச்சீர் ஆகும்.

(iv) மேல் விவாதிக்கப்பட்ட தொடர்பில் $(1,1)$ மற்றும் $(2,2)$ என்ற உறுப்புகளைச் சேர்த்தால் அது கடப்பாக மாறும். எனவே, $\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 1),\ (2,\ 2)\}$ என்பது தற்சுட்டு அல்ல ஆனால் சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு தொடர்பாகும்.

(v) $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ -ல் அமைந்த தொடர்பானது தற்சுட்டாக இருக்க வேண்டுமெனில் $(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,2),\ (3,\ 3)$ என்ற உறுப்புகள் கண்டிப்பாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் இது சமச்சீர் மற்றும் கடப்புத் தொடர்பாகவும் அமையும். எனவே, (i) இல் சேர்த்தது போல் $(1,\ 2)$ மற்றும் $(2,\ 3)$ சேர்த்தால் தேவை பூர்த்தியாகிவிடும். ஆகவே, $\{(0,\ 0),\ (1,\ 1),(2,\ 2),(3,\ 3),(1,\ 2),(2,\ 3)\}$ என்பது தற்சுட்டாகும், ஆனால் சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு அல்ல.

(vi) மேற்கண்ட முறையையே கடைப்பிடித்தால் $\{(0,\ 0),(1,\ 1),\ (2,\ 2),(3,\ 3),(1,\ 2)\}$ என்பது தற்சுட்டு ஆகும், கடப்பு ஆகும் ஆனால் சமச்சீர் அல்ல.

(vii) இதே போன்று $\{(0,\ 0),(1,\ 1),(2,\ 2),(3,\ 3),\ (1,\ 2),(2,\ 3),(2,\ 1),\ (3,\ 2)\}$ என்பது தற்சுட்டு மற்றும் சமச்சீர் ஆகும் ஆனால் கடப்பு அல்ல.

(viii) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ என்பது தற்சுட்டு, சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.13 $\mathbb{Z}$ என்ற கணத்தில், $m - n$ என்பது 12 -ன் மடங்காக இருந்தால் தொடர்பு mRn என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், R ஒரு சமானத் தொடர்பு என நிரூபிக்க.

தீர்வு

$m - m = 0$ என்பதால், $0 = 0 \times 12$ என எழுதுவதன்மூலம் பூஜ்ஜியமும் 12 -ன் மடங்கு என்பது உண்மை. ஆகவே mRm என்பது எல்லா $m \in Z$ -க்கும் பொருந்தும். எனவே, $\mathbb{R}$ தற்சுட்டாகும்.

mRn என்க. அப்பொழுது $k \in \mathbb{Z}$க்கு $m-n=12k$ ஆகும். இதனால் $n-m=12(-k)$. ஆகையால் nRm ஆகும். இது R சமச்சீர் என்பதைக் காட்டுகிறது.

mRn மற்றும் nRp என்க. அதாவது $k,l \in \mathbb{Z}$ -க்கு, $m-n=12k$ மற்றும் $n-p=12l$ ஆகும். ஆகவே $m-p=12(k+l)$. அதாவது mRp. இது R என்பது கடப்பு தொடர் எனக் காட்டுகிறது. எனவே R என்பது சமானத் தொடர்பு ஆகும்.

தேற்றம் 1.1 : m உறுப்புகள் கொண்ட கணத்திலிருந்து n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை 2^{mn} ஆகும். குறிப்பாக n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் மீதான தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை 2^{n^2} ஆகும்.

நிரூபணம்

A மற்றும் B கணங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முறையே m மற்றும் n என்க. ஆதலால் $A \times B$ -ல் mn உறுப்புகள் உள்ளது. எனவே அதற்கு 2^{mn} உட்கணங்கள் உள்ளது. $A \times B$ –ன் ஒவ்வொரு உட்கணமும் A–லிருந்து B–க்குரிய ஒரு தொடர்பை வரையறுக்கும் என்பதால், n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திற்கு m உறுப்புகள் கொண்ட கணத்திலிருந்து வரையறுக்கப்படும் தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை 2^{mn} ஆகும். $A=B$ என எடுத்துக்கொண்டால் n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் மீதான தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை 2^{n^2} ஆகும்.

குறிப்பு: (i) n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் மீதான தற்சுட்டுத் தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை 2^{n^2-n} ஆகும்.

(ii) n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் மீதான சமச்சீர் தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை $2^{\frac{(n^2+n)}{2}}$ ஆகும்.

வரையறை 1.5

R என்பது A-லிருந்து B-க்கு உள்ள ஒரு தொடர்பு எனில், B-லிருந்து A-க்கு $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$ என வரையறுக்கப்படும் தொடர்பு, R-ன் **நேர்மாறு (inverse)** ஆகும்.

உதாரணமாக, தொடர்பு $R=\{(1,a),(2,b),(2,c),(3,a)\}$ எனில் நேர்மாறு தொடர்பு $R^{-1}=\{(a,1),(b,2),(c,2),(a,3)\}$ ஆகும். R -ன் சார்பகம் R^{-1} -ன் வீச்சகமாகவும், R -ன் வீச்சகம் R^{-1} -ன் சார்பகமாகவும் மாறும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

சமானத் தொடர்பின் மூலம் ஒரு கணத்தினை அதன் வெட்டா உட்கணங்களின் சேர்ப்பாக எழுத இயலும். இத்தகைய பிரித்தலை பிரிவினை எனலாம். இதனை கீழ்க்காணும் உதாரணம் மூலம் காணலாம். அனைத்து $a,b \in \mathbb{Z}$–க்கும் $a-b=3k,\ k\in\mathbb{Z}$ எனுமாறு தொடர்பு aRb வரையறுப்பின் R ஆனது $\mathbb{Z}$ -ல் ஒரு சமானத் தொடர்பாக அமையும்.

$$Z_0 = \{x\in\mathbb{Z} : xR0\} \text{ எனில் } Z_0=\{\ldots,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,9,\ldots\}$$

$$Z_1 = \{x\in\mathbb{Z} : xR1\} = \{\ldots,-2,1,4,7,10,\ldots\}$$

$$Z_2 = \{x\in\mathbb{Z} : xR2\} = \{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$$

இங்கு Z_0 , Z_1 , Z_2 ஆகியவை வெட்டாக் கணங்கள் மட்டுமன்றி $\mathbb{Z}= Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$

கொடுக்கப்பட்ட பிரிவினை $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_n$ –க்கு S மீது R என்ற சமானத் தொடர்புக்கு $x,y\in S_i$ எனில் xRy எனக் காணலாம். சமானத் தொடர்பு உயர் கணிதத்தில் பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது

பயிற்சி 1.2

1. கீழ்க்காணும் தொடர்புகளுக்கு தற்சுட்டு, சமச்சீர் மற்றும் கடப்பு ஆகியவற்றை பற்றி ஆராய்க

   (i) மிகை முழு எண்களில் தொடர்பு R ஆனது "n -ன் வகுத்தி m ஆக இருந்தால் mRn" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

   (ii) P என்பது தளத்திலுள்ள அனைத்து நேர்க்கோடுகளின் கணத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. தொடர்பு R என்பது "l ஆனது m–க்குச் செங்குத்தாக இருந்தால் lRm" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

   (iii) A என்பது ஒரு குடும்பத்தின் உறுப்பினர்கள் அனைவரையும் கொண்ட கணமாகக் கருதுக. "a என்பவர் b -ன் சகோதரி இல்லையெனில் தொடர்பு R ஆனது aRb என வரையறுக்கப்படுகிறது

   (iv) A என்பது ஒரு குடும்பத்தின் பெண் உறுப்பினர்கள் அனைவரையும் கொண்ட கணம் என்க. தொடர்பு R என்பது "a என்பவர் b -ன் சகோதரி இல்லையெனில் தொடர்பு R ஆனது aRb" என வரையறுக்கப்படுகிறது.

   (v) அனைத்து இயல் எண்களின் கணத்தில் தொடர்பு R என்பது "$x + 2y = 1$" எனில் xRy என வரையறுக்கப்படுகிறது.

2. $X = \{a,b,c,d\}$ மற்றும் $R = \{(a,a),(b,b),(a,c)\}$ என்க. தொடர்பு R -ஐ (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பு என உருவாக்க R–உடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளை எழுதுக.

3. $A = \{a,b,c\}$ மற்றும் $R = \{(a, a),(b, b),(a, c)\}$ என்க. தொடர்பு R-ஐ (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பு என உருவாக்க R–உடன் சேர்க்க வேண்டிய குறைந்தபட்ச உறுப்புகளை எழுதுக.

4. ஒரு தளத்திலுள்ள அனைத்து முக்கோணங்களின் கணத்தை P என்போம். P -ல் R என்ற தொடர்பானது "a ஆனது b ன் வடிவொத்ததாக இருப்பின் aRb" என வரையறுக்கப்படுகிறது. R என்பது சமானத் தொடர்பு என நிறுவுக.

5. இயல் எண்களின் கணத்தில் R என்பது "$2a + 3b = 30$ எனில் aRb" என வரையறுக்கப்படுகிறது. R –ல் உள்ள உறுப்புகளை எழுதுக. அது (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பா என்பதை சரிபார்க்க.

6. சென்னையில் உள்ள மக்களின் கணத்தில் "நட்பு" ஒரு சமானத் தொடர்பன்று என்பதை நிரூபிக்க.

7. இயல் எண்களில் கணத்தில் தொடர்பு R ஆனது "$a + b \leq 6$ ஆக இருந்தால் aRb" என வரையறுக்கப்படுகிறது. R–ல் உள்ள உறுப்புகளை எழுதுக. அது (i) தற்சுட்டு (ii) சமச்சீர் (iii) கடப்பு (iv) சமானத் தொடர்பு என்பதை சரிபார்க்க.

8. $A = \{a, b, c\}$ என்க. A-ன் மீதான மிகச்சிறிய செவ்வெண்மையுடைய சமானத் தொடர்பு என்ன? A-ன் மீதான மிகப்பெரிய செவ்வெண்மையுடைய சமானத் தொடர்பு என்ன?

9. $\mathbb{Z}$ -ல் "$m-n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடுமெனில் mRn" எனத் தொடர்பு R வரையறுக்கப்பட்டால் R என்பது சமானத் தொடர்பு என நிரூபிக்க.

1.6 சார்புகள் (Functions)

ஆகாய வெளியில் ஒரு பொருள் நகர்கிறது எனவும், மேலும் அந்த பொருளை ஒரு புள்ளியாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம். கால நேரத்தினைப் பொறுத்து பொருளின் நிலையும் மாறும். கணித முறையில், எந்த நேரத்திலும் $\mathbb{R}^3$ என்ற முப்பரிமாண வெளியில் அப்புள்ளி ஒரு இடத்தினைப் பெறுகிறது. கால நேரத்தினை 0 -லிருந்து 1 வரையிலான இடைவெளியாகக் கொள்வோம். இந்த இடைவெளியில் பொருளின் இடப்பெயர்வு அல்லது செயல்பாடானது பொருளின் நிலையினை முடிவு செய்கிறது. மாற்று மொழியில் கூறுவதாயின் ஒவ்வொரு $t \in [0,1]$–க்கும் பொருளின் செயல்பாடானது $\mathbb{R}^3$ -ல் ஒரு புள்ளியை தருகிறது. t எனும் எந்நேரத்திலும் பொருளின் நிலையினை $f(t)$ எனக் குறிக்கலாம்.

இன்னொரு உதாரணமாக நேர்க்கோட்டினைக் குறிக்கும் சமன்பாடு $2x - y = 0$ -ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு x எடுத்துக் கொள்ளும் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், y ஒரு மதிப்பினைப் பெறும். இங்கு y -ன் நகர்வு அல்லது செயல்பாடு x -ஐ பொறுத்து அமையும். இந்த y -ஐ $f(x)$ எனக் குறிக்கலாம். இயற்கையில் இவ்வாறான நிகழ்வுகள் ஏராளமாக உள்ளன. இவற்றை ஆராயும் போது, ஒரு கணியத்தின் மாறுபாடு மற்றொரு கணியத்தினை சார்ந்திருப்பதை அறியலாம்.

நேரத்திற்கும் பொருளின் நிலைக்கும் உள்ள தொடர்பு, x - அச்சுத் தொலைவுக்கும் y - அச்சுத் தொலைவுக்கும் உள்ள தொடர்பு, மற்றும் இது போன்ற பல கருத்தாக்கங்கள் நூற்றாண்டுகளுக்கு முன்பே 'சார்பு' என்ற பெயரில் கையாளப்பட்டுள்ளது. கணிதவியலாளர் கேன்டர் என்பவருக்கு முன்னதாக, சார்பானது ஒரு மாறி இன்னொரு மாறியுடன் கொண்டுள்ள இசைவு விதியாகவே உணரப்பட்டது. அதற்குப் பின்னர் கணவியல் வளர்ச்சியின் காரணமாக சார்பு என்பது A என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் B என்ற கணத்தில் உள்ள ஒரு தனித்த உறுப்பினை இணைக்கும் விதியாக காணப்பட்டது. கணித ரீதியாக இசைவு மற்றும் விதி என்ற சொற்கள் முறையாக வரையறுக்கப்படவில்லை. தற்கால கணிதத்தில் 'தொடர்பு' மூலமாக சார்பின் வரையறையானது முறையாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதனை ஒரு விளக்க எடுத்துக்காட்டுடன் காண்போம். ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் எழுதிய தேர்வினைப் பற்றி விவாதிப்பதாகக் கொள்வோம். இது ஒரு தொடர்பு என்பது புலப்படும்.

A என்பது தேர்வு எழுதிய மாணவர்களின் கணம் என்க. $B = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$ என்பது அவர்கள் பெறக்கூடிய சாத்தியமான மதிப்பெண்களின் கணம் என்க. தொடர்பு R –ஐ கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

தேர்வில் a என்ற மாணவன் b என்ற மதிப்பெண் பெற்றிருந்தால் மாணவர் a -ஐ மதிப்பெண் b யுடன் தொடர்புபடுத்தலாம்.

இந்த உதாரணத்திலிருந்து கீழ்க்காணும் கருத்துகள் பெறப்படுகிறது.

- ஒவ்வொரு மாணவரும் ஒரு மதிப்பெண்ணைப் பெற்றுள்ளனர். வேறுவிதமாகக் கூறினால் அனைத்து $a \in A$, $(a, b) \in R$ எனுமாறு ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு $b \in B$ -ல் இருக்கும்.

- ஒரே தேர்வில் ஒரு மாணவர் இரண்டு வெவ்வேறு மதிப்பெண் பெற்றிருக்க முடியாது. வேறுவிதமாகக் கூறினால் ஒவ்வொரு $a \in A$, $(a, b) \in R$ எனுமாறு உறுதியாக ஒரே ஒரு உறுப்பு $b \in B$ -ல் இருக்கும். இன்னும் வேறுவிதமாகக் கூறினால் $(a, b), (a, c) \in R$ எனில் $b = c$ ஆகத்தான் இருக்க முடியும்.

மேற்கூறிய இரண்டு பண்புகளையும் கொண்டிருக்கும் தொடர்பானது ஒரு சார்பாக அமையும். இப்போது சார்புகளைப் பற்றிய முறையான வரையறையைக் காண்போம்.

வரையறை 1.6

A மற்றும் B ஆகியவை இரு கணங்கள் என்க. $A \times B$ –இன் உட்கணமானத் தொடர்பு f ஆனது, A–லிருந்து B–க்கு வரையறுக்கப்படும் சார்பு (function) எனக் கூற வேண்டுமாயின் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) அனைத்து $a \in A$ -க்கும் $(a, b) \in f$ எனுமாறு ஒரு உறுப்பு $b \in B$ என அமைதல் வேண்டும்.

(ii) (a, b), $(a, c) \in f$ எனில் $b = c$ என இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, சார்பகத்திலிருக்கும் ஒவ்வொரு உறுப்பும் வீச்சகத்திலுள்ள தனித்த ஒரு உறுப்புடன் கோர்க்கும் தொடர்புதான் சார்பாகும்.

f-ன் **சார்பகம் (domain)** A மற்றும் f -ன் **துணைச்சார்பகம் (co–domain)** B ஆகும். (a, b) ஆனது f-ல் இருந்தால் $f(a)= b$ என எழுதுவோம். உறுப்பு b -ஐ a-ன் **பிம்பம் (image)** என்றும் a -ஐ b-ன் **முன்பிம்பம் (pre–image)** என்றும் கூறலாம். $f(a)$ என்பது a-ல் f-ன் மதிப்பு ஆகும்.

$\{b : (a, b) \in f,$ ஏதோ சில $a \in A\}$ என்கிற கணத்தை சார்பின் **வீச்சகம் (range)** எனலாம். B ஆனது $\mathbb{R}$ -ன் உட்கணமாக இருப்பின், அச்சார்பு மெய்மதிப்புடைச்சார்பு அல்லது **மெய்மதிப்புச்சார்பு (real valued function)** எனலாம்.

இரண்டு சார்புகள் f மற்றும் g **சமம் (equal)** எனில் அவற்றின் சார்பகங்கள் சமமாக இருந்து சார்பகத்திலுள்ள அனைத்து a -க்கும் $f(a) = g(a)$ என இருத்தல் வேண்டும்.

f என்பது, சார்பகம் A மற்றும் துணைச்சார்பகம் B யைக் கொண்ட சார்பாக இருப்பின் அதனை $f{:}A \to B$ என எழுதலாம். (நிகழ்வுக்கு ஏற்றபடி இதனை f, A -லிருந்து B அல்லது f ஆனது A -லிருந்து B -க்குள்ள சார்பு எனப் படிக்கவும்.). மேலும் f ஆனது A -ஐ B உடன் கோர்த்தல் என்றும் கூறலாம். $f(a) = b$ என்பதை f ஆனது a -ஐ b -க்கு இணைக்கிறது, a ஆனது b -ன் மேல் f ஆல் இணைக்கப்படுகிறது என்றும் கூறலாம்.

சார்பின் வீச்சகம் என்பது துணைச்சார்பகத்தில் முன்பிம்பத்தைப் பெற்றுள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் கணமாகும். தெளிவாக, சார்பின் வீச்சகமானது துணைச்சார்பகத்தின் உட்கணமாகும். மேலும் சார்பின் முதல் நிபந்தனையானது சார்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கண்டிப்பாக பிம்பத்தினைப் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்று கூறுகிறது. இரண்டாம் நிபந்தனையானது சார்பகத்திலுள்ள உறுப்பானது இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட பிம்பங்களைப் பெற்றிருக்க கூடாது என்றும் கூறுகிறது. ஒரு தொடர்பின் சார்பகத்தை நாம் A என்று அழைக்கவில்லை என்பதனை கவனத்தில் கொள்ளவும். பிம்பங்கள் உள்ள A -ன் உறுப்புகளின் கணமே தொடர்பின் சார்பகமாகும். இயல்பாகவே, ஒருவருக்கு கீழ்க்காணும் ஐயங்கள் எழலாம்.

- ஆங்கில வரையறையில், பிம்பம் a -க்கு நிச்சயப் பெயர்க்குறியான "*the*" என்பதையும், b -ன் முன்பிம்பத்திற்கு நிச்சயமற்ற பெயர்க்குறியான "*a*" என்பதையும் ஏன் பயன்படுத்துகிறோம்?
- சார்பகத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கண்டிப்பாக பிம்பங்களைப் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்று நிபந்தனையில் கூறப்பட்டுள்ளது. அதே போன்று துணைச்சார்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் முன்பிம்பங்களைப் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனை ஏதேனும் உண்டா? இல்லையெனில் ஏன்?

- சார்பகத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேலான பிம்பங்கள் இருக்க இயலாது என்ற நிபந்தனையை அறிவோம். அதே போன்று துணைச்சார்பகத்திலுள்ள ஒரு உறுப்புக்கு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேலான முன்பிம்பங்கள் இருக்க இயலுமா? இல்லையெனில் காரணம் யாது?

சார்பகத்திலுள்ள ஒரு உறுப்புக்கு ஒரே ஒரு பிம்பம் மட்டுமே இருக்கும். ஆனால் வரையறையின்படி துணைச்சார்பகத்திலுள்ள ஒரு உறுப்புக்கு ஒன்றுக்கு மேலான முன்பிம்பங்கள் இருக்க இயலும். எனவே சார்பகத்திலுள்ள உறுப்புக்கு பிம்பத்தைப் பற்றிப் பேசும்போது நிச்சயமான "the" யும், முன்பிம்பங்களைப் பற்றி பேசும்போது நிச்சயமற்ற பெயர்க்குறி 'a' உம் பயன்படுத்தப் படுகிறது. கடைசி இரு வினாக்களுக்கு எந்தவித நிபந்தனைகளும் இல்லை. இதனை "மாணவர்கள் – மதிப்பெண்கள்" இடையேயான உதாரணம் மூலம் அறியலாம்.

எல்லா சார்பும் தொடர்பாகும் என்பது உண்மை என்றாலும் எல்லாத் தொடர்பும் சார்பாகும் என்று நம்மால் கூற இயலாது.

$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 4)\}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

f என்பது சார்பாக அமையுமா? கணம் $\{a, b, c, d\}$ -லிருந்து கணம் $\{1, 2, 4\}$ -க்கு இது சார்பாக அமையும். கணம் $\{a, b, c, d, e\}$ -லிருந்து கணம் $\{1, 2, 3, 4\}$ -க்கு இது சார்பாகாது. ஏனெனில் e என்ற உறுப்பு பிம்பத்தைப் பெற்றிருக்கவில்லை. கணம் $\{\mathrm{a, b, c, d}\}$ -லிருந்து கணம் $\{1, 2, 3, 5\}$ -க்கு இது சார்பாகாது. ஏனெனில் d -ன் பிம்பம் துணைச்சார்பகத்தில் இல்லை. அதாவது f என்பது $\{a, b, c, d\} \times \{1, 2, 3, 5\}$ -ன் உட்கணமாக அமையவில்லை. எனவே எப்பொழுதெல்லாம் சார்புகளைக் கருதுகிறோமோ அப்பொழுதெல்லாம் சார்பகம் மற்றும் துணைச்சார்பகம் வெளிப்படையாகக் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.1 -ம் ஒரு சார்பு ஆகும். அதன் சார்பகம் $\{L, E, T, U, S, W, I, N\}$ மற்றும் துணைச்சார்பகம் $\{O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ ஆகும். மேலும் விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.3 கூட ஒரு சார்பாக அமையும். அதன் சார்பகம் $\{a, b, ..., z\}$ மற்றும் துணைச்சார்பகம் $\{1, 2, 3, ..., 26\}$.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.2ல் மூன்று தொடர்புகள் உள்ளது.

(i) $y = 2x$ (ii) $y = x^2$ (iii) $y^2 = x$

தெளிவாக முதல் இரண்டும் சார்புகள் ஆகும். ஆனால் மூன்றாவது உதாரணத்தில் சார்பகமும் துணைச்சார்பகமும் $\mathbb{R}$ எனும்போது சார்பு அல்ல. மூன்றாவது உதாரணத்தில் ஒரே x -க்கு, நமக்கு இரண்டு y மதிப்புகள் கிடைப்பது சார்பின் வரையறைக்கு முரணானது. ஆனால் இரண்டு தொடர்புகளாக அதாவது $y = \sqrt{x}$ மற்றும் $y = -\sqrt{x}$ எனப் பிரித்து எழுதும்போது இரண்டும், சார்பகங்களாக குறையற்ற மெய்யெண்களாகவும் துணைச்சார்பகங்களாக முறையே $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ ஆகக் கொண்டு சார்புகளாக அமையும்.

1.6.1 சார்புகளை விவரிக்கும் வழிமுறைகள் (ways of representing functions)

(a) அட்டவணை முறை (Tabular form)

சார்பகத்தின் உறுப்புகள் $x_1, x_2, ..., x_n$ என வரிசைப்படுத்தும்போது அட்டவணை முறையைப் பயன்படுத்தலாம். சார்பக மதிப்புகளான $x_1, x_2, ..., x_n$ மற்றும் அதற்குரிய சார்பின் மதிப்புகளான $y_1, y_2, ..., y_n$ முதலியன திட்டவட்டமான வரிசையில் பின்வருமாறு அட்டவணையாக அமைக்கலாம்.

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

(b) வரைபட முறை (Graphical representation)

சார்பகம் மற்றும் துணைச்சார்பகம் ஆகியவை $\mathbb{R}$-ன் உட்கணங்களாக அமையும்போது, x -அச்சானது சார்பகத்தையும், y -அச்சானது துணைச்சார்பகத்தையும் xy -தளத்தில் குறிக்கும். விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.2 -ல் சார்புகளை $f(x) = 2x$, $f(x) = x^2$ எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளதை நினைவு கூர்வோம். பொதுவாக, x ஆனது சாரா மாறியாகவும், y ஆனது சார்ந்த மாறியாகவும் செயல்படும். x என்பதனைக் கோணவீச்சம் அல்லது சார்பின் மாறி என்றும் $f(x)$ -ஐ x-ல் சார்பு f-ன் மதிப்பு என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

(c) பகுத்தாய்வு முறை (Analytical representation)

சார்பியல் தொடர்பு $y = f(x)$ ஆகவும், f ஆனது ஒரு பகுப்பாய்வு கோவையை குறிப்பதாக இருப்பின், x ஆல் உருவாக்கப்பட்ட சார்பு y -ஐ பகுப்பாய்வு முறையில் எழுதலாம்.

$x^3 + 5$, $\dfrac{sinx + cosx}{x^2+1}$, $logx + 5\sqrt{x}$ போன்றவை சில பகுப்பாய்வு கோவைகளுக்கு உதாரணங்கள் ஆகும். அதாவது குறிப்பிட்ட கணிதச் செயல்பாடுகளை நிச்சயிக்கப்பட்ட வரிசையில், மாறிலிகள் அல்லது மாறிகளை மதிப்புகளாகக் கொண்ட எண்கள், எழுத்துகள் மூலம் குறிக்கும் ஒரு குறியீட்டுத் தொடராகும்.

(i) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ (ii) $y = \sqrt{9 - x^2}$ (iii) $y = sinx + cosx$ (iv) $A = \pi r^2$

என்பவை பகுப்பாய்வு முறையில் வரையறுக்கப்பட்ட சில சார்புகள் ஆகும்.

பகுப்பாய்வு முறையில் எழுதும்போது இயற்கையாகச் சார்பகங்களை எளிமையாகக் கண்டுபிடித்து விடலாம். அதாவது, வலது புறத்தில் உள்ள பகுப்பாய்வுக் கோவையினைக் காணும் வகையில் அமைந்துள்ள x -ன் மதிப்புகளின் தொகுப்பு சார்பின் சார்பகமாகும்.

ஆகையால் சார்புகளின் இயல்பான சார்பகங்களில் சிலவற்றைக் காணலாம்

(i) $y = x^3 + 3$ -ன் சார்பகம் $(-\infty, \infty)$ (ii) $y = x^4 - 2$ -ன் சார்பகம் $(-\infty, \infty)$

(iii) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ -ன் சார்பகம் $\mathbb{R} - \{-1\}$ (iv) $y = \sqrt{4 - x^2}$ -ன் சார்பகம் $-2 \le x \le 2$

இப்போது பகுப்பாய்வு முறையில் அமைந்துள்ள, ஏற்கனவே விவரிக்கப்பட்ட

(i) $y=2x$ (ii) $y = x^2$

(iii) $y = +\sqrt{x}$ (iv) $y = -\sqrt{x}$

ஆகிய சார்புகளின் சார்பகங்களை நினைவு கூர்வோம்.

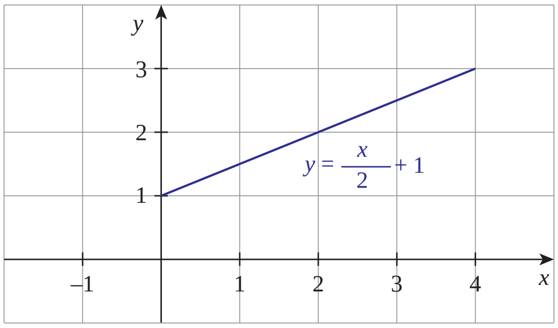
சிற்சமயங்களில் பகுதிவாரியாக வரையறுத்துள்ள சார்புகளை நாம் பயன்படுத்துவோம். உதாரணமாக, கீழ்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆகக் கருதுக.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\infty < x \le -2 \\ 2x & ; \quad -2 < x \le 3 \\ x^2 & ; \quad 3 < x < \infty \end{cases}$$

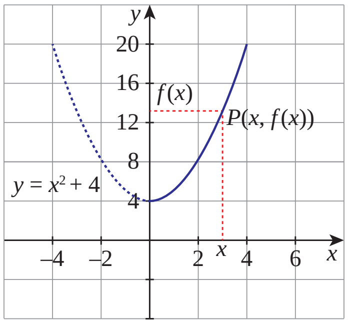
ஏதேனும் ஒரு புள்ளி x -க்கு f-ன் மதிப்பைக் காண, x-ன் மதிப்புகளைப் பொறுத்து, பொருத்தமான வரையறையைக் கையாளவேண்டும். ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணுக்கு f-ன் மதிப்பினைக் கணக்கிட, x ஆனது எந்த இடைவெளியில் உள்ளது என முதலில் கண்டறிய வேண்டும். பிறகு அதற்குரிய வரையறையைப் பயன்படுத்தி அப்புள்ளியில் f-ன் மதிப்பைக் காண வேண்டும். உதாரணமாக,

$f(6)$-ன் மதிப்பைக் காண வேண்டுமாயின், இடைவெளி $3 \le x < \infty$-ல் 6 அமைந்துள்ளதால் அதற்குரிய வரையறை $f(x) = x^2$-ஐ பயன்படுத்தி $f(6)=36$ எனக் காணலாம். இதே போன்று $f(-1) = -2, f(-5) = 0$ என மதிப்புகளைக் காணலாம்.

சார்பானது $\mathbb{R}$-ன் உட்கணத்திலிருந்து அல்லது $\mathbb{R}$-லிருந்து வரையறுக்கப்பட்டால் சார்பின் வரைபடத்தை நம்மால் வரைய இயலும். உதாரணமாக $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ என வரையறுக்கப்படும்போது $x \in [0,4]$ எனுமாறு $\left(x, \frac{x}{2}+1\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள புள்ளிகளைப் தளத்தில் குறிக்கலாம். இப்போது $(0,1)$ மற்றும் $(4,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டினைப் பெறலாம். [படம் 1.13]



படம் 1.13



படம் 1.14

இன்னொரு உதாரணமாக, $f(x) = x^2 + 4, x \ge 0$ என்ற சார்பினை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சார்பினை வரைபடம் மூலமாக படம் 1.14–ல் தரப்பட்டுள்ளது.

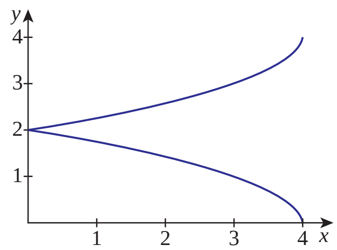
சார்பகத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி x என்க. புள்ளி x வழியாக ஒரு நிலைக்குத்துக்கோடு வரைவோம். அது வளைவரையை P என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது என்போம். அப்புள்ளி P வழியாக ஒரு கிடைமட்டக் கோடு வரைந்தால் அது y அச்சில் சந்திக்கும் புள்ளி $f(x)$ ஆகும். இதேப் போன்று துணைச்சார்பகத்தில் உள்ள புள்ளி y வழியாகக் கிடைமட்டக் கோடு வரைந்தால் y-ன் முன்-பிம்பத்தை கண்டறியலாம்.

$\mathbb{R}$-ன் உட்கணத்திலிருந்து $\mathbb{R}$-க்கு ஒரு தளத்தின் மேல் வரையப்படும் எந்த ஒரு வளைவரையையும் சார்பு என்று சொல்ல முடியுமா? இல்லை, நம்மால் கூற இயலாது. அதைக் கண்டறிய ஓர் எளிதான சோதனை உள்ளது.

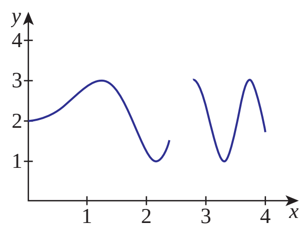
நிலைக்குத்துக் கோடு சோதனை (Vertical line test)

நாம் முன்னர் குறிப்பிட்டபடி, சார்பகத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி x வழியாகச் செல்லும் ஒரு நிலைக்குத்துக்கோடு, வளைவரையைச் சில புள்ளிகளில் சந்திக்கலாம். அப்போது y -ன் ஆயத்தொலை $f(x)$ ஆகும். சார்பகத்தில் உள்ள புள்ளி x வழியாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக்கோடு வளைவரையை ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட புள்ளிகளில் சந்தித்தால், ஒரு x க்கு பல $f(x)$ மதிப்புகளை நாம் பெறலாம். ஆனால் இவ்வாறு சார்பில் அனுமதிக்கப்படுவதில்லை. மேலும், சார்பகத்திலுள்ள புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக்கோடு வளைவரையைச் சந்திக்கவில்லை எனில் x -க்கு எந்த பிம்பமும் அங்கு இருக்காது. இதுவும் சார்பில் சாத்தியம் இல்லை. எனவே,

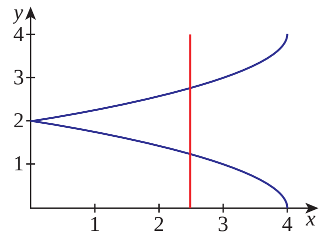
"சார்பகத்தில் உள்ள புள்ளி x வழியாகச் செல்லும் நேர்குத்துக்கோடு வளைவரையை ஒரு புள்ளிக்கு மேல் சந்தித்தாலோ அல்லது சந்திக்காமலிருந்தாலோ அப்பொழுது அவ்வளைவரை சார்பைக் குறிக்காது என்று நாம் கூறலாம்."



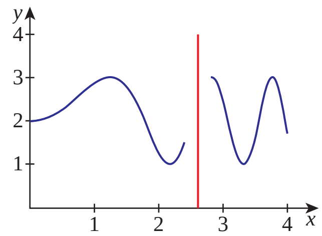
படம் 1.15



படம் 1.16



படம் 1.17



படம் 1.18

படம் 1.15 -ல் [0, 4] -லிருந்து $\mathbb{R}$ -க்கு வரையப்பட்டுள்ள வளைவரையானது சார்பாகாது. ஏனெனில் படம் 1.17-ன் படி நிலைக்குத்துக்கோடு வளைவரையை ஒரு புள்ளிக்கு மேல் சந்திக்கிறது. படம் 1.16-ல் காட்டப்பட்டுள்ள வளைவரையும் $[0, 4]$ -லிருந்து $\mathbb{R}$-க்கு சார்பாகாது. ஏனெனில் படம் 1.18 -ன் படி $x = 2.5$ -ல் வரையப்படும் நிலைக்குத்துக்கோடு வளைவரையை எங்கும் சந்திக்கவில்லை.

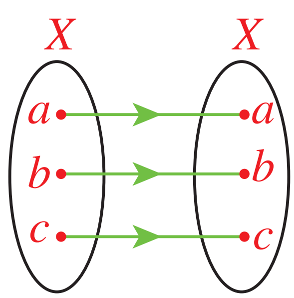
தரப்பட்டுள்ள வளைவரை ஒரு சார்பா? இல்லையா? என நிலைகுத்துக்கோடு வரைந்து கண்டறியும் முறையை நிலைக்குத்துக் கோடு சோதனை என்று கூறலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.2 -ல் உள்ள மூன்றாவது வளைவரை $y^2 = x$ ஆனது நிலைக்குத்துக்கோடு சோதனை மூலம் $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ -ல் அது சார்பு இல்லை எனப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

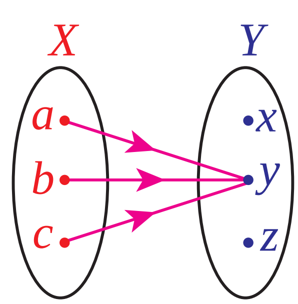
1.6.2 சில எளிமையான சார்புகள் (Some elementary functions)

அடிக்கடி பயன்படுத்தும் சில சார்புகளை அதன் பெயர்கள் மூலம் அறியலாம். சிலவற்றை இங்குப் பட்டியலிடுவோம்.

(i) ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் X என்க. $f\colon X \to X$ என்ற சார்பானது $f(x) = x$ என அனைத்து $x \in X$ -க்கும் வரையறுக்கப்பட்டால் அதனை X -ன் மீதான **சமனிச் சார்பு (identity function)** என்று அழைக்கலாம். மேலும் அதனை I_X எனவும் குறிப்பிடலாம். [படம் 1.19]



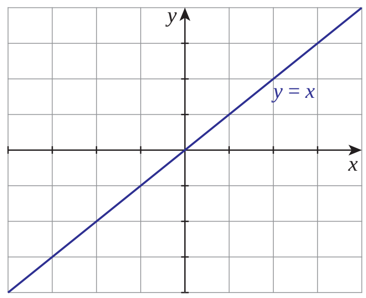
படம் 1.19



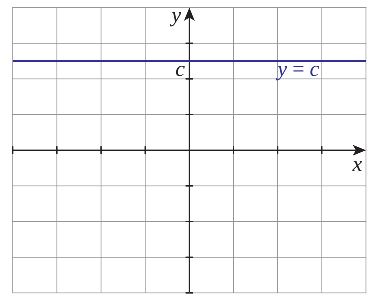
படம் 1.20

(ii) X மற்றும் Y என்பவை இரு கணங்கள். மேலும் Y -ல் உள்ள ஒரு நிலையான உறுப்பு c என்க. $f\colon X \to Y$ என்ற சார்பானது $f(x) = c$ என அனைத்து $x \in X$ -க்கும் வரையறுக்கப்பட்டால் அதனை **மாறிலிச் சார்பு (constant function)** என்று கூறலாம். மாறிலிச் சார்பின் மதிப்புகள் சார்பகம் முழுமைக்கும் ஒரே மதிப்பாகும் [படம் 1.20].

இங்கு X மற்றும் Y ஆகிய கணங்கள் $\mathbb{R}$ ஆக இருப்பின் சமனிச்சார்பு மற்றும் மாறிலிச் சார்பின் வரைபடங்கள் முறையே படம் 1.21 மற்றும் 1.22 ஆக அமையும்.



படம் 1.21

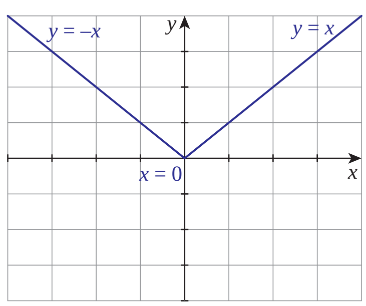


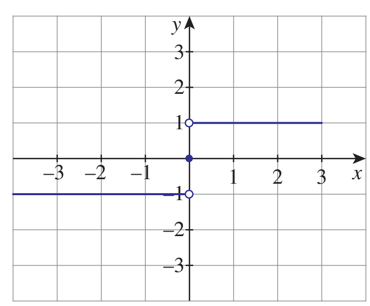
படம் 1.22

ஏதேனும் ஒரு கணம் X என்க. அனைத்து $x \in X$ –க்கும் $f(x)=0$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அதனை **பூஜ்ஜிய சார்பு (zero function)** என்று அழைக்கப்படும்.

(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $f(x) = |x|$ என வரையறுக்கப்பட்டால் (இங்கு $|x|$ என்பது x ன் மட்டு அல்லது எண்ணளவு மதிப்பாகும்) அதனை **மட்டுச் சார்பு** அல்லது **எண்ணளவு சார்பு (modulus or absolute value function)** எனக் கூறலாம் [படம் 1.23]. $|x|$ என்பது கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$|x| = \begin{cases} -x & ; \; x < 0 \\ 0 & ; \; x = 0 \\ x & ; \; x > 0 \end{cases} \text{ அல்லது } \quad |x| = \begin{cases} -x & ; \; x \le 0 \\ x & ; \; x > 0 \end{cases} \text{ அல்லது } \quad |x| = \begin{cases} -x & ; \; x < 0 \\ x & ; \; x \ge 0 \end{cases}$$





படம் 1.23

படம் 1.24

(iv) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & ; \; x \ne 0 \\ 0 & ; \; x = 0 \end{cases}$$

, என வரையறுக்கப்பட்டால், இச்சார்பினை **குறியீட்டுச்சார்பு (signum function)** எனலாம். இச்சார்பினை sgn சார்பு எனவும் குறிப்பிடலாம் [படம் 1.24].

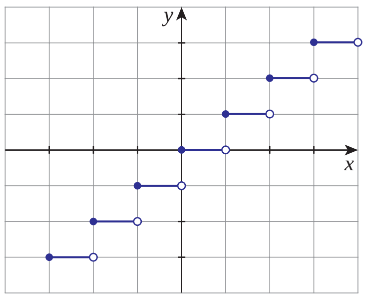
(v) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பில் $f(x)$ என்பது, x -ஐ விடக் குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கும் மீப்பெரு முழு எண் என வரையறுக்கப்பட்டால் அச்சார்பு **மீப்பெரு முழு எண் சார்பு (greatest integer function)** அல்லது floor சார்பு என அழைக்கப்படும். இச்சார்பினை $\lfloor x \rfloor$ எனக் குறிப்பிடலாம் [படம்1.25].

(vi) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பில் $f(x)$ என்பது, x -ஐ விட அதிகமாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கும் மீச்சிறு முழு எண் என வரையறுக்கப் பட்டால் அச்சார்பு **மீச்சிறு முழு எண் சார்பு (smallest integer function)** அல்லது ceil சார்பு எனப்படும். இச்சார்புக்கான குறியீடு $\lceil . \rceil$ ஆகும். அதாவது இச்சார்பினை $\lceil x \rceil$ எனக் குறிப்பிடலாம் [படம் 1.26]. மேற்குறிப்பிட்ட இரு சார்புகளையும் **படிநிலைச் சார்புகள் (step functions)** எனவும் அழைக்கலாம். பின்வருவனவற்றைக் கவனிக்கவும்.

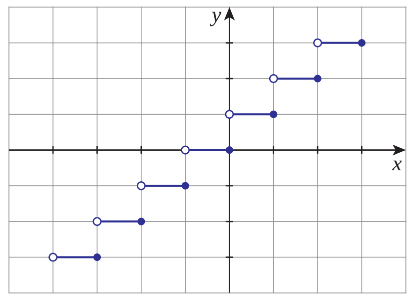
$\left\lfloor 1\frac{1}{5} \right\rfloor = 1$, $\lfloor 7.23 \rfloor = 7$, $\left\lfloor -2\frac{1}{2} \right\rfloor = -3$ (-2 அல்ல), $\lfloor 6 \rfloor = 6$ மற்றும் $\lfloor -4 \rfloor = -4$

$\left\lceil 1\frac{1}{5} \right\rceil = 2$, $\lceil 7.23 \rceil = 8$, $\left\lceil -2\frac{1}{2} \right\rceil = -2$ (-3 அல்ல), $\lceil 6 \rceil = 6$ மற்றும் $\lceil -4 \rceil = -4$

இந்தச் சார்புகளின் பெயர்களுக்கும் சார்புகளைக் குறிக்கின்ற குறியீடுகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பானது நாம் பொதுவாக அறைக்குப் பயன்படும் மேற்கூரை மற்றும் தரையைக் குறிக்கும் வார்த்தைகளாகும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

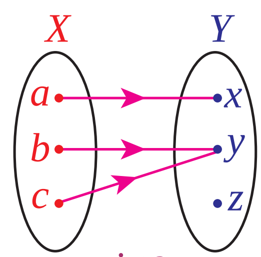


படம் 1.25



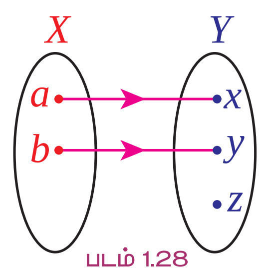
படம் 1.26

1.6.3 சார்புகளின் வகைகள் (types of functions)



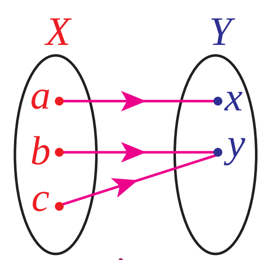
படம் 1.27

சார்புகளை, அதன் தேவையினைப் பொறுத்துப் பல வகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருந்தாலும், நாம் இரண்டு அடிப்படை வகைகளில் கவனம் செலுத்தப் போகிறோம். அவை **ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்பு** ஆகும்.



படம் 1.28

படம் 1.27 மற்றும் படம் 1.28 ஆகியவற்றில் தரப்பட்டுள்ள இரண்டு எளிய சார்புகளைப் பார்ப்போம். முதல் சார்பில் சார்பகத்தில் உள்ள இரண்டு உறுப்புகள் b,c ஆகியவை y என்ற ஒரே உறுப்புடன் கோர்க்கப்பட்டுள்ளது. அதே சமயம் படம் 1.28 -ல் அவ்வாறு கோர்க்கப்படவில்லை. இரண்டாவது வகையாக படம் 1.28 -ல் குறிப்பிட்டுள்ள மாதிரியான சார்புகள் ஒன்றுக்கொன்றான சார்புகளுக்கு உதாரணங்களாகும்.



படம் 1.29

தற்போது, படங்கள் 1.28 மற்றும் 1.29 ஆகியவற்றை உற்றுநோக்குவோம். படம் 1.28 -ல் z என்ற உறுப்புக்கு முன்பிம்பம் இல்லை. ஆனால் படம் 1.29 -ல் அவ்வாறு முன்பிம்பம் இல்லாத உறுப்புகள் இல்லை. படம் 1.29 -ல் குறிப்பிட்டுள்ள மாதிரியான சார்பு மேற்கோர்த்தல் சார்புக்கு உதாரணமாகும். இப்போது ஒன்றுக்கொன்றான மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்புகளை வரையறுப்போம்.

வரையறை 1.7

$f: A \to B$ என்ற சார்பு, **ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாக (one–to–one function)** இருக்க வேண்டுமாயின், $x,y \in A$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ எனுமாறு [அல்லது நிகராக $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$] அமைய வேண்டும். $f: A \to B$ என்ற சார்பு, **மேற்கோர்த்தல் சார்பாக (onto function)** இருக்க வேண்டுமாயின், ஒவ்வொரு $b \in B$ -க்கும், $f(a) = b$ எனுமாறு குறைந்தபட்சம் ஒரு உறுப்பு $a \in A$ என இருக்கவேண்டும். அதாவது f–ன் வீச்சகம் B ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

ஒன்றுக்கொன்றான சார்பினை **உள் செலுத்தும் சார்பு (injective)** என்றும், மேற்கோர்த்தல் சார்பினை **மேல் செலுத்தும் சார்பு (surjective)** என்றும் அழைக்கலாம். மேலும் ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தல் என இரண்டையும் பெற்றிருந்தால் அச்சார்பை **இருபுறச் சார்பு (bijective)** என்று கூறலாம்.

$f: A \to B$ என்ற சார்பு ஒன்றுக்கொன்றானது என நிரூபிக்கக் கீழ்க்காணும் ஏதேனும் ஒன்றினை நிரூபித்தால் போதுமானது.

- $x \neq y$ எனில் $f(x) \neq f(y)$ அல்லது
- $f(x) = f(y)$ எனில் $x = y.$.

ஒவ்வொரு சமனிச்சார்பும் ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்பு என்று எளிதாக அறியமுடியும். மாறிலிச் சார்பில் துணைச்சார்பகம் ஒரே ஒரு உறுப்பினைப் பெற்றில்லாதவரை அது மேற்கோர்த்தல் சார்பு ஆகாது.

கீழ்வருவன சில முக்கியமான எளிய முடிவுகளாகும்.

A மற்றும் B ஆகியவை m மற்றும் n உறுப்புகள் கொண்ட இரு கணங்கள் என்க.

(i) $m > n$ எனில் A -லிருந்து B -க்கு ஒன்றுக்கொன்று சார்பு கிடையாது.

(ii) A -லிருந்து B -க்கு ஒன்றுக்கொன்று சார்பு இருந்தால் அப்போது $m \leq n$

(iii) $m < n$ எனில் A -லிருந்து B -க்கு மேற்கோர்த்தல் சார்பு கிடையாது.

(iv) A -லிருந்து B -க்கு மேற்கோர்த்தல் சார்பு இருந்தால் $m \geq n$.

(v) A -லிருந்து B -க்கு இருபுறச் சார்பாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $m = n$ ஆகும்.

(vi) A -லிருந்து B -க்கு இருபுறச் சார்பாக இல்லாமல் இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $m \neq n$ ஆகும்.

குறிப்பு: ஒரு சார்பு மேற்கோர்த்தல் இல்லையெனில் அதனை உள் சார்பு (into) என அழைக்கலாம். அதாவது ஒரு சார்பு மேற்கோர்த்தல் இல்லையெனில் வீச்சகமானது துணைச்சார்பகத்தின் தகு உட்கணமாக அமையும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுக்களை இப்பொழுது பார்ப்போம்.

(i) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c, d, e\}$ மற்றும் $f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (4, b)\}$.

இச்சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு ஆனால் மேற்கோர்த்தல் அல்ல.

(ii) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b\}$ மற்றும் $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$.

இச்சார்பு ஒன்றுக்கொன்று அல்ல. மேலும் மேற்கோர்த்தலும் அல்ல.

(iii) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a\}$ மற்றும் $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$.

இச்சார்பு ஒன்றுக்கொன்று அல்ல. ஆனால் மேற்கோர்த்தல் சார்பாகும். இது எடுத்துக்காட்டு (ii) போலவே உள்ளது. ஆனால் துணைச்சார்பகம் மாறியுள்ளது. எனவே சார்பானது

மேற்கோர்த்தலா? இல்லையா என்பதனைத் தீர்மானிப்பதற்கு, சார்பின் துணைச்சார்பகம் மிகவும் முக்கியமானதாகும்.

(iv) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ மற்றும் $f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, b)\}$.

இந்தச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றும் இல்லை, மேற்கோர்த்தலும் இல்லை.

(v) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $f = \{(1, a), (2, c), (3, d), (4, b)\}$

இந்தச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தலும் ஆகும்.

(vi) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ மற்றும் $f = \{(1, a), (2, c), (3, e)\}$

இது சார்பே அல்ல. இது வெறும் தொடர்பு மட்டுமே ஆகும்.

(vii) X என்பது k உறுப்புகள் உள்ள முடிவுறு கணம் என்க. இப்போது X -லிருந்து $\{1,2,3,...,k\}$ என்ற கணத்திற்கு இருபுறச் சார்பு உருவாக்கலாம்.

தெரிந்த கணங்களின் மீது, விதிகள் வழியாக வரையறுக்கப்படும் சில சார்புகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.14 கீழ்க்காணும் சார்புகள் ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்புகளா எனச் சரிபார்க்கவும்.

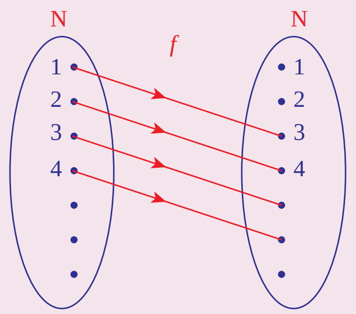
(i) $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ எனும் சார்பு $f(n) = n + 2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) $f:\mathbb{N} \cup \{-1, 0\} \to \mathbb{N}$ எனும் சார்பு $f(n) = n + 2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

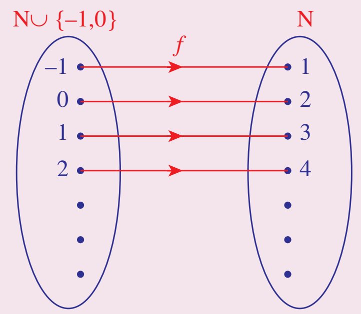
தீர்வு:

(i) $f(n) = f(m)$ என எடுத்துக்கொண்டால் $n + 2 = m + 2$. இதிலிருந்து $m = n$. இதனால் f ஆனது ஒன்றுக்கொன்று ஆகும். 1 என்ற உறுப்பிற்கு முன்பிம்பம் இல்லை என்பதால் இச்சார்பு மேற்கோர்த்தல் அல்ல [படம் 1.30].

(ii) மேற்கண்டவாறு இச்சார்பு ஒன்றுக்கொன்றாகும். துணைச்சார்பகத்தில் m இருந்தால் $m - 2$ என்பது சார்பகத்தில் இருக்கும். மேலும் $f(m-2) = (m-2) + 2 = m$. இதனால் துணைச்சார்பகத்திலுள்ள m என்ற உறுப்பு முன்பிம்பத்தைக் கொண்டுள்ளது. எனவே இச்சார்பு மேற்கோர்த்தல் ஆகும் [படம் 1.31].



படம் 1.30



படம் 1.31

குறிப்பு: இரண்டாவதாக குறிப்பிட்டுள்ள சார்பு முதலில் உள்ள சார்பு போலவே தோன்றும். ஆனால் சார்பகங்கள் வெவ்வேறாகும். இதிலிருந்து சார்பானது மேற்கோர்த்தலா, இல்லையா என்பதனைத் தீர்மானிப்பதற்கு, சார்பின் சார்பகம் முக்கியம் எனத் தெரிந்து கொள்ளலாம். ஒரு சார்பு ஒன்றுக்கொன்று என்பதனை துணைச்சார்பகம் தீர்மானிப்பதில்லை. ஆனால் துணைச்சார்பகம் மேற்கோர்த்தலை தீர்மானிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.15 கீழ்க்காணும் சார்புகள் ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்புகளா எனச் சரிபார்க்கவும்.

(i) $f{:}\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ எனும் சார்பு $f(n) = n^2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு $f(n) = n^2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

தீர்வு

(i) $f(m)=f(n) \Rightarrow m^2 = n^2 \Rightarrow m = n$ ($m, n \in \mathbb{N}$ ஆதலால்). எனவே f ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு. ஆனால், துணைச்சார்பகத்திலுள்ள வர்க்கமற்ற உறுப்புகளுக்கு முன்பிம்பங்கள் கிடையாது. எனவே f மேற்கோர்த்தல் சார்பு அல்ல

(ii) சார்பகத்திலுள்ள இரு வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு ஒரே ஒரு உறுப்பு பிம்பமாக அமைகிறது. எனவே ஒன்றுக்கொன்றானது அல்ல. மேலும் f –ன் வீச்சகம், துணைச்சார்பகத்தின் தகு உட்கணமாக அமைகிறது. எனவே f ஆனது, மேற்கோர்த்தலும் அல்ல.

தற்போது விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.1 -ல்

$$C=\{ L, E, T ,U, S, W, I, N \} \text{ மற்றும் } D=\{ O, H, W, X ,V, Z, L, Q\} \text{ மற்றும்}$$

$$f(L)=O, f(E)=H, f(T)=W, f(U)=X, f(S)=V, f(W)=Z, f(I)=L, f(N)=Q$$

என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு $f{:}C \to D$, ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தலுமாகும்.

ஆனால் விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.3 -ல் $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(z) = 26$ என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு $f{:}A \to \mathbb{N}$, ஒன்றுக்கொன்று ஆனால் மேற்கோர்த்தல் அல்ல. $\mathbb{N}$ -க்கு பதிலாக $\{1,2,3,\ldots,26\}$ என எடுத்துக்கொண்டால் ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தலும் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.16 கீழ்க்காணும் சார்புகள் ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்புகளா எனச் சரிபார்க்கவும்.

(i) $f{:}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு, $f(x) = \frac{1}{x}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது

(ii) $f{:}\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு $f(x) = \frac{1}{x}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது

தீர்வு:

(i) இது சார்பே அல்ல. ஏனெனில் $x=0$ எனும் மதிப்பிற்கு $f(x)$ வரையறுக்கப்படவில்லை

(ii) இது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு, ஆனால் மேற்கோர்த்தல் இல்லை. காரணம், துணைச்சார்பகத்திலுள்ள $x=0$ எனும் உறுப்புக்கு முன்பிம்பம் இல்லை.

குறிப்பு: $\mathbb{R}-\{0\}$ என்பதைத் துணைச்சார்பகமாக இரண்டாவது உதாரணத்திற்கு எடுத்துக் கொண்டால் இது இருபுறச் சார்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17 $f:\mathrm{R}-\{-1,1\}\to\mathrm{R}$ எனும் சார்பினை $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, என வரையறுத்தால் f என்ற சார்பு ஒன்றுக்கொன்றா இல்லையா என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு:

$f(x) = f(y)$ என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{y}{y^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad x(y^2-1) = y(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad xy^2-x-yx^2+y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-x)(xy+1) = 0$$

இதிலிருந்து $x=y$ அல்லது $xy=-1$. எனவே $xy=-1$ என்றவாறு x மற்றும் y என்ற இரு எண்களை நாம் தேர்ந்தெடுத்தால் அப்பொழுது $f(x) = f(y)$ என கிடைக்கும்.

$\left(2,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(7,-\frac{1}{7}\right)$, $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ என எண்ணற்ற பல உறுப்புகள் $xy=-1$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது, $f(2)=f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{2}{3}$ ஆகும். இது $f(x)= f(y)\Rightarrow x=y$ என்ற நிபந்தனையை பூர்த்தி செய்யாததால், f ஒன்றுக்கொன்றானது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1.18 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ என்ற சார்பு, $f(x) = 2x^2-1$ எனுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் $17, 4$ மற்றும் -2 ஆகியவற்றின் முன்பிம்பங்களைக் காண்க.

தீர்வு:

17 -ன் முன்பிம்பத்தைக் கண்டறிய நாம் $2x^2-1=17$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவேண்டும். இதன் இரு தீர்வுகளான 3 மற்றும் -3 என்பவை f -ன் கீழ் 17 -ன் முன்பிம்பங்களாகும். சமன்பாடு $2x^2-1 = 4$ என்பது $\sqrt{\frac{5}{2}}$ மற்றும் $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ என்ற இரு முன்பிம்பங்களை 4 என்ற உறுப்புக்கு கொடுக்கின்றது. மேலும், -2 -ன் முன்பிம்பம் கண்டறிய $2x^2-1 = -2$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வேண்டும். $x^2=-\frac{1}{2}$ என்பதற்கு $\mathbb{R}$ -ல் எந்த ஒரு தீர்வும் கிடையாது. எனவே -2 ஆனது f -ன் கீழ் முன்பிம்பத்தைப் பெறவில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.19 $f:[-2,2]\to B$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x^3$, என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் f ஒரு மேற்கோர்த்தலாக அமைய B –ஐக் காண்க.

தீர்வு:

சார்பின் குறைந்தபட்ச மதிப்பு $f(-2)$ மற்றும் அதிகபட்ச மதிப்பு $f(2)$ ஆகும். இவை துணைச்சார்பகத்தில் அமைகிறது . மேலும் அவற்றின் மதிப்பு முறையே -16 மற்றும் 16 ஆகும். எனவே $B=[-16, 16]$ என இருக்கும்போது f மேற்கோர்த்தலாக அமையும்.

குறிப்பு: $f(x) = 2x^3$ என்ற சார்பு $[-2,\ 2]$ என்ற இடைவெளியில் ஏறும் சார்பாக இருப்பதால் இடைவெளியின் இடப்பக்க மதிப்பில் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பினையும் வலப்பக்க மதிப்பில் சார்பில் மீப்பெரு மதிப்பினையும் பெறும் [ஏறும்/இறங்கும் சார்பினைப் பற்றி பின்னர் வரும் பகுதிகள் மூலம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.]

XI_Maths_Ch1_V-1_TM.indd 37 15-12-2021 13:49:23

எடுத்துக்காட்டு 1.20 $f(x) = x\,|x|$ என்ற சார்பானது $[-2, 2]$ -ல் வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் அது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பா எனச் சரிபார்க்கவும். அது ஒன்றுக்கொன்றாக இருப்பின் இருபுறச் சார்பாக அமைய பொருத்தமான துணைச்சார்பகத்தைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு:

$f(x) = f(y)$ எனுமாறு $x, y \in [-2, 2]$ உள்ளது என்க. $y = 0$ எனில் $x = 0$. எனவே $y \neq 0$ என்க. இதனால் $x \neq 0$. இப்பொழுது $f(x) = f(y) \Rightarrow x|x| = y|y| \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{|y|}{|x|}$. ஆனால் $\frac{|y|}{|x|} > 0$ என்பதனால் $\frac{x}{y} > 0$. அதனால் x மற்றும் y இரண்டுமே மிகையாகவோ அல்லது இரண்டுமே குறையாகவோ இருக்கும்; இருவழிகளிலும் $x^2 = y^2$ ஆகும்.

எனவே $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2$ என நாம் பெற முடியும். மேலும் x மற்றும் y இரண்டுமே மிகையாகவோ அல்லது இரண்டுமே குறையாகவோ இருக்கக் கூடிய ஒரே சாத்தியக்கூறு $x = y$ மட்டுமே. ஆதலால் f ஆனது ஒன்றுக்கொன்று ஆகும். இப்போது $x < 0$ எனும்பொழுது, $f(x) = -x^2$ மற்றும் $x \geq 0, f(x) = x^2$. எனவே வீச்சகம் $[-4, 4]$. $[-2, 2]$-லிருந்து $[-4, 4]$ -க்கு இச்சார்பு இருபுறச்சார்பாகும்.

குறிப்பு: $f(x) = x|x|$ என்ற சார்பு ஏறும் சார்பாகும்.

கிடைமட்டக்கோட்டு சோதனை (Horizontal test)

நிலைக்குத்துக்கோடு சோதனையைப் போலவே உள்ள ஒரு சோதனை கிடைமட்டக்கோடு சோதனையாகும். இதன் மூலம் சார்பானது ஒன்றுக்கொன்றா, மேற்கோர்த்தலா எனச் சரிபார்க்கலாம். தளத்தில் உள்ள வளைவரையாகச் சார்பு தரப்பட்டுள்ளது என்க. துணைச்சார்பகத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி y வழியாக வரையப்படும் கிடைமட்டக்கோடு வளைவரையில் சில புள்ளிகளில் சந்திக்கும். அப்பொழுது கிடைக்கும் x ஆயத்தொலை புள்ளிகள் அனைத்தும் y -ன் முன்பிம்பங்களை கொடுக்கும்.

(i) துணைச்சார்பகத்தில் உள்ள y வழியாக வரையப்படும் கிடைமட்டக்கோடு வளைவரையைச் சந்திக்கவில்லை எனில், அப்பொழுது குறிப்பிட்ட y ஆனது எவ்வித முன்பிம்பமும் பெற்றிருக்கவில்லை எனப் பொருள். எனவே சார்பானது மேற்கோர்த்தல் அல்ல.

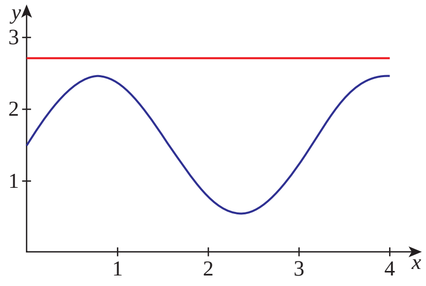
(ii) துணைச்சார்பகத்தில் குறைந்தபட்சம் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கிடைமட்டக்கோடு வளைவரையை ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட புள்ளிகளில் சந்தித்தால், சார்பு ஒன்றுக்கொன்றானது அல்ல.

(iii) வீச்சகத்திலுள்ள அனைத்து y - க்கும், y வழியாகச் செல்லும் கிடைமட்டக்கோடு வளைவரையை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே சந்திக்குமானால் ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு ஆகும்.

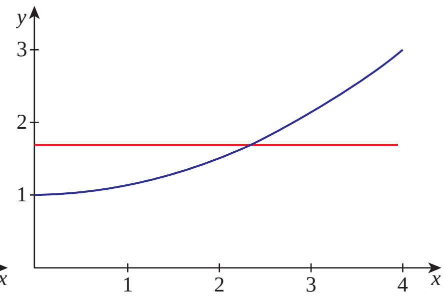
எனவே கீழ்வருமாறு கூறலாம்.

வளைவரையால் குறிக்கப்படும் சார்பானது ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமான நிபந்தனை என்னவெனில் "வீச்சகத்திலுள்ள அனைத்து y - க்கும், y வழியாகச் செல்லும் கிடைமட்டக் கோடு, வளைவரையை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே சந்திக்க வேண்டும்."

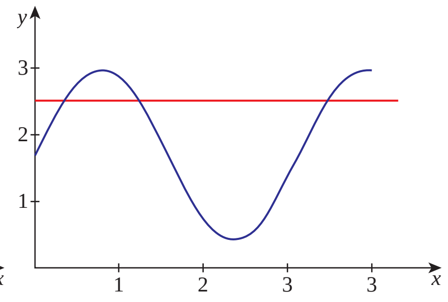
வளைவரையில் குறிக்கப்படும் சார்பானது மேற்கோர்த்தலாக இருக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை என்னவெனில் "வீச்சகத்திலுள்ள அனைத்து y -க்கும், y வழியாகச் செல்லும் கிடைமட்டக் கோடு வளைவரையை குறைந்த பட்சம் ஒரு புள்ளியிலாவது சந்திக்க வேண்டும்."



படம் 1.32



படம் 1.33



படம் 1.34

துணைச்சார்பகத்தில் $[1, 3]$ என்ற இடைவெளி உட்கணமாக அமையும்போது படம் 1.32 இல் தரப்பட்டுள்ள வளைவரையைக் குறிக்கும் சார்பானது $[0, 4]$ என்ற இடைவெளியில் மேற்கோர்த்தல் அல்ல. படம் 1.33 இல் தரப்பட்டுள்ள வளைவரையானது $[0, 4]$ -லிருந்து $\mathbb{R}$ -க்கு ஒன்றுக்கொன்றானது. ஆனால் படம் 1.34 -ல் தரப்பட்டுள்ள வரை $[0, 4]$ -லிருந்து $\mathbb{R}$ -க்கு வரையப்பட்டுள்ள வளைவரை ஒன்றுக்கொன்றானது அல்ல.

தரப்பட்டுள்ள வளைவரை ஒன்றுக்கொன்றான சார்பா, மேற்கோர்த்தல் சார்பா அல்லது இல்லையா எனக் கிடைமட்டக்கோடு வரைந்து சோதிக்கும் முறையை நாம் கிடைமட்டக்கோடு சோதனை என்று கூறலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.2 -ல் 1.5 -லிருந்து 1.7 வரையிலான படங்களை உற்று நோக்கும்போது கீழ்க்காணும் முடிவுகள் கிடைக்கும்.

(i) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு $f(x) = 2x$ என வரையறுத்தால் அது ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தலாக இருக்கும்.

(ii) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு $f(x) = x^2$ என வரையறுத்தால் அது ஒன்றுக்கொன்று அல்ல மற்றும் மேற்கோர்த்தலும் அல்ல.

(iii) $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு $f(x) = +\sqrt{x}$ என வரையறுத்தால் அது ஒன்றுக்கொன்று ஆனால் மேற்கோர்த்தல் அல்ல.

(iv) $f:[0, \infty) \to [0, \infty)$ எனும் சார்பு $f(x) = +\sqrt{x}$ என வரையறுத்தால் அது ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தலாக இருக்கும்..

(v) $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு $f(x) = -\sqrt{x}$ என வரையறுத்தால் அது ஒன்றுக்கொன்று ஆயினும் மேற்கோர்த்தல் அல்ல.

(vi) $f:[0, \infty) \to (-\infty, 0]$ எனும் சார்பு $f(x) = -\sqrt{x}$ என வரையறுத்தால் அது ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தலாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.21 மெய்மதிப்பு சார்பு f ஆனது $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அதன் சாத்தியமான மீப்பெரு சார்பகத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

$x^2 - 5x + 6$ இன் வர்க்கமூலத்தை நாம் கண்டறிய வேண்டும் என்பதால் சார்பகத்தில் இருக்கும் அனைத்து x -க்கும், $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ என இருக்கவேண்டும். இதற்கு, கீழ்க்காணும் வழிமுறையைக் கையாளளாம். $x^2 - 5x + 6 = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $x = 2$ மற்றும் 3 என இரு மதிப்புகள் கிடைக்கும். படம்1.35 -ல் உள்ளவாறு எண்கோடு வரைக.

படம் 1.35

இப்போது நமக்கு மூன்று இடைவெளிகள் $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ மற்றும் $(3, \infty)$ எனக் கிடைக்கும்.

(i) $(-\infty, 2)$ -ல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $x = 1$ -க்கு தெளிவாக $x^2 - 5x + 6$ ஒரு மிகையெண்.

(ii) $(2, 3)$ -ல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $x = 2.5$ –க்கு தெளிவாக $x^2 - 5x + 6$ ஒரு குறையெண்.

(iii) $(3, \infty)$ -ல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $x = 4$ –க்கு தெளிவாக $x^2 - 5x + 6$ ஒரு மிகையெண்.

$(-\infty, 2)$ மற்றும் $(3, \infty)$ ஆகிய இடைவெளிகளில் உள்ள அனைத்து x -க்கும் $x^2 - 5x + 6$ ஒரு மிகையெண். மேலும், $x = 2$ மற்றும் 3 ஆகிய மதிப்புகளில் $x^2 - 5x + 6$ பூஜ்ஜியமாகிறது. அதாவது, $(-\infty, 2]$ மற்றும் $[3, \infty)$ ஆகிய இடைவெளிகளில் $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. எனவே $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ -ன் மீப்பெரு சார்பகம் $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22 $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$ –ன் சார்பகத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

$1 - 2\cos x$ இன் மதிப்பு 0 ஆக அமையும் x மதிப்புகள் தவிர மற்ற அனைத்து $x \in \mathbb{R}$ –க்கு $f(x)$ வரையறுக்கப்படும். அதாவது $\cos x = \dfrac{1}{2}$ -ஐ பூர்த்தி செய்யும் x -ஐ தவிர மற்ற மதிப்புகளுக்கு வரையறுக்கப்படும். வேறு வகையில் கூறினால், $x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ என்பதைத் தவிரப் பிற மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ வரையறுக்கப்படும். எனவே சார்பகம் $\mathbb{R} - \left\{2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}\right\}, n \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23 $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3\cos x}$ -ன் வீச்சகம் காண்க.

தீர்வு:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ என நமக்குத் தெரியும்.}$$

$$\Rightarrow \quad -3 \leq -3\cos x \leq 3$$

$$\Rightarrow \quad 1-3 \leq 1-3\cos x \leq 1+3$$

$$\Rightarrow \quad -2 \leq 1-3\cos x \leq 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-3\cos x} \leq -\frac{1}{2} \text{ மற்றும் } \frac{1}{1-3\cos x} \geq \frac{1}{4}$$

அதாவது f -ன் வீச்சகம் $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{4}, \infty\right)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.24 மெய்மதிப்புச் சார்பு f ஆனது $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் அதன் சாத்தியமான மீப்பெரு சார்பகத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

x -ன் மதிப்புகள் -3 -ஐ விடக் குறைவாகவோ அல்லது 3 -ஐ விட கூடுதலாக இருப்பின் $9-x^2$ என்ற கோவை குறையெண்ணாக மாறும். எனவே இம்மதிப்புகளுக்கு $\sqrt{9-x^2}$ காண இயலாது. அதாவது $\sqrt{9-x^2}$ ஆனது $[-3, 3]$ என்ற இடைவெளியில் மட்டுமே காண இயலும்.

x –ன் மதிப்புகள் -1 அல்லது அதனை விடக் கூடுதலாகவும், அதே நேரத்தில் 1 அல்லது அதனை விடக் குறைவாகவும் இருக்கும்போது x^2-1 என்ற கோவை குறையெண்ணாகவோ அல்லது பூஜ்ஜியமாகவோ மாறும். அதாவது குறையெண்ணாக இருக்கும்போது $\sqrt{x^2-1}$ என்பதனைக் காண இயலாது. மேலும் பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்போது f வரையறுக்க இயலாது. அதாவது $\sqrt{x^2-1}$ என்பதனை $[-1, 1]$ என்ற இடைவெளிக்கு வெளியில் காணலாம். அதாவது $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் $\sqrt{x^2-1}$ –ன் மதிப்பு காணலாம்.

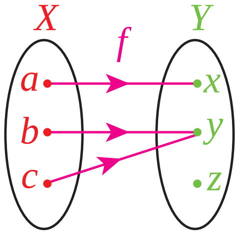
மேற்காணும் இரண்டு நிபந்தனைகளையும் இணைக்கும்போது $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ –ன் மதிப்பு $[-3, 3] \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty))$ என்ற இடைவெளியில் மட்டுமே காணலாம். அதாவது f ன் மீப்பெரு சார்பகம் $[-3, -1) \cup (1, 3]$ ஆகும்.

குறிப்பு: மேற்காணும் இடைவெளியைக் காண மெய்யெண் கோட்டில் இரு இடைவெளிகளையும் குறித்து, வெட்டுகணத்தினை எடுக்க வேண்டும்.

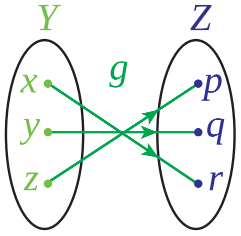
1.6.4 சார்புகளின் மீதான செயல்பாடுகள் (Operations on functions)

சார்புகளின் சேர்ப்பு (Composition)

படம் 1.36 மற்றும் படம் 1.37ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளவாறு f மற்றும் g ஆகிய இரு சார்புகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

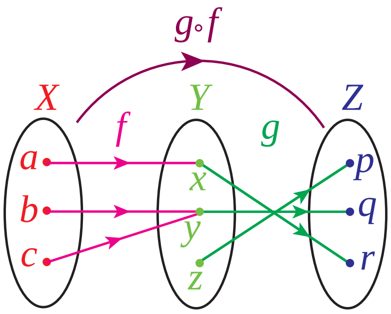


படம் 1.36



படம் 1.37

f -ன் துணைச்சார்பகமும் g -ன் சார்பகமும் ஒன்றே என்பதைக் கவனிக்கவும். f -ன் துணைச்சார்பகமாக உள்ள Y கணத்தில் g -ன் சார்பகமாக உள்ள Y கணமானது இணையுமாறு g -ன் உருவத்தை f உருவத்துடன் கீழ்க்காணுமாறு இணைக்கவும் [படம் 1.38].

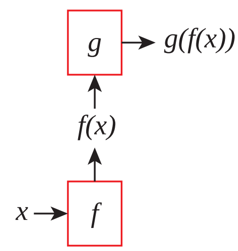


படம் 1.38

இப்பொழுது $h:X \longrightarrow Z$ என்ற சார்பை இயல்பாக வரையறுப்போம். சார்பு h -ன் கீழ் a -ன் பிம்பத்தைக் காண முதலில் f -ன் கீழ் a -ன் பிம்பத்தைக் காண வேண்டும். அது x ஆகும். பிறகு g -ன் கீழ் x -ன் பிம்பத்தைக் காண வேண்டும். அது r ஆகும். எனவே $h(a)=r$. இதேப் போன்று $h(b)=q$ மற்றும் $h(c)=q$. இந்த முறையில் புதிய சார்பு h -ஐ வரையறுப்போம். இந்தச் சார்பு h -ஐ, g உடன் f -ன் சேர்ப்பு அல்லது இணக்கம் என அழைக்கப்படுகிறது.

வரையறை 1.8

$f:X\to Y$ மற்றும் $g:Y\to Z$ என்பன இரு சார்புகள் என்க. இப்போது, சார்பு $h:X\to Z$ என்பது ஒவ்வொரு $x\in X$ -க்கும் $h(x)=g(f(x))$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அதனை g உடன் f -ன் சேர்ப்பு என்று அழைக்கலாம். அதனை $g\circ f$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது. (f ஆனது g உடன் சேர்ப்பு என்று வாசிக்கவும்) [படம் 1.38 மற்றும் 1.39].



படம் 1.39

f -ன் வீச்சகமானது Y ஆக இருக்கவேண்டியதில்லை என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். மேலும் $f:X\to Y_1$, $g:Y_2\to Z$ மற்றும் $Y_1\subseteq Y_2$ எனில் f-ன் துணைச்சார்பகமாக Y_2 -ஐ எடுத்துக்கொண்டு $g\circ f$ -ஐ வரையறுக்க முடியும். எனவே, $g\circ f$ -ஐ வரையறுக்கத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை என்னவெனில், f -ன் வீச்சகம் g -ன் சார்பகத்தினுள் இருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.25 $f=\{(1,2),(3,4)(2,2)\}$ மற்றும் $g=\{(2,1),(3,1),(4,2)\}$ எனில், $g\circ f$ மற்றும் $f\circ g$ காண்க.

தீர்வு

சேர்ப்பு, முறையாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதா எனச் சோதிக்க இச்சார்புகளின் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் கண்டறிவோம். f -ன் சார்பகம் $=\{1,\ 2,\ 3\}$, f -ன் வீச்சகம் $=\{2,\ 4\}$, g -ன் சார்பகம் $=\{2,\ 3,\ 4\}$, g -ன் வீச்சகம் $=\{1,\ 2\}$. இங்கு g -ன் சார்பகத்தினுள் f -ன் வீச்சகம் இருப்பதால் $g\circ f$ -ஐ வரையறுக்க இயலும். எனவே $g\circ f$ -ன் கீழ் 1 -ன் பிம்பத்தைக் காண முதலில் f -ன் கீழ் 1 -ன் பிம்பத்தையும் பிறகு கிடைக்கப்பெற்ற பிம்பத்தை g -ன் கீழும் காண வேண்டும். f -ன் கீழ் 1 -ன் பிம்பம் 2 மற்றும் g -ன் கீழ் 2 -ன் பிம்பம் 1. எனவே $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=1$.

இதே போன்று $(g\circ f)(2)=1$ மற்றும் $(g\circ f)(3)=2$. எனவே, $g\circ f=\{(1,1),(2,1),(3,2)\}$. இதே போன்று $f\circ g=\{(2,2),(3,2),(4,2)\}$ எனக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.26 $f=\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$ மற்றும் $g=\{(4,1),(5,2),(6,4)\}$ எனில் $g\circ f$ காண்க. மேலும் $f\circ g$ -ஐ காண இயலுமா?

தீர்வு:

தெளிவாக, $g\circ f=\{(1,1),(2,2),(3,2)\}$. அதே தருணத்தில், $f\circ g$ வரையறுக்க இயலாது. ஏனெனில் g -ன் வீச்சகமான $\{1,\ 2,\ 4\}$ என்பது f -ன் சார்பகமான $\{1,\ 2,\ 3\}$ -ன் உட்கணமாக இல்லை.

XI_Maths_Ch1_V-1_TM.indd 42 15-12-2021 13:49:40

எடுத்துக்காட்டு 1.27 f மற்றும் g என்ற இரு சார்புகள் $\mathbb{R}$ -லிருந்து $\mathbb{R}$ -க்கு $f(x) = 3x - 4$ மற்றும் $g(x) = x^2 + 3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், $g \circ f$ மற்றும் $f \circ g$ காண்க.

தீர்வு

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-4) = (3x-4)^2 + 3 = 9x^2 - 24x + 19.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3) = 3(x^2+3) - 4 = 3x^2 + 5.$$

குறிப்பு: மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் பொதுவாக இரு சார்புகளின் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்பினைப் பெற்றிருக்கவில்லை என்பதைக் காட்டுகின்றன. அதாவது $g \circ f$ ஆனது $f \circ g$ -க்கு சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

தேற்றம் 1.2

$f : A \to B$ மற்றும் $g : B \to C$ என்பன இரு சார்புகள் என்க. f மற்றும் g ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்றாக இருப்பின் $g \circ f$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்றாகும்.

நிரூபணம்

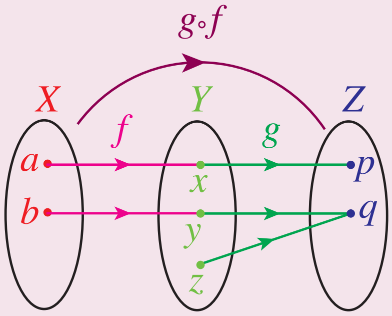
$x, y \in A$ மற்றும் $x \neq y$ என்க. f ஆனது ஒன்றுக்கொன்று என்பதால் $f(x) \neq f(y)$. சார்பு g ஆனது ஒன்றுக்கொன்றாக இருப்பின் $g(f(x)) \neq g(f(y))$ அதாவது $x \neq y \Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$ எனவே $g \circ f$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.28 "f மற்றும் $g \circ f$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்றாக இருந்தால், g ஆனதும் ஒன்றுக்கொன்றாகும்" என்ற கூற்று தவறு என நிரூபிக்க.

தீர்வு

ஒரு கூற்று உண்மையில்லை என்பதனை ஒரு எடுத்துக்காட்டு மூலம் நிரூபிக்கலாம். கீழ்க்காணும் படம் 1.40 -ஐ கவனிக்கவும்.

படத்திலிருந்து, தெளிவாக f மற்றும் $g \circ f$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்றாகும். ஆனால் g ஒன்றுக்கொன்று அல்ல. எனவே கூற்று உண்மையில்லை என்பதை படம் தெளிவாகக் காட்டுகிறது.



படம் 1.40

எடுத்துக்காட்டு 1.29 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆகிய இரு சார்புகள் $f(x) = 2x - |x|$ மற்றும் $g(x) = 2x + |x|$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் $f \circ g$ -ஐ காண்க.

தீர்வு

$$|x| = \begin{cases} -x & ; x \le 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$$ என நாம் அறிவோம்.

எனவே $$f(x) = \begin{cases} 2x-(-x) & ; x \le 0 \\ 2x - x & ; x > 0 \end{cases}$$

இதனால் $$f(x) = \begin{cases} 3x & ; x \le 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$$

மேலும் $$g(x) = \begin{cases} 2x+(-x) & ; x \le 0 \\ 2x + x & ; x > 0 \end{cases}$$

அதாவது $$g(x) = \begin{cases} x & ; x \le 0 \\ 3x & ; x > 0 \end{cases}$$

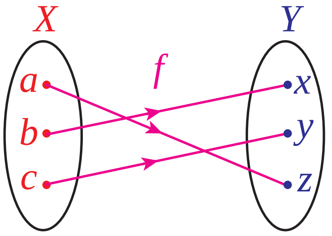
$x \le 0$ எனில், $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 3x.$

$x > 0$ எனில், $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 3x.$

எனவே எல்லா x -க்கும் $(f \circ g)(x) = 3x$.

1.6.5 சார்பின் நேர்மாறு (Inverse of a function)

படம் 1.41 -ல் உள்ளவாறு ஒரு இருபுறச் சார்பு $f : X \to Y$ இருப்பதாகக் கருதுவோம்.



படம் 1.41

இச்சார்பைக் கண்ணாடியில் பார்த்தால் Y -லிருந்து X -க்கான சார்பு கிடைக்கும். அச்சார்பினை g என அழைப்போம். இப்போது Y -லிருந்து X -க்கான சார்பு $g(x) = b, g(y) = c, g(z) = a$ என வரையறுக்கப்படும்.

இந்த சார்பு f -ன் நேர்மாறு சார்புக்கு எடுத்துக்காட்டாக விளங்குகிறது. இப்போது நேர்மாறு சார்பின் வரையறையைக் காண்போம்.

வரையறை 1.9

$f : X \to Y$ என்பது இருபுறச் சார்பு என்க. சார்பு $g : Y \to X$ ஆனது $f(x) = y$ எனும்போது $g(y) = x$ என வரையறுக்கப்படின், சார்பு g -ஐ f -ன் நேர்மாறு (inverse) என்று அழைக்கப்பட்டு f^{-1} என குறிப்பிடப்படுகிறது.

சார்பு f நேர்மாறு உடையதாக இருந்தால் f -ஐ **நேர்மாற்றுத்தன்மை (invertible)** உடையது எனக் கூறலாம்.

சார்புகளின் சேர்ப்பிற்கும், நேர்மாறுக்கும் வியப்பிற்குரிய தொடர்பு உண்டு.

$f : X \to Y$ என்பது இருபுறச் சார்பு மற்றும் அதன் நேர்மாறு $g : Y \to X$ என்க.

இப்போது $g \circ f = I_X$ மற்றும் $f \circ g = I_Y$. இங்கு I_X மற்றும் I_Y என்பவை முறையே X மற்றும் Y மீதான சமனிச் சார்புகளாகும்.

மேலும், $f : X \to Y$ மற்றும் $g : Y \to X$ ஆகிய சார்புகள் $g \circ f = I_X$ மற்றும் $f \circ g = I_Y$ என இருக்குமானால் f மற்றும் g இரண்டும் இருபுறச்சார்புகளாகும். மற்றும் அவை ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாகும்; அதாவது, $f^{-1} = g$ மற்றும் $g^{-1} = f$.

மேற்கண்ட கருத்துக்களின் அடிப்படையில் நேர்மாற்றுத்தன்மை மற்றும் நேர்மாறு என்ற சொற்களை வேறு வகையில் வரையறுப்போம்.

வரையறை 1.10

I_X மற்றும் I_Y என்பவை முறையே X மற்றும் Y மீதான சமனிச்சார்புகளாகக் கருதுக. $g \circ f = I_X$ மற்றும் $f \circ g = I_Y$ என அமையுமாறு $g : Y \to X$ என்ற சார்பு கிடைக்குமானால் $f : X \to Y$ -ஐ **நேர்மாற்றுத்தன்மை** உடையது எனக் கூறலாம். இந்நிலையில் g -ஐ f -ன் நேர்மாறு எனவும் g -ஐ f^{-1} எனவும் குறிப்பிடலாம்.

இந்த வரையறையைப் பயன்படுத்திச் சார்புகளில் சிலவற்றை இருபுறச் சார்புகளா எனக் காணலாம்.

f என்பது இருபுறச்சார்பாக இருப்பின் $f^{-1}(y)$ என்பது f -ன் கீழ் y -ன் முன்பிம்பமாகும். இருபுறச் சார்புகளில் மட்டுமே நேர்மாறு வரையறுக்க இயலும் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். ஒருவேளை, f ஒன்றுக்கொன்றாக இல்லையெனில் $a \neq b$ மற்றும் $f(a) = f(b)$ $(= y$ என்க$)$ என்ற வகையில் அமையுமாறு a மற்றும் b என இரு முன்பிம்பங்கள் f ன் கீழ் y க்கு இருக்கும். ஆனால் f^{-1} -க்கு இருவேறு மதிப்புகள் கிடைப்பது என்பது சார்பின் வரையறைக்கு முரண்படுகின்றது. எனவே, f ஒன்றுக்கொன்றாகத்தான் இருக்க வேண்டும். f ஆனது மேற்கோர்த்தல் இல்லையெனில் Y -ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு y -க்கு முன்பிம்பம் X -ல் இல்லாத நிலை ஏற்படும். அந்நிலையில் எந்த ஒரு உறுப்பினையும் $f^{-1}(y)$ -க்கு ஒதுக்க இயலாது. எனவே f ஆனது இருபுறச் சார்பாக இருந்தாலன்றி நேர்மாறு வரையறுக்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ என்க. இப்போது f -ன் வீச்சகம் $\{1, 2, 3, 4\}$ ஆகும்; f -ன் நேர்மாறு $\{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ ஆகும்.

$\mathbb{R}$ –லிருந்து $\mathbb{R}$ –க்கு வரையறுக்கப்படும் சார்பு f –ன் நேர்மாறு காணும் படிநிலைகள் (Working Rule to Find the Inverse of a Function)

(i) சார்பினை $y = f(x)$ எனும் கட்டமைப்பில் எழுதுக;

(ii) x -ஐ y -ன் அடிப்படையில் எழுதவும்;

(iii) $f^{-1}(y)$ -ஐ y -ன் கோவையாக எழுதவும்;

(iv) y -ஐ x ஆக மாற்றவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.30 $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x - 3$ என வரையறுக்கப்படின் f ஒரு இருபுறச்சார்பு என நிரூபித்து, அதன் நேர்மாறினைக் காண்க.

தீர்வு

வழிமுறை – 1

ஒன்றுக்கொன்று: $f(x)=f(y)$ என்க. இதனால் $2x-3 = 2y-3$; இதிலிருந்து $2x = 2y$. எனவே $x=y$. அதாவது, $f(x)=f(y)$ எனில் $x=y$. எனவே, f என்பது ஒன்றுக்கொன்று.

மேற்கோர்த்தல்: $y\in\mathbb{R}$ என்க. $x=\dfrac{y+3}{2}$ என்க. எனவே, $f(x)=2\left(\dfrac{y+3}{2}\right)-3=y$. இதனால் f என்பது மேற்கோர்த்தல் ஆகும். (அல்லது) f -ன் வீச்சகம் தெளிவாக $\mathbb{R}$ ஆகும். (எவ்வாறு?) அதாவது வீச்சகமும் துணைச்சார்பகமாகவும் சமமாக இருப்பதால் f மேற்கோர்த்தல் ஆகும்.

நேர்மாறு: $y = 2x-3$ என்க. எனவே $y+3 = 2x$. அதனால் $x = \dfrac{y+3}{2}$. அதாவது $f^{-1}(y)=\dfrac{y+3}{2}$. இப்போது y -ஐ x -ஆல் மாற்ற $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$ எனக் கிடைக்கும்.

வழிமுறை – 2

$y = 2x-3$ என்க. எனவே $x = \dfrac{y+3}{2}$, $g(y) = \dfrac{y+3}{2}$ என்க.

இப்போது, $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \dfrac{(2x-3)+3}{2} = x$

. $(f\circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\dfrac{y+3}{2}\right) = 2\left(\dfrac{y+3}{2}\right)-3 = y$

ஆகையால், $g\circ f = I_X$ மற்றும் $f\circ g = I_Y$.

f மற்றும் g ஆகியவை இருபுறச்சார்புகள் என்பதும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு என்பதும் இதன்மூலம் தெளிவாகிறது. எனவே f என்பது இருபுறச்சார்பு மற்றும் $f^{-1}(y)=\dfrac{y+3}{2}$. இதிலிருந்து y -ஐ x -ஆல் பிரதியிட $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2}$.

1.6.6 சார்புகளில் இயற்கணித செயல்பாடுகள் (Algebra of functions)

$\mathbb{R}$ அல்லது $\mathbb{R}$- ன் உட்கணத்தினை துணைச்சார்பகமாக கொண்டஒரு சார்பு மெய்மதிப்புச் சார்பு என அறிந்துள்ளோம். மெய்மதிப்புச் சார்புகளின் மீதான செயல்பாடுகளைப் பற்றி அறிவோம்.

f மற்றும் g ஆகியவை இரு மெய்மதிப்புச் சார்புகள் என்க. f மற்றும் g இடையே கூட்டலை வரையறுக்க இயலுமா? இயல்பாகவே இரு சார்புகளின் கூட்டலும் ஒரு சார்பாக இருக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம். x எனும் புள்ளியில் $f+g$ - ன் மதிப்பிற்கும், x புள்ளியில் உள்ள f மற்றும் g –ன் மதிப்புகளுக்கும் தொடர்பு இருக்க வேண்டும். x என்ற புள்ளியில் $f+g$ வரையறுக்கப்பட $f(x)$, $g(x)$ ஆகியவை தெரிந்திருக்க வேண்டும். வேறு வார்த்தைகளில் கூற வேண்டுமானால், x என்ற புள்ளி f மற்றும் g -ன் சார்பகங்களில் இருக்க வேண்டும். மேலும் x-ல் $f+g$ -ஐ $f(x)+g(x)$ என வரையறுக்கலாம். எனவே f மற்றும் g ன் சார்பகங்கள் ஒன்றாக இருக்க வேண்டும் என்கிற நிபந்தனையுடன் $f+g$ -ஐ வரையறுக்க வேண்டும். இதே போன்று சார்புகளின் கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் ஏனைய கணிதச் செயல்பாடுகளையும் R -ல் வரையறுக்கலாம்.

வரையறை 1.11

X ஒரு கணம் என்க. f மற்றும் g என இரு மெய்மதிப்புச் சார்புகள் X-ன் மீது வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. அனைத்து $x \in X$ -க்கு

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, இங்கு $g(x) \neq 0$
- $(cf)(x) = cf(x)$, c ஒரு மாறிலி.
- $(-f)(x) = -f(x)$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

சார்பகங்கள் எண்களின் கணங்களாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் கணம் X எனில், f மற்றும் g எனும் சார்புகள், மாணவர்களின் இரு தேர்வு மதிப்பெண்களைக் குறிக்கின்றது எனில், $f + g$ எனும் சார்பு இரு தேர்வுகளிலும் மாணவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்களைக் குறிக்கும். பின்வரும் பண்புகளை மேற்கண்ட வகையில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் சார்புகள் நிறைவேற்றுகின்றன.

- $(f + g) + h = f + (g + h)$
- $f + g = g + f$
- $\mathbf{0} + f = f + \mathbf{0}$ இங்கு $\mathbf{0}$ என்பது பூஜ்ஜியச் சார்பு. அனைத்து x-க்கும் $0(x) = 0$ என வரையறுபக்கப்படுகிறது.
- $f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}$
- $f(g + h) = fg + fh$
- $(c_1 + c_2)f = c_1 f + c_2 f$ இங்கு மற்றும் c_1 என்பன c_2 மெய் மாறிலிகளாகும்.

இவ்வாறு இச்செயல்களில் பல்வேறு பண்புகளைப் பட்டியலிடலாம். நிரூபணங்கள் எளிதானது என்றாலும் எவ்வழியில் இப்பண்புகளை நிரூபிப்பது என்பதற்கு ஒரு பண்பினை மட்டும் இங்கு நிரூபிக்கலாம்.

$f(g + h) = fg + fh$ என்பதை நிரூபிப்போம். இதனை நிரூபிக்க, சார்பகத்திலிலுள்ள அனைத்து x -க்கும் $(f(g + h))(x) = (fg + fh)(x)$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

தேற்றம் 1.3 f மற்றும் g என்பன X மீது வரையறுக்கப்படும் இரு மெய்மதிப்புச் சார்புகள் எனில், $f(g + h) = fg + fh$.

நிரூபணம்: $x \in X$ என்க.

$$
\begin{aligned}
(f(g + h))(x) &= f(x)(g + h)(x) && \text{(பெருக்கலின் வரையறைப்படி)}\\
&= f(x)[g(x) + h(x)] && \text{(கூட்டலின் வரையறைப்படி)}\\
&= f(x)g(x) + f(x)h(x) && \text{(மெய் பரவலின்படி)}
\end{aligned}
$$

$$= (fg)(x) + (fh)(x) \qquad \text{(பெருக்கலின் வரையறைப்படி)}$$

$$= (fg + fh)(x) \qquad \text{(கூட்டலின் வரையறைப்படி)}$$

ஆகையால் அனைத்து $x \in X$ -க்கும் $(f(g + h))(x) = (fg + fh)(x)$.

எனவே, $f(g + h) = fg + fh$

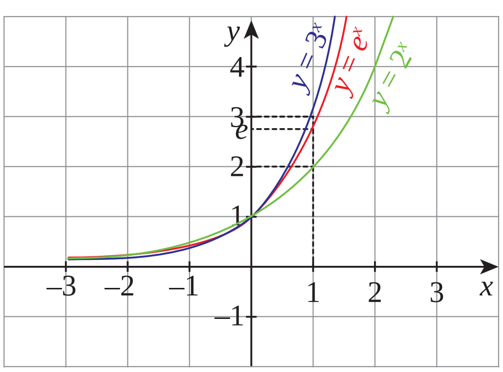
1.6.7 சில சிறப்பு சார்புகள் (Some Special Functions)

இனிச் சில சிறப்பு சார்புகளைப் பார்ப்போம்.

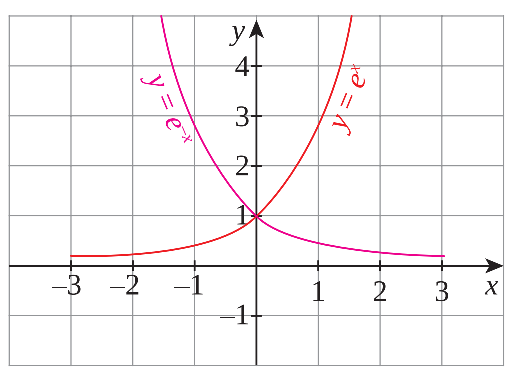
(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, a_i என்பவை மாறிலிகள், என வரையறுக்கப்படுமெனில், f -ஐ **பல்லுறுப்பு சார்பு (polynomial function)** என்றழைக்கலாம். வலப்புறத்தில் அமைந்துள்ளது பல்லுறுப்புக்கோவை என்பதால் பல்லுறுப்பு சார்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

(ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, b ஆகியவை மாறிலிகள் என்று வரையறுக்கப்படுமானால், அதனை **நேரியல் சார்பு (linear function)** என அழைக்கலாம். நேரியல் அல்லாத சார்பு **நேரியலற்ற சார்பு (non–linear function)** என்று அழைக்கப்படுகிறது. தெளிவாக நேரியல் சார்பு ஒரு பல்லுறுப்பு சார்பு ஆகும். இச்சார்பின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடாகும். இந்நேர்க்கோட்டினை ஒரு நேரியல் வளைவரை என்று அழைக்கலாம். ஆதலால் இது நேரியல் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது. (கணித மேற்படிப்பில் இந்நேரியல் சார்பினை மேலும் வெவ்வேறான வகையில் வரையறுக்கப்படும் வாய்ப்பு உண்டு)

(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு $f(x) = a^x, a$ ஒரு குறையற்ற மாறிலி, என வரையறுக்கப்படுவதாகக் கருதுக. $a = 0, x \neq 0$ எனில், இச்சார்பு பூஜ்ஜியச் சார்பாக அமையும். $a = 1, x \neq 0$ எனில், $f(x) = a^x$ என்பது $f(x) = 1$ என்கிற மாறிலிச் சார்பு ஆகும். $a > 1$ எனில், $f(x) = a^x$ என்பது ஒரு **படிக்குறிச் சார்பு அல்லது அடுக்குச் சார்பு (exponential function)** ஆகும். மேலும், x -ஐ "அடுக்காகக்" கொண்டுள்ள எந்தச் சார்பும் ஒரு படிக்குறிச் சார்பாகும் [படம் 1.42 மற்றும் 1.43].



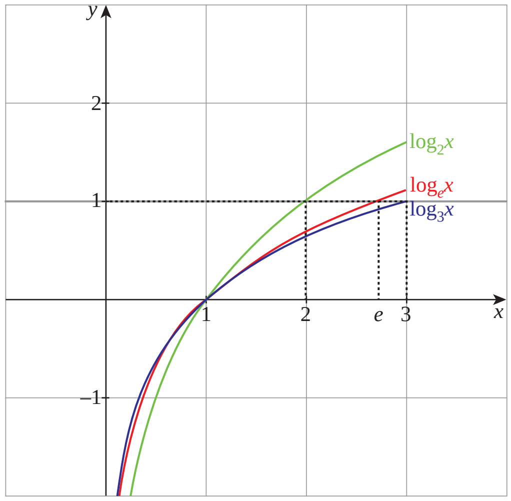
படம் 1.42



படம் 1.43

குறிப்பு: e என்ற சிறப்பு விகிதமுறா எண் 2 மற்றும் 3 க்கு இடையே அமைந்துள்ளது. e பற்றிய மேலான கருத்துகளை அடுத்து வரும் அத்தியாயங்களில் பார்க்கலாம்.

(iv) $a > 1$ என்பது ஒரு மாறிலி என்க. $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ எனும் ஒரு சார்பு $f(x) = \log_a x$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அதனை **மடக்கைச் சார்பு (logarithmic function)** எனலாம். மேலும் தக்க சார்பகத்தின் மீதான ஒரு படிக்குறிச் சார்பு $f(x) = a^x$ -ன் நேர்மாறு, மடக்கைச் சார்பாக அமையும் [படம் 1.44].



படம் 1.44

(v) தகுந்த சார்பகத்தில் $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ என வரையறுக்கப்படும் மெய்மதிப்புச் சார்பு (இங்கு $p(x)$ மற்றும் $q(x)$ ஆகியன பல்லுறுப்புக் கோவைகள், $q(x) \neq 0$) f ஆனது ஒரு **விகிதமுறு சார்பு (rational function)** என்று அழைக்கப்படுகிறது. $q(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைத் தவிர்த்து $\mathbb{R}$ -ல் பெறப்படும் மதிப்புகள் இச்சார்பின் சார்பகமாக அமையும்.

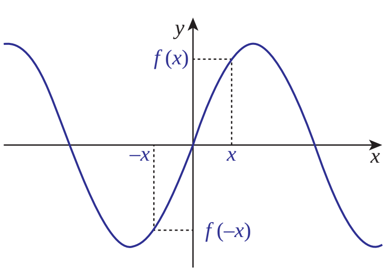
(vi) பூஜ்ஜியமற்ற மெய்மதிப்புச் சார்பு $f(x)$-க்கு தகுந்த சார்பகத்தில் $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ என வரையறுக்கப்படும் மெய்மதிப்புச் சார்பு g ஆனது f -ன் **தலைகீழ்ச் சார்பு (reciprocal function)** ஆகும். $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை $\mathbb{R}$-ல் இருந்து நீக்கிப் பெறப்படும் மதிப்புகள் இச்சார்பின் சார்பகமாக அமையும். உதாரணமாக $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ -ன் மீப்பெரு சார்பகமாக $\mathbb{R} - \{1\}$ அமையும்.

மேலும் இரு வகை சார்புகளைக் காண்போம்.

வரையறை 1.12

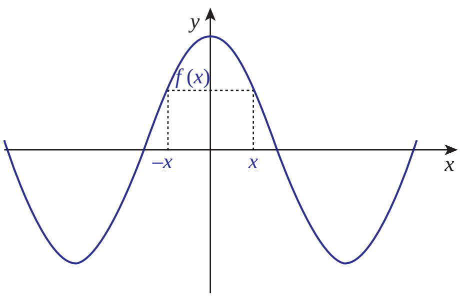
அனைத்து $x \in \mathbb{R}$ -க்கும் $f(-x) = -f(x)$ எனில், $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ எனும் சார்பு ஒரு **ஒற்றைப்படைச் சார்பு (odd function)** எனப்படும். அனைத்து $x \in \mathbb{R}$ -க்கும் $f(-x) = f(x)$ எனில், f ஒரு **இரட்டைப்படைச் சார்பு (even function)** எனப்படும் [படம் 1.45 மற்றும் 1.46].

ஒற்றைப்படைச் சார்பு



படம் 1.45

இரட்டைப்படைச் சார்பு



படம் 1.46

$f(x) = x, f(x) = 2x$ மற்றும் $f(x) = x^3 + 2x$ என்பன ஒற்றைப் படைச் சார்புகளுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும். $f(x) = x^2, f(x) = 3, f(x) = x^4 + x^2$ மற்றும் $f(x) = |x|$ என்பன இரட்டைப் படைச்சார்புகளுக்குச்சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும். மேலும், $f(x) = x + x^2$ என்பது ஒற்றைப்படையுமல்ல, இரட்டைப்படைச் சார்புமல்ல.

பின்வரும் முடிவுகளை நம்மால் நிரூபிக்க முடியும்.

(i) இரு ஒற்றைப்படைச் சார்புகளின் கூடுதல் ஒற்றைப்படைச் சார்பாகும்..

(ii) இரு இரட்டைப்படைச் சார்புகளின் கூடுதல் இரட்டைப்படைச் சார்பாகும்..

(iii) இரு ஒற்றைப்படைச் சார்புகளின் பெருக்கல் ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பாகும்.

(iv) இரு இரட்டைப்படைச் சார்புகளின் பெருக்கல் ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பாகும்.

(v) ஒற்றைப்படைச் சார்பு மற்றும் ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பின் பெருக்கல் ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பாகும்.

(vi) ஒற்றைப்படையாகவும் இரட்டைப்படையாகவும் அமையும் ஒரே சார்பு பூஜ்ஜியச் சார்பாகும்.

(vii) ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பினை மிகை மாறிலியால் பெருக்கப்படும்போது கிடைப்பது இரட்டைப்படைச் சார்பாகும்.

(viii) ஓர் இரட்டைப்படைச் சார்பினை ஒரு குறை மாறிலியால் பெருக்கப்படும்போது கிடைப்பது இரட்டைப்படைச் சார்பாகும்.

(ix) ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பினை ஒரு மாறிலியால் பெருக்கப்படும்போது கிடைப்பது ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பாகும்.

(x) ஒற்றைப் படைச் சார்புமன்றி இரட்டைப் படைச் சார்புமன்றிப் பல சார்புகள் உள்ளன.

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து ஒன்றினை மட்டும் நிரூபிப்போம். ஏனைய பண்புகளையும் இவ்வாறே நிரூபிக்க இயலும்.

தேற்றம் 1.4 : ஒற்றைப்படைச் சார்பு மற்றும் இரட்டைப்படைச் சார்பின் பெருக்கல் ஓர் ஒற்றைப்படை சார்பாகும்.

நிரூபணம். f ஓர் ஒற்றைப் படைச் சார்பு மற்றும் g ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பு எனக் கொள்க.

$h = fg$ என்க. எனவே, $h(-x) = (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$

ஆதலால், h ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பாகும். இதிலிருந்து fg ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பு என்பது புலனாகும்.

குறிப்பு: ஒரு சார்பு ஒற்றைப் படைச் சார்பு இல்லையெனில், அச்சார்பு இரட்டைச் சார்பாகத்தான் இருக்கும் எனத் தவறாக எண்ணக்கூடாது. பல சார்புகள் ஒற்றைப் படைச் சார்புமல்ல அதேசமயம் இரட்டைப் படைச் சார்புமல்ல.

பயிற்சி 1.3

1. ஒரு பள்ளியில் பதினோராம் வகுப்பில் 4 பிரிவுகளில் மொத்தம் 120 மாணவர்கள் படிக்கின்றனர். மாணவர்களின் கணம் A மற்றும் பிரிவுகளின் கணம் B என்க. "x என்ற மாணவர் y பிரிவிலிருந்தால் x ஆனது y உடன் தொடர்புடையது" என வரையறுக்கப்படுகிறது. இத்தொடர்பு சார்பாகுமா? இதன் நேர்மாறு தொடர்பு பற்றி விளக்குக.

2. $f(x)=\begin{cases} -x+4 & ; \quad -\infty < x \le -3 \\ x+4 & ; \quad -3 < x < -2 \\ x^2-x & ; \quad -2 \le x < 1 \\ x-x^2 & ; \quad 1 \le x < 7 \\ 0 & ; \quad \text{மற்ற இடங்களில்} \end{cases}$

என வரையறுக்கப்படின் $-4, 1, -2, 7, 0$ ஆகியவற்றில் f -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

3. $f(x)=\begin{cases} x^2+x-5 & ; \quad x \in (-\infty, 0) \\ x^2+3x-2 & ; \quad x \in (3, \infty) \\ x^2 & ; \quad x \in (0, 2) \\ x^2-3 & ; \quad \text{மற்ற இடங்களில்} \end{cases}$

என வரையறுக்கப்படின் $-3, 5, 2, -1, 0$ ஆகியவற்றில் f–ன் மதிப்புகளைக் காண்க

4. கீழ்க்காணும் தொடர்புகள் சார்புகளா? என்பதனைச் சோதிக்கவும். சார்புகள் எனில் அவை ஒன்றுக்கொன்றா மற்றும் மேற்கோர்த்தலா எனச் சோதிக்கவும். சார்பு இல்லை எனில் காரணம் கூறவும்.

   (i) $A = \{a, b, c\}$ மற்றும் $f = \{(a, c), (b, c), (c, b)\}; (f{:}A \to A)$

   (ii) $X = \{x, y, z\}$ மற்றும் $f = \{(x, y), (x, z), (z, x)\};(f{:}X \to X)$

5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{a, b, c, d\}$ எனில் பின்வரும் ஒவ்வொன்றிற்கும் $A \to B$ -க்கு ஒரு சார்பு உதாரணமாகத் தருக.

   (i) ஒன்றுக்கொன்றும் அல்ல மற்றும் மேற்கோர்த்தலும் அல்ல

   (ii) ஒன்றுக்கொன்று அல்ல ஆனால் மேற்கோர்த்தல்

   (iii) ஒன்றுக்கொன்று ஆனால் மேற்கோர்த்தல் அல்ல.

   (iv) ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தல்

6. $\dfrac{1}{1-2sinx}$ என்ற சார்பின் சார்பகத்தைக் காண்க.

7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-9}}$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு சார்பகத்தைக் காண்க.

8. $\dfrac{1}{2cosx-1}$ என்ற சார்பின் வீச்சகத்தைக் காண்க.

9. $xy = -2$ எனும் தொடர்பு தகுந்த சார்பகத்தில் ஒரு சார்பு எனக் காட்டுக. அதன் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம் காண்க.

10. $f(x) = |x| + x$ மற்றும் $g(x) = |x| - x$ என $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ வரையறுக்கப்படின் $g \circ f$ மற்றும் $f \circ g$ காண்க.

11. f, g, h என்பன $\mathbb{R}$–ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய்மதிப்புச் சார்புகளெனில், $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ என நிரூபிக்க. மேலும் $f \circ (g + h)$ பற்றி என்ன கூற இயலும்? தகுந்த காரணங்களுடன் விடை தருக.

12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $f(x) = 3x - 5$ என வரையறுக்கப்படின் அது ஒரு இருபுறச் சார்பு என நிரூபித்து அதன் நேர்மாறு காண்க.

13. ஒரு மனிதனின் தசைகளின் எடை W ஆனது அவரது உடல் எடை x -ன் சார்பாக அமைகிறது. மற்றும் $W(x) = 0.35x$ எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது எனில், இச்சார்பின் சார்பகத்தை தீர்மானிக்கவும்.

14. மேலிருந்து கீழே விழும் ஒரு பொருளின் உயரம், t நேரத்தைப் பொறுத்துச் சார்பாக, $s(t) = -16t^2$ என அமைகிறது. இச்சார்பினை வரைபடமாகக் கொண்டு ஒன்றுக்கொன்றா எனத் தீர்மானிக்கவும்.

15. ஒரு குறிப்பிட்ட வான்வழிப் பயணக் கட்டணமானது, அடிப்படை வானூர்திக் கட்டணம் (ரூபாயில்) C உடன் எரிபொருள் கூடுதல் கட்டணம் S உள்ளடக்கியது. C மற்றும் S ஆகிய இரண்டுமே வான் தொலைவு அளவு m ஆல் அமைகிறது. மேலும் $C(m) = 0.4m + 50$ மற்றும் $S(m) = 0.03m$ எனில் வான் தொலைவு அளவு ரீதியாக ஒரு பயணச் சீட்டின் மொத்தக் கட்டணத்தினை m -ன் சார்பாக எழுதுக. மேலும் 1600 வான் தொலைவு மைல்களுக்கான பயணச் சீட்டின் தொகையைக் காண்க.

16. ஒரு விற்பனை பிரதிநிதியின் ஆண்டு வருமானத்தைக் குறிக்கும் சார்பு $A(x) = 30,000 + 0.04x$. இங்கு x என்பது அவர் விற்கும் பொருளின் விலைமதிப்பை ரூபாயாகக் குறிக்கின்றது. விற்பனைத் துறையில் உள்ள அவர் மகனின் வருமானம் $S(x) = 25,000 + 0.05x$ எனும் சார்பாகக் குறிக்கப்படுகிறது எனில், $(A+S)(x)$ காண்க. மேலும், ₹$1,50,00,000$ மதிப்புள்ள பொருட்களை அவர்களிருவரும் தனித்தனியே விற்றால் குடும்ப மொத்த வருமானத்தினைக் கணக்கிடுக.

17. அமெரிக்க டாலரை சிங்கப்பூர் டாலராக ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் பண மதிப்பு மாற்றம் செய்யும் சார்பு $f(x) = 1.23x$ ஆகும். இங்கு x என்பது அமெரிக்க டாலர்களின் எண்ணிக்கை ஆகும். அதே நாளில் இந்திய ரூபாய்க்கு சிங்கப்பூர் டாலரை மாற்றும் சார்பு $g(y) = 50.50y$, இங்கு y என்பது சிங்கப்பூர் டாலர்களின் எண்ணிக்கை ஆகும். இந்திய ரூபாயின் அடிப்படையில் அமெரிக்க டாலரின் நாணயப் பரிவர்த்தனை விகிதத்தை வழங்கும் சார்பினை எழுதுக.

18. ஒரு சிறிய உணவகத்தின் உரிமையாளர் ₹100 செலவில் ஒரு குறிப்பிட்ட உணவைத் தயாரிக்க முடியும். உணவு வகைப் பட்டியலின்படி அந்த உணவின் விலை x என நிர்ணயித்தால், அந்நாளில் அவ்வுணவைப் பெறும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை $D(x) = 200 - x$ என்ற சார்பாக அமைகிறது. அந்த உணவைப் பொறுத்து அவருடைய அன்றைய வருமானம், மொத்தச் செலவு மற்றும் லாபம் ஆகியவற்றை x -ன் சார்பாக அமைக்கவும்.

19. பாரன்ஹீட்டிலிருந்து செல்சியஸ் வெப்பநிலைக்கு மாற்றும் சார்பு $y = \frac{5x}{9} - \frac{160}{9}$ எனில், y -ன் நேர்மாறு சார்பினைக் காண்க. நேர்மாறு சார்பும் ஒரு சார்பு எனவும் காண்க.

20. ஒரு சாதாரண சங்கேதமொழியில் ஓர் உருவினை மாற்றியமைக்க எண்ணால் எழுதப் பயன்படுத்தப்படும் சார்பு $f(x) = 3x - 4$. இச்சார்பின் நேர்மாறினையும், அந்நேர்மாறு ஒரு சார்பு என்பதையும் காண்க. அவை $y = x$ என்ற நேர்க்கோட்டில் சமச்சீர் உடையது என்பதை வரைந்து காண்க.

1.7 உருமாற்றத்தைப் பயன்படுத்திச் சார்புகளை வரைபடமாக்குதல் (Graphing Functions using Tranformations)

"ஒரு சித்திரம் ஆயிரம் சொற்களுக்குச் சமம்" என்பது பழமொழி. ஒரு சார்பைப் பற்றி தெரிந்து கொள்ளப் பகுமுறை கோவையை விட அதன் வரைபடமே நமக்கு நன்கு புரிந்து கொள்ள உதவுகிறது என்றால் மிகையில்லை. பல புள்ளிகளைத் தளத்தில் குறியிட்டு வரைவதனைத் தவிர்த்து, ஒரு

வளைவரையை வரைவது ஒரு சிறந்த கலைத்திறமையாகும். சில கடினமான சார்புகளை வரைபடமாக்க, சில அடிப்படை வடிவங்கள் மற்றும் சார்புகளைப் பற்றிய புரிதல் இன்றியமையாதது. சமச்சீர் தன்மையும், உருமாற்றமும் வரைபடக் கலையைச் செம்மையாக்குகிறது. இப்பிரிவு வெறும் வரைபடங்களின் தொகுப்பன்று. மாறாகச் சில சார்புகளை வரைபடமாக்கும் முறைகளைப் பற்றி கற்பிக்கிறது.

உதாரணமாக $y = 2\,sin(x-1) + 3$ எனும் வளைவரையின் சார்பினைப் பார்த்த மாத்திரத்தில் வளைவரையை வரைவது கடினம் என்ற எண்ணம் தோன்றும். ஆனால் சார்பின் அமைப்பினைப் பிரித்துப் புரிந்து கொண்டால் எளிதாக வரைய இயலும். இப்பகுதியின் முடிவில் இச்சார்பின் வளைவரையைக் காணலாம்.

ஒரு கோட்டைப் பொறுத்து வரைபடத்தின் ஒரு பாதி மற்ற பாதியின் பிம்பம் என்பதை அறிந்திருந்தாலோ அல்லது குறிப்பிட்ட வளைவரையை சற்றுத் திசை நகர்த்துவதன் மூலம் முன்னர் அறிந்த வளைவரையைக் கொண்டு அறியாத வளைவரையை புதியதாக வரையலாம். மேலும் ஒரு வளைவரையை பெரியதாக ஆக்கவோ, சுருக்கவோ கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை மூலமாகப் பெற முடிந்தால் புதிய வளைவரைகளை, தெரிந்த வளைவரைகளைக் கொண்டே எளிதாக வரைய இயலும்.

கீழ்க்காணும் உருமாற்றங்களின் வகைகள் வரைபடமாக்கலில் முக்கியப் பங்கு வகிக்கிறது.

(i) பிரதிபலிப்பு (reflection)

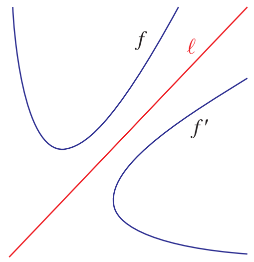
(ii) இடப்பெயர்ச்சி (translation)

(iii) விரிதல் / சுருங்குதல் (dilation)

பிரதிபலிப்பு மற்றும் இடப்பெயர்ச்சி உருமாற்றங்களைப் பொறுத்தவரை மூல வரைபடங்களுக்கு சர்வசமமாக அவை அமையும். அதாவது அதன் அளவு, தோற்றம் முதலியன மாறாது. ஆனால் விரிதலில் அங்ஙனம் நிகழ்வதில்லை.

பிரதிபலிப்பு (reflection)

கொடுக்கப்பட்ட வரைபடம் f -க்கு, l என்ற கோட்டின் மீதான பிரதிபலிப்பு f' என்பது l -ஐப் பொறுத்து f -க்குச் சமச்சீராக அமையும் வரைபடம் ஆகும். l என்ற கோட்டினைக் கண்ணாடியாகக் கொண்டு ஒரு வளைவரைக்கு கிடைக்கும் பிம்பமே பிரதிபலிப்பாகும் [படம் 1.47].



படம் 1.47

இங்கு, f' என்பது l மீதான f -ன் கண்ணாடி பிம்பமாகும். f -ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் f' -ல் ஒத்திசைவான ஒரு புள்ளி அமையும்.

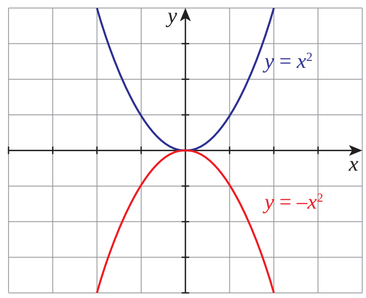
(i) x -அச்சைப் பொறுத்து, $y = f(x)$ -ன் பிரதிபலிப்பு $y = -f(x)$ எனும் வரைபடம்.

(ii) y -அச்சைப் பொறுத்து $y = f(x)$ -ன் பிரதிபலிப்பு $y = f(-x)$ எனும் வரைபடம்

(iii) $y = x$ என்ற நேர்க்கோட்டினைப் பொறுத்து $y = f(x)$ -ன் பிரதிபலிப்பு $y = f^{-1}(x)$ எனும் வரைபடம் ஆகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.5

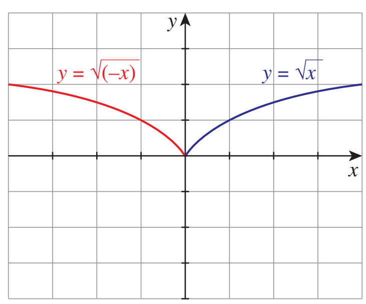
(i) $y = x^2$ (ii) $y = -x^2$ என்னும் சார்புகளைக் கருதுக.



படம் 1.48

$f(x) = x^2$ என்ற சார்புக்கு $-f(x) = -x^2$ ஆகும். ஆகையால் x -அச்சினைப் பொறுத்து $y = x^2$ –ன் பிரதிபலிப்பு $y = -x^2$ ஆகும் [படம் 1.48].

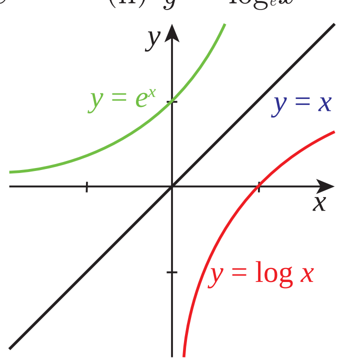
விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.6 $y^2 = x$ மற்றும் $y^2 = -x$ ஆகிய வளைவரைகளின் மிகைக் கிளைகளைக் கருத்தில் கொள்க.



படம் 1.49

$f(x) = \sqrt{x}$ என்ற சார்புக்கு $f(-x) = \sqrt{-x}$. ஆகையால் y-அச்சைப் பொறுத்து $f(x) = \sqrt{x}$ -ன் பிரதிபலிப்பு $f(-x) = \sqrt{-x}$ ஆகும். இங்கு $x < 0$ [படம் 1.49].

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.7 (i) $y = e^x$ (ii) $y = \log_e x$



படம் 1.50

$y = \log_e x$ -ன் நேர்மாறு $y = e^x$ என நாம் அறிவோம். ஆதலால் $y = x$ என்ற கோட்டினைப் பொறுத்து $y = \log_e x$ -ன் பிரதிபலிப்பு $y = e^x$ ஆகும். [படம் 1.50]

இடப்பெயர்ச்சி (Translation)

ஒரு வரைபடத்தைக் கிடைமட்டமாக அல்லது நிலைக்குத்தாக இடப்பிறழ்வில் ஒருங்கிசைவான வரைபடங்களை உருவாக்குவது **இடப்பெயர்ச்சி** எனப்படும்.

வளைவரை $y=f(x)$ -ஐ c அலகுகளுக்குக் கிடைமட்டமாக இடப்பக்க நகர்வால் கிடைப்பது $y=f(x+c)$, $c>0$ என்ற வளைவரையாகும்.

வலப்பக்க நகர்வால் கிடைப்பது $y=f(x-c)$, $c>0$ என்ற வளைவரையாகும்.

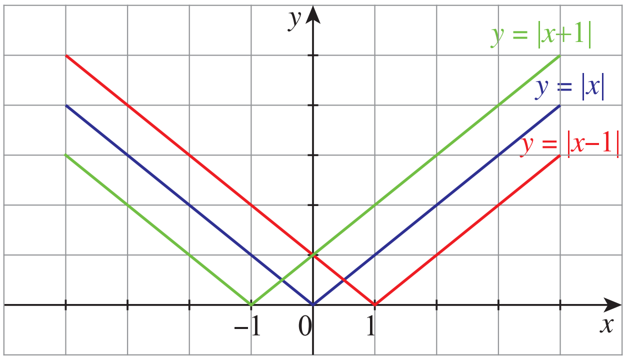
வளைவரை $y=f(x)$ –ஐ d அலகுகளுக்கு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி நகர்வால் கிடைப்பது $y = f(x) + d$, $d > 0$ என்ற வளைவரையாகும்.

கீழ்நோக்கிய நகர்வால் கிடைப்பது $y = f(x) - d$, $d > 0$ என்ற வளைவரையாகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.8

(i) $f(x) = |x|$ (ii) $f(x) = |x-1|$ (iii) $f(x) = |x+1|$

என்ற வளைவரைகளை கருதுக.



படம் 1.51

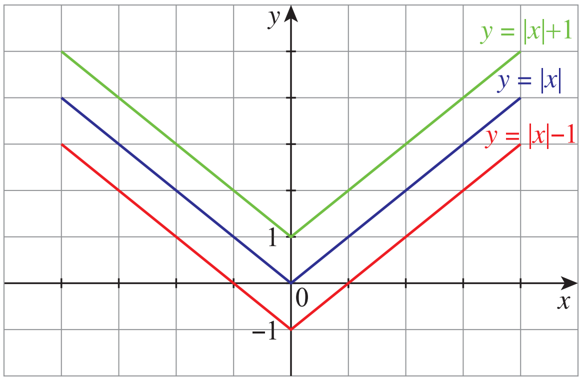
$f(x)=|x-1|$ என்பதன் வளைவரை $f(x) = |x|$ என்ற வளைவரையை ஒரு அலகு வலப்பக்கமாக நகர்த்திக் கிடைக்கப் பெறுவது ஆகும்.

$f(x) = |x+1|$ என்பதன் வளைவரை $f(x) = |x|$ என்ற வளைவரையை ஒரு அலகு இடப்பக்கமாக நகர்த்திக் கிடைக்கப் பெறுவது ஆகும் [படம் 1.51].

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.9

(i) $f(x) = |x|$ (ii) $f(x)=|x|-1$ (iii) $f(x) = |x| + 1$

என்ற வளைவரைகளை கருதுக.



படம் 1.52

$f(x) = |x| - 1$ என்ற வளைவரை, $f(x) = |x|$ என்ற வளைவரையை ஒரு அலகு கீழ்நோக்கி நகர்த்திக் கிடைக்கப் பெறுவது ஆகும்.

$f(x) = |x| + 1$ என்ற வளைவரை, $f(x) = |x|$ என்ற வளைவரையை ஒரு அலகு மேல்நோக்கி நகர்த்திக் கிடைக்கப் பெறுவது ஆகும் [படம் 1.52].

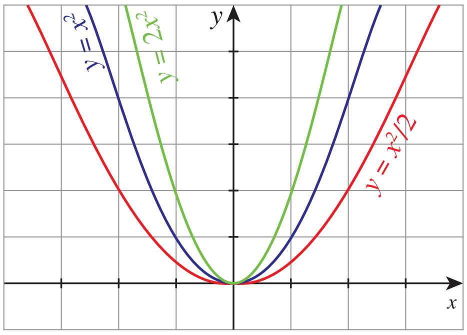
விரிதல் / சுருங்குதல் (dilation)

வரைபடத்தை x –அச்சை நோக்கி விரிக்கவோ அல்லது y -அச்சை நோக்கிச் சுருங்கவோ செய்வது, விரிதல் / சுருங்குதல் ஆகும். ஒரு மிகை மாறிலியால் ஒரு சார்பினைப் பெருக்குவதால் வரைபடமானது, விரிதல் அல்லது சுருங்குதல் அடைகிறது; அதாவது x -அச்சிலிருந்து விலகிச் செல்லவோ அல்லது நெருங்கவோ செய்கிறது. குறிப்பாக மிகை மாறிலி, ஒன்றை விடப் பெரியதாக இருப்பின், வரைபடம் x -அச்சிலிருந்து விலகிச் செல்லும். அதாவது y -அச்சை நோக்கிச் சுருங்கும். ஒன்றை விட மிகை மாறிலி குறைவாக இருப்பின், வரைபடம் x -அச்சை நோக்கி நெருங்கும். அதாவது y -அச்சை விட்டு விலகி விரிவடையும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.10:

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ (iii) $f(x) = 2x^2$

என்ற வளைவரைகளை கருதுக.



படம் 1.53

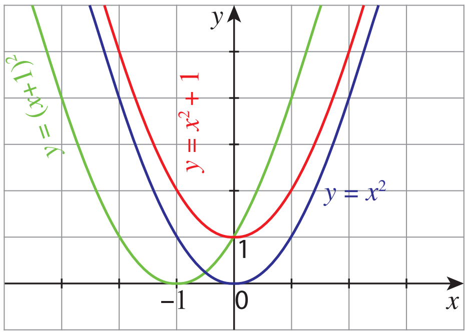
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ என்ற சார்பின் வரைபடம், $f(x) = x^2$ -ன் வரைபடத்தை x -அச்சை நோக்கி நெருக்குகிறது. அதாவது விரிவடைகிறது. ஏனெனில், இங்குப் பெருக்கல் காரணி $\frac{1}{2}$, ஒன்றை விடச் சிறியதாக இருக்கிறது.

$f(x) = 2x^2$ என்ற சார்பின் வரைபடம் $f(x) = x^2$ -ன் வரைபடத்தை x -அச்சிலிருந்து விலகி y -அச்சை நோக்கி நெருக்குகிறது. அதாவது வரைபடம் y -அச்சை நோக்கிச் சுருங்குகிறது. ஏனெனில், இங்கு பெருக்கல் காரணி 2 , ஒன்றை விடப் பெரியதாக இருக்கிறது [படம் 1.53].

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.11:

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = x^2 + 1$ (iii) $f(x) = (x + 1)^2$

என்ற வளைவரைகளைக் கருதுக.

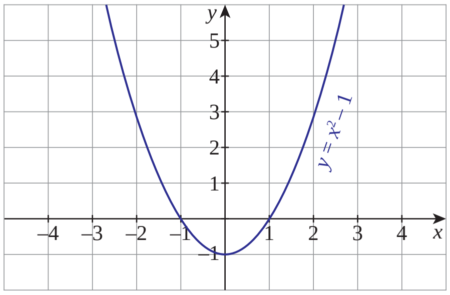


படம் 1.54

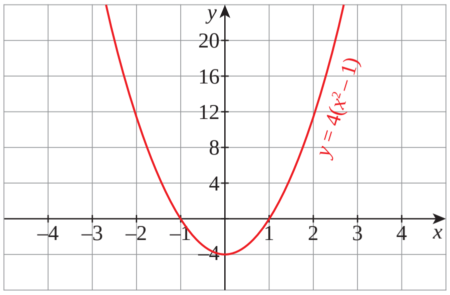
$f(x) = x^2 + 1$ என்ற சார்பின் வரைபடம், $f(x) = x^2$ -ஐ ஒரு அலகு செங்குத்தாக மேல்நோக்கி நகர்த்துகிறது.

$f(x) = (x + 1)^2$ என்ற சார்பின் வரைபடம் $f(x) = x^2$ -ஐ ஒரு அலகு கிடைமட்டமாக இடப்பக்கம் நோக்கி நகர்த்துகிறது [படம் 1.54].

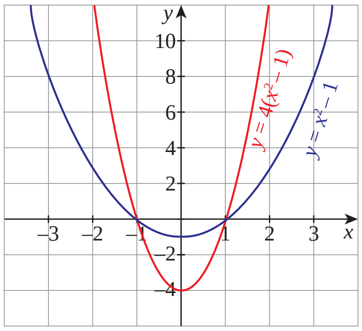
விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.12: $y = x^2 - 1, y = 4(x^2 - 1)$ மற்றும் $y = (4x)^2 - 1$ ஆகிய வரைபடங்களை ஒப்பீடு மற்றும் வேறுபடுத்திக் காண்க.



படம் 1.55



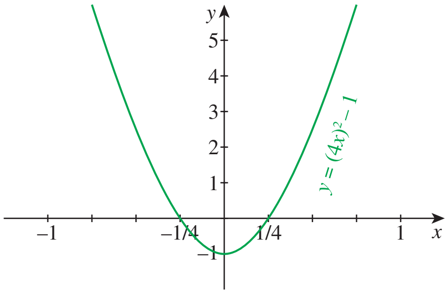
படம் 1.56



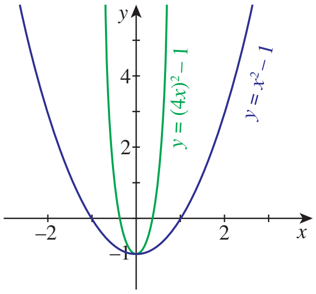
படம் 1.57

வரைபடங்கள் 1.55 மற்றும் 1.56 ஆகியவை y -அச்சு அளவீட்டில் காண்பதற்கு முன், இவை ஒன்றுபோல் காட்சி அளிக்கின்றன. படம் 1.56 -ல் உள்ள அளவீடு மூலச் சார்பினை (படம்1.55) நான்கால் பெருக்குவதால் y அளவீட்டை நான்கு மடங்காக மாற்றுகிறது. ஒரே அளவீட்டில் இந்தச் சார்புகளை ஒரே தளத்தில் வரைபடங்களாக வரைந்தால் படம்1.57 -ன் படி வேறுவகையில் காட்சியளிக்கிறது.

$y = (4x)^2 - 1$ -ன் வரைபடம் படம் 1.58 -ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. படம் 1.55 மற்றும் படம் 1.58 ஆகிய இரு வரைபடங்களுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு கண்டுபிடிக்க இயலுமா? இங்கு x அளவீடு படம் 1.55 -ல் பயன்படுத்திய அதே நான்கின் காரணியால் மாறுபட்டுள்ளது. இந்த வேறுபாட்டைக் காண $y = (4x)^2 - 1$ ல் $x = \frac{1}{4}$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது $1^2 - 1$. அதுவே மூலச் சார்பில் (படம் 1.55) $x = 1$ -ஆல் பிரதியிடக் கிடைக்கும் மதிப்பு ஆகும். ஒரே தளத்தில் இரண்டு சார்புகளையும் வரையும்போது (படம் 1.59) $y = (4x)^2 - 1$ என்ற வளைவரை y -அச்சை நோக்கி நெருங்கிக் காட்சியளிக்கின்றது. இங்கு x -வெட்டுத்துண்டுகள் வெவ்வேறானாலும் y -வெட்டுத்துண்டுகளில் மாற்றம் இல்லை.



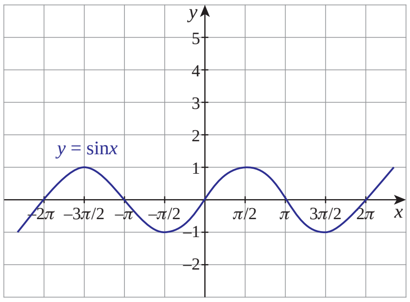
படம் 1.58



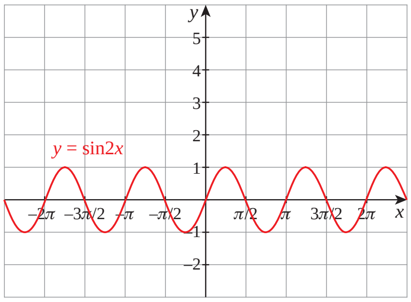
படம் 1.59

விளக்க எடுத்துக் காட்டு 1.13

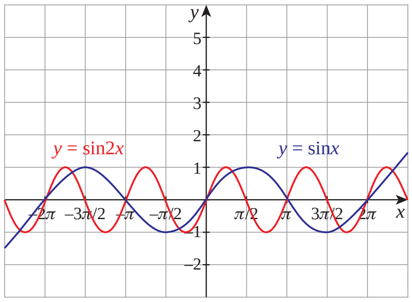
விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.12 -ல் பயன்படுத்திய செயல்முறையை $y = \sin x$; $y = \sin 2x$ வரைபடங்களுக்கும் ஒருங்கிணைந்த வரைபடங்களுக்கும் பயன்படுத்தப்பட்டுக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது [படங்கள் 1.60, 1.61 மற்றும் 1.62].



படம் 1.60



படம் 1.61



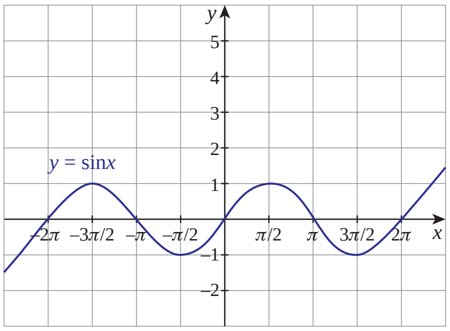
படம் 1.62

$\sin\, x$ மற்றும் $\sin 2x$ ஆகியவற்றின் மீச்சிறு மற்றும் பெரும மதிப்புகளில் மாறுபாடு இல்லை. ஆனால் x வெட்டுத்துண்டுகள் வெவ்வேறாக அமையும். $y = \sin x$ என்ற சார்பின் x வெட்டுத்துண்டுகள் $\pm\, n\pi$ ஆகும். ஆனால், $y = \sin\, 2x$ –ன் வெட்டுத்துண்டுகள் $\pm\, \frac{1}{2} n\pi$ ஆகும். இங்கு $n \in \mathbb{Z}$.

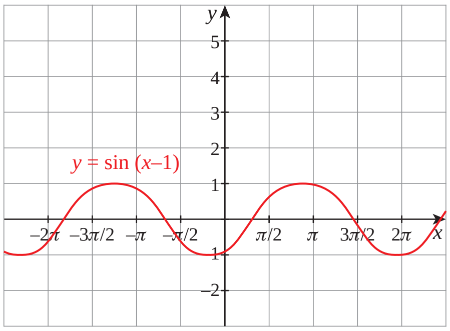
இப்பகுதியின் தொடக்கத்தில் $y = 2\sin\,(x–1) + 3$ என்ற சார்பின் வரைபடத்தை வரைவது பற்றி கூறினோம். இப்போது அதை வரைவதற்கு தேவையானவற்றைத் தெரிந்து கொண்டுள்ளோம். மேலும் இதனை விடக் கடினமான வளைவரை வரைவதற்குக் கூட ஆயத்தமாக இருக்கின்றோம். இனி $y = 2\sin\,(x–1) + 3$ என்ற சார்பின் வளைவரையை வரைவோம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 1.14 $y = 2\sin\,(x–1) + 3$ என்ற சார்பின் வளைவரையை வரைக.

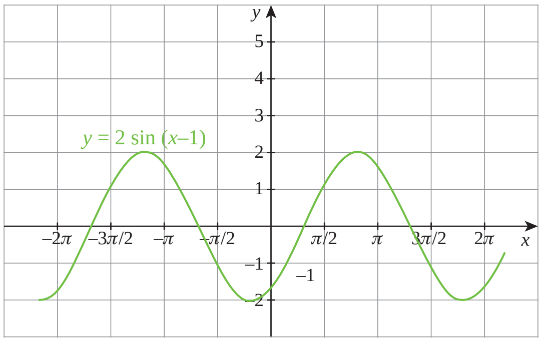
$y = \sin x$ என்ற வளைவரையை இடப்பெயர்ச்சி மற்றும் விரிதலைப் பயன்படுத்தி இவ்வளைவரையை வரைய இயலும் என்பது புலனாகிறது. முதலில் $y = \sin x$ என்பதன் வளைவரையை வரைவோம். இதிலிருந்து $y = \sin(x-1)$ -ஐ எளிதாக வரையலாம். பிறகு $y = 2\sin\,(x–1)$ -ன் வளைவரையை வரைந்து இறுதியாக $y = 2\sin\,(x–1) + 3$ என்பதன் வளைவரையை வரையலாம் [படங்கள் 1.63, 1.64, 1.65 மற்றும் 1.66].



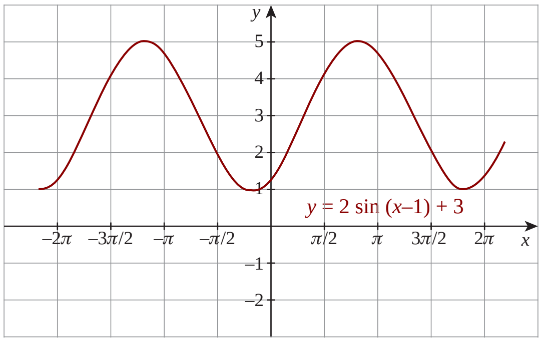
படம் 1.63



படம் 1.64



படம் 1.65

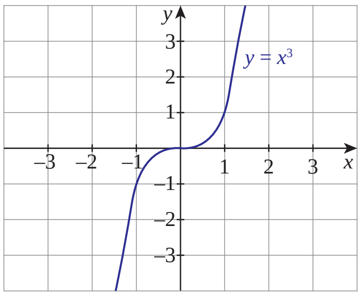


படம் 1.66

பயிற்சி 1.4

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள [படம் 1.67] $y = x^3$ என்ற வளைவரையின் படத்தினைப் பயன்படுத்தி அச்சு மதிப்பு மாறாமல் ஒரே தளத்தில் கீழ்க்காணும் சார்புகளை வரைக.

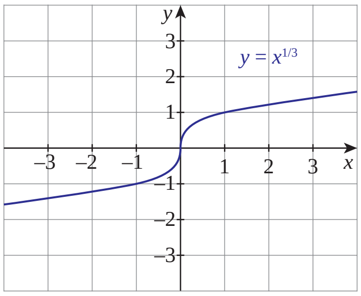
(i) $y = -x^3$ (ii) $y = x^3 + 1$ (ii) $y = x^3 - 1$ (iv) $y = (x+1)^3$



படம் 1.67

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள [படம் 1.68] $y = x^{\left(\frac{1}{3}\right)}$ என்ற வளைவரையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் சார்புகளை ஒரே தளத்தில் வரைக.

(i) $y = -x^{\left(\frac{1}{3}\right)}$ (ii) $y = x^{\left(\frac{1}{3}\right)} + 1$ (iii) $y = x^{\left(\frac{1}{3}\right)} - 1$ (iv) $y = (x+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$



படம் 1.68

3. ஒரே தளத்தில் $f(x) = x^3$ மற்றும் $g(x) = \sqrt[3]{x}$ சார்புகளை வரைபடமாக்குக. $f \circ g$–ஐ கணித்து அதே தளத்தில் வரைபடமாக்குக. முடிவுகளை ஆய்வு செய்க.

4. $y = x^2$ என்ற வளைவரையிலிருந்து $y = 3(x-1)^2 + 5$ என்ற வளைவரையை காணும் படிநிலைகளை எழுதுக.

5. $y = \sin x$ என்ற சார்பினை வரைந்து அதன் மூலம்

(i) $y = \sin(-x)$ (ii) $y = -\sin(-x)$

(iii) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (iv) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

ஆகியவற்றை வரைக. (இங்கு (iii),(iv) என்பவை $\cos x$ என்பது முக்கோணவியல் மூலம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.)

6. $y = x$ என்ற நேர்கோட்டின் மூலம்

(i) $y = -x$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x + 1$

(iv) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (v) $2x + y + 3 = 0$ ஆகியவற்றைத் தோராயமாக வரைக.

7. $y = |x|$ என்ற வளைவரையின் மூலம்

(i) $y = |x-1| + 1$ (ii) $y = |x+1| - 1$ (iii) $y = |x+2| + 3$ ஆகியவற்றை வரைக.

8. $y = \sin x$ என்ற வளைவரை மூலம் $y = \sin|x|$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைக. [இங்கு $\sin(-x) = -\sin x$] .

செயல்முறை பயிற்சி (Activities)

BALLS AND RUNS

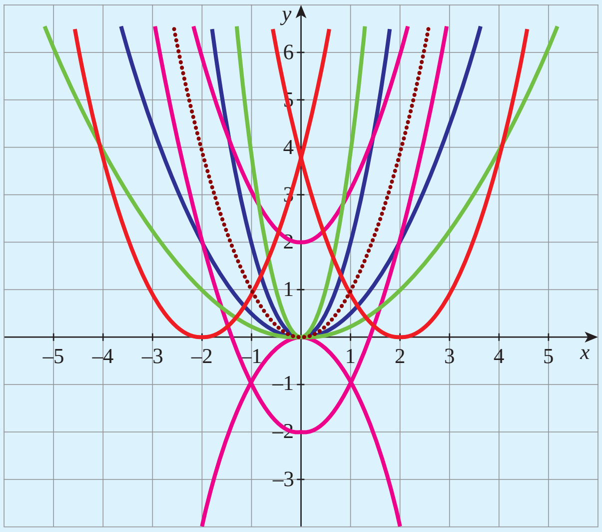
WHAT A CELEBRATION! WHAT A RELATION WHAT A FUNCTION!

BALL	RUNS
1	0
2	0
3	4
4	0
5	4
6	0
7	1
8	1
9	6
10	0
11	1
12	4
13	0
14	4
15	1
16	6
17	1
18	1
19	4
20	1
21	4
22	4
23	1
24	6
25	6
26	4
27	4
28	1
29	4
30	0
31	6
32	6
33	6
34	6
35	4

Source: Times of India

1. மேற்கண்ட படத்தில் உள்ள புள்ளி விவரங்களை
   (i) தொடர்பாக்குக
   (ii) சார்பாக்குக
   (iii) ஓர் மேற்கோர்த்தல் சார்பாக்குக
   (iv) ஒன்றுக்கொன்றாக மாற்ற இயலுமா? இல்லையெனில் காரணம் கண்டறிக

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் 1.69 -லிருந்து, $y = x^2$ எனும் அடிப்படையான வளைவரை மூலம் (புள்ளிகள் மூலம் தொடர்ச்சியற்றுக் காட்டப்பட்டுள்ளது) ஏனைய வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளை அளவீட்டினைக் கண்டுணர்ந்து இனம் காண்க.



படம் 1.69

பயிற்சி 1.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

1. $A = \{(x,y): y = e^x, x \in \mathbb{R}\}$ மற்றும் $B = \{(x,y): y = e^{-x}, x \in \mathbb{R}\}$ எனில், $n(A \cap B)$ என்பது

   (1) ∞ (2) 0 (3) 1 (4) 2

2. $A = \{(x,y): y = \sin x, x \in \mathbb{R}\}$ மற்றும் $B = \{(x,y): y = \cos x, x \in \mathbb{R}\}$ எனில், $A \cap B$ -ல்

   (1) உறுப்புகளில்லை (2) எண்ணிலடங்கா உறுப்புகள் உள்ளன

   (3) ஒரே ஒரு உறுப்பு உள்ளது (4) தீர்மானிக்க இயலாது

3. $A = \{0, -1, 1, 2\}$ எனும் கணத்தில் $|x^2 + y^2| \leq 2$ எனுமாறு xRy ஆக வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்பு R எனில், கீழ்க்கண்டவற்றில் எது சரியானது?

   (1) $R = \{(0,0),(0,-1),(0,1),(-1,0),(-1,1),(1,2),(1,0)\}$

   (2) $R^{-1} = \{(0,0),(0,-1),(0,1),(-1,0),(1,0)\}$

   (3) R -ன் சார்பகம் $\{0, -1, 1, 2\}$

   (4) R -ன் வீச்சகம் $\{0, -1, 1\}$

4. $f(x) = |x-2| + |x+2|, x \in \mathbb{R}$ எனில்,

   (1) $f(x) = \begin{cases} -2x & ; \ x \in (-\infty, -2] \\ 4 & ; \ x \in (-2, 2] \\ 2x & ; \ x \in (2, \infty) \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} 2x & ; \ x \in (-\infty, -2] \\ 4 & ; \ x \in (-2, 2] \\ -2x & ; \ x \in (2, \infty) \end{cases}$

   (3) $f(x) = \begin{cases} -2x & ; \ x \in (-\infty, -2] \\ -4 & ; \ x \in (-2, 2] \\ 2x & ; \ x \in (2, \infty) \end{cases}$ (4) $f(x) = \begin{cases} -2x & ; \ x \in (-\infty, -2] \\ 2 & ; \ x \in (-2, 2] \\ 2x & ; \ x \in (2, \infty) \end{cases}$

5. $\mathbb{R}$ மெய்யெண்களின் கணம் என்க. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ –ல் கீழ்க்கண்ட உட்கணங்களைக் கருதுக.
   $S = \{(x,y): y = x+1$ மற்றும் $0 < x < 2\}$; $T = \{(x,y): x - y \in \mathbb{Z}\}$

   எனில் கீழ்க்காணும் கூற்றில் எது மெய்யானது?

   (1) T சமானத் தொடர்பு ஆனால், S சமானத் தொடர்பு அல்ல.

   (2) S , T இரண்டுமே சமானத் தொடர்பு அல்ல.

   (3) S, T இரண்டுமே சமானத் தொடர்பு.

   (4) S சமானத் தொடர்பு ஆனால், T சமானத் தொடர்பு அல்ல.

6. இயல் எண்களின் அனைத்துக்கணம் $\mathbb{N}$ -க்கு A மற்றும் B உட்கணங்கள் எனில் $A' \cup [(A \cap B) \cup B']$ என்பது

   (1) A (2) A' (3) B (4) $\mathbb{N}$

7. கணிதம் மற்றும் வேதியியல் இரண்டும் பாடங்களாக ஏற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 70. இது கணிதத்தை ஏற்றவர்களின் 10% மற்றும் வேதியியல் ஏற்றவர்களின் 14% ஆகும். இவற்றில் ஏதாவதொன்றைப் பாடமாக ஏற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

(1) 1120 (2) 1130

(3) 1100 (4) போதுமான தகவல் இல்லை.

8. $n[(A\times B)\cap(A\times C)]=8$ மற்றும் $n(B\cap C)=2$ எனில், $n(A)$ என்பது

(1) 6 (2) 4 (3) 8 (4) 16

9. $n(A)=2$ மற்றும் $n(B\cup C)=3$, எனில் $n[(A\times B)\cup(A\times C)]$ என்பது

(1) 2^3 (2) 3^2 (3) 6 (4) 5

10. A மற்றும் B எனும் இரு கணங்களில் 17 உறுப்புகள் பொதுவானவை எனில், $A\times B$ மற்றும் $B\times A$ ஆகிய கணங்களில் உள்ள பொது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) 2^{17} (2) 17^2 (3) 34 (4) போதுமான தகவல் இல்லை

11. வெற்றற்ற கணங்கள் A மற்றும் B என்க. $A\subset B$ எனில் $(A\times B)\cap(B\times A)=$

(1) $A\cap B$ (2) $A\times A$

(3) $B\times B$ (4) இவற்றுள் எதுவும் இல்லை.

12. 3 உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தின் மீதான தொடர்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) 9 (2) 81 (3) 512 (4) 1024

13. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் X -ன் மீதான அனைத்துத்தொடர்பு R எனில் R என்பது

(1) தற்சுட்டுத் தொடர்பு அல்ல (2) சமச்சீர் தொடர்பல்ல

(3) கடப்புத் தொடர்பு (4) இவற்றுள் எதுவுமன்று

14. $X=\{1,2,3,4\}$ மற்றும் $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3),(2,1),(3,1),(1,4),(4,1)\}$ எனில் R என்பது

(1) தற்சுட்டுத் தொடர்பு (2) சமச்சீர் தொடர்பு

(3) கடப்புத் தொடர்பு (4) சமானத் தொடர்பு

15. $\dfrac{1}{1-2\sin x}$ என்ற சார்பின் வீச்சகம்

(1) $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{3},\infty\right)$ (2) $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$

(3) $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$ (4) $(-\infty,-1)\cup\left[\frac{1}{3},\infty\right)$

16. $f(x)=|\lfloor x\rfloor-x|, x\in\mathbb{R}$ என்ற சார்பின் வீச்சகம்,

(1) $[0,1]$ (2) $[0,\infty)$ (3) $[0,1)$ (4) $(0,1)$

17. $f(x)=x^2$ என்ற சார்பு இருபுறச் சார்பாக அமைய வேண்டுமெனில் அதன் சார்பகமும், துணைச்சார்பகமும் முறையே

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ (2) $\mathbb{R}, (0, \infty)$ (3) $(0, \infty), \mathbb{R}$ (4) $[0, \infty), [0, \infty)$

18. m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திலிருந்து n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் மாறிலிச் சார்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) mn (2) m (3) n (4) $m+n$

19. $f:[0,2\pi]\to[-1,1]$ என்ற சார்பு, $f(x)=\sin x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், அது

(1) ஒன்றுக்கொன்று (2) மேற்கோர்த்தல்
(3) இருபுறச் சார்பு (4) வரையறுக்க இயலாது

20. $f:[-3,3]\to S$ என்ற சார்பு $f(x)=x^2$ என வறையறுக்கப்பட்டு மேற்கோர்த்தல் எனில், S என்பது

(1) $[-9, 9]$ (2) $\mathbb{R}$ (3) $[-3, 3]$ (4) $[0, 9]$

21. $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $f = \{(1, a), (4, b), (2, c), (3, d), (2, d)\}$ எனில் f என்பது

(1) ஒன்றுக்கொன்றானச் சார்பு (2) மேற்கோர்த்தல் சார்பு
(3) ஒன்றுக்கொன்று அல்லாத சார்பு (4) சார்பன்று

22. $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x<1 \\ x^2 & ; \quad 1\le x\le 4 \\ 8\sqrt{x} & ; \quad x>4 \end{cases}$ எனில்

(1) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x & ; \ x<1 \\ \sqrt{x} & ; \ 1\le x\le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; \ x>16 \end{cases}$ (2) $f^{-1}(x)=\begin{cases} -x & ; \ x<1 \\ \sqrt{x} & ; \ 1\le x\le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; \ x>16 \end{cases}$

(3) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x<1 \\ \sqrt{x} & ; \ 1\le x\le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; \ x>16 \end{cases}$ (4) $f^{-1}(x)=\begin{cases} 2x & ; \ x<1 \\ \sqrt{x} & ; \ 1\le x\le 16 \\ \frac{x^2}{8} & ; \ x>16 \end{cases}$

23. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$–ல் சார்பு $f(x) = 1-|x|$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் f -ன் வீச்சகம்

(1) $\mathbb{R}$ (2) $(1, \infty)$ (3) $(-1, \infty)$ (4) $(-\infty, 1]$

24. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ -ல் $f(x)=\sin x+\cos x$ எனில் f ஆனது

(1) ஒரு ஒற்றைப்படைச் சார்பு (2) ஒற்றைப்படையுமல்ல இரட்டைப்படையுமல்ல
(3) ஒரு இரட்டைப்படைச் சார்பு (4) ஒற்றைப்படை மற்றும் இரட்டைப்படைச் சார்பு

25. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ல் $f(x) = \dfrac{(x^2+\cos x)(1+x^4)}{(x-sin\,x)(2x-x^3)}+e^{-|x|}$ எனில் f

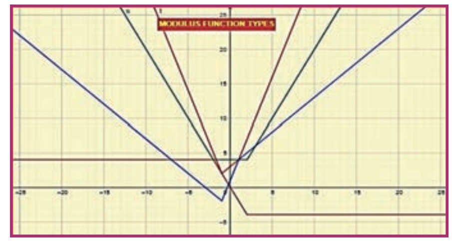
(1) ஒரு ஒற்றைப்படைச் சார்பு
(2) ஒற்றைப்படையுமல்ல, இரட்டைப்படையுமல்ல
(3) ஒரு இரட்டைப்படைச் சார்பு
(4) ஒற்றைப்படை மற்றும் இரட்டைப்படைச் சார்பு.

பாடத் தொகுப்பு (Summary)

இந்தப் பாடத்தில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- **கணங்கள்**
  - உட்கணம், மிகைக் கணம், வெள்ளிடை உட்கணம், தகு உட்கணம், தகா உட்கணம்
  - வெற்றுக் கணம், அடுக்குக் கணம், அனைத்துக்கணம், ஓருறுப்புக் கணம், முடிவுள்ள கணம், முடிவிலாக் கணம்
  - கணத்தின் செவ்வெண்மை
  - சேர்ப்பு, வெட்டு, வெட்டா, நிரப்பிக் கணங்கள், கண வேறுபாடு, சமச்சீர் வேறுபாடு
  - பண்புகள் மற்றும் டி மார்கன் பண்புகள்
  - கார்டீசியன் பெருக்கல்
- **இடைவெளிகள்**
  - மாறிலிகள், சார்ந்த மற்றும் சாராத மாறிகள்
  - திறந்த, மூடிய, முடிவுள்ள மற்றும் முடிவிலா இடைவெளிகள் மற்றும் அண்மைகள்
- **தொடர்புகள்**
  - சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம்
  - உச்சத் தொடர்புகள் (வெற்று மற்றும் அனைத்து)
  - தொடர்பின் நேர்மாறு
  - தற்சுட்டு, சமச்சீர், கடப்பு, சமானத் தொடர்புகள்
- **சார்புகள்**
  - வரையறை, சார்பகம், துணைச்சார்பகம், வீச்சகம், பிம்பம், முன்பிம்பம்
  - அட்டவணை, வரைபட, பகுமுறை வழிமுறைகள் மற்றும் பகுதிவாரி முறை
  - சமனிச் சார்பு, மாறிலிச் சார்பு, பூஜ்ஜியச் சார்பு, மட்டுச் சார்பு, குறியீட்டுச்சார்பு, மீப்பெரு முழு எண் சார்பு , மீச்சிறு முழு எண் சார்பு, ஒன்றுக்கொன்றான, மேற்கோர்த்தல் சார்புகள், இருபுறச் சார்புகள்.
  - நிலைக் கோட்டுச் சோதனை மற்றும் கிடைமட்டக்கோட்டுச் சோதனை
  - சார்புகளின் சேர்ப்பு, சார்பின் நேர்மாறு
  - மெய்மதிப்புச் சார்புகளின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல்
  - பல்லுறுப்புச் சார்பு, நேரியல் சார்பு, படிக்குறிச் சார்பு, மடக்கைச் சார்பு, விகிதமுறுச் சார்பு, தலைகீழ்ச் சார்பு
  - ஒற்றைப்படை மற்றும் இரட்டைப் படைச் சார்புகள்.
- **வரைபடமாக்கப்படும் சார்புகள்**
  - பிரதிபலிப்பு, இடப்பெயர்வு, விரித்தல்
  - கடினமாகத் தோற்றமளிக்கும் சார்புகளின் வரைபடம் வரைதல்

இணையச் செயல்பாடு – 1 (அ)



படி–1

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

படி–2

"Graph of Special Functions" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகம் தோன்றும். அங்கே சார்புகள் தொடர்பான 7 பயிற்சித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். அதில் தேவையான ஒரு பயிற்சியைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். எடுத்துக்காட்டாக "More Modulus Functions" என்ற பயிற்சித்தாளைத் தெரிவு செய்யவும்.

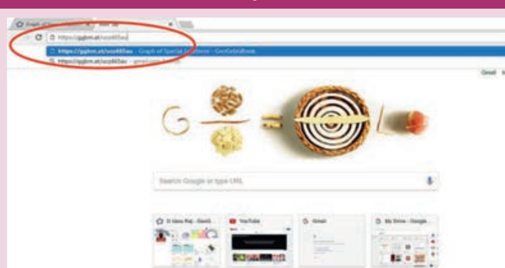
படி–3

பயிற்சித்தாளின் வலப் பக்கத்தில் நிலைதகவுச்சார்புகளும் அதற்கான தெரிவு பெட்டியும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

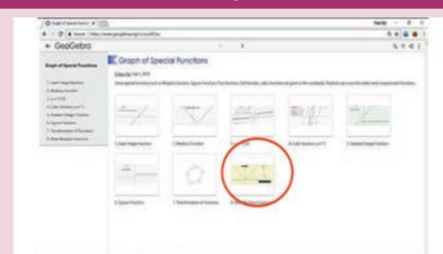
படி–4

அவற்றை ஒவ்வொன்றாகத் தேர்வு செய்தால் இடப் பக்கத்தில் அவற்றின் வரைபடம் தோன்றும். மேலும் "a" என்கிற நழுவுக்கோட்டை நகர்த்தி மாறுதல்களை ஆய்வு செய்க.

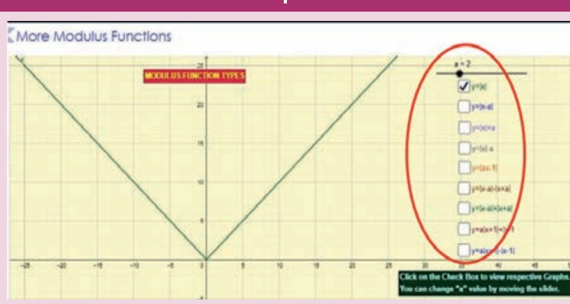
படி–1



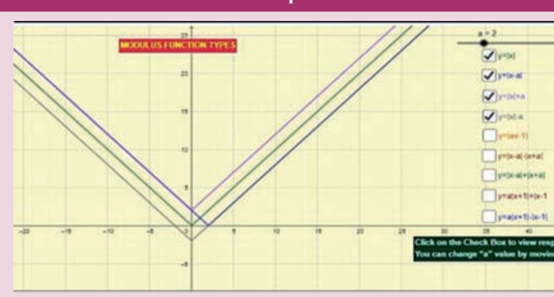
படி–2



படி–3



படி–4

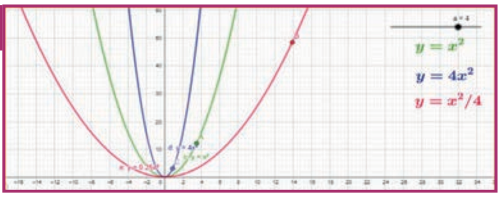


மேலும் பல பயிற்சித்தாள்களை இப்பணிப்புத்தகத்தில் காணலாம்

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/ucz465au or Scan the QR Code.

இணையச் செயல்பாடு – 1 (ஆ)



படி–1

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

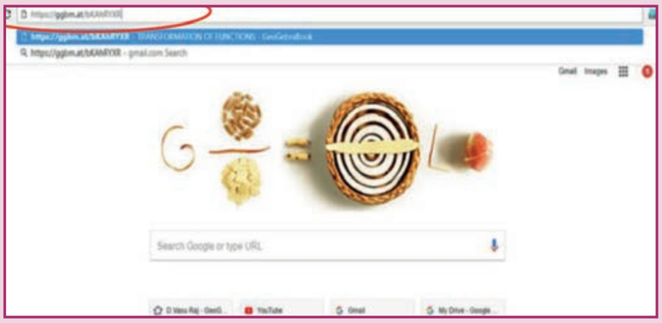
படி–2

"TRANSFORMATION OF FUNCTIONS" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகம் தோன்றும். அதில் 10 பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

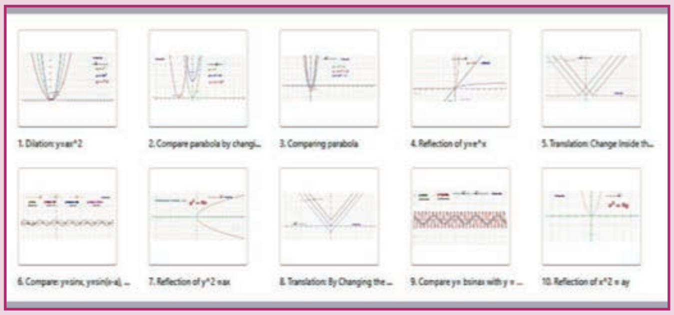
படி–3

அவற்றில் ஒவ்வொன்றாகத் தேர்வு செய்து 1. Translation, 2. Reflection மற்றும் 3. Dilation ஆகியவற்றை ஆய்வு செய்க. Sine சார்புகளை ஒப்பீடு செய்ய ஒரு பணித்தாள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். அனைத்து பணித்தாள்களிலும் நழுவுக்கோட்டை நகர்த்தி மாறுதல்களை ஆய்வு செய்க.

படி–1



படி–3



படி–2

TRANSFORMATION OF FUNCTIONS

1. Dilation: y=ax^2
2. Compare parabola by changing x-coefficient and constant
3. Comparing parabola
4. Reflection of y=e^x
5. Translation: Change Inside the Modulus
6. Compare: y=sinx, y=sin(x-a), y=bsin(x-a), y=bsin(x-a)+c
7. Reflection of y^2 =ax
8. Translation: By Changing the constant.
9. Compare y= bsinax with y = sinx
10. Reflection of x^2 = ay

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/ucz465au or Scan the QR Code.

அத்தியாயம் 2

அடிப்படை இயற்கணிதம்

நான் பார்க்கிறேன். ஆனால், நம்பமாட்டேன்.

–ரிச்சர்டு டெடிகைன்ட்

LYES5

2.1 அறிமுகம் (Introduction)

அளவுகளைக் குறியீடுகளாகக் கொண்டு எழுதப்பட்டு அவைகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகளை வெளிப்படுத்தும் ஒரு கணிதத்தின் தனிப் பிரிவாக இயற்கணிதம் விளங்குகிறது. இந்த வகுப்பில் மாறிகள் மெய்யெண்களை மட்டும் குறிக்கும் என்போம். மாறிகளை கையாளுதல் மற்றும் கணக்கீடுகளில் பயன்படுத்துதல் ஆகியவை எண்களைப் போலவே அமைகிறது. ஒரு கோவையிலுள்ள மாறிகளுக்கு மெய்யெண்களைப் பிரதியிடக் கிடைப்பது ஒரு மெய்யெண்ணாகும். ஒரு அளவையோ அல்லது கணிதக் கூற்றையோ மாறிகளின் மூலமாக எழுதினால் அதில் மாறிகளுக்கு குறிப்பிட்ட எண் மதிப்புகளைப் பிரதியிட முடியும். இது இயற்கணிதத்தைச் சக்தி வாய்ந்த கருவியாக மாற்றுகிறது. இதன் காரணமாக கணிதத்தில் மட்டுமல்லாமல் மேலும், பல துறைகளிலும் மற்றும் அன்றாட வாழ்க்கைக்கும் இயற்கணிதம் பரவலான பயன்பாடுகளைக் கொண்டிருக்கிறது. ஒட்டுமொத்தக் கணிதத்திற்கும் மெய்யெண்கள் அடிப்படையாகும். 19 ஆம் நூற்றாண்டில்தான் மெய்யெண்களின் அமைப்பைப் பற்றிச் சிறப்பாகப் புரிந்து கொள்ளப்பட்டது. விகிதமுறு எண்களை விரிவுபடுத்த வேண்டும் என்ற தேவை கணித வரலாற்றில் தொடக்கத்திலேயே உணரப்பட்டது. பிதாகரஸ் குழு $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் இல்லை என்பதை உணர்ந்திருந்தனர். கிறித்து பிறப்பதற்கு 800 ஆண்டுகளுக்கு முன் உருவான சுலபச் சூத்ரா (Shulbha Sutras)வில் விகிதமுறா எண்களின் கட்டமைப்புப் பற்றித் தெரிவிக்கிறது. ஆரியபட்டர் (Aryabhata) (476 – 550) என்பவர் π என்ற விகிதமுறா எண்ணின் தோராய மதிப்பைக் கண்டறிந்தார்.

இந்தியக் கணித அறிஞர்கள் பிரம்மகுப்தா (598-670) (Brahmagupta) மற்றும் பாஸ்கராச்சாரியா (1114-1185) (Bhaskaracharya) ஆகியோர் மெய்யெண்களின் அமைப்பு மற்றும் இயற்கணிதம் ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்வதற்குத் தங்கள் பங்களிப்பைத் தந்துள்ளனர். மிகை மற்றும் குறை மூலங்களையுடைய பொதுவான இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கு பிரம்மகுப்தா தீர்வு கண்டார். ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட காணப்படவேண்டிய குறியீடுகளைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு பாஸ்கராச்சாரியர் குறை மற்றும் விகிதமுறா தீர்வுகளைக் கண்டார். மிக முக்கியமான மெய்யெண் பூஜ்ஜியம் இந்தியர்களின் பங்களிப்பாகும்.

ரிச்சர்டு டெடிகைண்ட்
(1831-1916)

ரெனி டெகார்டே (1596 -1650) (Rene Descartes) பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாடுகளின் மூலங்களை விளக்கும்போது கற்பனை மூலங்களை வேறுபடுத்திக் காட்டுவதற்கு மெய் என்ற சொல்லை அறிமுகம் செய்தார். ரிச்சர்டு டெடிகைன்ட் (1831-1916) (Richard Dedekind), மெய்யெண்களின் அமைப்பை மிகச் சீராகக் கட்டமைத்தார்.

கற்றலின் நோக்கங்கள் (Learning objectives)

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- மெய்யெண்களின் கருத்து மற்றும் அவைகளின் பண்புகள்
- மட்டு மதிப்பு, பல்லுறுப்புக்கோவைகள், அடுக்குகள், படிமூலங்கள், மடக்கைகள் மற்றும் இம்மாறிகள் உள்ளடங்கிய சார்புகள்
- சமன்பாடுகள் மற்றும் அசமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு காணும் முறை
- இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய அசமன்பாடுகளின் தீர்வு காணுதல், மேலும் கார்டீசியன் தளத்தில் அத்தீர்வுகளை வரைபடமாக வரையப்படுதல் ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகிறது.

2.2 மெய்யெண்களின் அமைப்பு (Real Number System)

முதலில் எவ்வாறு மெய்யெண்களின் அமைப்பு உருவானது என்பதனை மீள் பார்வையிடுவோம். இயல் எண்கள் $\mathbb{N}$-லிருந்து தொடங்குவோம்.

2.2.1 விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ என்பது பொருட்களை எண்ணிடப் போதுமான கணமாகும். இலாப–நஷ்டங்களைக் கையாள வசதியாக $\mathbb{N}$–ஐ விரிவு செய்து அனைத்து முழு எண்களின் கணமாக $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ விரிவாக்கப்பட்டது. இக்கணம் இயல் எண்கள் (மிகை முழு எண்கள்), பூஜ்ஜியம் மற்றும் குறை குறியீடுகளுடன் கூடிய இயல் எண்கள் (குறை முழு எண்கள்) ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ளது. $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ என்பதைக் குறையற்ற முழு எண்களின் கணம் என்போம். மேலும், இதனை $\mathbb{W}$ ஆல் குறிப்போம். இக்கணம் இயலெண்களின் கணத்திலிருந்து பூஜ்ஜியம் என்ற ஒரே ஒரு உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுகிறது.

இப்போது ஒரு அப்பத்தினை ஐந்து சமபங்காகப் பிரிக்க வேண்டும் என்பது $5x = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதற்கு ஒப்பாகும். $\mathbb{Z}$–ல் மட்டும் இதன் தீர்வுகளைக் காண இயலாது. எனவே, $\mathbb{Z}$ஐ விரிவுபடுத்தி $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ என பின்னங்களால் உருவாக்கப்பட்டது. ஆகவே, $\mathbb{Q}$–ல் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணும் விகிதமுறு எண் (rational number) என அழைக்கப்படுகிறது.

$-5, \frac{-7}{3}, 0, \frac{22}{7}, 7, 12$ ஆகியவை விகிதமுறு எண்களுக்கான சில எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

விகிதமுறு எண்கள், முடியக்கூடிய தசமங்கள் அல்லது முடிவுறாச் சீர் சூழல் தசமங்களைக் கொண்ட எண்களின் கணம் என்பதை முந்தைய வகுப்புகளில் கண்டோம். $-5.0,\ -2.333\cdots,\ \frac{25}{99} = 0.252525\cdots,\ \frac{2}{3} = 0.6666\cdots,\ 7.14527836231231231\cdots$ ஆகியவை விகிதமுறு எண்களுக்கான சில எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

2.2.2 எண் கோடு (The Number Line)

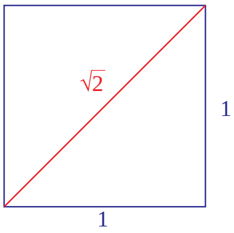
எண்கோடு என்பதை நினைவு கொள்வோம். இது 0-ஐ மையமாகவும், அதன் வலப்பக்கம் 1 அமைந்துள்ள கிடைமட்டக்கோடு ஆகும். 0-விற்கும் 1-க்கும் இடைப்பட்ட தூரம் ஒரு அலகு என வரையறுக்கலாம். இப்போது 1–க்கு வலப்பக்கம் ஒரு அலகு தூரத்தில் 2 ஐக் குறிக்கவும். இதேபோன்று,

x என்ற மிகை விகிதமுறு எண்ணை 0-விலிருந்து x அலகு வலப்புறத்தில் அக்கோட்டில் குறிக்கலாம். இதேபோன்று குறை விகிதமுறு எண் $-r, r > 0$-ஐ 0-விற்கு இடப்பக்கம் r அலகு தூரத்தில் குறிக்கலாம். மேலும், $x, y \in \mathbb{Q},\ x < y$ எனில் y இன் இடப்புறத்தில் x இருக்கும். மேலும், $x < \frac{x+y}{2} < y$. எனவே, இரு வெவ்வேறு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையில் மற்றொரு விகிதமுறு எண் இருக்கும்.

கேள்வி:

விகிதமுறு எண்களை முழுக்கோட்டிலும் குறித்து விடமுடியுமா?

இதற்குப் பதில் 'முடியாது' என்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கலாம். 1 அலகு பக்கங்களைக் கொண்ட சதுரத்தைக் கொள்க. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி அதன் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $\sqrt{2}$ அலகு ஆகும்.



படம் 2.1

2.2.3 விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers)

தேற்றம் 2.1 $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் அல்ல.

நிரூபணம்: $\sqrt{2}$ விகிதமுறு எண் என எடுத்துக்கொண்டால் $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, இதில் m, n , ஆகியவை 1- ஐ விட வேறு பெரிய பொதுக் காரணியில்லாத இயலெண்கள் என எழுத இயலும். இப்போது, $m^2 = 2n^2$ என்பதால் m^2 என்பது ஒரு இரட்டைப்படை எண் ஆகிறது. எனவே, m ஒரு இரட்டைப்படை எண் $m = 2k$ என்க. மேலும், $2n^2 = 4k^2$ என்பதால் $n^2 = 2k^2$ ஆகும். எனவே, n ஒரு இரட்டைப்படை எண். இவ்வாறு m மற்றும் n ஆகியவை பொதுக்காரணி 2 உடைய இரட்டைப்படை எண்களாக மாறுகிறது. இது முரணான முடிவு ஆகும். எனவே $\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் (irrational number) ஆகும்.

குறிப்புரை :

(i) மேலே உள்ள நிரூபணத்தில் நாம் எதை நிறுவ வேண்டுமோ அதற்கு நேரெதிரான கூற்றை எடுத்துக்கொண்டு முரணான கூற்றினை வருவித்தோம் என்பதைக் கவனிக்கவும். இம்முறை "முரண்பாட்டு கூற்று மூலம்" நிரூபித்தல் ஆகும்.

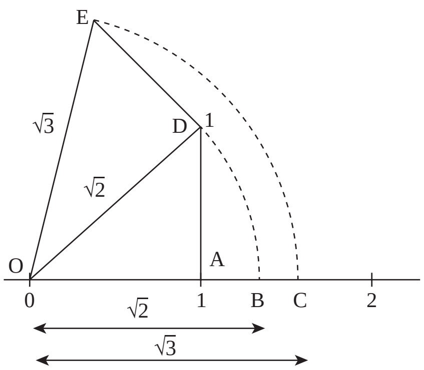
(ii) எண் கோட்டில் விகிதமுறு எண்களால் குறிக்கப்படும் புள்ளிகளைத் தவிர வேறு புள்ளிகளும் உண்டு.

(iii) எண் கோட்டில் விகிதமுறு எண்களால் குறிக்கப்படாத புள்ளிகளைக் குறிக்கும் எண்களை விகிதமுறா எண்கள் $\mathbb{Q}'$ என்போம். (படம் 1.2 இல் எண்கோட்டைப் பார்க்க)

ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும், விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கவேண்டும். ஆனால் இரண்டுமாக இருக்க முடியாது. எனவே, $R = Q \cup Q'$ மற்றும் $Q \cap Q' = \phi$.

முடிவுறும் தசமங்களைக் கொண்ட எண்களும் முடிவுறாச் சீர் சூழல் தசமங்களைக் கொண்ட எண்களும் விகிதமுறு எண்கள் என்பதை அறிவோம். தசம முறையில் எழுதப்படும் விகிதமுறா எண்கள் முடிவுறாச் சீர் சூழல் தன்மையற்ற தசமங்களைப் பெற்றிருக்கும். $\mathbb{R}$ என்ற மெய்யெண்களின் கணத்திலுள்ளவைகளை எண் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளாகக் கொள்ளலாம். மேலும், $x < y$ எனில், y–க்கு இடப்பக்கத்தில் x அமையும்.

ஒரு எண்கோட்டில் 2 மற்றும் 3–ன் வர்க்க மூலங்களைக் குறிப்பதை படம் 2.2–ல் காணலாம்.



படம் 2.2

$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ என்பதை அறிவோம்.

விகிதமுறா எண்களை நடைமுறை வாழ்வில் சில இடங்களில் காணலாம். 2000 ஆண்டுகளுக்கு முன்பு எகிப்தியர்கள், வட்டங்களின் சுற்றளவும் அதன் விட்டமும் சம விகிதத்தில் அமைவதைக் கண்டார்கள். இந்த மாறிலி π–ஐ ஜோகன் ஹென்ரிச் லாம்பர்ட் (Johann Heinrich Lambert), 1767–ல் ஒரு விகிதமுறா எண் என நிரூபித்தார். 9 தசமத் திருத்தமாக π–ன் மதிப்பு 3.141592654 ஆகும். வட்டத்தின் பரப்பு மற்றும் கோளத்தின் கன அளவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடும்போது பயன்படுத்தப்படும் $\frac{22}{7}$ மற்றும் 3.14 ஆகியவை π–ன் தோராய மதிப்புகளாகும்.

குறிப்பு: ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவிற்கும் அதன் விட்டத்திற்கும் உள்ள விகிதம் π என்ற விகிதமுறா எண் ஆகும்.

கணிதத்தின் அடிப்படையான மெய்யெண்களின் அமைப்பின் பண்புகளை நினைவு கூர்வோம்.

2.2.4 மெய்யெண்களின் பண்புகள் (Properties of Real Numbers)

(i) $a, b \in \mathbb{R}$ எனில் $a + b \in \mathbb{R}$ மற்றும் $ab \in \mathbb{R}$ (இரண்டு மெய்யெண்களின் கூடுதல் ஒரு மெய்யெண் மற்றும் இரு மெய்யெண்களின் பெருக்கல் ஒரு மெய்யெண் ஆகும்).

(ii) $a, b, c \in \mathbb{R}$ எனில் $(a + b) + c = a + (b + c)$ மற்றும் $a(bc) = (ab)c$ (மூன்று மெய்யெண்களை கூட்டும்போது (பெருக்கும்போது) எந்த இரண்டு எண்களையும் முதலில் கூட்டலாம் (பெருக்கலாம்)).

(iii) $a \in \mathbb{R}$ எனில், $a + 0 = a$ மற்றும் $a(1) = a$.

(iv) $a \in \mathbb{R}$ எனில், $a + (-a) = 0$ மற்றும் $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b\left(\frac{1}{b}\right) = 1$.

(v) $a, b \in \mathbb{R}$ எனில், $a + b = b + a$ மற்றும் $ab = ba$.

(vi) $a, b, c \in \mathbb{R}$ எனில், $a(b + c) = ab + ac$.

(vii) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \iff b - a > 0$.

(viii) $a \in \mathbb{R}$ எனில், $a^2 \geq 0$.

(ix) $a, b \in \mathbb{R}$ எனில், கீழ்க்காண்பனவற்றில் ஒன்று மட்டுமே உண்மை. அதாவது $a = b$ அல்லது $a < b$ அல்லது $a > b$.

(x) $a, b \in \mathbb{R}$ மற்றும் $a < b$ எனில், $a + c < b + c$ இங்கு, $c \in \mathbb{R}$.

(xi) $a, b \in \mathbb{R}$ மற்றும் $a < b$ எனில், $ax < bx$ இங்கு, $x > 0$.

(xii) $a, b \in \mathbb{R}$ மற்றும் $a < b$ எனில், $ay > by$ இங்கு, $y < 0$.

பயிற்சி 2.1

1. $\left\{\sqrt{7}, \frac{-1}{4}, 0, 3.14, 4, \frac{22}{7}\right\}$ ஆகிய ஒவ்வொரு எண்ணினையும் $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ அல்லது $\mathbb{Z}$ என்ற அடிப்படையில் எழுதுக.

2. $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனக்காட்டுக. (குறிப்பு: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$–க்குப் பயன்படுத்திய முறையை பின்பற்றவும்)

3. தனித்த (அ) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட இரண்டு விகிதமுறா எண்கள் உள்ளனவா எனில், அவ்விரு விகிதமுறா எண்களின் வித்தியாசம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க முடியுமா? நியாயப்படுத்துக.

4. இரு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல் விகிதமுறு எண்ணாக அமையுமாறு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க. இரு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் விகிதமுறு எண்ணாக அமையுமாறு இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காணமுடியுமா?

5. $\frac{1}{2^{1000}}$-ஐவிட சிறிய மிகை எண் காண்க. நியாயப்படுத்துக.

2.3 மட்டு மதிப்பு (Absolute Value)

2.3.1 வரையறை மற்றும் பண்புகள் (Definition and Properties)

$\mathbb{R}$–ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் எண்கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியோடு ஒழுங்கு வரிசையில் ஒன்றுக்கு ஒன்று தொடர்புடையவை என்பதைக் கண்டோம். $x \in \mathbb{R}$ எனில், x மற்றும் $-x$ ஆகியவை 0–லிருந்து சமதூரத்தில் அமைந்துள்ளன. எண்கோட்டில், $a \in \mathbb{R}$–க்கும் 0-க்கும் a–க்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு a–ன் மட்டு மதிப்பு (absolute value) எனப்படும். மேலும், இதனை $|a|$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

எனவே எந்த ஒரு $x \in \mathbb{R}$–க்கும் $|x| = \begin{cases} -x & x<0 \text{ எனில்} \\ x & x \geq 0 \text{ எனில்} \end{cases}$ என எழுதலாம், மற்றும்

$|\cdot|$ ஆனது $\mathbb{R}$–லிருந்து $[0,\infty)$–க்கு மேற்கோர்த்தல் சார்பாக வரையறை செய்கிறது. இதன் வரைபடம் முதல் இயலில் கண்டோம்.

குறிப்பு: (i) எந்த ஒரு $x \in \mathbb{R}$–க்கும் $|x| = |-x|$. எனவே, $|x| = |y|$ எனில் $x = y$ அல்லது $x = -y$. மேலும், $x = y$, $x = -y$ எனில், $|x| = |y|$.

(ii) $|x-a| = r$ எனில் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $r \geq 0$ மற்றும் $x - a = r$ அல்லது $x - a = -r$.

2.3.2 மட்டு மதிப்புகளை உடைய சமன்பாடுகள் (Equations involving absolute values)

ஒரு சமன்பாடு அல்லது அசமன்பாட்டின் **தீர்வு** a என்ற மெய்யெண் எனில், அக்கூற்றில் மாறிக்குப் பதிலாக a ஐப் பிரதியிட அக்கூற்று உண்மையாக வேண்டும்.

அடுத்ததாக, மட்டு மதிப்புகளைத் தன்னகத்தே கொண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1 $|2x-17| = 3$–ன் தீர்வு காண்க.

தீர்வு:

$$|2x-17| = 3 \text{ எனில் } 2x - 17 = \pm 3$$

$$\text{அதாவது, } x = 10 \text{ அல்லது } x = 7$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2 $3|x-2|+7=19$ –ன் தீர்வு காண்க.

தீர்வு:

$$3|x-2|+7 = 19$$

மேலும், . $|x-2| = \frac{19-7}{3} = 4$

எனவே, $x-2 = 4$ அல்லது $x-2=-4$

அதாவது, தீர்வு $x = -2$ மற்றும் $x=6$

எடுத்துக்காட்டு 2.3 தீர்வு காண்க : $|2x-3|=|x-5|$.

தீர்வு:

$|u|=|v|$ எனில், தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதும் என்னவென்றால் $u=v$ அல்லது $u=-v$ ஆகும். எனவே, $|2x-3|=|x-5|$ என்பது $2x-3=x-5$ அல்லது $2x-3=5-x$. இதன் தீர்வு, $x=-2$ மற்றும் $x=\frac{8}{3}$.

2.3.3 மட்டு மதிப்புகளுக்கான சில முடிவுகள் (Some Results for Absolute Value)

(i) $x,y\in\mathbb{R}, |y+x|=|x-y|$ எனில் $xy=0$

(ii) $x,y\in\mathbb{R}$, எனில் $|xy|=|x|\,|y|$

(iii) $x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0$ எனில் $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

(iv) $x,y\in\mathbb{R}$, எனில் $|x+y|\le|x|+|y|$.

2.3.4 மட்டு மதிப்புகளுடைய அசமன்பாடுகள் (Inequalities involving absolute values)

இங்கு மட்டு மதிப்புகளுடைய அசமன்பாடுகளின் தீர்வு காணுதலைக் காண்போம். முதலில் மிகவும் எளிய அசமன்பாடுகளான (i) $|x|<r$ மற்றும் (ii) $|x|>r$ போன்றவற்றைக் காண்போம்.

(i) $|x|<r$ எனில், தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $-r<x<r$ என நாம் நிறுவுவோம். $|x|\ge 0$ என்பதால் $r>0$ என குறிக்கலாம். x–ன் குறியீட்டினைப் பொறுத்து இரண்டு நிலைகள் உள்ளன.

நிலை 1

$x\ge 0$, எனில் $|x|=x$. எனவே, $|x|<r\Rightarrow x<r$

நிலை 2

$x<0$, எனில் $|x|=-x$. எனவே, $|x|<r\Rightarrow -x<r$

அதாவது, $x>-r$

$|x|<r$-க்குத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $-r<x<r$ அல்லது $x\in(-r,r)$ ஆகும்.

(ii) $|x| > r$ என்பதற்கு தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $x < -r$ அல்லது $x > r$ என நிறுவுவோம்.

$|x| > r$ என்க. $r < 0$ எனில், ஒவ்வொரு $x \in \mathbb{R}$, இந்த அசமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும்.

$r \geq 0$, எனில் இரண்டு நிலைகள் உண்டு.

நிலை 1

$x \geq 0$ எனில் $|x| = x > r$

நிலை 2

$x < 0$, எனில் $|x| = -x > r$ அதாவது, $x < -r$

எனவே, $|x| > r$–க்குத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $x < -r$ அல்லது $x > r$ அதாவது $x \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty)$ ஆகும்.

குறிப்புரை :

(i) $a \in \mathbb{R}$ மற்றும் $|x - a| \leq r$–க்குத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $-r \leq x - a \leq r$ ஆகும். அதாவது, $x \in [a - r,\ a + r]$

(ii) $a \in \mathbb{R}$ எனில், $|x - a| \geq r$ என்பதனை $x - a \leq -r$ அல்லது $x - a \geq r$ என எழுதலாம். இதற்குத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $x \in (-\infty,\ a - r] \cup [a + r,\ \infty)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.4 தீர்க்க: $|x - 9| < 2$

தீர்வு:

$|x - 9| < 2$ என்பது $-2 < x - 9 < 2$ ஆகும். அதாவது, $7 < x < 11$.

எடுத்துக்காட்டு 2.5 தீர்க்க: $\left|\dfrac{2}{x - 4}\right| > 1,\ x \neq 4.$

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டிலிருந்து $2 > |x - 4|$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது, $-2 < x - 4 < 2$ மற்றும் $x \neq 4$.

மேலும், 4 ஐக் கூட்ட $2 < x < 6$ மற்றும் $x \neq 4$. அதாவது, $(2,\ 4) \cup (4,\ 6)$ என்பது தீர்வு ஆகும்.

பயிற்சி 2.2

1. தீர்வு காண்க.

(i) $|3 - x| < 7$ (ii) $|4x - 5| \geq -2$

(iii) $\left|3-\frac{3}{4}x\right| \leq \frac{1}{4}$ (iv) $|x| - 10 < -3$

2. $\frac{1}{|2x-1|} < 6$-க்குத் தீர்வு கண்டு, தீர்வை இடைவெளிக் குறியீட்டில் எழுதுக.

3. $-3|x| + 5 \leq -2$–க்குத் தீர்வு கண்டு, தீர்வை எண்கோட்டில் குறிக்க.

4. $2|x+1| - 6 \leq 7$–க்குத் தீர்வு கண்டு, தீர்வை எண்கோட்டில் குறிக்க.

5. தீர்க்க: $\frac{1}{5}|10x-2| < 1$.

6. தீர்க்க: $|5x-12| < -2$.

2.4 நேரிய அசமன்பாடுகள் (Linear Inequalities)

$a, b \in \mathbb{R}$ என்ற மாறிலிகளைக் கொண்ட $f(x) = ax + b$ என்ற சார்பு நேரியல் சார்பு என்பதை நினைவு கூர்வோம். இதன் வரைபடம் ஒரு நேர்கோடு என்பதால் இதை நேரியல் சார்பு என்கிறோம். இங்கு, a என்பது கோட்டின் சாய்வு மற்றும் b என்பது y–வெட்டு துண்டு ஆகும். $a \neq 0$, எனில், $f(x) = ax + b = 0$ என்பதைத் தீர்க்க x-வெட்டுத்துண்டு $\frac{-b}{a}$ எனக் கிடைக்கும்.

சில நேரங்களில் நேரிய அசமன்பாடுகளை கருத்தில் கொள்ளும் தேவை உருவாகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, "கோபுரத்தின் உயரம் 50 அடிக்கு மேல் இல்லை" என்ற கூற்றை விளக்க வேண்டும். x என்பது 'அடி'யில் குறிக்கப்பட்ட கோபுரத்தின் உயரம் எனில் மேலே உள்ள கூற்றை எழுதும் முறை $x \leq 50$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6 மாதாந்திர மின் பயன்பாட்டு கட்டணத்தின் ஒரு பகுதி மாறாது என்றும் மற்றொரு பகுதி பயன்படுத்திய மின்சாரத்தின் யூனிட் அளவைப் பொறுத்து மாறுவதாகவும் உள்ளது என்க. மின்வாரியம் அடிப்படைக் கட்டணமாக ₹110 என்றும் பயன்பாட்டுக் கட்டணம் ஒரு யூனிட்டுக்கு ₹4 என்றும் வசூலிக்கிறது. ஒருவர் தன் மின் கட்டணத்தை ₹250–க்குக் கீழ் இருக்கவேண்டும் என விருப்பப்பட்டால் அவரது மின் பயன்பாடு எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்.

தீர்வு:

x என்பதைப் பயன்படுத்திய மின்சாரத்தின் அளவு என்க. இங்கு $x \geq 0$, இப்போது, மின் கட்டணம் ₹ $110 + 4x$ ஆகும். அது ₹250–க்குக் கீழ் இருக்கவேண்டும். எனவே, $110 + 4x < 250$ என்ற அசமன்பாட்டின் அடிப்படையில் அமைய வேண்டும். அதாவது, $4x < 140$ எனவே, $0 \leq x < 35$. ஒருவர் தன் கட்டணம் ₹250–க்கு கீழ் இருக்க, பயன்பாட்டு மின்சாரம் 35 யூனிட்டுக்குக் கீழ் இருக்கவேண்டும்.

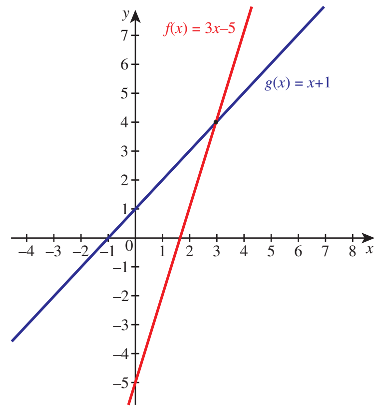
எடுத்துக்காட்டு 2.7 தீர்க்க: $3x - 5 \leq x + 1$

தீர்வு:

$3x - 5 \leq x + 1$ என்பது $2x \leq 6$ ஆகும்.

எனவே, $x \leq 3$ அதாவது, தீர்வு $(-\infty, 3]$ ஆகும்.

குறிப்பு: மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டினை வரைபடத்தின் மூலம் தீர்வு காணலாம். $f(x) = 3x - 5$ மற்றும் $g(x) = x + 1$ (படம் 2.3) ஆகியவற்றை வரைய வேண்டும். பின்பு g-ன் வரைபடத்திற்கும் கீழ் உள்ள f-ன் வரைபடத்தின் மீதுள்ள x புள்ளிகளைக் காண வேண்டும்.



படம் 2.3

எடுத்துக்காட்டு 2.8 கீழ்க்கண்ட அசமன்பாட்டுத் தொகுப்பினைத் தீர்க்க: $3x - 9 \geq 0,\ 4x - 10 \leq 6$

தீர்வு:

$3x - 9 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 9$ அதாவது, $x \geq 3$ எனக் கிடைக்கும்.

அதேபோன்று, $4x - 10 \leq 6$–லிருந்து, $4x \leq 16$ எனக் கிடைக்கும். அதாவது, $x \leq 4$.

தீர்வுகள் $[3,\ \infty)$ \மற்றும் $(-\infty,\ 4]$-ன் வெட்டுகணமாகும். எனவே, தீர்வு [3, 4].

எடுத்துக்காட்டு 2.9 A என்ற பெண் 446 பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு புத்தகத்தில் 271 பக்கங்களைப் படித்து முடித்துவிட்டாள். அவள் அப்புத்தகத்தை ஒரு வாரத்தில் படித்து முடிக்க வேண்டுமெனில், ஒரு நாளைக்குக் குறைந்தபட்சம் எத்தனை பக்கங்களை படிக்க வேண்டும்?

தீர்வு:

தினமும் படிக்கவேண்டிய பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை x என்க. x நிறைவு செய்யும் அசமன்பாடு $7x + 271 \geq 446$. அதிலிருந்து, $x \geq 25$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே அப்புத்தகத்தை ஒரு வாரத்தில் படித்து முடிக்கத் தினமும் குறைந்தது 25 பக்கங்கள் படிக்க வேண்டும்.

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் ஒவ்வொரு அசமன்பாடுகளும் ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட தீர்வுகளைத் தருகிறது. பொதுவாக அசமன்பாடுகளுக்கு தீர்வாக ஒரு வீச்சகம் கிடைக்கும்.

பயிற்சி 2.3

1. கீழ்க்கண்ட அசமன்பாடுகளை இடைவெளி அமைப்பில் எழுதுக.

   (i) $x \geq -1$ மற்றும் $x < 4$ (ii) $x \leq 5$ மற்றும் $x \geq -3$

   (iii) $x < -1$ அல்லது $x < 3$ (iv) $-2x > 0$ அல்லது $3x - 4 < 11$

2. $23x < 100$–ன் தீர்வை (i) $x \in \mathbb{N}$ (ii) $x \in \mathbb{Z}$ –க்கு காண்க.

3. $-2x \geq 9$–ன் தீர்வை (i) $x \in \mathbb{R}$ (ii) $x \in \mathbb{Z}$ (iii) $x \in \mathbb{N}$–க்கு காண்க.

4. தீர்வு காண்க (i) $\dfrac{3(x-2)}{5} \leq \dfrac{5(2-x)}{3}$ (ii) $\dfrac{5-x}{3} < \dfrac{x}{2} - 4$.

5. ஒவ்வொன்றும் 100 மதிப்பெண்கள் கொண்ட 5 பாடங்களில் மதிப்பெண்களின் சராசரி 90 அல்லது அதற்கும் மேல் இருந்தால் தரம் A ஆகும். ஒரு நபர் முதல் 4 பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 84, 87, 95, 91 எனில், ஐந்தாம் பாடத்தில் குறைந்தபட்சம் என்ன மதிப்பெண் பெற்றால் தரம் A கிடைக்கும்?

6. ஒரு உற்பத்தியாளர் 12 விழுக்காடு அமிலம் கொண்ட 600 லிட்டர் கரைசல் வைத்திருக்கிறார். இதனுடன் எத்தனை லிட்டர்கள் 30 விழுக்காடு அமிலத்தைக் கலந்தால் 15 விழுக்காட்டிற்கும் 18 விழுக்காட்டிற்கும் இடைப்பட்ட அடர்த்தி கொண்ட அமிலக் கரைசல் கிடைக்கும்?

7. 10ஐ விடப் பெரிய அடுத்தடுத்த இரண்டு ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல் 40ஐ விடக் குறைவாக இருக்க வேண்டுமெனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

8. ஒரு ஏவுகணை ஏவப்படுகிறது. t வினாடிகளுக்குப் பிறகு தரையில் இருந்து அதன் உயரம் h ஆனது $h(t) = -5t^2 + 100t,\ 0 \leq t \leq 20$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஏவுகணை எந்நேரங்களில் 495 அடி உயரத்தை அடையும்.

9. தண்ணீர் குழாய் சரி செய்பவருக்குப் பின்வரும் முறைகளில் கூலி கொடுக்கப்படுகிறது. முதல் முறையில் ₹500–ம், ஒவ்வொரு மணி நேரத்திற்கும் ₹70 கணக்கிடப்பட்டுக் கொடுக்கப்படுகிறது. இரண்டாம் முறையில் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திற்கு ₹120 எனக் கொடுக்கப்படுகிறது. ஒருவர் x மணி நேரம் வேலை செய்கிறார் எனில், x-ன் எம்மதிப்பிற்கு முதல் முறையில் அவருக்கு சிறந்த கூலி கிடைக்கும்?

10. A மற்றும் B ஆகியோர் ஒரே மாதிரியான வேலை செய்தாலும், அவர்களது மாத ஊதியம் ₹6000–க்கு மேல் வேறுபாடாக இருக்கிறது. B–ன் மாத ஊதியம் ₹27,000 எனில், A–ன் மாத ஊதியத்திற்கான சாத்தியக் கூறுகளைக் காண்க.

2.5 இருபடிச் சார்புகள் (Quadratic Functions)

$z \in \mathbb{R}$ மற்றும் $n \in \mathbb{N}$-க்கு $z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z$ (n-முறைகள்) என்பதை முந்தைய வகுப்புகளில் படித்துள்ளோம்.

$P(x) = ax^2 + bx + c$, (இங்கு, $a, b, c \in \mathbb{R}$ என்பன மாறிலிகள் மற்றும் $a \neq 0$) என்ற வடிவில் உள்ள சார்பு இருபடிச் சார்பு என்றழைக்கப்படுகிறது. $t \in \mathbb{R}$-க்கு, $P(t) = 0$ எனில், t என்பது $P(x)$–ன் ஒரு பூஜ்ஜியமாகும்.

2.5.1 இருபடி சூத்திரம் (Quadratic Formula)

பொதுவாக, இருபடிச் சார்பு $P(x) = ax^2 + bx + c$-ஐ $a(x-k)^2 + d$ என எழுத இயலுமா? இயலும். இதனை "வர்க்கத்தை நிறைவு செய்தல்" (completing the square) என்ற முறையில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - b\frac{b}{2a} + c\right)$$

ஆகவே, $$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + P\left(\frac{-b}{2a}\right) \quad \text{..... (1)}$$

தற்போது, $P(x) = 0$ எனக் கொள்ளும்போது, வளைவரை $P(x)$–ன் x வெட்டுத்துண்டு கிடைக்கும்.

$P(x) = 0$ எனில், (1) இலிருந்து கிடைப்பது, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + P\left(\frac{-b}{2a}\right) = 0.$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -P\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

$$= -\left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

எனவே, $$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \text{ அல்லது } x = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

எனவே, $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

இதனை இருபடிச் சூத்திரம் (quadratic formula) என்போம்.

குறிப்புரை

(i) $u \geq 0$-க்கு மட்டும் $\sqrt{u}$ ஒரு மெய்யெண் என வரையறுக்கப்படும்.

(ii) $\sqrt{u}$ என எழுதினால் அது ஒரு குறையற்ற மிகை எண்ணினைக் குறிக்கும்.

$b^2 - 4ac > 0$ எனில், $P(x) = 0$–க்கு வெவ்வேறான இரு மெய்யெண்கள் தீர்வாகும்.

$b^2 - 4ac = 0$ எனில், இரு சமமான மெய்யெண்கள் தீர்வாகும்.

மேலும், $b^2 - 4ac < 0$ எனில், மெய் மூலங்கள் இல்லை.

எனவே, $b^2 - 4ac > 0$ எனில், x அச்சை இரு புள்ளிகளில் வளைவரை வெட்டும்.

$b^2 - 4ac = 0$ எனில், வளைவரை x அச்சை ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொடும்.

$b^2 - 4ac < 0$ எனில், வளைவரை x அச்சை வெட்டாது.

எனவே, $P(x) = ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடிச் சார்பின் தன்மைகாட்டி (discriminant) $D = b^2 - 4ac$ என்கிறோம்.

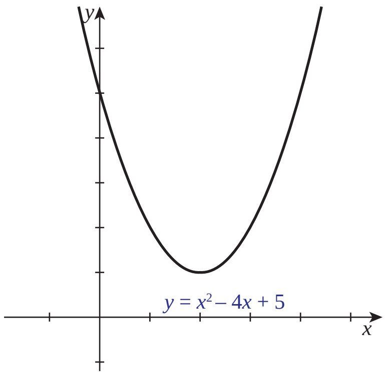
குறிப்பு: (i) α மற்றும் β ஆகியவை $ax^2 + bx + c = 0$–ன் மூலங்கள் எனில் $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ மற்றும் $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ஆகும்.

(ii) தன்மைகாட்டி $b^2 - 4ac$ ஒரு குறை எண் எனில் இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$–க்கு மெய்யெண் மூலம் இல்லை. இங்கு, கற்பனை எண்களே மூலங்களாகும்.

அவை, $\alpha = \dfrac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, $\beta = \dfrac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ இங்கு, $i^2 = -1$

(இதனைப் பற்றி அடுத்த வகுப்பில் படிப்போம்)

(iii) எடுத்துக்காட்டாக, $y = x^2 - 4x + 5$ (படம் 2.4) என்ற வரைபடத்தைப் பார்க்கலாம். இந்த வரைபடம் x-அச்சை வெட்டாததால், $x^2 - 4x + 5 = 0$–க்கு மெய்யெண்கள் தீர்வாக அமையாது.



படம் 2.4

(iv) இரு படி சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையை $D = b^2 - 4ac$ என்ற தன்மைகாட்டி மூலம் விவரிக்கும் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தன்மைகாட்டி	மூலங்களின் தன்மை	வளைவரை (பரவளையம்)
மிகை	வெவ்வேறான மெய்யெண்கள்	x-அச்சை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.
பூஜ்ஜியம்	சமமான மெய்யெண்கள்	x-அச்சை ஒரு புள்ளியில் தொடுகிறது.
குறை	மெய்யெண்கள் அல்ல	x-அச்சைச் சந்திக்காது.

எடுத்துக்காட்டு 2.10 $x^2 - px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் a மற்றும் b எனில், $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$–ன் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு:

a மற்றும் b ஆகியவை $x^2 - px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள். அவற்றின் கூடுதல் $a + b = p$ மற்றும் $ab = q$ ஆகும்.

எனவே, $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{p}{q}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.11 இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 - ax + a + 2 = 0$ –ன் மூலங்கள் சமம் எனில் a –ன் அனைத்து மதிப்புகளையும் காண்க.

தீர்வு:

$x^2 - ax + a + 2 = 0$ –ன் மூலங்கள் சமம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, தன்மைகாட்டியின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

ஆகவே, $D = b^2 - 4ac = a^2 - 4a - 8 = 0$

எனவே, $a = \dfrac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$

அதாவது, $a = 2 + \sqrt{12},\ 2 - \sqrt{12}$.

எடுத்துக்காட்டு 2.12 $x^2 + |x - 1| = 1$ –ன் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு:

நிலை (1)

$x \geq 1$ எனில், $|x - 1| = x - 1$.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2 + x - 2 = 0$.

காரணிப்படுத்த கிடைப்பது, $(x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2$ அல்லது 1.

ஆனால், $x \geq 1$ எனவே, $x = 1$.

நிலை (2)

$x < 1$ எனில், $|x - 1| = 1 - x$.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2 + 1 - x = 1$.

எனவே, $x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ அல்லது $x = 1$.

ஆனால் $x < 1$, எனவே, $x = 0$.

எனவே, தீர்வுக் கணம் $\{0, 1\}$ ஆகும். எனவே, இச்சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு தீர்வுகள் உண்டு.

பயிற்சி 2.4

1. 7 மற்றும் –3 ஆகிய மூலங்களையுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
2. ஒரு இருபடிக் கோவையின் ஒரு பூஜ்ஜியம் $1 + \sqrt{5}$. மேலும், $p(1) = 2$ எனில், அந்த இருபடிக் கோவையைக் காண்க.
3. $x^2 + \sqrt{2}x + 3 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், பூஜ்ஜியங்கள் $\dfrac{1}{\alpha}$ மற்றும் $\dfrac{1}{\beta}$ உடைய இருபடிக் கோவையைக் காண்க.
4. $k(x - 1)^2 = 5x - 7$ என்பதன் ஒரு மூலம் மற்றதன் இருமடங்கு எனில், $k = 2$ அல்லது -25 எனக் காண்க.
5. $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$ -ன் மூலங்களுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடும், அவைகளின் பெருக்கற்பலனும் சமம் எனில், $a = 2$ என நிறுவுக.

6. $ax^2 + bx + c = 0$–ன் ஒரு மூலம்

   (i) மற்றொரு மூலத்தின் மாற்று குறியீடு

   (ii) மற்றொரு மூலத்தைப் போல் மூன்று மடங்கு

   (iii) மற்றொரு மூலத்தின் தலைகீழி ஆக இருக்கக் கட்டுப்பாடுகளைக் காண்க.

7. $x^2 - ax + b = 0$ மற்றும் $x^2 - ex + f = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொதுவான மூலம் உள்ளது. மேலும், இரண்டாம் சமன்பாட்டிற்குச் சமமான மூலங்கள் உண்டு எனில், $ae = 2(b + f)$ என நிறுவுக.

8. (i) $-x^2 + 3x + 1 = 0$ (ii) $4x^2 - x - 2 = 0$ (iii) $9x^2 + 5x = 0$ ஆகியவற்றின் மூலங்களின் தன்மையைக் காண்க.

9. வரைபடம் வரையாமல் (i) $y = x^2 + x + 2$, (ii) $y = x^2 - 3x - 7$, (iii) $y = x^2 + 6x + 9$ ஆகியவை x– அச்சை வெட்டுமா எனச் சோதித்தறியவும். மேலும் வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

10. $f(x) = x^2 + 5x + 4$-ஐ வர்க்கங்களின் கூடுதலாக எழுதுக.

2.5.2 இருபடி அசமன்பாடுகள் (Quadratic Inequalities)

இங்கு, $ax^2 + bx + c < 0$ அல்லது $ax^2 + bx + c > 0$ ஆகிய அசமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு காணலாம். இருபடி அசமன்பாடுகளைத் தீர்வு காணப் படி நிலைகள்

(i) $ax^2 + bx + c = 0$-க்குத் தீர்வு காண வேண்டும்.

(ii) மெய்யெண்களில் தீர்வு இல்லை எனில், மேலே உள்ளவற்றில் ஒரு அசமன்பாடு அனைத்து $x \in \mathbb{R}$-க்கும் உண்மையாகும்.

(iii) மெய்யெண்களில் தீர்வு உண்டு எனில், அது மாறுநிலைப் புள்ளிகளாகும் (critical point). அப்புள்ளிகளை எண்கோட்டில் குறித்தல் வேண்டும்.

(iv) இந்த மாறுநிலைப் புள்ளிகள் எண்கோட்டை பொது உறுப்புகளற்ற இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கின்றன. (ஒரே ஒரு மாறுநிலைப் புள்ளி இருக்கவும் வாய்ப்புள்ளது)

(v) ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

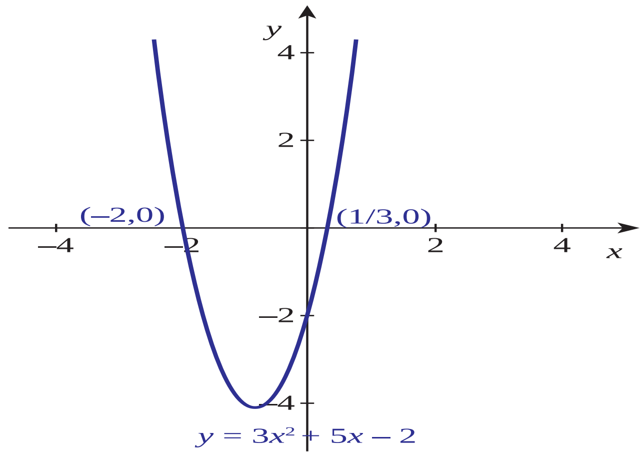
(vi) அப்புள்ளிகளை அசமன்பாட்டில் உள்ள கோவையில் பிரதியிடவேண்டும்.

(vii) அசமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் இடைவெளியைக் காணவும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.13 தீர்க்க: $3x^2 + 5x - 2 \le 0$

தீர்வு:

இருபடிக் கோவையைக் காரணிப்படுத்த, $3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) \le 0$ எனக் கிடைக்கும். ஒரு எண்கோட்டில் மாறுநிலைப் புள்ளிகளான -2 மற்றும் $\frac{1}{3}$ (படம் 2.5) ஆகியவற்றைக் குறிக்கவும். ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் $(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$–ன் மிகைத் தன்மையைச் சோதிக்கவும். அவ்விடைவெளியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக்கொள்க. கிடைக்கும் விடையின் குறியீடு என்னவோ, அதுவே இவ்விடைவெளியில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளையும் பிரதியிடக் கிடைக்கும் விடைகளின் குறியீடாகும். (இல்லையெனில், இந்த இடைவெளியில் மற்றொரு மாறுநிலைப்புள்ளி இருப்பதாகும்) இதைக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையின் மூலம் எளிதில் புரிந்துகொள்ளலாம்.



படம் 2.5

இடைவெளி	$(x+2)$ −ன் குறியீடு	$\left(x-\frac{1}{3}\right)$−ன் குறியீடு	$3x^2+5x-2$ −ன் குறியீடு
$(-\infty, -2)$	−	−	+
$\left(-2, \frac{1}{3}\right)$	+	−	−
$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$	+	+	+

எனவே, அசமன்பாடு நிறைவு செய்யும் இடைவெளி $\left[-2, \frac{1}{3}\right]$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.14 தீர்க்க: $\sqrt{x+14} < x+2$.

தீர்வு:

$\sqrt{x+14}$ வரையறுக்கப்பட $x+14 \geq 0$ என இருத்தல் வேண்டும்.

$x \geq -14$ எனவே, $x+2 > 0$, அதாவது $x \geq -2$.

மேலும், $(x+14) < (x+2)^2$. அதாவது, $x^2+3x-10 > 0$ எனவே, $(x+5)(x-2) > 0$.

$x = -5$ மற்றும் $x = 2$ ஆகிய மாறுநிலைப் புள்ளிகளைக் கொண்டு எண்கோட்டில் இடைவெளிகளை உருவாக்கி, அவற்றிலிருந்து புள்ளிகளைப் பிரதியிடக் கிடைக்கும் தீர்வு $x < -5$ மற்றும் $x > 2$ ஆகும். $x \geq -2$ என்பதால் அவற்றின் தீர்வு $x > 2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.15 $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $(x+4) \geq 0$ மற்றும் $6-4x-x^2 = (x+4)^2$ என்பதற்கு சமானமாகும்.

எனவே, $x \geq -4$ மற்றும் $x^2+6x+5 = 0$.

இதனைத் தீர்க்கக் கிடைப்பது, $x = -1, -5$

ஆனால், $x = -1$ மட்டும் இரண்டு நிபந்தனைகளையும் நிறைவு செய்கிறது. எனவே, $x = -1$ ஒரு தீர்வு ஆகும்.

XI_Maths_Ch-2_V-1_TM.indd 81 15-12-2021 13:51:44

பயிற்சி 2.5

1. தீர்வு காண்க: $2x^2 + x - 15 \leq 0$.
2. தீர்வு காண்க: $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$.

2.6 பல்லுறுப்புச் சார்புகள் (Polynomial Functions)

இதுவரை நாம் கற்றது ஒருபடி மற்றும் இருபடிச் சார்புகளைப் பற்றியது. இக்கருத்துகளைப் பொதுமைப்படுத்துவோம். $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \cdots, n$ எனக் கொண்டுள்ள கோவை $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$–ஐ x என்ற மாறியிலான பல்லுறுப்புக் கோவை (polynomial) என்போம். இங்கு, n ஒரு குறையற்ற முழு எண்ணாகும். $a_n \neq 0$ ஆக இருக்கும்போது, பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (degree) n ஆகும். $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ ஆகியவை பல்லுறுப்புக் கோவையின் குணகங்களாகும். a_0 என்பது மாறிலி உறுப்பு எனவும் (coefficients) a_n-ஐ முதற்குணகம் (பூஜ்ஜியமல்லாதபோது) எனவும் கூறலாம்.

இதிலிருந்து தெளிவாக,

(i) $100x^7 - \pi x^5 + 20\sqrt{2}\, x^2 + 7x + 1.22$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 7

(ii) $(17x - 3)(x + 3)(2x - \sqrt{\pi})(x + 2.3)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 4

(iii) $(x^2 + x + 1)(x^3 + 2x + 2)(x^5 - 5x + \sqrt{3})$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 10 ஆகும்.

x–க்கு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு $x = c$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது $a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ என்பது $\mathbb{R}$ இலிருந்து $\mathbb{R}$–க்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பு (polynomial function) ஆகும்.

கோவையின் படி 1 எனில், ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை (linear polynomial) எனவும், படி 2 எனில், இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை (quadratic polynomial) எனவும் கூறலாம். முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி (cubic polynomial) மூன்றாகும்.

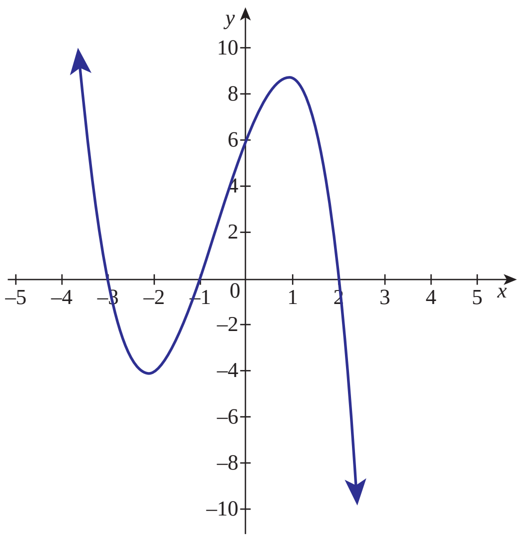
இதுபோல, படி 4 மற்றும் படி 5 கொண்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளை முறையே நாற்படித்தான (quartic) மற்றும் ஐம்படித்தான (quintic) பல்லுறுப்புக்கோவை எனலாம். ஒரு மாறிலியை $(a \neq 0)$, படி 0 உடைய பல்லுறுப்பு கோவையாக கருதலாம்.

$f(x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$ என அமைய, தேவையானதும், போதுமானதாகவும் உள்ள நிபந்தனை இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளும், அதாவது, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$ மற்றும் $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0, b_m \neq 0$ ஆகியவை சமமாக இருத்தல் வேண்டும். இதற்கு இணையாக $n = m$ மற்றும் $a_k = b_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots n$ ஆகும்.

இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் அதன் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் ஆகியவற்றைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5$ மற்றும் $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1$ எனில், $P(x) + Q(x) = x^4 + 8x^2 + x - 4$ (ஒத்திசைவு அடுக்குடைய x–ன் குணகங்களைக் கூட்டக் கிடைக்கும்) மேலும், $P(x)Q(x) = 2x^7 + 3x^6 - 12x^5 + 4x^4 + 19x^3 + 2x^2 - 5x - 5$ என்பதை $P(x)$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பாக எடுத்து $Q(x)$–ன் ஒவ்வொரு உறுப்புடன் பெருக்கும்போது கிடைக்கிறது.

XI_Maths_Ch-2_V-1_TM.indd 82 15-12-2021 13:51:46

$P(x)Q(x)$–ன் படி $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$ ஆகியவற்றின் படிகளின் கூடுதலுக்குச் சமம். $P(x)+Q(x)$–ன் படி அவற்றின் அதிகபட்சப் படியாகும். எடுத்துக்காட்டாக, இங்கு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடம் முப்படி பல்லுறுப்பு கோவையுடையதாகும்.



படம் 2.6

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவை இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகள் எனவும், $g(x)$ ஒரு பூஜ்ஜியமற்றது எனவும் கொண்டால் $\frac{f(x)}{g(x)}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு கோவையாகும் (rational function). பொதுவாக விகிதமுறு கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாக இருக்கவேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

2.6.1 வகுத்தல் கோட்பாடு (Division Algorithm)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவை இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்க. இங்கு $g(x)$ பூஜ்ஜியமற்ற கோவை என்க.

$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ என்றமையுமாறு $q(x)$ மற்றும் $r(x)$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் கிடைக்கும். இங்கு, $r(x)$ இன் படி $g(x)$ இன் படியை விடச் சிறியது. $q(x)$ என்பது ஈவு பல்லுறுப்புக் கோவை என்றும் $r(x)$ என்பது மீதி பல்லுறுப்புக் கோவை என்றும் குறிப்பிடப்படுகிறது. $r(x)$ ஒரு பூஜ்ஜியமெனில், $g(x)$, $q(x)$ ஆகியவை $f(x)$ இன் காரணிகளாகும். மேலும், $f(x)=q(x)g(x)$ ஆகும்.

முழுக்களுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் வகுத்தல் கோட்பாடும் இதற்குப் பொருந்தும்.

$g(x)=x-a$, எனில், மீதி $r(x)$–ன் படி பூஜ்ஜியமாகும். எனவே, $r(x)$ ஒரு மாறிலியாகும். அந்த மாறிலியைக் காண, $f(x)=(x-a)q(x)+c$ என எழுதி $x=a$ எனப் பிரதியிட, $c=f(a)$ எனக் கிடைக்கும்.

மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ஐ $x-a$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $f(a)$ ஆகும்.

மீதி $c=f(a)=0$ என அமையத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $f(x)$–ன் காரணி $x-a$ ஆகும்.

வரையறை 2.1

ஒரு மெய்யெண் a என்பது $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியமாக (zero of the polynomial) இருக்க வேண்டுமாயின் $f(a) = 0$ என இருத்தல் வேண்டும். $x - a$ என்பது $f(x)$–ன் பூஜ்ஜியம் எனில், $x - a$ என்பது $f(x)$–ன் ஒரு காரணியாகும்.

பொதுவாக, $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$, இங்கு, $g(a) \neq 0$ எனில், a ஐப் பொறுத்து அமையும் k இன் மதிப்பு $f(x)$–ன் படியைவிடச் சிறியதாகும். k என்பதை a என்ற பூஜ்ஜியத்தின் பெருக்கல்படி (multiplicity) என்கிறோம்.

குறிப்பு: (i) ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி n எனில், அதன் அதிகபட்ச மெய் பூஜ்ஜியங்களின் எண்ணிக்கை n ஆகும். $P(x) = x^2 + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு மெய் பூஜ்ஜியம் கிடையாது.

(ii) விகிதமுறு எண்களை குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $P(x)$ என்க. p என்ற பகா எண்ணுக்கு, $a + b\sqrt{p}$ என்பது $p(x)$–ன் பூஜ்ஜியமாக இருப்பின் அதன் இணை (conjugate) $a - b\sqrt{p}$–யும் ஒரு பூஜ்ஜியமாக அமையும்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கணக்குகளில் இரண்டு முக்கிய வகைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களைக் கண்டறிந்து, ஒருபடி காரணிகள் மூலம் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்

(ii) சில நிபந்தனைகளுடன் கொடுக்கப்பட்ட பூஜ்ஜியங்களைப் பயன்படுத்திப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கட்டமைப்பது.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்களைக் கண்டறியச் சில நேரங்களில் இயற்கணித முற்றொருமைகள் பயன்படுத்தப்பட வேண்டும் என்பது அறிந்ததாகும். முற்றொருமை என்றால் என்ன?

சார்பகத்தில் உள்ள எல்லா மதிப்பிற்கும் ஒரு சமன்பாடு மெய் எனில் அச்சமன்பாடு முற்றொருமை (identity) எனப்படும்.

சார்பகத்திலுள்ள சில மதிப்புகளுக்கு மட்டும் சமன்பாடு உண்மை எனில், அச்சமன்பாடு நிபந்தனைக்குட்பட்ட சமன்பாடு எனப்படும். கீழ்க்காணும் முற்றொருமைகளை நினைவில் கொள்வோம்.

2.6.2 முக்கியமான முற்றொருமைகள் (Important Identities)

$x, a, b \in \mathbb{R}$–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கீழ்க்கண்டவாறு நமக்குக் கிடைக்கிறது.

1. $(x+a)^3 = (x+a)^2(x+a) = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = x^3 + 3xa(x+a) + a^3$
2. $(x-b)^3 = x^3 - 3x^2b + 3xb^2 - b^3 = x^3 - 3xb(x-b) - b^3$ ($a = -b$ என (1)–ல் பிரதியிட)
3. $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - xa + a^2)$
4. $x^3 - b^3 = (x-b)(x^2 + xb + b^2)$, ($a = -b$, என (3) –ல் பிரதியிட)
5. $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + x^{n-k-1}a^k + \cdots + a^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$
6. $x^n + b^n = (x+b)(x^{n-1} - x^{n-2}b + \cdots + x^{n-k-1}(-b)^k + \cdots + (-b)^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$

பயிற்சி 2.6

1. $f(x) = 4x^2 - 25$ என்ற பல்லுறுப்புச் சார்பின் பூஜ்ஜியங்களைக் காண்க.
2. $x^3 - x^2 - 17x = 22$-ன் ஒரு மூலம் $x = -2$ எனில், பிற மூலங்களைக் காண்க.
3. $x^4 = 16$-ன் மெய் மூலங்களைக் காண்க.
4. தீர்வு காண்க: $(2x+1)^2 - (3x+2)^2 = 0$

அறுதியில்லாக் கெழுக்கள் வழிமுறை (Method of Undetermined Co–efficients)

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு, அறுதியில்லாக் கெழுக்கள் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கட்டமைப்பதைக் காண்போம். கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்திப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்களைக் காண வேண்டும். இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் சமமாக இருக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை அவற்றின் மாறிகளின் அடுக்குகள் ஒன்றாக உடைய உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.16 $f(0) = 1,\ f(-2) = 0$ மேலும், $f(1) = 0$ ஆக அமையும், இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$–ஐக் காண்க.

தீர்வு:

பல்லுறுப்புக் கோவையினை $f(x) = ax^2 + bx + c$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே, $$f(0) = a0^2 + b0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$f(-2) = 0,\ f(1) = 0.$$

இவற்றிலிருந்து, $4a - 2b + c = 0$ மற்றும் $a + b + c = 0$ ஆகியவற்றைப் பெறலாம்.

$c = 1$ எனப் பிரதியிட, $4a - 2b = -1$ மற்றும் $a + b = -1$

இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்வு காண, $a = b = -\frac{1}{2}$.

எனவே, $$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

குறிப்பு: மேலே உள்ள கணக்கிற்கு மற்றொரு முறையிலும் தீர்வு காணலாம். ஏதாவது சில மாறிலி d–க்கு, $x = -2, x = 1$, ஆகியவைகளைப் பூஜ்ஜியங்களா கொண்டு $f(x) = d(x+2)(x-1)$ என எழுதலாம்.

$f(0) = 1$ என பயன்படுத்தக் கிடைப்பது, $-2d = 1$. எனவே, $d = -\frac{1}{2}$.

ஆகவே, $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-1) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

எடுத்துக்காட்டு 2.17 $x = \frac{2}{5},\ 1 + \sqrt{3}$ ஆகிய பூஜ்ஜியங்களையும் $f(0) = -8$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

தீர்வு:

$\frac{2}{5}$ மற்றும் $1+\sqrt{3}$ ஆகியவை $f(x)$–ன் பூஜ்ஜியங்களாகும். எனவே, $1-\sqrt{3}$ என்பதும் அதன் பூஜ்ஜியமாகும்.

எனவே,
$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x-\frac{2}{5}\right)[(x-(1+\sqrt{3}))]\,[x-(1-\sqrt{3})] \\ &= a\left(x-\frac{2}{5}\right)[(x-1)^2-3] \end{aligned}$$

$f(0)=-8$-ஐப் பயன்படுத்த, $\left(-\frac{2}{5}a\right)(-2)=-8$

எனவே, $a=-10.$

தேவையான முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை,
$$\begin{aligned} f(x) &= (-10)\left(x-\frac{2}{5}\right)[x^2-2x-2] \\ &= -10x^3+24x^2+12x-8 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.18 $f(x)=x^3-3px+2q$ ஆனது, $g(x)=x^2+2ax+a^2$ ஆல் வகுபடும் எனில், $ap+q=0$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$f(x)$-ன் படி 3 என்றும் முதன்மை கெழு 1 என்றும் அறிக. $f(x)$-ஐ $g(x)$ வகுப்பதனால்,
$$f(x) = (x+b)g(x),\ b\in\mathbb{R}$$

எனவே,
$$x^3-3px+2q = (x+b)(x^2+2ax+a^2)$$

இருபுறமும் உள்ள ஒத்திசைவான கெழுக்களைச் சமப்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது

$2a+b=0,\quad a^2+2ab=-3p$ மற்றும் $2q=ba^2$

எனவே, $b=-2a,\ p=a^2,\ q=-a^3$
$$q=-a^3=-a(a^2)=-ap$$

இதிலிருந்து $ap+q=0$ எனக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.19 அறுதியில்லாக் கெழுக்கள் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி

$1+2+3+\cdots(n-1)+n,\quad n\in\mathbb{N}$–ன் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு:

$$S(n) = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \text{ என்க.}$$
$$\begin{aligned} &= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+[n-(n-2)]+[n-(n-1)] \\ &= n\left[1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{n-(n-2)}{n}+\frac{n-(n-1)}{n}\right] \\ &\le n[1+1+\cdots+1] \ (\text{ஏனெனில், } \frac{n-1}{n}<1,\ \frac{n-2}{n}<1,\cdots) \end{aligned}$$

எனவே, $S(n) \leq n^2$

$S(n) = a + bn + cn^2$ என்க. இங்கு, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$S(n+1) - S(n) = n+1$$

$$a + b(n+1) + c(n+1)^2 - [a + bn + cn^2] = n+1$$

$$b + 2cn + c = n+1$$

எனவே, $b + c = 1$ மற்றும் $2c = 1,\ b = \frac{1}{2};\ c = \frac{1}{2}$ எனக் கிடைக்கும்.

இங்கு, $S(1) = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \quad \Rightarrow a = 0 \qquad (b + c = 1)$

எனவே, $S(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}$

எடுத்துக்காட்டு 2.20 $(x-1)^3(x+1)^2(x+5) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க. மேலும், அதன் பெருக்கல் படித் தன்மைகளை எழுதுக.

தீர்வு:

$f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x+5) = 0$ என்க.

இங்கு, $x = 1, -1, -5$. மூலம் 1–ன் பெருக்கல்படி 3, -1-ன் பெருக்கல் படி 2 மற்றும் -5–ன் பெருக்கல் படி 1.

குறிப்பு: மூலத்தின் பெருக்கல் படி 1 எனில், அது எளிய மூலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.21 தீர்வு காண்க. $x = \sqrt{x+20},\ x \in \mathbb{R}$,

தீர்வு:

$x + 20 \geq 0$ என்றிருக்கும் போது மட்டுமே $\sqrt{x+20}$ -ஐ வரையறுக்க இயலும். வரையறையின்படி, $x + 20 \geq 0$. எனவே, x ஒரு மிகை எண்.

வர்க்கப்படுத்த கிடைப்பது, $x^2 = x + 20$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$(x-5)(x+4) = 0$$

$$x = 5, -4$$

x மிகை எண் என்பதால் $x = 5$

எடுத்துக்காட்டு 2.22 $x^2 - 6x + a = 0$ மற்றும் $x^2 - bx + 6 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொது மூலம் உள்ளது. மேலும் முதல் மற்றும் இரண்டாம் சமன்பாடுகளின் அடுத்த மூலங்கள் முழுக்களாகவும் 4:3 என்ற விகிதத்திலும் இருக்கும் எனில், பொது மூலத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

பொதுமூலம் α என்க.

$$\begin{aligned} x^2-6x+a &= 0\text{–ன் மூலங்கள் } \alpha,\ 4\beta \\ x^2-bx+6 &= 0\text{–ன் மூலங்கள் } \alpha,\ 3\beta \text{ என்க.} \end{aligned}$$

எனவே, $4\alpha\beta = a$ மற்றும் $3\alpha\beta = 6 \Rightarrow \alpha\beta = 2$ மற்றும் $a = 8$.

$$\begin{aligned} x^2-6x+8 &= 0\text{–ன் மூலங்கள் } 2, 4 \\ \alpha &= 2 \text{ எனில், } \beta = 1 \\ \alpha &= 4 \text{ எனில், } \beta = \frac{1}{2} \text{ என்பது ஒரு முழு எண் அல்ல.} \end{aligned}$$

எனவே, பொதுமூலம் 2 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.23 $x^2+px+8=0$-ன் மூலங்களின் வேறுபாடு 2 எனில் p-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$x^2+px+8 = 0\text{-ன் மூலங்கள் } \alpha,\ \beta \text{ என்க.}$$

எனவே, $\alpha+\beta = -p,\ \alpha\beta = 8$ மற்றும் $|\alpha-\beta| = 2$

இப்போது, $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \Rightarrow p^2-32 = 4$

ஆகவே, $p = \pm 6$.

பயிற்சி 2.7

1. காரணிப்படுத்துக: x^4+1. (குறிப்பு: வர்க்கத்தை நிறைவு செய்தல் முறையில் முயற்சி செய்க)
2. $3x^3+8x^2+8x+a$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணி x^2+x+1 எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

2.7 விகிதமுறுச் சார்புகள் (Rational Functions)

இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $P(x)$ மற்றும் $Q(x)$, $Q(x) \neq 0$, ஆகியவற்றின் விகிதம் x-ஆல் ஆன விகிதமுறு கோவை எனப்படும்.

$\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$, $\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ மற்றும் $\dfrac{x^2+x}{x^2-5x+6}$ ஆகியவை விகிதமுறு கோவைகளுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

பகுதி $P(x)$–ன் படி $Q(x)$–ன் படிக்குச் சமமாகவோ அல்லது அதைவிடப் பெரியதாகவே இருப்பின் $P(x) = f(x)\,Q(x) + r(x)$ என எழுதலாம். இங்கு, $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$–ன் படி $Q(x)$–ன் படியைவிடக் குறைவாக இருக்கும்.

எனவே, $$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

2.7.1 விகிதமுறு அசமன்பாடுகள் (Rational Inequalities)

எடுத்துக்காட்டு 2.24 தீர்க்க: $\frac{x+1}{x+3} < 3$.

தீர்வு:

இருபக்கமும் 3 ஐக் கழிக்க, $\frac{x+1}{x+3} - 3 < 0$

$$\frac{x+1-3(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-2x-8}{x+3} < 0$$

$$\frac{x+4}{x+3} > 0$$

$x+4,\ x+3$, ஆகிய இரண்டுமே மிகையாகவோ அல்லது இரண்டுமே குறையாகவோ இருக்கும்.

எனவே, $x+3$ மற்றும் $x+4$ ஆகியவைகளின் குறியீடுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

x	$x+3$	$x+4$	$\frac{x+4}{x+3}$
$x < -4$	$-$	$-$	$+$
$-4 < x < -3$	$-$	$+$	$-$
$x > -3$	$+$	$+$	$+$
$x = -4$	$-$	0	0

எனவே, தீர்வுக் கணம் $(-\infty, -4) \cup (-3, \infty)$ ஆகும்.

குறிப்பு: எண் கோட்டின் இடைவெளிகளில் காரணிகளின் குறிகளைக் குறிப்பிட்டும் இவ்வகை விகிதமுறு அசமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணலாம்.

பயிற்சி 2.8

1. $\frac{x^3(x-1)}{(x-2)} > 0$ எனில் x–ன் அனைத்து மதிப்புகளையும் காண்க.
2. $\frac{2x-3}{(x-2)(x-4)} < 0$ என்ற அசமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் x–ன் அனைத்து மதிப்புகளையும் காண்க.
3. தீர்வு காண்க: $\frac{x^2-4}{x^2-2x-15} \le 0$

2.7.2 பகுதி பின்னங்கள் (Partial Fractions)

$\frac{f(x)}{g(x)}$ என்ற விகிதமுறு கோவையில் $f(x)$–ன் படி $g(x)$–ன் படியை விட குறைவாக இருப்பின் அது ஒரு தகு பின்னமாகும். இங்கு மெய் பூஜ்ஜியங்கள் இல்லாமல் $g(x)$ஐ ஒருபடி மற்றும் இருபடி காரணிகளாக அமையும்படி காரணிப்படுத்த இயலும். எனவே, $\frac{f(x)}{g(x)}$ஐ எளிய உறுப்புகளைக் கொண்டு மாற்றி எழுதலாம். அதாவது உறுப்புகளின் கூடுதலாக பின்வருமாறு எழுதலாம்.

(i) $g(x)$-ஐ $x-a$ வகுக்கும் எனில், $\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$

(ii) இங்கு x^2+ax+b–க்கு மெய் பூஜ்ஜியங்கள் இல்லாமலும் மற்றும் $g(x)$ ஆனது (x^2+ax+b) ஆல் வகுபடுமாயின்,

$\frac{(B_1x+C_1)}{(x^2+ax+b)}+\frac{(B_2x+C_2)}{(x^2+ax+b)^2}+\cdots+\frac{(B_kx+C_k)}{(x^2+ax+b)^k}$ என எழுதலாம். இதனைப் பகுதி பின்னங்களின் கூடுதலாக மாற்றப்பட்ட கோவை என்றழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு சார்புக்கு அப்படி மாற்றப்பட்ட கோவை ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது. இந்த முறை தொகை நுண்கணிதத்தில் தீர்வு வெகுவாகப் பயன்படுகிறது. சில எடுத்துக்காட்டுகளை இப்பொழுது நாம் விவாதிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.25 பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும் $\frac{x}{(x+3)(x-4)}$.

தீர்வு:

$$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-4}$$ என்க.

இங்கு A மற்றும் B மாறிலிகள்

எனவே, $$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$

$$\Rightarrow \quad x = A(x-4)+B(x+3)$$

$x=4$ எனில், $B = \frac{4}{7}$

$x=-3$ எனில், $A = \frac{3}{7}$

எனவே, $$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{3}{7(x+3)}+\frac{4}{7(x-4)}$$

குறிப்பு: பகுதியின் பூஜ்ஜியங்கள் வெவ்வேறாகவும், $\mathbb{R}$–ல் உள்ளதாகவோ அமையும்போது மேற்கண்ட வழிமுறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.26 பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்: $\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}$.

தீர்வு:

இதில், பகுதியில் உள்ள ஒரு காரணி (x^2+1)–க்கு மெய்யெண் பூஜ்ஜியம் இல்லை.

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$ இங்கு, A, B, C மாறிலிகள்.

$$2x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$ எனக் கிடைக்கும்.

$x=1$ எனும்போது $A=1$,

$x=0$ எனும்போது $A-C=0$ எனவே, $A=C=1$

$x=-1$ எனும்போது $2A-2(C-B)=-2 \Rightarrow B=-1$

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)}+\frac{1-x}{x^2+1}$$

பகுதியில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பெருக்கல்படி கொண்ட மெய் பூஜ்ஜியங்கள் உள்ள நிலைமையை நாம் இப்பொழுது காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.27 பகுதி பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்: $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)}$

தீர்வு:

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \text{ என்க.}$$

எனவே, $$x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

$x = 0$ எனும்போது $B = -1$, $x = 1$ எனும்போது $C = 2$

$x = -1$ எனும்போது $2A - 2B + C = 0 \Rightarrow A = -2$

எனவே, $$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$$

பயிற்சி 2.9

கீழ்க்காணும் விகிதமுறு கோவைகளைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தெழுதுக.

1. $\dfrac{1}{x^2 - a^2}$
2. $\dfrac{3x+1}{(x-2)(x+1)}$
3. $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}$
4. $\dfrac{x}{(x-1)^3}$
5. $\dfrac{1}{x^4 - 1}$
6. $\dfrac{(x-1)^2}{x^3 + x}$
7. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}$
8. $\dfrac{x^3+2x+1}{x^2+5x+6}$
9. $\dfrac{x+12}{(x+1)^2(x-2)}$
10. $\dfrac{6x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}$
11. $\dfrac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$
12. $\dfrac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$

2.7.3 ஒரு படி அசமன்பாடுகளின் வரைபடங்கள் (Graphical Representation of Linear Inequalities)

$ax + by = c$ என்ற ஒரு நேர்க்கோடு கார்டீசியன் தளத்தை இரண்டாகப் பிரிக்கிறது. ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு அரைத்தளமாகும். $x = c$ என்ற நிலைக்குத்துக்கோடு, இடது மற்றும் வலது அரைத்தளங்களாகவும், $y = k$ என்ற கிடைமட்டக் கோடு, மேல் மற்றும் கீழ் அரைத்தளங்களாகவும் பிரிக்கிறது.

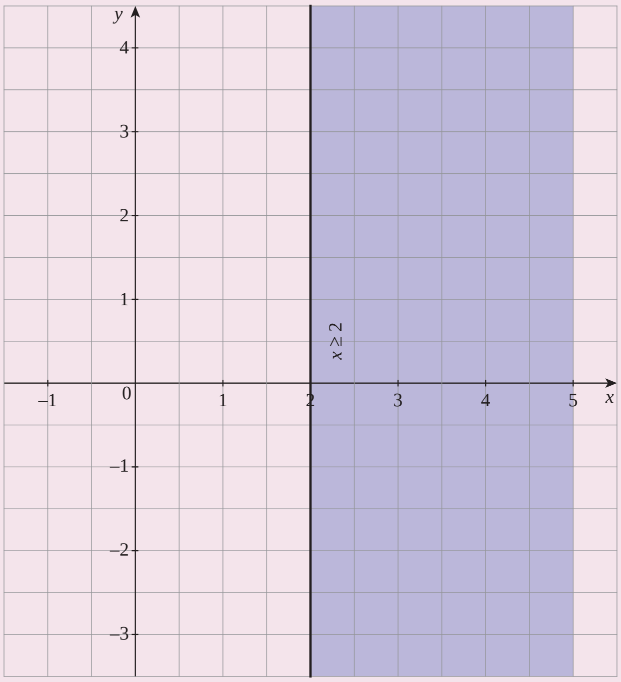
$ax + by = c$ இன் மீது அமையாத ஒரு புள்ளி, அக்கோடு பிரிக்கும் அரைத்தளங்களில் ஏதேனும் ஒன்றில் மட்டும் அமைந்து $ax + by < c$ மற்றும் $ax + by > c$ ஆகிய அசமன்பாடுகளில் ஒன்றை மட்டும் நிறைவு செய்கிறது.

$ax + by < c$ என்ற அசமன்பாடு குறிக்கும் அரைத்தளத்தைக் காண ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P-ஐ அதில் பிரதியிட வேண்டும். அசமன்பாடு நிறைவுபெற்றால் P என்ற புள்ளி அந்த அரைத்தளத்தில் அமைந்துள்ளது எனலாம். நிறைவு செய்யவில்லை எனில், அப்புள்ளி தரப்பட்ட அசமன்பாடு குறிக்காத மற்றொரு தளத்தில் அமைந்துள்ளது எனலாம். $c \neq 0$ எனில் p-ஐ ஆதிப்புள்ளியாக எடுத்துக் கொள்வது மிக எளிது.

எடுத்துக்காட்டு 2.28 $x \geq 2$ என்ற அசமன்பாடு குறிக்கும் பகுதியை நிழலிட்டுக் காட்டுக.

தீர்வு:

$x = 2$ என்ற சமன்பாட்டினைக் கருத்தில் கொள்க. இது y அச்சிலிருந்து 2 அலகுகள் தூரத்திலுள்ள y அச்சிற்கு இணையான கோடு ஆகும். இக்கோடு கார்டீசியன் தளத்தை இரண்டு பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றது. $(0,0)$ –ஐ அசமன்பாட்டில் பிரதியிட $0 \geq 2$ எனக் கிடைக்கிறது. இது உண்மையல்ல. எனவே, ஆதிப்புள்ளியை தன்னகத்தே கொள்ளாத பாகம் $x \geq 2$ என்ற அசமன்பாட்டினைக் குறிக்கும். படத்தில் நிழலிட்ட பகுதியே அசமன்பாட்டின் தீர்வாகும். $x \geq 2$ என்பதால் $x = 2$ என்ற கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகளும் அதன் தீர்வாகும்.

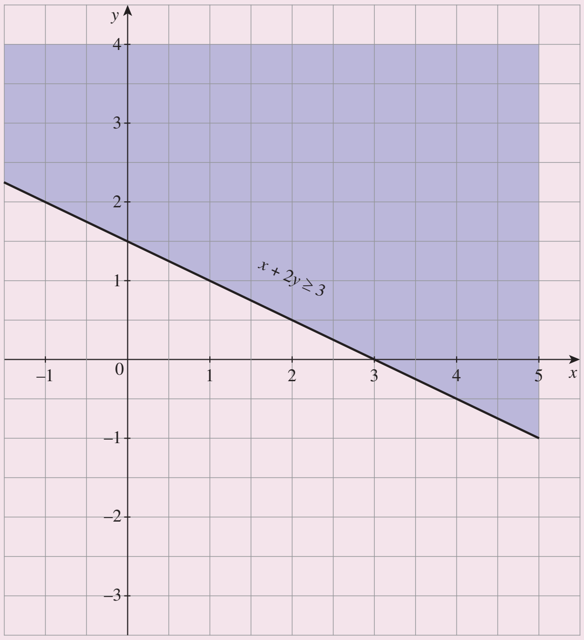


எடுத்துக்காட்டு 2.29 $x + 2y > 3$ என்ற அசமன்பாடு குறிக்கும் பகுதியை நிழலிட்டுக் காட்டுக.

நிரூபணம்

$x + 2y = 3$ என்ற கோடு கார்டீசியன் தளத்தை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.

$x + 2y > 3$ குறிக்கும் பகுதியைக் காண ஒரு பகுதியில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைப் பிரதியிட வேண்டும். அசமன்பாட்டில் $(0, 0)$-ஐ பிரதியிடக் கிடைப்பது $0 > 3$ ஆகும். இது உண்மையல்ல. எனவே ஆதியைத் தன்னகத்தே பெற்றிராத நிழலிட்ட பகுதியே கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டைக் குறிக்கும் பகுதியாகும்.



எடுத்துக்காட்டு 2.30 $x+y\geq 3,\ 2x-y\leq 5$ மற்றும் $-x+2y\leq 3$ ஆகிய அசமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு வரைபடப் பகுதியாகத் தீர்வு காண்க.

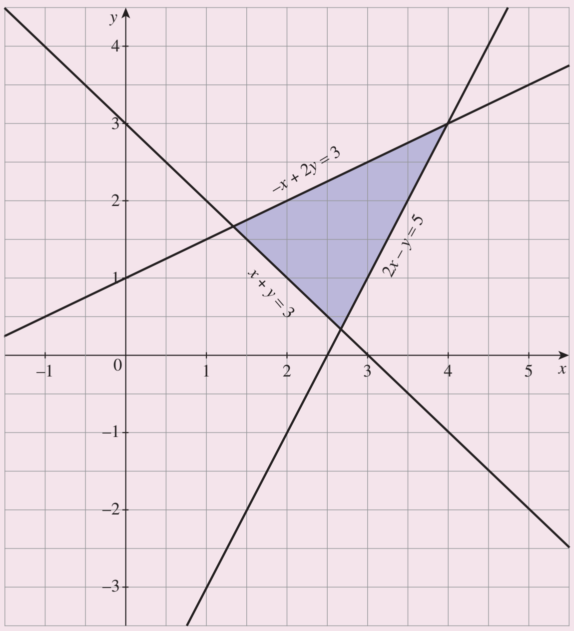
தீர்வு:

கோட்டின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகள் தெரியுமானால் அக்கோட்டை வரைய இயலும்.

$x+y=3$–ன் மீது $(3,\ 0)$ மற்றும் $(0,\ 3)$ ஆகிய புள்ளிகள் அமையும் என்பதை எளிதில் கண்டறியலாம்.

$x+y=3,\ 2x-y=5$ மற்றும் $-x+2y=3$ ஆகிய மூன்று கோடுகளையும் வரைக.

இப்போது, $(0,\ 0)$ புள்ளி $x+y\geq 3$–ஐ நிறைவு செய்யாது. $(0,\ 0)$ஐ தன்னகத்தே பெற்றிருக்காத $x+y=3$ பகுதியே $x+y\geq 3$ இன் தீர்வுகணமாகும்.



இதேபோன்று, $2x-y\leq 5$ஐ ஆதிப்புள்ளி நிறைவு செய்து ஆதியைக் கொண்ட பகுதியே $2x-y\leq 5$ இன் தீர்வுக் கணமாகும்.

மேலும், $-x+2y\leq 3$ஐ ஆதிப்புள்ளி நிறைவு செய்வதால் ஆதியைக் கொண்ட பகுதியே $-x+2y\leq 3$ இன் தீர்வுக் கணமாகும்.

மூன்று பகுதிகளுக்கும் பொதுவான பகுதியே கொடுக்கப்பட்ட ஒருபடி அசமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வுக் கணமாகும்.

பயிற்சி 2.10

கீழே கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாடுகள் குறிக்கும் பகுதியைக் காண்க.

1. $x\leq 3y,\quad x\geq y.$
2. $y\geq 2x,\quad -2x+3y\leq 6.$
3. $3x+5y\geq 45,\quad x\geq 0,\ y\geq 0.$
4. $2x+3y\leq 35,\quad y\geq 2,\ x\geq 5.$
5. $2x+3y\leq 6,\quad x+4y\leq 4,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0.$
6. $x-2y\geq 0,\quad 2x-y\leq -2,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0.$
7. $2x+y\geq 8,\quad x+2y\geq 8,\quad x+y\leq 6.$

2.8 அடுக்குகளும் படி மூலங்களும் (Exponents and Radicals)

முதலில் அடுக்குகளைப் பற்றி காண்போம்.

2.8.1 அடுக்குகள் (Exponents)

$n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$, எனும்போது, $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n முறைகள்) ஆகும். m ஒரு குறை முழு எண் மற்றும் மெய்யெண் $a \neq 0$ எனில், $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$.

எந்தவொரு $a \neq 0$–க்கு $\dfrac{a}{a} = a^{1-1} = a^0 = 1$ ஆகும்.

கீழ்க்காணும் பண்புகளை எளிதில் அறியலாம்.

அடுக்குகளின் பண்புகள் (Properties of Exponents)

i. $m, n \in \mathbb{Z}$ மேலும், $a \neq 0$ எனில், $a^m a^n = a^{m+n}$

ii. $m, n \in \mathbb{Z}$ மேலும், $a \neq 0$ எனில், $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2.8.2 படிமூலங்கள் (Radicals)

கேள்வி:

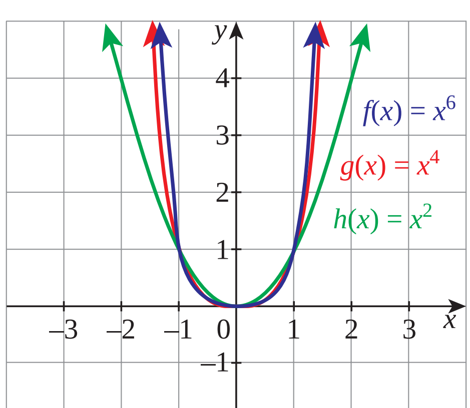
$a \neq 0$ எனில், $r \in Q$–க்கு a^r–ஐ வரையறுக்க இயலுமா?

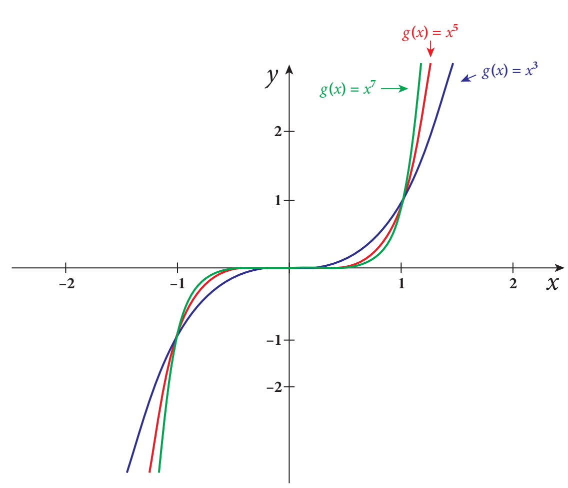
$r = \dfrac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}$ என்ற வகையைக் காண்போம்.

$y = a^{1/n}$ என்று இருக்குமாறு ஒரு மெய்யெண் $y \in \mathbb{R}$ என இருந்தால், $y^n = a$ எனக் கிடைக்கும்.

இப்பண்பு $y = x^n$–ன் நேர்மாறு சார்பு காணப் பயன்படுகிறது. இன்னும் தெளிவு பெறக் கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் வரைபடங்களைக் காண்போம்.

(i) $f(x) = x^{2n},\ n \in \mathbb{N}$ (ii) $g(x) = x^{2n+1},\ \ n \in \mathbb{N}$





மேலே உள்ள படங்களிலிருந்து, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^{2n+1}$ மற்றும் $n \in \mathbb{N}$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்பு ஆகும். எனவே, $\mathbb{R}$–லிருந்து $\mathbb{R}$–க்கு நேர்மாறு சார்பு உண்டு. ஆனால்,

$f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\ f(x)=x^{2n},\ n\in\mathbb{N},$ ஒரு மேற்கோர்த்தல் சார்பாகும், ஆனால் ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகாது. இருந்தபோதிலும், சார்பகத்தை $[0,\infty)$ எனக் கட்டுப்படுத்தப்படும்போது f ஆனது இருபுறச் சார்பு ஆகும். இது ஒரு மெய்யெண்ணின் n படிமூலங்கள் காணப் பயன்படுகிறது. இதற்கு இரு நிலைகள் உள்ளன.

நிலை 1: n ஒரு இரட்டைப் படை எண் என்க.

$a<0$ எனில், $y^n=a$ என்பது அர்த்தமற்றதாகும். எனவே, $a<0$ எனில், y-ன் மதிப்பு எதுவும் இல்லை.

$a>0$ என்க. $x^n=a$–ன் தீர்வு y எனில், $-y$ என்பதும் $x^n=a$–ன் தீர்வு ஆகும்.

நிலை 2: n ஒரு ஒற்றைப்படை எண் என்க.

இந்நிலை, நிலை 1 ஐப் போல் இல்லை.

$y\in\mathbb{R}$–க்கு $y=x^n$ என்றிருக்குமாறு ஒருமைத் தன்மையுடைய $x\in\mathbb{R}$ இருக்கும்.

மேலே உள்ள நிலைகளின் அடிப்படையில் படிமூலங்களை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

வரையறை 2.2

(i) $n\in\mathbb{N}$, n ஓர் இரட்டைப்படை எண் மற்றும் $b>0$–க்கு $a^n=b$ என்றிருக்குமாறு ஒருமைத் தன்மையுடைய $a>0$ என இருக்கும்.

(ii) $n\in\mathbb{N}$, n ஓர் ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் $b\in\mathbb{R}$–க்கு $a^n=b$ என்றிருக்குமாறு ஒருமைத் தன்மையுடைய $a\in\mathbb{R}$ என இருக்கும்.

இரு வகைகளிலும் a–ஐ b–ன் n படி மூலம் என அழைக்கலாம். மேலும், இதனை $b^{1/n}$ அல்லது $\sqrt[n]{b}$ எனக் குறிக்கலாம்.

குறிப்பு: (i) $n=2$ எனில், n படி மூலம் வர்க்க மூலம் எனப்படும். $n=3$ எனில், அது முப்படி மூலமாகும்.

(ii) $x^2=a^2$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $x=a$ மற்றும் $x=-a$ ஆகிய இரண்டு தீர்வுகள் உள்ளன. ஆனால், $\sqrt{a^2}=|a|$ ஆகும்.

(iii) ஒவ்வொரு தனி உறுப்புகளும் வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின் மேலே கொடுக்கப்பட்ட அடுக்குகளின் பண்புகள் படிமூலங்களுக்கும் பொருந்தும்.

(iv) மேலும், $n\in\mathbb{N}$ மற்றும் $a\neq 0$ எனில்,

$$(a^n)^{1/n}=\begin{cases}|a|, & \text{எனில், } n \text{ ஒரு இரட்டைப் படை எண்}\\ a & \text{எனில், } n \text{ ஒரு ஒற்றைப் படை எண்}\end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\sqrt[4]{(-2)^4}=16^{1/4}=2,\quad 343^{1/3}=7 \text{ மற்றும் } (-1000)^{1/3}=-10$$

எந்தவொரு மெய்யெண் $r=\dfrac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},$ மேலும், (m,n)–ன் மீ.பொ.வ. = 1 மற்றும் $a>0$.

எனில், $a^r=a^{m/n}=(a^{1/n})^m$ என வரையறுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $49^{3/2}=\left(49^{1/2}\right)^3=7^3=343.$ ஆனால், $(-49)^{3/2}$–க்கு மெய்யெண்கள் அமைப்பில் அர்த்தமற்றது. ஏனெனில், $x^2=(-49)^3$–ஐ நிறைவு செய்யும் மெய்யெண் இல்லை.

2.8.3 படிக்குறி சார்புகள் அல்லது அடுக்குச் சார்புகள் (Exponential Functions)

$x \in \mathbb{R}$ மற்றும் எந்தவொரு $a > 0$–க்கும் a^xஐ வரையறுக்கலாம். $a = 1$எனில், $1^x = 1$ என வரையறுக்கலாம். எனவே, a^x, $x \in \mathbb{R}$ மற்றும் $0 < a \neq 1$ என்னும்போது a^xஐ கருத்தில் கொள்ளலாம். இங்கு, a^x என்பது அடிமானம் a உடைய படிக்குறிச் சார்பாகும். $a < 0$ மற்றும் $x = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, ஒரு இரட்டைப்படை எனில், a^x வரையறுக்கப்படவில்லை. ஆகையால், $a > 0$ எனக் கட்டுப்படுத்துகிறோம். மேலும், $x \in \mathbb{R}$–க்கு $a^x > 0$.

படிக்குறிச் சார்பின் பண்புகள் (Properties of Exponential Function)

அனைத்து $a, b > 0$ மற்றும் $a \neq 1 \neq b$–க்கு

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ அனைத்து $x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ அனைத்து $x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ அனைத்து $x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$ அனைத்து $x, y \in \mathbb{R}$

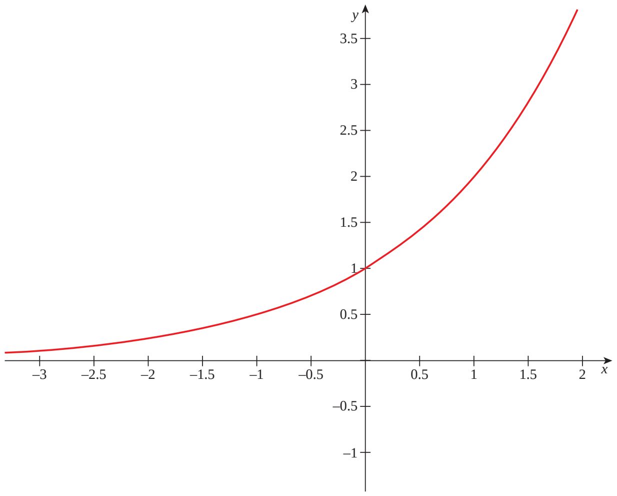
(v) $a^x = 1 \iff x = 0$

1. $f(x) = a^x, \ x \in \mathbb{R}, \ a = 2$

இப்பொழுது, $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$. f ஒரு ஒன்றுக்கொன்றான மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்பு என நிரூபிப்போம்.

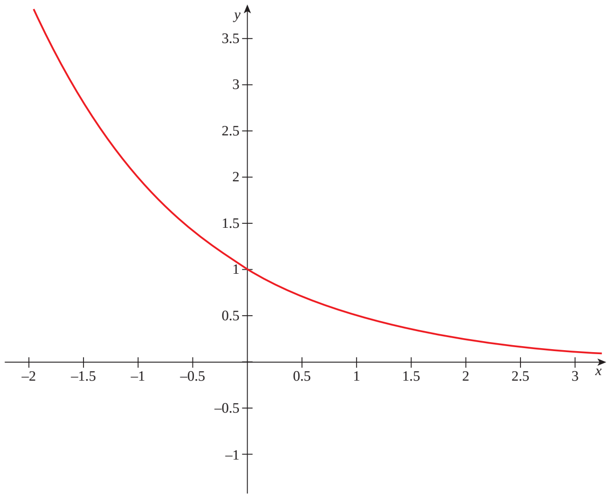
ஏதேனும் $u, v \in \mathbb{R}$–க்கு $f(u) = f(v)$ என்க. எனவே, $2^u = 2^v \Rightarrow \frac{2^u}{2^v} = 1 \Rightarrow 2^{u-v} = 1$.

எனவே, $u - v = 0 \Rightarrow u = v$. ஆகையால், f ஒரு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும்.



$f(x) = 2^x$

படம் 2.7



$f(x) = \frac{1}{2^x}$

படம் 2.8

வரைபடத்திலிருந்து x அதிகரிக்கும்போது $f(x) = 2^x$ –ன் மதிப்பும் அதிகரிக்கிறது என்பது தெளிவு. மேலும் f–ன் வீச்சகம் $(0, \infty)$ ஆகும். இங்கு, $2^0 = 1$ என இருப்பதால், அனைத்து $x > 0$ –க்கும் $2^x > 1$ எனக் கிடைக்கிறது. மேலும், அனைத்து $x < 0$ –க்கும் $2^x < 1$ எனக் கிடைக்கிறது. $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ஒரு மேற்கோர்த்தல் சார்பு எனக் கவனிக்க.

2. $a = \frac{1}{2}$ எனக் கொள்க. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}, \quad x \in \mathbb{R}$ என்க.

வரைபடத்திலிருந்து x அதிகரிக்கும்போது, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ –ன் மதிப்பு குறைகிறது என்பது தெளிவு மற்றும் $g(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. மேலும், $g(0) = 1$ அனைத்து $x < 0$ –க்கு $g(x) > 1$ மற்றும் அனைத்து $x > 0$ –க்கு $g(x) < 1$ எனக் கிடைக்கும்.

குறிப்புரை :

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் உள்ள கருத்துக்களின்படி, எந்தவொரு அடிமானம் $0 < a \neq 1$ கொண்ட படிக்குறிச் சார்புகள் $f(x) = a^x$, ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தல் சார்பாக இருக்கும். அதன் சார்பகம் $\mathbb{R}$ மற்றும் துணை சார்பகம் $(0, \infty)$ ஆகும்.

ஒரு சிறப்பு படிக்குறிச் சார்பு (A special exponential function)

அனைத்து படிக்குறிச் சார்புகளைவிட, $f(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}$ என்ற சார்பு முக்கியமானதாகக் கருதப்படுகிறது. ஏனெனில், இது கணிதவியல், அறிவியல் மற்றும் பொருளியல் ஆகியவற்றில் பயன்படுகின்றது. e என்பது என்ன? கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டு வட்டிக் கணக்கு, மாறிலி e-ன் மதிப்பைத் தருகிறது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு

கூட்டு வட்டி: P அசல், $r = \frac{\textbf{வட்டி வீதம்}}{\textbf{100}}$, n என்பது ஒரு வருடத்தில் வட்டி கணக்கிடும் எண்ணிக்கை மற்றும் t என்பது வருடங்களின் எண்ணிக்கை. எனவே, $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ இது t வருடங்களில் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை காணும் சூத்திரம். $n = 4$ எனில், அது கால் வருடக் கூட்டு வட்டியாகும்.

(அதாவது, 3 மாதத்திற்கொருமுறை வட்டி கணக்கிட்டு அசலுடன் சேர்த்துக் கொள்ளப்படுகிறது). $n = 12$ எனில், அது மாதக் கூட்டு வட்டியாகும். $n = 365$ எனில் அது தினக் கூட்டு வட்டியாகும். $n = 365$ ஒரு மணி நேரம் மற்றும் ஒரு நிமிடம் கூட்டு வட்டி கணக்கிட இயலும். p மற்றும் r மாறாமல் இருந்து கூட்டு வட்டி கணக்கிடும் எண்ணிக்கை அதிகரித்தால் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை அதிகரிக்கும் என்பதை நாம் அறிவோம். முதல் வகையாக $P = 1, r = 1$ மற்றும் $t = 1$ கருதுவோம். $A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ என்க. எனவே, n அதிகமான எண்ணாக இருக்கும்போது எவ்வளவு பெரியது என்பதை நாம் உணரவேண்டும். எனவே, $n = 10, 100, 10000, 100000, 100000000$ என்ற வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு A இன் மதிப்பை அட்டவணையில் காணலாம்.

n	10	100	10000	100000	100000000
A_n	2.593742460	2.704813829	2.718145927	2.718268237	2.718281815

n–ன் மதிப்பு அதிகரித்துக்கொண்டே போகும்போது

A_n–ன் மதிப்பு 2.718281815 . . . –க்கு அருகில் அமைகிறது.

A_n இன் மதிப்பு e என்ற விகிதமுறா மெய்யெண்ணான 2.718281815-ஐ நெருங்குகிறது. எனவே, கூட்டு வட்டியின் சூத்திரம் $A = Pe^{rt}$ எனக் கொள்ளலாம்.

இங்கு வட்டி விகிதம் r, அசல் P மேலும், ஓர் ஆண்டிற்கு t முறை வட்டி கணக்கிடப்படுகிறது. இது தொடர் கூட்டு வட்டி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.31 (i) சுருக்குக: $(x^{1/2}\ y^{-3})^{1/2},\quad x, y \geq 0$ (ii) சுருக்குக: $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$

தீர்வு:

(i) $x, y \geq 0$ எனவே, $\qquad (x^{1/2}\ \ y^{-3})^{1/2} = \dfrac{x^{1/4}}{y^{3/2}}$

(ii) $\qquad \sqrt{x^2 - 10x + 25} = \sqrt{(x-5)^2} = |x - 5|$

குறிப்பு: (i) $(x^{1/4})^4 = x$ ஆனால், $(y^4)^{1/4} = |y|$.

x ஒரு மிகை எண் எனில், $x^{1/4}$ வரையறுக்கப்படுகிறது. ஆனால் $y < 0$, எனினும் $(y^4)^{1/4}$ வரையறுக்கப்படுகிறது. ஒரு மிகை எண் மற்றும் அதன் 4 ஆம் அடுக்கு y^4. எனவே, அது $|y|$ என இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) $(x^8 \cdot y^4)^{1/4} = x^2|y|$

(iii) u, v, b ஆகியவை விகிதமுறு எண்கள் என்க. b ஒரு மிகை எண் என்க. அவை விகிதமுறு எண்களின் வர்க்கங்கள் அல்ல என்க. எனவே, $u + v\sqrt{b}$, $u - v\sqrt{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று இணை எண் (conjugates) எனப்படும். $(u + v\sqrt{b})(u - v\sqrt{b}) = u^2 - bv^2$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். ஒரு கோவையின் பகுதியில் $u + v\sqrt{b}$ என்றிருப்பின் அதன் பகுதி மற்றும் தொகுதியை அதன் துணை எண் $u - v\sqrt{b}$ ஆல் பெருக்கப் பகுதியில் விகிதமுறு எண் கிடைக்கும்.

(iv) $(u\sqrt{a} - v\sqrt{b})\ (u\sqrt{a} + v\sqrt{b}) = u^2a - v^2b$–ஐப் பயன்படுத்தி, $u\sqrt{a} + v\sqrt{b}$ பகுதியில் இருக்கும்பொழுது எளிய கோவை கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.32 $\dfrac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$ பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்குக.

தீர்வு:

பகுதி மற்றும் தொகுதியை $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\ (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{30} - \sqrt{10})}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.33 $7-4\sqrt{3}$ –ன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3} \text{ என்க.}$$

இங்கு, a, b ஆகியவை விகிதமுறு எண்கள்.

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$7-4\sqrt{3} = a^2+3b^2+2ab\sqrt{3} \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

எனவே, $a^2+3b^2 = 7$ மற்றும் $2ab = -4$

எனவே, $a = \dfrac{-2}{b}$

$a^2+3b^2 = 7$-லிருந்து, $\left(\dfrac{-2}{b}\right)^2+3b^2 = 7$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\Rightarrow$ $\dfrac{4}{b^2}+3b^2 = 7$ அல்லது $3b^4-7b^2+4=0$

b^2–க்கு தீர்வு காண, $b^2 = \dfrac{(7\pm\sqrt{49-48})}{6}$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\Rightarrow$ $b^2 = 1$ அல்லது $b^2 = \dfrac{4}{3}$

ஆகையால், $b = \pm 1$ அல்லது $b = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

b ஒரு விகிதமுறு எண் என்பதால், $b = \pm 1$.

எனவே, b–ஐக் கொண்டு கிடைக்கும் a–ன் மதிப்புகள் ∓ 2

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} > 0$ என்பதால், $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ எனக் கிடைக்கிறது.

குறிப்பு: u, v ஆகிய விகிதமுறு எண்களைக் கொண்ட $u+v\sqrt{b}$ –ன் வர்க்கமூலத்தை, x, y ஆகிய விகிதமுறு எண்களைக் கொண்ட $x+y\sqrt{b}$ என்ற வடிவில் எப்பொழுதும் எழுத இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, $1+\sqrt{2}$ –ன் வர்க்கமூலம் a, b ஆகிய விகிதமுறு எண்களைக் கொண்ட $a+b\sqrt{2}$ என்ற அமைப்பில் எழுத முடியாது.

பயிற்சி 2.11

1. சுருக்குக.

   (i) $(125)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $16^{\frac{-3}{4}}$ (iii) $(-1000)^{\frac{-2}{3}}$

   (iv) $(3^{-6})^{\frac{1}{3}}$ (v) $\dfrac{27^{\frac{-2}{3}}}{27^{\frac{-1}{3}}}$

2. மதிப்பைக் காண்க: $\left(\left((256)^{-1/2}\right)^{-1/4}\right)^3$

3. $(x^{1/2}+x^{-1/2})^2 = \frac{9}{2}$ எனில், $x > 1$–க்கு $(x^{1/2}-x^{-1/2})$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. சுருக்குக: $\frac{3^{2n}9^2 3^{-n}}{3^{3n}} = 27$ அதன்மூலம் n–ன் மதிப்பைக் காண்க.

5. $\frac{32\pi}{3}$ கன அளவு கொண்ட கோள வடிவுடைய நீர்த்தேக்கத் தொட்டியின் ஆரத்தைக் காண்க.

6. விகிதமுறு எண்ணாக்குக: $\frac{7+\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}$

7. சுருக்குக: $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

8. $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ எனில், $\frac{x^2+1}{x^2-2}$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

2.9 மடக்கை (Logarithm)

அடிமானம் $0 < a \neq 1$–க்கு, சார்பகம் $\mathbb{R}$ மற்றும் வீச்சகம் $(0,\infty)$ உடைய படிக்குறிச் சார்பு $f(x) = a^x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது என்பதை அறிவோம். $f(x)$ ஒரு இருபுறச் சார்பு (bijection) என்பதால் இதற்கு நேர்மாறு உண்டு. இதன் நேர்மாறு சார்பு மடக்கைச் சார்பு (logarithmic function) எனப்படும். அது $\log_a(\cdot)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. $f(x)$ என்பது x–லிருந்து $y = a^x$ வரை எனில், $\log_a(\cdot)$ என்பது y இலிருந்து x–க்கான சார்பாகும்.

அதாவது, $0 < a \neq 1$ எனவே, $y = a^x$ மற்றும் $\log_a y = x$ ஆகியவை சமானமானவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $3^4 = 81$ ஐ $\log_3(81) = 4$ என எழுதலாம். a மற்றும் y கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் $a^x = y$-ஐ நிறைவு செய்யும். a–ன் எந்த அடுக்கு x–க்கு y மதிப்பு கிடைக்கும் என்பதை மடக்கைக் கண்டறிகிறது. "ஒரு குறிப்பிட்ட முதலீடு ஒரு எதிர்பார்த்த தொகையாகப் பெருகுவதற்கு எவ்வளவு ஆண்டுகள் ஆகும்?" என்பது போன்ற நடைமுறையில் உள்ள கணக்குகளைத் தீர்வு காணப் பயன்படுகிறது. மிகச் சிறிய மற்றும் மிகப் பெரிய எண்களைப் பெருக்குவதற்கும் மடக்கைப் பயன்படுகிறது.

குறிப்பு: (i) அனைத்து $x \in \mathbb{R}$ மற்றும் $a^x > 0$–க்கும் படிக்குறிச் சார்பு a^x வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளதால், $\log_a(\cdot)$ என்பது **மிகை மெய்யெண்களுக்கு மட்டுமே வரையறுக்கப்படும்.**

(ii) மேலும், எந்தவொரு அடிமானம் a–க்கும் $a^0 = 1$ என்பதால் $\log_a(1) = 0$ ஆகும்.

2.9.1. மடக்கையின் பண்புகள் (Properties of Logarithm)

(i) $x \in (0,\infty)$–க்கு $a^{\log_a x} = x$ மற்றும் $\log_a(a^y) = y$. இங்கு $y \in \mathbb{R}$.

(ii) $x, y > 0$ எனில், $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (பெருக்கல் விதி)

(iii) $x, y > 0$ எனில், $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (வகுத்தல் விதி)

(iv) $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$ எனில், $\log_a x^r = r\log_a x$ (அடுக்கு விதி)

(v) $x > 0$ மற்றும் a, b, அடிமானங்கள் எனில், $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ (அடிமான மாற்று விதி)

நிரூபணம் :

அடிமானம் a உடைய படிக்குறிச் சார்பு மற்றும் மடக்கைச் சார்புகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு என்பதால்,

(i) வரையறையின்படி உண்மை

(ii) $x, y > 0$–க்கு $\log_a x = u,\ \log_a y = v$ மற்றும் $\log_a (xy) = w$ என்க.

படிக்குறிச் சார்புகளாக எழுத, $a^u = x,\ a^y = y$ மற்றும் $a^w = xy$

$$a^w = xy = a^u a^v = a^{u+v} \text{ எனவே, } w = u + v$$

எனவே, $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

(iii) $\log_a x = u,\ \log_a y = v,$ மற்றும் $\log_a \frac{x}{y} = w$.

எனவே, $a^u = x,\ a^v = y$ மற்றும் $a^w = \frac{x}{y}$

எனவே, $a^w = \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \Rightarrow w = u - v$

இவ்வாறாக, $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(iv) $\log_a x = u$ என்க.

எனவே, $a^u = x,\ x^r = (a^u)^r = a^{ru}$

ஆகையால், $\log_a x^r = ru = r \log_a x$

(v) $\log_b x = v$ என்க. $b^v = x$ ஆகும்.

இருபுறமும் அடிமானம் a உடைய மடக்கைக் எடுக்க, $\log_a b^v = \log_a x$

அடுக்கு விதியின்படி, $\log_a b^v = v \log_a b$

எனவே, $v \log_a b = \log_a x$

எனவே, $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},\quad b > 0$

குறிப்புரை :

(i) $a = 10$–ன் மடக்கைச் சார்பு $\log_{10} x$ ஆகும். இது பொது மடக்கை (common logarithm) எனப்படும்.

(ii) $a = e$ (ஒரு விகிதமுறா எண், தோராயமாக அதன் மதிப்பு 2.718) எனில், $\log_e x$ என்பது இயற்கை மடக்கை (natural logarithm) எனப்படும். இது $\ln x$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. மேலே குறிப்பிட்ட மடக்கைச் சார்புகள் அறிவியலிலும் பொறியியலிலும் அதிகம் பயன்படுகிறது. இயற்கை மடக்கை இயல்பாக இடம் பெறுகிறது. $\log_e x$–ஐ $\log x$ எனவும் எழுதலாம்.

(iii) $a = 2$ எனில், மடக்கைச் சார்பு $\log_2 x$ இரண்டடிமான மடக்கைச் சார்பு எனப்படும். இது கணிப்பொறி அறிவியலில் இடம் பெறுகிறது.

(iv)

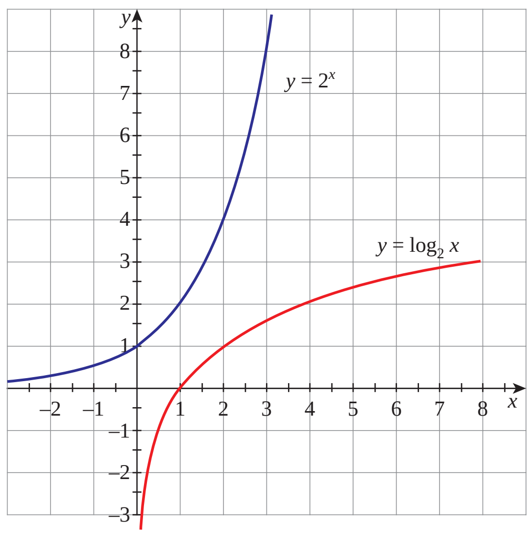
$$\log_a 35 = \log_a (7 * 5) = \log_a 7 + \log_a 5$$

$$\log_a \frac{50}{3} = \log_a 50 - \log_a 3$$

$$\log_a 22^x = x \log_a 22$$

$$\log_5 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 5}$$

(v) மடக்கைச் சார்பு மற்றும் அடுக்குச் சார்புகளின் வரைபடம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 2.9

எடுத்துக்காட்டு 2.34 1728–க்கு அடிமானம் $2\sqrt{3}$ உடைய மடக்கையைக் காண்க.

தீர்வு:

$\log_{2\sqrt{3}} 1728 = x$ என்க.

பின்பு, $(2\sqrt{3})^x = 1728 = 2^6 3^3 = 2^6 (\sqrt{3})^6$

எனவே, $(2\sqrt{3})^x = (2\sqrt{3})^6 \Rightarrow x = 6$ எனவே, $\log_{2\sqrt{3}} 1728 = 6$

எடுத்துக்காட்டு 2.35 324–க்கு அடிமானம் a உடைய மடக்கை மதிப்பு 4 எனில் a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$\log_a 324 = 4$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$a^4 = 324 = 3^4 (\sqrt{2})^4$$

எனவே, $a = 3\sqrt{2}$

எடுத்துக்காட்டு 2.36 $\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} = \log 2$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

மடக்கையின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி,

$$\begin{aligned}\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} &= \log 75 - \log 16 - 2\log 5 + 2\log 9 + \log 32 - \log 243\end{aligned}$$

(வகுத்தல் விதியின்படி)

$$\begin{aligned}&= \log 3 + \log 25 - \log 16 - \log 25 + \log 81 \\ &\qquad + \log 16 + \log 2 - \log 81 - \log 3 \\ &= \log 2\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.37 $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$ எனில், x–ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$x > 0$ என்பதைக் கவனத்தில் கொள்க.

$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_x 16} = \frac{7}{2}$ (அடிமான மாற்று விதியின்படி)

$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} = \frac{7}{2}$, இங்கு $a = \log_x 2$, அதாவது, $\frac{7}{4a} = \frac{7}{2}$

$a = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\log_x 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{1/2} = 2.$

எனவே, $x = 2^2 = 4$

எடுத்துக்காட்டு 2.38 தீர்வு காண்க: $x^{\log_3 x} = 9$

தீர்வு:

$\log_3 x = y$ என்க.

$x = 3^y$ மற்றும் $3^{y^2} = 9$

எனவே, $y^2 = 2, \ y = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$x = 3^{\sqrt{2}}, \ 3^{-\sqrt{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.39 $\log_3 5 \log_{25} 27$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\log_3 5\log_{25} 27 &= \log_3 5 \log_{25} 3^3 \\ &= \log_3 5 \times 3\log_{25} 3 \quad \text{(அடுக்கு விதியின்படி)} \\ &= 3\log_{25} 5 = \frac{3}{\log_5 25} = \frac{3}{2\log_5 5} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.40 $\log_{10} 2 = 0.30103$, $\log_{10} 3 = 0.47712$ (தோராய மதிப்புகள்) எனில், $2^8 \cdot 3^{12}$–ல் எத்தனை இலக்கங்கள் உண்டு என்பதைக் காண்க.

தீர்வு:

$N = 2^8 3^{12}$–க்கு $n+1$ இலக்கங்கள் உண்டு என்க.

$1 \le b < 10$ என்றிருக்குமாறு N–ஐ $10^n \times b$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

10 அடிமான மடக்கையை இருபுறமும் எடுக்க,

$\log N = \log(10^n b) = n \log 10 + \log b = n + \log b$ என நமக்குக் கிடைக்கிறது.

$\log N = \log 2^8 3^{12} = 8 \log 2 + 12 \log 3 = 8 \times 0.30103 + 12 \times 0.47712 = 8.13368$

இவ்வாறாக, $n + \log b = 8.13368$ எனக் கிடைக்கிறது.

$1 \le b < 10$ என்பதால் இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை 9.

பயிற்சி 2.12

1. $b > 0$ மற்றும் $b \ne 1$ எனில், $y = b^x$–ஐ மடக்கை அமைப்பில் எழுதுக. மேலும், இந்த மடக்கைச் சார்பின் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம் ஆகியவற்றை எழுதுக.
2. மதிப்பு காண்க: $\log_9 27 - \log_{27} 9$
3. $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$–ன் தீர்வு காண்க.
4. $\log_4 2^{8x} = 2^{\log_2 8}$ –ன் தீர்வு காண்க.
5. $a^2 + b^2 = 7ab$ எனில், $\log \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$ எனக் காண்க.
6. $\log \dfrac{a^2}{bc} + \log \dfrac{b^2}{ca} + \log \dfrac{c^2}{ab} = 0$ என நிறுவுக.
7. $\log 2 + 16 \log \dfrac{16}{15} + 12 \log \dfrac{25}{24} + 7 \log \dfrac{81}{80} = 1$ என நிறுவுக.
8. $\log_{a^2} a \log_{b^2} b \log_{c^2} c = \dfrac{1}{8}$ என நிறுவுக.
9. $\log a + \log a^2 + \log a^3 + \cdots + \log a^n = \dfrac{n(n+1)}{2} \log a$ என நிறுவுக.
10. $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$ எனில், $xyz = 1$ எனக் காண்க.
11. $\log_2 x - 3 \log_{1/2} x = 6$–ன் தீர்வு காண்க.
12. $\log_{5-x}(x^2 - 6x + 65) = 2$–ன் தீர்வு காண்க.

2.10 வாழ்க்கைச் சூழலில் இயற்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள் (Application of algebra in real life)

அன்றாட வாழ்வில் இயற்கணிதம் பல இடங்களில் பயன்படுகின்றன. அன்றாட வாழ்வில் நிதி திட்டமிடலில் இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது. வங்கிகளின் வட்டி விகிதத்தைக் கணக்கிடவும் கடனுக்கான திருப்பிச் செலுத்தப்படும் தொகையைக் கணக்கிடவும் இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது. பண வளர்ச்சியைக் கண்டறியவும் பயன்படுகிறது. ஒருவருடைய உயரம், உடல் பருமன் போன்றவற்றைக் கட்டுப்படுத்தத் தேவையான உணவைத் திட்டமிட இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது. ஒருவருடைய வயது மற்றும் எடைக்கு ஏற்ப மருந்துகளின் அளவை திட்டமிட மருத்துவர்கள் இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்துகின்றனர். சாலைகள், பாலங்கள் மற்றும் குகைப்பாதைகள் அமைப்பதற்குப் பொறியாளர்களும் கட்டடங்களை வடிவமைப்பதற்குக் கட்டடக்கலை பொறியாளர்களும் இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்துகின்றனர். இயற்கணிதத்தில் ஒவ்வொன்றையும் அளவுகளோடு குறிக்கப்படுவதால் அதைப் பயன்படுத்தி வடிவமைக்கப்படும் கட்டமைப்புகள் சரியான விகிதத்தில் இருக்கும். இது கணினி மற்றும் தொலைபேசி ஆகியவற்றில் பயன்படுகின்றன. சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம். மனிதனுடைய காதுகளின் ஒலி உணரும் திறன் கணக்கிடுவது கடினமான ஒன்றாக இருப்பதால் (1 முதல் 1000 மில்லியன்) ஒலியின் அளவுகளைக் கணக்கிட மடக்கைப் பயன்படுகிறது. தொலைபேசியைக் கண்டுபிடித்த அலெக்சாண்டர் கிரகாம் பெல் (Alexander Graham Bell)–ன் நினைவாகக் காது கேட்கும் திறனுக்கு டெசிபெல் என்ற அலகு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

இன்றைய உலக மக்கள் தொகையை அடிப்படையாகக் கொண்டு அதன் பெருகும் விகிதத்தினை படிக்குறிச் சார்புக்குத் தொடர்புபடுத்தித் தோராயமாகக் காணலாம். கதிரியக்கக் கார்பன்–14 என்ற தனிமம் அடுக்குச் சார்பு சூத்திரத்தின்படி சிதைவடைகிறது.

பயிற்சி 2.13

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $|x+2| \leq 9$ எனில், x அமையும் இடைவெளி

   (1) $(-\infty, -7)$ (2) $[-11, 7]$

   (3) $(-\infty, -7) \cup [11, \infty)$ (4) $(-11, 7)$

2. x, y மற்றும் b ஆகியவை மெய்யெண்கள் மற்றும் $x < y,\ b > 0$ எனில்,

   (1) $xb < yb$ (2) $xb > yb$ (3) $xb \leq yb$ (4) $\frac{x}{b} \geq \frac{y}{b}$

3. $\frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$ எனில், x அமையும் இடைவெளி

   (1) $[2, \infty)$ (2) $(2, \infty)$ (3) $(-\infty, 2)$ (4) $(-2, \infty)$

4. $5x - 1 < 24$ மற்றும் $5x + 1 > -24$ என்ற அசமன்பாடுகளின் தீர்வு

   (1) $(4, 5)$ (2) $(-5, -4)$ (3) $(-5, 5)$ (4) $(-5, 4)$

5. $|x-1| \geq |x-3|$ என்ற அசமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணம்

   (1) $[0, 2]$ (2) $[2, \infty)$ (3) $(0, 2)$ (4) $(-\infty, 2)$

6. $\log_{\sqrt{2}} 512$–ன் மதிப்பு

(1) 16 (2) 18 (3) 9 (4) 12

7. $\log_3 \dfrac{1}{81}$–ன் மதிப்பு

(1) – 2 (2) – 8 (3) – 4 (4) – 9

8. $\log_{\sqrt{x}} 0.25 = 4$ எனில், x–ன் மதிப்பு

(1) 0.5 (2) 2.5 (3) 1.5 (4) 1.25

9. $\log_a b \log_b c \log_c a$–ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 1 (3) 3 (4) 4

10. 343–ன் மடக்கை 3 எனில், அதன் அடிமானம்

(1) 5 (2) 7 (3) 6 (4) 9

11. $2x^2 + (a-3)x + 3a - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் பலன் ஆகியவை சமம் எனில், a-ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 4

12. $x^2 - kx + 16 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் a மற்றும் b ஆகியவை $a^2 + b^2 = 32$-ஐ நிறைவு செய்யும் எனில், k–ன் மதிப்பு

(1) 10 (2) – 8 (3) – 8, 8 (4) 6

13. $x^2 + |x-1| = 1$–ன் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை

(1) 1 (2) 0 (3) 2 (4) 3

14. $3x^2 - 5x - 7 = 0$–ன் மூலங்களுக்கு எண்ணளவில் சமமாகவும், எதிர் குறியீடுகளையும் உடைய மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடு

(1) $3x^2 - 5x - 7 = 0$ (2) $3x^2 + 5x - 7 = 0$

(3) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (4) $3x^2 + x - 7 = 0$

15. $x^2 + ax + c = 0$–ன் மூலங்கள் 8 மற்றும் 2 ஆகும். மேலும், $x^2 + dx + b = 0$–ன் மூலங்கள் 3, 3 எனில், $x^2 + ax + b = 0$–ன் மூலங்கள்

(1) 1, 2 (2) – 1, 1 (3) 9, 1 (4) – 1, 2

16. $x^2 - kx + c = 0$–ன் மெய் மூலங்கள் a, b எனில், $(a, 0)$ மற்றும் $(b, 0)$–க்கு இடைப்பட்ட தூரம்

(1) $\sqrt{k^2 - 4c}$ (2) $\sqrt{4k^2 - c}$ (3) $\sqrt{4c - k^2}$ (4) $\sqrt{k - 8c}$

17. $\dfrac{kx}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{x-1}$ எனில், k–ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

18. $\dfrac{1-2x}{3+2x-x^2} = \dfrac{A}{3-x} + \dfrac{B}{x+1}$ எனில், $A+B$–ன் மதிப்பு

(1) $\dfrac{-1}{2}$ (2) $\dfrac{-2}{3}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{2}{3}$

19. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$–ன் மூலங்களின் எண்ணிக்கை

(1) 4 (2) 2 (3) 3 (4) 0

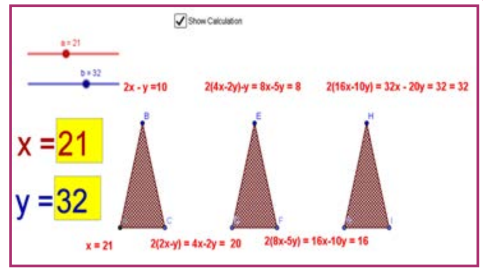
20. $\log_3 11 \ \log_{11} 13 \ \log_{13} 15 \ \log_{15} 27 \ \log_{27} 81$–ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

பாடத்தொகுப்பு (Summary)

- π மற்றும் $\sqrt{p}$ (p ஒரு பகா எண்) ஆகியவை விகிதமுறா எண்கள்.
- $|x-a| = r \Longleftrightarrow r \geq 0$ மற்றும் $x - a = \pm r$.
- $|x-a| \leq r \Longleftrightarrow -r \leq x-a \leq r$ அல்லது $a-r \leq x \leq a+r$.
- $|x-a| > r \Longrightarrow x < a-r$ மற்றும் $x > a+r$ அல்லது $x \in (-\infty,\ a-r) \cup (a+r,\ \infty)$
- பொதுவாக அசமன்பாடுகள் ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட தீர்வுகளை உடையது.
- தன்மைகாட்டி $D = b^2 - 4ac$ ஆனது $ax^2 + bx + c = 0$–ன் மூலங்களின் தன்மைகளைக் காட்டுகிறது.
- a என்ற மெய்யெண் $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூஜ்ஜியமாக இருக்க, தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $(x-a)$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$–ன் காரணியாக இருக்க வேண்டும்.
- $f(x)$–ன் படி $g(x)$–ன் படியை விடக் குறைவு எனில், $\dfrac{f(x)}{g(x)}$–ஐ அதன் பகுதி பின்னங்களின் கூடுதலாக எழுத இயலும்.
- பொதுவாக படிக்குறிச் சார்புகளும் மடக்கைச் சார்புகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்று நேர்மாறு சார்புகளாகும்.

இணையச் செயல்பாடு – 2 (அ)



படி–1

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

படி–2

ஜியோஜீப்ராவில் “Hill and Flower Puzzle” என்ற புதிர் பயிற்சித்தாள் தோன்றும்.

புதிரைப் பற்றி:

(அ) உன்னுடைய கைகளில் சில பூக்கள் உள்ளன. நீங்கள் மலையில் ஏறிவிட்டால் கையில் உள்ள பூக்கள் இரு மடங்காகும். அதே சமயம் மேலிருந்து கீழே வந்தாலும் பூக்கள் இரு மடங்காகும்.

(ஆ) நீ மலை உச்சியை அடையும் ஒவ்வொரு முறையும் அங்கே உள்ள கடவுள் சிலைக்கு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் பூக்களை வைக்க வேண்டும்.

(இ) மூன்று மலைகளிலும் ஏறி அங்கே உள்ள கடவுள் சிலைகளுக்கு சம எண்ணிக்கையிலான பூக்களை வைக்க வேண்டும். இறுதியாக மூன்றாவது மலை உச்சியை அடையும் போது அங்கே உள்ள சிலைக்கு உன் கையில் உள்ள எல்லாப் பூக்களையும் கொடுத்திருக்க வேண்டும். அதோடு எல்லாச் சிலைகளும் சமமான பூக்களையும் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

படி–3

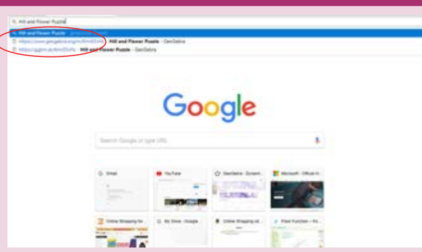
உங்கள் கையில் உள்ள பூக்களின் எண்ணிக்கையை X மதிப்பாக நினைத்துக் கொள்ளவும். கடவுள் சிலைக்கு கொடுக்கப்பட்ட பூக்களின் எண்ணிக்கையை Y மதிப்பாக நினைத்துக் கொள்ளவும். அந்தப் பக்கத்தில் உள்ள நழுவுக்கோட்டை நகர்த்தவும். புதிருக்கான விடையைக் காண ஊகத்தை அடிப்படையாகக் கொள்ளாமல் ஏதேனும் வழிமுறையைக் கண்டறியவும்.

படி–4

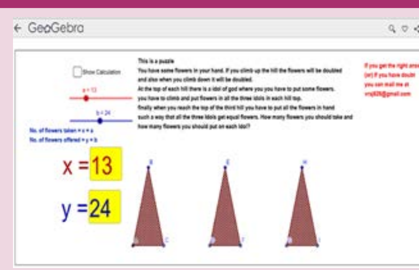
இப்போது இயற்கணிதத்தின் பயன்பாட்டை அறிந்து கொள்ளும் நேரம். இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தும் வழிமுறையை யோசிக்க வேண்டும் அல்லது "SHOW CALCULATION" பெட்டியைச் சொடுக்கினால் இயற்கணித பயன்பாட்டு விவரங்கள் தோன்றும். இயற்கணிதத்தின் கணக்கீட்டு முறை ஒவ்வொரு நிலையிலும் தோன்றும். இப்போது சமன்பாட்டை அறிந்து கொண்டு அதன் மூலம் புதிரைத் தீர்க்க முடியும்..

குறிப்பு: இதன் விடை ஒரு விகிதமாகும்.

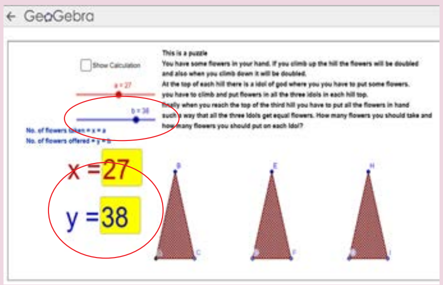
படி–1



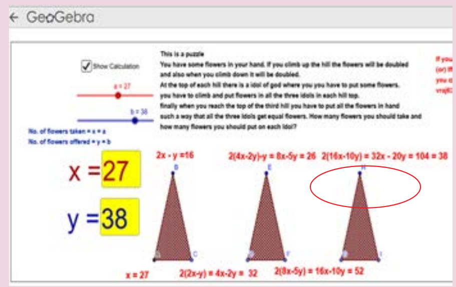
படி–2



படி–3



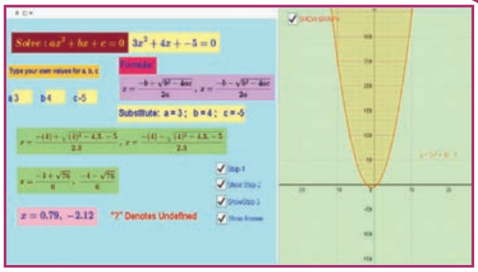
படி–4



*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/KmrE5vHs

இணையச் செயல்பாடு – 2 (ஆ)



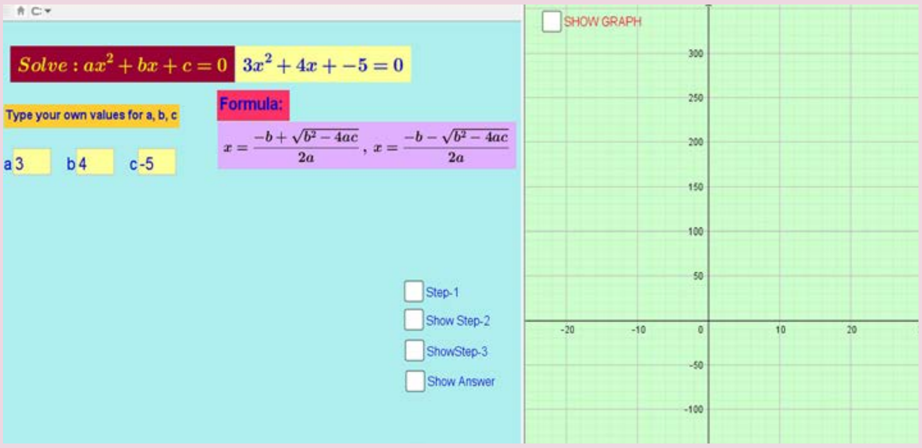
படி–1

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துக. "HIGH SCHOOL ALGEBRA" எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகம் தோன்றும். அங்கே இயற்கணிதம் தொடர்பான பல்வேறு பயிற்சித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். அதில் உனக்குத் தேவையான ஒரு பயிற்சியைத் தேர்ந்தெடு. எடுத்துக்காட்டாக "Quadratic Equation" என்ற பயிற்சித்தாளை தெரிவு செய்து அதைத் திறக்கவும். அதில் a,b,c-க்கு -20-யிலிருந்து 20-க்குள் ஏதேனும் மதிப்புகளைப் பெட்டியில் தட்டச்சு செய்க. இருபடிச் சமன்பாட்டை, சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்வு காண்க. ('?' இக்குறியீடு விடை வரையறுக்கப்படவில்லை என்பதைக் குறிக்கும்)

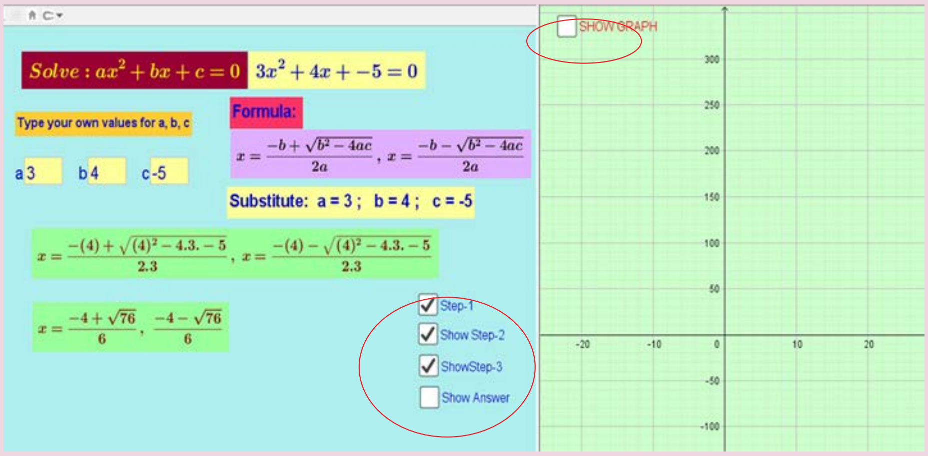
படி–2

இப்பொழுது விடைக்கான பெட்டிகளை ஒவ்வொன்றாக சொடுக்கி விடையைச் சரிபார்க்கவும். இறுதியாக வலப் பக்கத்தில் உள்ள "Show Graph" பெட்டியைச் சொடுக்கினால் சமன்பாட்டிற்கான வரைபடத்தை காணலாம். விடையை வரைபடத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும். (வளைவரை x –அச்சினை வெட்டும் புள்ளியே விடையாகும்.

படி–1



படி–2



*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/N4kX9QJq

STHG1

அத்தியாயம் 3

முக்கோணவியல்

அண்டவெளியில் அலைபாயும் பொருள்களில் என் மகிழ்ச்சி கட்டுண்டதால் என் கால்கள் பூமியில் ஊன்றப்படவில்லை.

– தால்மி

3.1 அறிமுகம் (Introduction)

கணிதத்தின் முதன்மை பிரிவான முக்கோணவியல் என்பது முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்களுக்கிடையேயான தொடர்பைப் பற்றியதாகும். முக்கோணவியல் என்பது கிரேக்க மொழியில் இருந்து பெறப்பட்டது. கிரேக்க மொழியில் 'trigonon' என்பது முக்கோணத்தையும் மற்றும் 'metron' என்பது அளவையும் குறிக்கிறது. இவை இரண்டும் இணைந்து 'Trigonometry' என அழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே, முக்கோணவியல் என்பது முக்கோணங்களை அளப்பதை படிப்பதாகும். கிரேக்க கணிதவியலாளர்கள் தெரியாத தொலைவுகளை அளப்பதற்கு முக்கோணவியலின் விகிதங்களைப் பயன்படுத்தினர். மற்றொரு வகையில் கி.மு(பொ.ஆ.மு) 20000–ம் ஆண்டுக்கு முன் எகிப்தியர்கள் பிரமிடுகளை அமைப்பதற்கு முக்கோணவியலின் மூல அமைப்பினை பயன்படுத்தினர். ஆரிஸ்டார்ச்ஸ் (Aristrachus) (310- 250 கி.மு(பொ.ஆ.மு)) என்ற விஞ்ஞானி சூரியன் மற்றும் சந்திரனின் தொலைவுகளை அளப்பதற்கு முக்கோணவியலை பயன்படுத்தினார்.

அலெக்சாந்டிரியாவின் தால்மி (கிபி 90–168)

முதன்முதலில் பூமியின் சுற்றளவை அளப்பதற்கு அக்கால பயன்பாட்டில் இருந்த ஸ்டாடிய என்ற அளவீட்டு முறையை ஏரடோஸ்தநிஸ் (Eratosthenes (276-195 கி.மு(பொ.ஆ.மு)) என்பவர் பயன்படுத்தினார். இவருக்கு முன்பே கிரேக்க வானியல் அறிஞர் ஹிப்பார்ச்சஸ் (Hipparchus (190-120 கி.மு(பொ.ஆ.மு)) முக்கோணவியலின் பொதுவான தத்துவங்களை உருவாக்கினார். முக்கோணவியலை உருவாக்கியவர் என்ற பெருமை அவரை சார்ந்ததாகும். இவருடைய தத்துவங்களைப் பயன்படுத்தி அலெக்சாந்டிரியாவின் தாலமி (Ptolemy of Alexandaria (கி.பி(பொ.ஆ) 90 – 168)) என்பவர் வானியல் தாலமி தேற்றத்தை (Ptolemy theorem of Astronomy) உருவாக்கினார். பழங்கால இந்தியாவில் முக்கோணவியல் குறிப்பிடத்தக்க வளர்ச்சியை பெற்றிருந்தது. இந்திய கணிதவியல் மற்றும் வானியல் அறிஞர் ஆரியபட்டா (Aryabhata (கி.பி(பொ.ஆ) 476 – 550)) என்பவர் சைன், கொசைன் மற்றும் அதன் நேர்மாறல் சார்புகளை வரையறுத்து அதன் முடிவுகளை, முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காணும் சூத்திரத்தையும் உள்ளடக்கி, 108 பாசுரங்களாக வழங்கினார். பழங்கால இந்தியாவின் கணித மேதைகள், பிரம்மகுப்தா (Brahmagupta (598 கி.பி(பொ.ஆ)), பாஸ்கரா I (Bhaskara -I (600 கி.பி(பொ.ஆ)) மற்றும் பாஸ்கரா II (Bhaskara II (1114 கி.பி(பொ.ஆ)) ஆகியோர்கள் முக்கோணவியலின் வளர்ச்சியில் பெரும் பங்காற்றினர்.

ஜான் பெர்னோலி (Johann Bernoulli (1667 – 1748)) மற்றும் லென்ஹார்டு ஆய்லர் (Leonhard Euler (1707 – 1783) அவர்களின் தீவிர உழைப்பால் முக்கோணவியல் கணிதத்தின் தனிப்பிரிவாக வளர்ச்சி அடைந்தது. முக்கோணவியல் சார்புகளையும் கலப்பு எண்ணின் அடுக்கு வடிவத்தையும் இணைக்கும் அடிப்படை முடிவுகளை ஆய்லர் என்பவர் உருவாக்கினார். ஜோசப் ஃபூரியர் (Joseph fourier (1768 -1830))

அவர்கள் முக்கோணவியல் தொடர் பற்றிய படிப்பில் பெரும் பங்காற்றினார். இவருடைய ஃபூரியர் தொடர் கண்டுபிடிப்பு, குறிப்பாக அதிர்வு பகுப்பாய்வு, மின்னியல் பொறியியல், ஒலியியல், ஒளியியல், சமிக்கை செயல்முறை, பிம்ப செயல்முறை, பகவு இயந்திரவியல் (Quantum Mechanics) ஆகியவற்றில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. நவீன காலங்களில் முக்கோணவியல் சார்புகளானது கணிதவியல் சார்புகளின் கோண அளவு சார்புகளாக வளர்ந்து, வடிவியல் மற்றும் இயற்கணிதத்தின் வாயிலாகக் கணிதத்தின் அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் கண்டுபிடிப்புகளிலும் மேற்கொள்ளப்பட்டது. மகிழுந்து மற்றும் கைபேசியில் உள்ள பொதுவான நிலை அமைப்பு (GPS) முக்கோணவியல் கணக்கீட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டது. உடலில் உள்ள கட்டிகளைக் கண்டறிவதற்கு மேம்படுத்தப்பட்ட படமெடுக்கும் மருத்துவக் கருவிகளான CT மற்றும் MRI-களின் செயல்முறைகளில் சைன் மற்றும் கொசைன் சார்புகள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கற்றலின் நோக்கங்கள் (Learning objectives)

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டிய பாடக் கருத்துகள்.

- குறுங்கோணங்களை தன்னகத்தே உள்ளடக்கிய செங்கோண முக்கோணத்தின் முக்கோணவியலின் விகிதங்களின் வரம்புகள்.
- ஆரையன் அளவீட்டை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான தேவை மற்றும் பாகையை ஒப்பிடும்போது ஆரையனின் நன்மைகள்.
- மெய்யெண்களின் முக்கோணவியல் சார்புகளை வரையறுக்க ஓரலகு வட்டத்தை எவ்வாறு பயன்படுத்துவது.
- வெவ்வேறு முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள், அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்புகள் மற்றும் அவற்றின் பயன்பாடுகள்.
- முக்கோணவியல் சமன்பாடுகளின் முதன்மை மற்றும் பொதுத் தீர்வுகள்.
- முக்கோணவியல் சமன்பாடுகளுக்கு எவ்வாறு தீர்வு காண்பது.
- அன்றாட சூழலில் முக்கோணத்தின் சைன் மற்றும் கொசைன் விதிகளின் பயன்பாடுகள்.
- சைன் மற்றும் கொசைன் விதிகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு விரிகோண முக்கோணத்தை எவ்வாறு தீர்வு காண்பது.
- ஹிரான்ஸ் சூத்திரத்தின் பயன்பாடுகள் மற்றும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காண்பதற்கு அதன் உயரத்தைக் கணக்கிடாமல் எவ்வாறு காண்பது.
- நேர்மாறல் முக்கோணவியல் சார்புகள் மற்றும் அதனுடைய சார்பகங்கள் மற்றும் வீச்சகங்கள் இருத்தலை அறிதல்.

முந்தைய வகுப்புகளில் படித்த குறுங்கோண முக்கோணவியலின் விகிதங்கள் மற்றும் அதன் பண்புகளைத் தற்போது நினைவு கூறுவோம்.

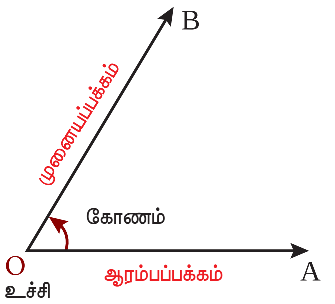
3.2 அடிப்படை முடிவுகளின் மீள்பார்வை (A recall of Basic Results)

முந்தைய வகுப்புகளில் செங்கோண முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணவியலின் விகிதங்களையும் மற்றும் குறுங்கோண முக்கோணவியலின் முற்றொருமைகளையும் படித்தோம். இரு கோள்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு, மலையின் உயரம், சந்திரன் மற்றும் சூரியன் போன்ற மிகத் தொலைவில் உள்ளவைகளின் தூரம், மிகப் பிரம்மாண்டமான கட்டிடங்களின் உயரம், அதிவேக விமானங்களின் திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவது விந்தையாக உள்ளது. அதுபோன்ற

உயரங்கள் மற்றும் தூரங்களைக் குறுங்கோண முக்கோணவியலின் விகிதங்களைக் கொண்டு கணக்கிடுவது ஆர்வ மிகுதியைக் காட்டுகிறது. ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணிற்கு முக்கோணவியல் சார்பை வரையறுத்து அதனை கணிதத்தின் அனைத்துப் பாடப்பிரிவுகளிலும் பயன்படுத்துவது குறிப்பாக நுண்கணிதத்தில் பயன்படுத்துவது நமது குறிக்கோளாகும். முதலாவதாகக் கோணம் மற்றும் கோணத்தின் பாகை அளவின் வரையறைகளை நினைவு கூறுவோம்.

3.2.1 கோணங்கள் (Angles)

OA, OB ஆகிய இரண்டு கதிர்கள் O என்ற பொதுவான புள்ளியைக் கொண்டு படம் 3.1–ல் காட்டியவாறு கோணம் $\angle AOB$-ஐ உருவாக்கும். பொதுவான புள்ளி O-வை **உச்சி** என்றும், இரண்டு கதிர்கள் கோணத்தின் பக்கங்கள் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.



படம் 3.1

கோணத்தின் **ஆரம்பப் பக்கம்** OA என அழைக்கப்படுகிறது. ஆரம்ப நிலை OA-விலிருந்து OB வரை ஒரு கதிரை சுழற்றிய பின் OB ஆனது கோணத்தின் **முனையப் பக்கம்** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இடஞ்சுழி சுழற்சி ஒரு நேர்மறை கோணத்தை உருவாக்குகிறது. (நேர்மறை அடையாளம் கோணத்தில்), ஒரு வலஞ்சுழி சுழற்சி ஒரு எதிர்மறை கோணத்தை உருவாக்குகிறது. (எதிர்மறை அடையாளம் கோணத்தில்).

குறிப்பு: இடஞ்சுழியாக (வலஞ்சுழியாக) OA-ஐ அதன் மீது ஒன்றிணையும்படி முழுமையாகச் சுற்றப்படுவதை ஒரு முழு வட்டச் சுற்று அல்லது சுழற்சி என்கிறோம்.

3.2.2 கோண அளவீடுகளின் பல்வேறு அமைப்புகள் (Different Systems of measurement of angle)

கோணங்களை அளவிடுவதற்கு மூன்று வகையான அமைப்புகள் உள்ளன. அவையாவன,

(i) அறுபான் அமைப்பு (Sexagesimal system)

அறுபான் அமைப்பின் கோண அளவீட்டு முறை பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதில் செங்கோணத்தை 90 சம பாகங்களாகப் பிரித்து அதைப் பாகை (Degree) என்றும், ஒரு பாகையை 60 சம பாகங்களாகப் பிரித்து அதனைக் கலைகள் (Minutes) என்றும், ஒரு கலையை 60 சம பாகங்களாகப் பிரித்து அதனை விகலைகள் (Seconds) என்றும் அழைக்கிறோம். ஒரு பாகை, ஒரு கலை மற்றும் ஒரு விகலை ஆகியவை முறையே $1°$, $1'$, $1''$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

(ii) நூற்றின் கூறு அமைப்பு (Centesimal system)

நூற்றின் கூறு அமைப்பில் ஒரு செங்கோணத்தை 100 சமபாகங்களாகப் பிரித்து அதனைத் தரம் (Grades) என்றும், ஒரு தரத்தை 100 சம பாகங்களாகப் பிரித்து அதனைக் கலைகள் (Minutes) என்றும், ஒரு கலையை 100 சமபாகங்களாகப் பிரித்து அதனை விகலைகள் (Seconds) என்றும் அழைக்கிறோம். இதனை 1^g என்ற குறியீடு ஒரு தரத்தைக் குறிக்கிறது.

(iii) வட்டமுறை அமைப்பு (Circular system)

வட்டமுறை அமைப்பில் ஆரையன் (Radian) அளவீடு அவ்வட்டத்தின் வில்லின் நீளம் மற்றும் அதன் ஆரத்தைக் கொண்டு வரையறுக்கப்படுகிறது. வட்டமுறை அமைப்பு கணிதத்தின் அனைத்து

பிரிவுகளிலும் மற்றும் அறிவியலிலும் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. 1^c என்ற குறியீடு ஓர் ஆரையன் அளவை குறிக்கிறது.

3.2.3 பாகை அளவு (Degree Measure)

கோணங்களின் அளவீட்டு அலகை ஒரு பாகை என்றும் அதனைக் குறியீட்டின் மூலம் $^\circ$ என்றும் குறிக்கலாம். நாம் ஒரு முழுவட்டச் சுற்றை 360 சம பாகங்களாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு பகுதியையும் ஒரு **பாகை** என்கிறோம். ஒரு பாகை 1° என்பது ஒரு முழுச் சுழற்சியில் $1/360$ ஆகும். கோணத்தின் ஒரு பகுதியை அளவிட மற்றும் கோணங்களின் அளவீடுகளின் துல்லியத்திற்காக, கலைகள் மற்றும் விகலைகள் அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றன. ஒரு கலை $(1')$ என்பது ஒரு பாகையில் $(1/60)$ ஆகும், ஒரு விகலை $(1'')$ என்பது ஒரு கலையில் $(1/60)$ ஆகும் அல்லது ஒரு பாகையில் $(1/3600)$ ஆகும்.

சிறப்பாகப் புரிந்து கொள்வதற்கும் மற்றும் பயன்பாட்டிற்கும் பின்வரும் வகையில் சோடி கோணங்களை நாம் வகைப்படுத்தலாம்.

(i) ஒரே அளவை கொண்ட இரு கோணங்கள் ஒத்த கோணங்கள் என்று அழைக்கப் படுகின்றன.

(ii) இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 90° எனில், அவை நிரப்புக்கோணங்கள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

(iii) இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில் அவை மிகை நிரப்புக்கோணங்கள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

(iv) 0°-விற்கும் 360°-விற்கும் இடைப்பட்ட இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 360° எனில், அவை இணையிய கோணங்கள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு: (i) நாம் எங்கெல்லாம் ஒரு பாகையை ஒரு மணி நேரம் குறிக்கும் என்று நினைக்கிறோமோ அங்கெல்லாம் பாகை, கலை மற்றும் விகலை என்ற கருத்து, நேர அளவீட்டு முறைக்குச் சமமானதாகும்.

(ii) கவனிக்க

$$59.0854^\circ = 59^\circ + 0.0854^\circ$$

$$0.0854^\circ = 0.0854^\circ \times \frac{60'}{1^\circ} = 5.124'$$

$$5.124' = 5' + 0.124'$$

$$0.124' = 0.124' \times \frac{60''}{1'} = 7.44''$$

எனவே, $$59.0854^\circ = 59^\circ 5' 7.44''$$

(iii) மேலும் $$34^\circ 51' 35'' = 34.8597^\circ$$

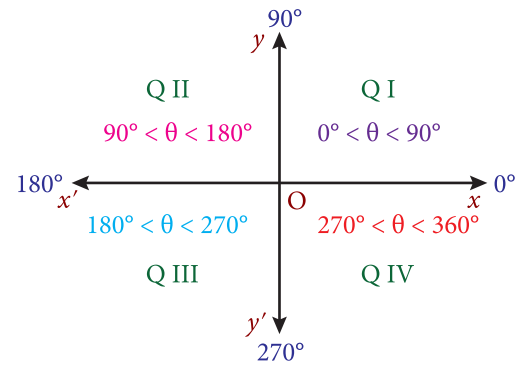
மற்றும் $$90^\circ - 36^\circ 18' 47'' = 53^\circ 41' 13''$$

3.2.4 திட்ட நிலையில் உள்ள கோணங்கள் (Angles in Standard Position)

ஒரு கோணத்தின் உச்சியானது O-விலும், அதன் ஆரம்பப் பக்கம் மிகை x-அச்சாகவும் செயல்பட்டால் கோணம் திட்ட நிலையில் இருப்பதாகக் கூறலாம்.

திட்ட நிலையில், கோணத்தின் முனையப் பக்கம் முதல் காற்பகுதியில் விழுந்தால் கோணம் முதல் காற்பகுதியில் இருக்கும் என்று கூறலாம். இதே போன்று நாம் மற்ற மூன்று காற்பகுதிகளை வரையறுக்கலாம்.

திட்ட நிலையில், கோணங்களுக்கான முனையப் பக்கம் x-அச்சு அல்லது y-அச்சு வழியாக அமைந்தால் அக்கோணங்களைக் **காற்பகுதி கோணங்கள்** (Quadrantal Angles) என்று அழைக்கலாம். எனவே, $0°$; $90°$; $180°$; $270°$ மற்றும் $360°$ ஆகியவை காற்பகுதி கோணங்கள் ஆகும்.

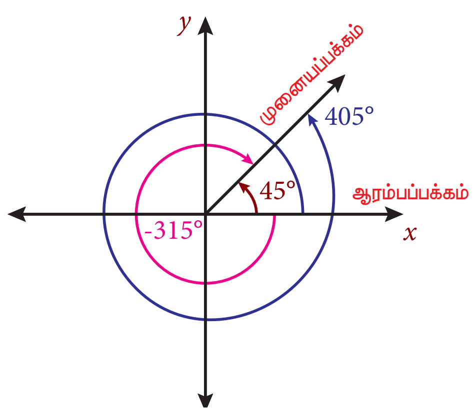


படம் 3.2

குறிப்பு: காற்பகுதி கோணத்தின் பாகை அளவீடு $90°$-ன் மடங்காகும்.

3.2.5 இணை முனையக் கோணங்கள் (Coterminal angles)

நாம் கதிரை இடஞ்சுழியாக முழுமையாகச் சுழற்றினால் அளவிடும் கோணம் $360°$ ஆகும். இடஞ்சுழியாக தொடர்ந்து சுழற்றிக் கொண்டிருந்தால் அளவிடும் கோணம் $360°$-ஐ மிகும். வலஞ்சுழியாக சுழற்றினால் குறைகோணத்தை (Negative Angle) ஏற்படுத்தும்.



படம் 3.3

கோணங்கள் $57°$, $417°$ மற்றும் $-303°$ ஆகிய கோணங்கள் ஒரே ஆரம்ப மற்றும் முனையப் பக்கங்களை கொண்டவை, ஆனால் வெவ்வேறு அளவுகளாலான சுழற்சிகளைக் கொண்டவை இது போன்ற கோணங்களை **இணை முனையக் கோணங்கள்** (coterminal angles) என்று அழைக்கலாம். அதாவது ஒரே முனையம் கொண்ட திட்டநிலையில் உள்ள கோணங்களை **இணை முனையக் கோணங்கள்** (coterminal angles) என்று அழைக்கலாம்.

α மற்றும் β ஆகியவை இணை முனையக் கோணங்கள் எனில் $\beta = \alpha + k\,(360°)$, இங்கு k என்பது ஒரு முழு எண். திட்ட நிலையில் ஒரே முனையம் கொண்ட கோணங்களின் அளவீட்டு வித்தியாசம் $360°$ ன் முழு எண் மடங்கில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $417°$ மற்றும் $-303°$ ஆகியவை இணை முனையக் கோணங்கள். ஏனெனில்

$$417° - (-303°) \;=\; 720° = 2\,(360°).$$

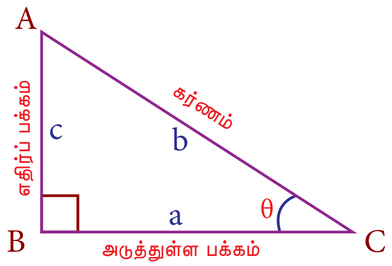
குறிப்பு: (i) $45°$, $-315°$ மற்றும் $405°$ ஆகியவை முதல் காற்பகுதியில் அமையும் என்பதை கவனியுங்கள்..

(ii) $(30°, 390°)$, $(280°, 1000°)$ மற்றும் $(-85°, 275°)$ ஆகிய கோணங்களின் சோடிகள் இணை முனையக் கோணங்கள் ஆகும்.

3.2.6 செங்கோண முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்தி அடிப்படை முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Basic Trigonometric ratios using a right triangle)

செங்கோண முக்கோணம் ABC இல் a, b, c ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்கள் ஆறு விகிதங்களை உருவாக்கும் என்பதை நாம் நன்கறிவோம். அவ்விகிதங்கள் முக்கோணவியலில் ஆறு அடிப்படை சார்புகளை வரையறுக்க வழிவகுக்கும்.

முதலாவதாக, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை குறிப்பாக வைத்து வரையறுக்கப்பட்ட முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் நினைவு கூறுவோம்.



படம் 3.4

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

ஆகியவற்றை முக்கோணவியல் விகிதங்கள் $\sin\theta$ மற்றும் $\cos\theta$-வை பயன்படுத்திக் காணலாம்.

3.2.7 பரவலாக பயன்படுத்தப்படும் கோணங்களின் முக்கோணவியல் சார்புகளின் சரியான மதிப்புகள் (Exact Values for trigonometric functions of widely used angles)

அறிந்த கோணங்களின் முக்கோணவியல் சார்புகளின் மதிப்புகளை பட்டியலிடுவோம்.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்க இயலாதது

குறிப்பு: (i) மேலே கொடுக்கப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளும் மிகச் சரியானவையாகும்.

(ii) $\sin 30^\circ$ மற்றும் $\cos 60^\circ$ இன் மதிப்புகளும் $\sin 60^\circ$ மற்றும் $\cos 30^\circ$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளும் சமம் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்க.

(iii) தலைகீழ் விகித மதிப்புகளான cosecant, secant மற்றும் cotangent ஆகியவைகளை மேற்கண்ட அட்டவணையின் மூலம் பெறலாம்.

(iv) $\cos 90^\circ = 0$ என்பதால், $\tan 90^\circ$ மற்றும் $\sec 90^\circ$ ஆகியவை வரையறுக்க இயலாதவையாகிறது.

(v) $\sin 0^\circ = 0$ என்பதால் $\cot 0^\circ$ மற்றும் $\operatorname{cosec} 0^\circ$ ஆகியவை வரையறுக்க இயலாதவையாகிறது.

3.2.8 அடிப்படை முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் (Basic Trigonometric Identities)

சார்பகத்தில் அனுமதிக்கப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் ஒரு முக்கோணவியல் முற்றொருமை எப்பொழுதும் உண்மை என்ற உறவைத் தெரிவிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ என்பது θ-ன் அனுமதிக்கப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் இந்த உறவு உண்மையாகிறது. எனவே, இது ஒரு முற்றொருமையாகும். மேலும், $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ ஒரு முற்றொருமையல்ல. ஏனெனில் $\theta = 60^\circ$ எனும்போது இந்த உறவு உண்மையற்றதாகும். சிக்கலான கோவைகளை எளிமைப்படுத்த முற்றொருமைகள் நமக்குப் பயன்படுகிறது. அவைகள் முக்கோணவியல் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குப் பெரிதும் பயன்படுகிறது.

முற்றொருமைகளை கையாண்டு அதனைத் திருத்தி அமைப்பதற்கு இயற்கணிதத்தின் பல்வேறு யுக்திகள் உதவி புரிகின்றன.

முக்கோணவியலில் அடிப்படை முற்றொருமைகளை (பித்தாகோரியன் முற்றொருமைகள்) நினைவு கூறுவோம், குறிப்பாக

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1;\ \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1;\ \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

குறிப்பு: (i) $\sin^2\theta$ என்பது $(\sin\theta)^2$ ஐக் குறிக்கும். இந்த முறை மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கும் பொருந்தும்.

(ii) $\theta = 90^\circ$ எனில் $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ என்பது அர்த்தமற்றதாகும். $\sec\theta$ மற்றும் $\tan\theta$ ஆகியவை வரையறுக்கப்படும் அனைத்து θ-வின் மதிப்புகளுக்கும் உண்மை இருப்பினும் இது ஒரு முற்றொருமையாகும். ஆகவே, சார்பகத்தின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் முற்றொருமை ஒரு சமன்பாடு என்பது உண்மையாகும்.

(iii) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ என்ற கோவை, $1+\cos\theta \neq 0$-விற்கு, θ-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் செல்லுபடியாகும் என்பதை நாம் புரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1 நிறுவுக: $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} &= \frac{\tan\theta+\sec\theta-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}\\ &= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)[1-(\sec\theta-\tan\theta)]}{\tan\theta-\sec\theta+1}\\ &= \tan\theta+\sec\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.2

நிறுவுக: (sec A – cosec A) (1 + tan A + cot A) = tan A sec A – cot A cosec A.

தீர்வு:

$$\text{இடப்புறம்} = \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sin A}\right)\left[1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right]$$

$$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A \ \cos^2 A} \quad \text{...... (i)}$$

$$\text{வலப்புறம்} = \frac{\sin A}{\cos^2 A} - \frac{\cos A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A \cos^2 A} \quad \text{...... (ii)}$$

(i) மற்றும் (ii) இலிருந்து நமக்குத் தேவையான தீர்வு கிடைத்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 3.3 $a\cos\theta = b$ மற்றும் $c\sin\theta = d$ லிருந்து θ-ஐ நீக்குக, a, b, c, d ஆகியவை மாறிலிகள்.

தீர்வு:

$ac\cos\theta = bc$ மற்றும் $ac\sin\theta = ad$ ஆகியவற்றை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டக் கிடைப்பது

$$a^2c^2 = b^2c^2 + a^2d^2$$

பயிற்சி 3.1

1. கொடுக்கப்பட்ட கோணங்கள் எந்தக் காற்பகுதியில் அமையும் என்பதைக் காண்க.

   (i) 25° (ii) 825° (iii) – 55° (iv) 328° (v) – 230°

2. $0^\circ \le \theta < 360^\circ$-ல் கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கோணத்திற்கான இணை முனையக்கோணத்தை காண்க.

   (i) 395° (ii) 525° (iii) 1150° (iv) – 270° (v) – 450°

3. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ எனில், $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ என்பதை நிறுவுக.

4. $\sin\theta + \cos\theta = m$ எனில், $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \dfrac{4 - 3(m^2 - 1)^2}{4}$ என நிறுவுக.

   (இங்கு $m^2 \le 2$).

5. $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$ எனில்,

   (i) $\sin^4\alpha + \sin^4\beta = 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$ (ii) $\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$ என நிறுவுக.

6. $y = \dfrac{2\sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha}$ எனில் $\dfrac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = y$ என நிறுவுக.

7. $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $x = \sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta$, $y = \sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}\theta$ மற்றும் $z = \sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta\sin^{2n}\theta$ எனில், $xyz = x + y + z$ என நிறுவுக.

   [குறிப்பு: $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x}$, $|x| < 1$-ஐப் பயன்படுத்தலாம்].

8. $\tan^2\theta = 1 - k^2$ எனில், $\sec\theta + \tan^3\theta\,\text{cosec}\,\theta = (2-k^2)^{3/2}$ என நிறுவுக. மேலும் இவற்றை நிறைவு செய்யும் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

9. $\sec\theta + \tan\theta = p$ எனில், $\sec\theta$, $\tan\theta$ மற்றும் $\sin\theta$ ஆகியவற்றின் மதிப்பை p இன் வாயிலாகக் காண்க.

10. $\cot\theta(1+\sin\theta) = 4m$ மற்றும் $\cot\theta(1-\sin\theta) = 4n$ எனில், $(m^2-n^2)^2 = mn$ என நிறுவுக.

11. $\text{cosec}\,\theta - \sin\theta = a^3$ மற்றும் $\sec\theta - \cos\theta = b^3$ எனில், $a^2b^2(a^2+b^2) = 1$ என நிறுவுக.

12. $a\sec\theta - c\tan\theta = b$ மற்றும் $b\sec\theta + d\tan\theta = c$ ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து θ ஐ நீக்குக.

3.3 ஆரையன் அளவு (Radian Measure)

தொடக்கத்தில் முக்கோண விகிதங்களை வரையறுப்பதற்கும் மற்றும் கோணங்களைப் பாகையில் அளவிடுவதற்கும் செங்கோண முக்கோணம் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆனால் குறுங்கோணங்களைக் கொண்ட செங்கோண முக்கோணங்கள் சில வரம்புகளுக்குட்பட்டிருந்தது.

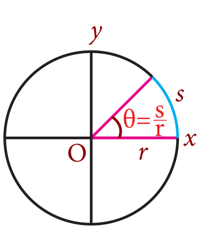
பல்லாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்பு பாபிலோனியர்கள் (Babylonians) 360 நாட்களைப் பாகையில் ஒரு முழுச்சுற்று 360°-ஐ குறிப்பதாக கணக்கில் கொண்டு 30°, 45°, 60°, 90° மற்றும் 180° ஆகிய சிறிய கோணங்களாகப் பிரிப்பதற்கு ஏதுவாக ஒரு ஆண்டின் 365 நாட்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு 360°–ஐ தேர்வு செய்தனர்.

வேதியியல் மற்றும் இயற்பியல் பாடங்களில் கோணத்திற்குப் பதிலாக மெய்யெண்களைக் கொண்ட சார்பகமுடைய முக்கோணவியலின் சார்புகளின் தேவையின் பொருட்டு 17–ம் நூற்றாண்டில் முக்கோணவியல் விரிவாக்கம் செய்யப்பட்டது. இதனை ஓரலகு வட்டத்தின் மீதான வில்லின் நீளம் மற்றும் மைய கோணம் ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பை பயன்படுத்தி பெற்றோம். இம்முறையில் கோணத்தை அளக்கும் அலகு **ஆரையன் அளவையாகும்**. கோட்பாடுகளின் பயன்பாட்டிற்கு அதிக அளவில் பொதுவாகப் பயன்படக்கூடிய கோண அளவீட்டு அமைப்பு ஆரையன் ஆகும். நுண்கணிதம் உட்படப் பல தொழில்நுட்பங்களுக்குப் பொதுவான அளவீட்டு அலகு முறை ஆரையன் ஆகும். மிக முக்கியமான விகிதமுறா எண் π, ஆரையன் அளவீட்டில் பெரும்பங்கு வகிக்கிறது. ஒரு கோணத்தின் ஆரையன் அளவீட்டுமுறையை நாம் அறிமுகப்படுத்துவோம்.

வரையறை 3.1

ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணத்தின் **ஆரையன் அளவு**, அவ்வில்லின் நீளத்திற்கும் அதன் ஆரத்திற்கும் உள்ள விகிதமாகும்.

ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் 'r' என்க. s நீளமுள்ள வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் θ என்க.



படம் 3.5

$$\text{எனில், } \theta = \frac{\text{வில்லின் நீளம்}}{\text{ஆரம்}}$$

$$= \frac{s}{r} \text{ ஆரையன்கள்}$$

$$\text{எனவே, } s = r\,\theta \text{ ஆகும்.}$$

XI_Maths_Ch3_V-1_TM.indd 118 15-12-2021 13:53:08

குறிப்பு: (i) அனைத்து வட்டங்களும் வடிவொத்தவைகளாகும். எனவே எந்த ஒரு வட்டத்திலும் வெட்டப்பட்ட வில்லின் நீளத்திற்கும் அதன் ஆரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் எப்பொழுதும் ஒரு மாறிலியாகும்.

(ii) $s = r$ எனில், 1 ஆரையன் கொண்ட கோணத்தை நாம் பெறுகிறோம் எனவே, ஒரு ஆரையன் என்பது ஒரு வட்டத்தில் ஆரத்தின் நீளத்திற்குச் சமமான நீளமுடைய வில் மையத்தில் தாங்கும் கோணமாகும்.

(iii) s மற்றும் r ஆகியவற்றின் அலகுகள் ஒன்றாக இருப்பதால் θக்கு அலகுகள் ஏதும் இல்லை. எனவே, ஆரையன்களைக் குறிக்க எந்த விதமான குறியீடுகளையும் நாம் பயன்படுத்துவதில்லை.

(iv) $\theta = 1$ ஆரையன் அளவு எனில் $s = r$ ஆகும்.
$\theta = 2$ ஆரையன் அளவு எனில் $s = 2\,r$ ஆகும்.

எனவே, $s = kr$ எனில், பொதுவாக $\theta = k$ ஆரையன் அளவாகும். மையக்கோணம் θ-வை தாங்கும் வட்டக்கோணப்பகுதி ஒரு முழு வட்டமாகச் சுற்றிவர எத்தனை மடங்கு ஆரங்கள் தேவை என்பதைக் கோணத்தின் ஆரையன் அளவீடு நமக்குத் தெரிவிக்கிறது.

(v) ஆரையன் அளவு ஒரு அலகு வட்டத்தின் விளிம்போடு தொடர்புடையதாகும். ஆரையன் அமைப்பில் முனையப் பக்கம் ஓரலகு வட்டத்தின் விளிம்பை எங்கு வெட்டுகிறதோ அது வரை பயணிக்கும் தூரத்தை அளவிடுவதே கோணத்தை நாம் அளவிடுவதாகும்.

3.3.1 பாகை மற்றும் ஆரையன் அளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு (Relationship between Degree and Radian measures)

கோணத்தை அளவிடப் பாகை மற்றும் ஆரையன் ஆகிய அலகுகள் உள்ளன. எளிமையாக வரையறுக்கப்பட்டுப் பயன்படுத்த வசதியாக இருக்கும் அலகு மற்றதைவிடச் சிறந்ததாகும். எடுத்துக்காட்டாக, நீரின் வெப்பநிலையை அளக்கும்போது 0° மற்றும் 100°, உறைநிலை மற்றும் கொதிநிலை ஆகியவை செல்சியஸ் (Celsius) முறையில் அமைவதால் அது பாரன்ஹீட் (Fahrenheit) முறையைவிடச் சிறந்தது. மாற்றுவதற்கும் மற்றும் கணக்கிடுவதற்கும் ஆரையன் அளவு சிறந்தது. பகுப்பாய்விற்கு ஆரையன் அளவு ஏற்றதாக இருக்கும் அதே நேரத்தில் மக்களிடையே கருத்துப்பரிமாற்றம் செய்வதற்கு பாகை அளவு ஏற்றதாக இருக்கும். கிரேக்கக் கணிதவியலாளர்கள் வட்டத்தின் சுற்றளவிலிருந்து உருவாகும் π என்ற உறவைக் கவனித்தனர் மற்றும் ஆரையன் அளவுகளில் π ஒரு முக்கியப் பங்கு ஆற்றுகிறது.

ஓரலகு வட்டத்தில் ஒரு முழுவட்டச்சுற்று 360°-ஐக் குறிக்கும்போது ஆரையன் அளவீட்டில் 2π ஆரையன்களைக் குறிக்கிறது. 2π என்பது ஓரலகு வட்டத்தின் சுற்றளவாகும். இவ்வாறு நாம் பின்வரும் தொடர்புகளைப் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ 2π ஆரையன்கள் $= 360^\circ \Rightarrow \pi$ ஆரையன்கள் $= 180^\circ$

மேலும், 1 ஆரையன் $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$ அல்லது $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ ஆரையன்கள்

இங்கு, x ஆரையன்கள் $= \left(\dfrac{180x}{\pi}\right)^\circ$ அல்லது $x^\circ = \dfrac{\pi x}{180}$ ஆரையன்கள்.

ஆரையனில் பயன்படுத்தப்படும் அளவுகோல் பாகையின் அளவுகோலைவிடச் சிறியதாக உள்ளது என்பதைக் கவனிக்கவும். சிறிய அளவுகோல், முக்கோண சார்புகளின் வரைபடங்களை கண்ணுக்கு புலப்படும் படியும், பயன்படுத்தும் படியும் அமைக்கிறது. மேலே உள்ள தொடர்பு, பாகையை ஆரையன்களாகவும் அல்லது ஆரையன்களை பாகைகளாகவும் மாற்ற வழி வகுக்கிறது.

குறிப்பு: (i) ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவிற்கும் அதன் விட்டத்திற்கும் உள்ள விகிதம் ஒரு மாறிலியாகும். அதை π என்ற விகிதமுறா எண்ணால் குறிக்கலாம்.

(ii) ஓரலகு வட்டத்தின் மீது P என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும் மற்றும் P ஆனது O-ஐ தொடுமாறு எண் வரிசையில் ஓரலகு வட்டத்தை வைக்கவும். அவ்வட்டத்தை எண்வரிசை மீது உருள வைக்கவும். வட்டம் வலதுபுறத்தில் ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றிய பிறகு P என்ற புள்ளி எண்கோட்டில் 2π என்ற எண்ணைத் தொடும்.

(iii) கோண அளவில் எதுவும் குறிப்பிடப்படவில்லை என்றால், கோண அலகு ஆரையன்களில் உள்ளதாகக் கருதுவோம்.

(iv) ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் ஆரம் r என்றும் மையக்கோணம் θ எனில் வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு = $\begin{cases} \left(\dfrac{\pi r^2}{360^\circ}\right)\theta & \text{பாகை அளவில்} \\ \left(\dfrac{\pi r^2}{2\pi}\right)\theta = \dfrac{r^2\theta}{2} & \text{ஆரையன் அளவில்} \end{cases}$

ஆரையன் அளவுகளில் கணக்கிடுவது மிகவும் எளிது என்பது தெளிவு..

(v) π மற்றும் $\dfrac{22}{7}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் நான்கு தசமத்திருத்தங்களில் 3.1416 மற்றும் 3.1429 முறையே ஆகும். எனவே, முதல் இரண்டு தசமத் திருத்தங்களில் π மற்றும் $\dfrac{22}{7}$-ன் மதிப்பு சமம் ஆகும். ஆதலால் $\pi \approx \dfrac{22}{7}$

(vi) 1 ஆரையன் $\approx 57^\circ17'45''$ மற்றும் $1^\circ \approx 0.017453$ ஆரையன்

$1' = \left(\dfrac{\pi}{180 \times 60}\right)$ ஆரையன் ≈ 0.000291 ஆரையன்

$1'' = \left(\dfrac{\pi}{180 \times 60 \times 60}\right)$ ஆரையன் ≈ 0.000005 ஆரையன்

(vii) சில அறியப்பட்டக் கோணங்கள், ஆரையன்களிலும் மற்றும் அதற்கு ஒத்த பாகை அளவுகளிலும் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆரையன்	0	1	0.017453	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
பாகை	0°	$57^\circ17'45''$	1°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

(viii) $\sin 90^\circ = 1$ ஆனால் $\sin 90 \neq 1$ (ஆரையன் அளவுகளில்)

எடுத்துக்காட்டு 3.4 ஆரையனாக மாற்றவும். (i) 18° (ii) -108°.

தீர்வு:

$180^\circ = \pi$ ஆரையன்கள் $\Rightarrow$ $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ ஆரையன்கள்

(i) $18^\circ = \dfrac{\pi}{180} \times 18$ ஆரையன்கள் $= \dfrac{\pi}{10}$ ஆரையன்கள்

(ii) $-108° = \frac{\pi}{180} \times (-108)$ ஆரையன்கள்

$= -\frac{3\pi}{5}$ ஆரையன்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.5 பாகையாக மாற்றுக (i) $\frac{\pi}{5}$ ஆரையன்கள் (ii) 6 ஆரையன்கள்.

தீர்வு:

π ஆரையன்கள் $=$ $180°$ எனத் தெரியும். எனவே,

(i) $\frac{\pi}{5}$ ஆரையன்கள் $= \frac{180°}{5} = 36°$

(ii) 6 ஆரையன்கள் $= \left(\frac{180}{\pi} \times 6\right)^{\circ} \approx \left(\frac{7 \times 180}{22} \times 6\right)^{\circ}$

$= \left(343\frac{7}{11}\right)^{\circ}$

எடுத்துக்காட்டு 3.6 5 செ.மீ. ஆரம், மையக் கோணம் 15° –ஐ கொண்ட வட்ட வில்லின் நீளம் காண்க.

தீர்வு:

வில்லின் நீளம் s, ஆரம் r, மையக்கோணம் θ எனில், $s = r\theta$

$$\theta = 15° = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12} \text{ ஆரையன்கள்}$$

$$s = r\theta \quad \Rightarrow \quad s = 5 \times \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \text{ செ.மீ.}$$

குறிப்பு: $r\,\theta$ இல் θ என்பதை எப்பொழுதும் ஆரையனில் குறிக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7 இரண்டு வட்டங்களில், ஒரே அளவு கொண்ட வில்லின் நீளங்கள் 30° மற்றும் 80°-ஐ மையக் கோணங்களாகத் தாங்கும்போது அவ்விரு வட்டங்களுக்கான ஆரங்களின் விகிதம் காண்க.

தீர்வு:

r_1 மற்றும் r_2 ஆகியவை இரண்டு வட்டங்களின் ஆரங்கள் மற்றும் வில்லின் நீளம் l எனில்

$\theta_1 = 30° = \frac{\pi}{6}$ ஆரையன்கள்

$\theta_2 = 80° = \frac{4\pi}{9}$ ஆரையன்கள்

$l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $\frac{\pi}{6}r_1 = \frac{4\pi}{9}r_2$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad r_1 : r_2 = 8 : 3.$

பயிற்சி 3.2

1. பின்வரும் கோணங்களை ஆரையன் அளவுகளில் கூறுக.

   (i) $30°$ (ii) $135°$ (iii) $-205°$ (iv) $150°$ (v) $330°$

2. பின்வரும் கோணத்தின் ஆரையன் அளவை பாகை அளவுகளில் காண்க.

   (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{9}$ (iii) $\frac{2\pi}{5}$ (iv) $\frac{7\pi}{3}$ (v) $\frac{10\pi}{9}$

3. ஒரு தடகள வீரர் 1 கி.மீ.–ஐக் கடக்க வட்ட ஒடுபாதையை 5 முறை சுற்றி வரவேண்டும் எனில் வட்ட ஒடு பாதையின் ஆரம் என்ன?

4. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் 40 செ.மீ., ஒரு நாணின் நீளம் 20 செ.மீ., எனில், சிறிய வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

5. 100 செ.மீ. ஆரமுடைய வட்டத்தில், 22 செ.மீ. நீளமுடைய வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணத்தைப் பாகையில் காண்க.

6. 10 அடி ஆரம்கொண்ட ஒரு வட்டத்தில், $\theta = 41°$–ஐ மையக் கோணமாகக் கொண்ட வட்ட வில்லின் நீளம் காண்க.

7. இரண்டு வட்டங்களில், ஒரே அளவு கொண்ட வில்லின் நீளங்கள் $60°$ மற்றும் $75°$–ஐ மையக் கோணங்களாகத் தாங்கும்போது அவ்விருவட்டங்களுக்கான ஆரங்களின் விகிதம் காண்க.

8. ஒரு வட்ட கோணப்பகுதியின் சுற்றளவும் அதே ஆரமுடைய அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளமும் சமம் எனில், அவ்வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணத்தைப் பாகை , கலை மற்றும் விகலையில் காண்க.

9. ஒரு விமானத்தை இயக்கும் முன்தள்ளி ஒரு நிமிடத்திற்கு 1000 முறை சுழல்கிறது. முன்தள்ளியின் முனைப்புள்ளி சுழல்கின்றபோது ஒரு விநாடிக்கு எத்தனை பாகைகள் கிடைக்கும் என்பதைக் காண்க.

10. 66கி.மீ. / மணி நேர வேகத்தில் 1500மீ. ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டப்பாதையில் ஒரு தொடர்வண்டி இயக்கப்படுகிறது எனில், 20 வினாடியில் அது கடக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

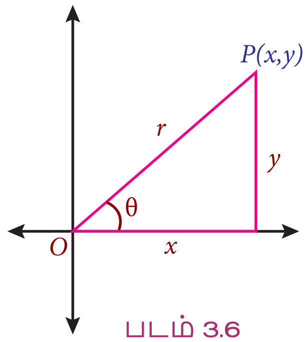
11. 8 செ.மீ. ஆரம் மற்றும் 6 மி.மீ. தடிமன் கொண்ட ஒரு வட்ட வடிவ உலோகத் தட்டினை உருக்கி, 16 செ.மீ. ஆரம் மற்றும் 4 மி.மீ. தடிமன் உடைய ஒரு வட்டக் கோணப்பகுதியை உருவாக்கினால் அவ்வட்டக் கோணப் பகுதியின் கோண அளவை காண்க.

3.4 முக்கோணவியல் சார்புகளும் மற்றும் அதன் பண்புகளும் (Trigonometric Functions and their Properties)

3.4.1 கார்டீசியன் ஆயத்தொலை வடிவில் ஏதேனுமொரு கோணத்திற்கு முக்கோணவியல் சார்புகள் (Trigonometric Functions of any angle in terms of Cartesian Coordinates)

முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கான கொள்கைகளைக் கீழ் வகுப்புகளில் நாம் பயின்றோம். அது குறுங்கோண அளவில் மட்டுமே இருந்தது. ஆனால் நாம் குறுங்கோணம் அல்லாத பல கோணங்களைப் பார்த்துள்ளோம். நாம் குறுங்கோணத்தை நீட்டித்து மற்றும் முக்கோணவியலின் சார்புகளை ஏதேனும் ஒரு கோணத்திற்கு வரையறை செய்வோம். ஏதேனுமொரு கோணத்தின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை ஆரையன் வடிவில் தரும்போது அவற்றை **முக்கோணவியல் சார்புகள்** என்கிறோம்.

திட்டநிலையில் θ-ன் முனையப் பக்கத்தில் ஆதியைத் தவிர வேறு ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ என்க. $OP = r$ என்க.



படம் 3.6

இதனால் $$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

பின்வருமாறு θ-ன் ஆறு முக்கோணவியல் சார்புகள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \text{ மற்றும் } \cos\theta = \frac{x}{r}$$

இதைப் பயன்படுத்தி மற்ற சார்புகளையும் காணலாம்.

$$\tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0; \quad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0;$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0; \quad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0.$$

குறிப்பு: (i) $|x| \leq r,\ |y| \leq r$ எனவே $|\cos\theta| \leq 1$ மற்றும் $|\sin\theta| \leq 1$.

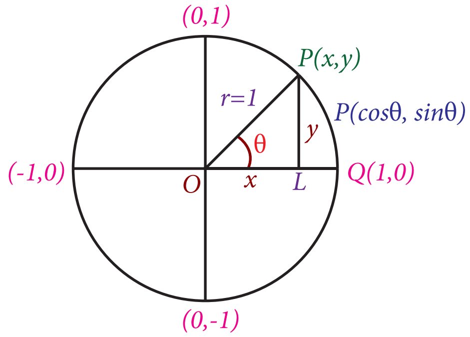
(ii) கோணம் குறுங்கோணமாக இருப்பின், மேலே குறிப்பிட்ட வரையறைகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட வரையறைகளுக்குச் சமமாகும்.

(iii) $P(x, y)$ ஐ தன்னகத்தே கொண்ட θ கோணத்தை உருவாக்கும் முனைய பக்கம் எந்தக் காற்பகுதியில் இருக்கும் என்பதைப் பொறுத்து முக்கோணவியல் சார்புகளின் குறி (மிகை அல்லது குறை) அமையும்.

(iv) மேலே கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணவியல் சார்புகளின் வரையறைகள் கோணத்தின் முனையப் பக்கத்தின் மீது உள்ள புள்ளியைச் சார்ந்திருக்காது (சரிபார்க்க!)

காற்பகுதிக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of Quadrantal angles)

திட்ட நிலையில் கோணத்தின் முனையப்பக்கம் ஏதேனும் ஒரு அச்சோடு இணைந்திருந்தால் அக்கோணத்தைக் காற்பகுதிக் கோணங்கள் என்போம். காற்பகுதிக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்போம்.



படம் 3.7

$x^2 + y^2 = 1$ என்ற சமன்பாட்டை உடைய ஓரலகு வட்டத்தைக் கருத்தில் கொள்க. θ-ன் முனைய பக்கம் ஓர் அலகு வட்டத்தின் மீது எங்குச் சந்திக்கிறதோ அப்புள்ளியை $P(x, y)$ எனக் கொள்க.

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \ (p\text{இன் } x \text{ ஆயத்தொலை})$$

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y \ (p\text{இன் } y \text{ ஆயத்தொலை})$$

எனவே, ஓரலகு வட்டத்தில் ஏதேனுமொரு புள்ளி $P(x, y)$ இன் ஆயத்தொலைவுகள் $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ஆகும். இவ்வகையில் கோண அளவை θ-ஆனது ஓரலகு வட்டத்தின் மீது உள்ள புள்ளியுடன் தொடர்புடையது.

மேலே உள்ள விளக்கத்தைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு காற்பகுதிக்கோணங்களில் முக்கோணவியல் சார்புகளின் மதிப்புகள் தீர்மானிக்கப்படுகிறது என்பதை பின்வரும் அட்டவணை விளக்குகிறது.

காற்பகுதிக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் சார்புகளின் மிகச் சரியான மதிப்பு

காற் பகுதி கோணங்கள்	ஓரலகு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி $P(x,y) = P(\cos\theta,\ \sin\theta)$	கொசைன் மதிப்பு $\cos\theta$	சைன் மதிப்பு $\sin\theta$
$\theta = 0^\circ$	$(1,0) = (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ)$	$\cos 0^\circ = 1$	$\sin 0^\circ = 0$
$\theta = 90^\circ$	$(0,1) = (\cos 90^\circ, \sin 90^\circ)$	$\cos 90^\circ = 0$	$\sin 90^\circ = 1$
$\theta = 180^\circ$	$(-1,0) = (\cos 180^\circ, \sin 180^\circ)$	$\cos 180^\circ = -1$	$\sin 180^\circ = 0$
$\theta = 270^\circ$	$(0,-1) = (\cos 270^\circ, \sin 270^\circ)$	$\cos 270^\circ = 0$	$\sin 270^\circ = -1$
$\theta = 360^\circ$	$(1,0) = (\cos 360^\circ, \sin 360^\circ)$	$\cos 360^\circ = 1$	$\sin 360^\circ = 0$

குறிப்பு: (i) ஓரலகு வட்டத்தின் மீதுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளில் x மற்றும் y-ன் ஆயத்தொலைகள் -1 மற்றும் 1-க்கு இடையே இருக்கும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எனவே θ -ன் மதிப்பு எதுவாகயிருந்தாலும் $-1 \le \cos\theta \le 1, -1 \le \sin\theta \le 1$ ஆகும்.

(ii) $\theta = 360^\circ$ எனில் அது ஒரு முழு வட்டச் சுழற்சியாகும். அப்போது முனையப் பக்கம் மிகை x அச்சோடு இணைந்திருக்கும். எனவே, 0° மற்றும் 360° இல் சைனானது ஒரே மதிப்பைப் பெறும். இதனைப்போன்றே கொசைன் மற்றும் மற்றைய முக்கோணவியல் சார்புகளும் பின்பற்றுகிறது.

(iii) இரண்டு கோணங்களின் வித்தியாசம் 360° அல்லது 2π-இன் முழு எண் மடங்காக இருப்பின் ஒவ்வொரு முக்கோணவியல் சார்பும் இரண்டு கோணங்களில் சம மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

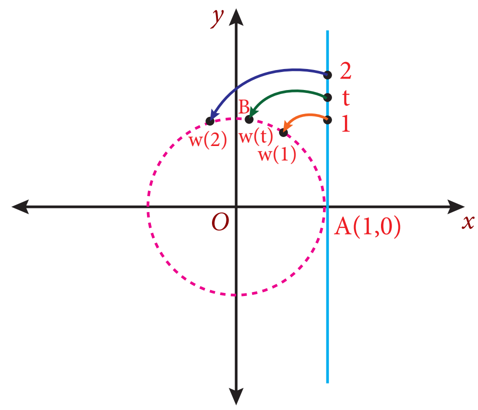
(iv) காற்பகுதிக்கோணத்தின் சைன் மற்றும் கொசைன் மதிப்புகளைக் பயன்படுத்தி வடிவக் கணித ரீதியில் பொதுமைப்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

காற் பகுதிக் கோணங்கள்	**நியாயப்படுத்துதல்**	**பொதுமைப்படுத்துதல்**
$\sin 0 = 0$ $\sin\pi = 0$	$\sin(0 + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\sin(\pi + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$
$\tan 0 = 0$ $\tan\pi = 0$	$\tan(0 + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\tan(\pi + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

(v) $\cos\theta = 0$ எனும்போது $\tan\theta$ஐ வரையறுக்க இயலாது. எனவே, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ என்னும்போது $\tan\theta$ஐ வரையறுக்க இயலாது.

3.4.2 மெய்யெண்களின் முக்கோணவியல் சார்புகள் (Trigonometric functions of real numbers)

நுண்கணிதம் உட்பட உயர் கணிதவியல் கணக்குகள், இயற்பியல் மற்றும் வேதியியல் கணக்குகள் ஆகியவற்றிற்கு முக்கோணவியலைப் பயன்படுத்த விஞ்ஞானிகளுக்கு மெய்யெண்களின் முக்கோணவியல் சார்புகள் தேவைப்பட்டது. இதற்காக ஓரலகு வட்டத்தின் மையக் கோணத்தை வில்லின் நீளத்தோடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டது.



படம் 3.8

ஆதியை மையமாகக்கொண்ட ஓரலகு வட்டத்தைக் கருத்தில் கொள்க. ஓரலகு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி A(1,0) என்பது பூச்சியக் கோணத்தை (ஆரையன் அளவில்) கொண்டது. A(1,0) இல் ஓரலகு வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரைக. t ஒரு மெய்யெண் என்றிருக்கும்படி தொடுகோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் y அச்சுத் தூரம் t என்க.

ஒவ்வொரு மெய்யெண் t இக்கும் ஓரலகு வட்டத்தின் மீது வில் AB இன் நீளம் t என அமையும்படி $B(x, y)$ என்ற புள்ளியைக் காண்க. t ஒரு மிகை எண் எனில் இடஞ்சுழி சுற்றில் $B(x, y)$ ஐ தேர்வு செய்யவேண்டும். இல்லையெனில், வலஞ்சுழி சுற்றுத் திசையில் தேர்வு செய்ய வேண்டும். வில் AB மையத்தில் தாங்கும் கோணம் θ என்க. இம்முறையில் ஓரலகு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிக்கு மெய்யெண் t-வுடன் தொடர்புடைய $w(t)$ என்ற சார்பு பெறப்படுகிறது. இதைப் **போர்த்தும் சார்பு** (Wrapping Function) என்போம். மேலும் $s = r\theta$ எனும் போது வில்லின் நீளம் $t = \theta$ என பெறப்படுகிறது.

இங்கு, $\sin t = \sin\theta$ மற்றும் $\cos t = \cos\theta$ என்றும் வரையறுப்போம்.

$\sin t = \sin\theta = y$ மற்றும் $\cos t = \cos\theta = x$, என்பது தெளிவாகிறது.

மற்ற முக்கோணவியல் சார்புகளை $\sin t$ மற்றும் $\cos t$ ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி மெய்யெண்களின் சார்புகளாக வரையறுக்க முடியும்.

குறிப்பு: (i) $B(x, y) = B(\cos t, \sin t)$ என்ற புள்ளி ஓரலகு வட்டத்தின் மீதுள்ளது. எனவே, ஏதேனுமொரு t-க்கு $-1 \le \cos t \le 1$ மற்றும் $-1 \le \sin t \le 1$.

(ii) ஒரு வட்டத்தை ஒரு கோட்டைக்கொண்டு போர்த்தும் போது கிடைக்கும் சார்பு போர்த்தும் சார்பு $w(t)$ (Wrapping function) ஆகும்.

(iii) மெய்யெண் t-ஆல் ஆன முக்கோணவியல் சார்பின் மதிப்பு கோண t ஆரையன்களிடத்து முக்கோணவியல் சார்பின் மதிப்பாகும்.

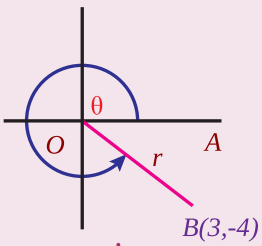
(iv) சீரான இடைவெளியில் இயங்கும் அலைவு மற்றும் அலைகளின் மாதிரி நிகழ்வுகளைப் பற்றி படிப்பதற்கு மெய்யெண்களின் முக்கோணவியல் சார்புகள் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.8 திட்டநிலையில் உள்ள θ-ன் முனையப் பக்கம் $(3, -4)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனில் θ-ன் ஆறு முக்கோணவியல் சார்பின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$B(x, y) = B(3, -4) \text{ என்க.}$$

திட்ட நிலையில் θ கோணத்தின் ஆரம்பப் பக்கம் OA எனவும் முனையப் பக்கம் OB எனவும் கொள்க. $\angle AOB = \theta$ மேலும் முனையம் நான்காவது காற்பகுதியில் இருக்கும்.



படம் 3.9

$$OB = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

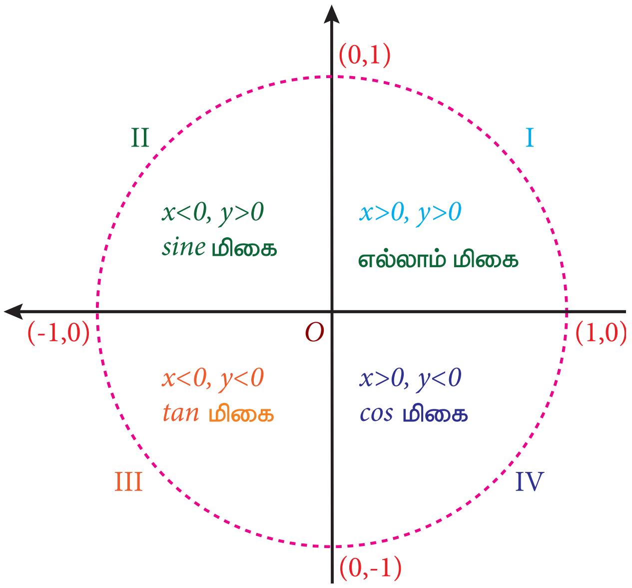
$x = 3, y = -4$ மற்றும் $r = 5$ எனில்

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5};\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5};\ \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = -\frac{5}{4};\ \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{3};\ \cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

முக்கோணவியல் சார்புகளின் குறியீடுகள் (Signs of Trigonometric functions)

மையம் ஆதியில் உள்ளவாறு ஓரலகு வட்டத்தை கருதுவோம். திட்டநிலையில் θ-வை கொள்க, கோணம் θ-க்கு ஒத்ததாக $P(x, y)$ ஓரலகு வட்டத்தின்மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனில் $\cos\theta = x, \sin\theta = y$ மற்றும் $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ஆகும். P-எக் காற்பகுதியில் இருக்கிறதோ அதைப்பொறுத்து x மற்றும் y-ன் மதிப்புகள் மிகை அல்லது குறையாக இருக்கும்.



படம் 3.10

முதல் காற்பகுதியில்

$$\cos\theta = x > 0 \text{ (மிகை)}$$

$$\sin\theta = y > 0 \text{ (மிகை)}$$

எனவே, $\sin\theta$, $\cos\theta$ மற்றும் அனைத்து முக்கோணவியல் சார்புகளும் முதல் காற்பகுதியில் மிகை மதிப்புடையவை.

இரண்டாம் காற்பகுதியில்

$$\cos\theta = x < 0 \text{ (குறை)}$$

$$\sin\theta = y > 0 \text{ (மிகை)}$$

இவ்வாறாக $\sin\theta$ மற்றும் $\operatorname{cosec}\theta$ ஆகியவை மிகை மதிப்புடையது மற்றைய சார்புகள் குறை மதிப்புடையது.

இதேபோல் மற்றைய காற்பகுதிகளில் முக்கோணவியல் சார்புகளின் குறீயீடுகளை நாம் கண்டறியலாம் என்பதை படம் 3.10 இல் காணலாம்.

குறிப்பு: வெவ்வேறு காற்பகுதியில் முக்கோணவியல் சார்புகளின் குறியீடுகளை கீழ்க்கண்டவாறு நினைவில் கொள்ளலாம்

"All Students Take Chocolate" (ASTC).

எடுத்துக்காட்டு 3.9 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ மற்றும் θ இரண்டாம் காற்பகுதியில் அமைந்தால் மற்ற ஐந்து முக்கோணவியல் சார்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

எனவே, $$\cos\theta = \frac{-4}{5}$$

ஏனெனில், இரண்டாம் காற்பகுதியில் $\cos\theta$ ஒரு குறை மதிப்புடையது.

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sec\theta = -\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = -\frac{4}{3}$$

குறிப்பு: $\sin\theta$ மற்றும் $\cos\theta$ ஆகியவை தெரியும் எனில், தலைகீழ் முற்றொருமை மற்றும் வகுத்தல் முற்றொருமைகளை பயன்படுத்தி மற்றைய நான்கு சார்புகளின் முக்கோணவியல் மதிப்புகளைக் காணலாம். ஒரு முக்கோணவியல் சார்பின் மதிப்பும் மற்றும் கோணம் அமையும் காற்பகுதியும் தெரிந்தால் பித்தாகரஸ் முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி மற்றைய சார்புகளின் முக்கோணவியல் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

3.4.3. தொடர்புடைய கோணங்கள் (Allied Angles)

இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசம் $\frac{\pi}{2}$ ஆரையன்கள் மடங்காக இருப்பின் அவை **தொடர்புடைய கோணங்கள்** எனப்படும். $\theta,\ -\theta,\ \frac{\pi}{2}\pm\theta,\ \pi\pm\theta,\ \frac{3\pi}{2}\pm\theta,\ \cdots$ ஆகியவற்றில் எந்த இரு θ கோணங்களும் தொடர்புடைய கோணங்களாகும்.

θ மற்றும் $-\theta$ ஆகிய தொடர்புடைய கோணங்களைக் கொண்ட முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்போம்.

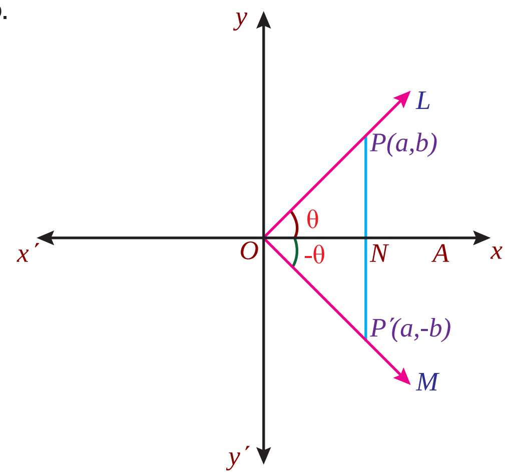
θ வின் வாயிலாக $(-\theta)$ இன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்
(Trigonometric ratio of $(-\theta)$ in terms of θ)

$\angle AOL = \theta$ மற்றும் $\angle AOM = -\theta$ என்க. OL மீது உள்ள புள்ளி $P(a, b)$ என்க.

$OP = OP'$ என்றமையும்படி OM மீது P' எடுத்துக்கொள்க.

OA-க்கு செங்குத்தாக PN-ஐ வரையவும் அது OM ஐ P'-ல் சந்திக்கட்டும்.

$\angle AOP = \angle AOP'$ மற்றும் $\angle PON = \angle P'ON$



படம் 3.11

ΔPON மற்றும் $\Delta P'ON$ ஆகியவை சர்வசமமுடையதாகும்.

எனவே, PN = $P'N$ மற்றும் P'-ன் கூறுகள் $P'(a, -b)$ என ஆகும்.

முக்கோணவியல் சார்புகளின் வரையறைப்படி

$$\sin\theta = \frac{b}{OP}, \quad \cos\theta = \frac{a}{OP}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

எனவே, $\sin(-\theta) = -\frac{b}{OP'} = -\frac{b}{OP} = -\sin\theta$

மற்றும் $\cos(-\theta) = \frac{a}{OP'} = \frac{a}{OP} = \cos\theta$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta, \quad \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta, \quad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

ஆகியவற்றை எளிதில் பெறலாம்.

குறிப்பு: (i) x-அச்சைப் பொறுத்து ஓரலகு வட்டமானது சமச்சீர் என்பதிலிருந்து $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ மற்றும் $\cos(-\theta) = \cos\theta$ என்பதைப் பெறலாம். θ ஐப் போன்றே $-\theta$ இருப்பினும் அது x அச்சின் மற்றொரு பக்கத்தில் அமைந்துள்ளது. சமச்சீர் முறையில் புள்ளி (x, y) ஐ x அச்சைப் பொருத்து பிரதிபலிக்கும்போது $(x, -y)$ கிடைக்கிறது. இங்கு y அச்சுத் தூரம் ஒரு குறை எண்ணாகிறது என்பதால் சைன் ஒரு குறை எண்ணாகும். ஆனால் x அச்சுத் தூரத்தில் மாற்றம் இல்லை என்பதால் கொசைனில் மாற்றம் இல்லை.

(ii) குறை கோண முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி முக்கோணவியல் சார்புகள் ஒற்றைச் சார்புகளா அல்லது இரட்டைச் சார்புகளா என்பதை தீர்மானிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10 மதிப்பைக் காண்க : (i) sin (– 45°) (ii) cos (– 45°) (iii) cot (– 45°)

தீர்வு:

(i) $\sin(-45°) = -\sin(45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\cot(-45°) = -1$

முந்தைய வகுப்பில் $(90° - \theta)$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ என்ற கோணத்தின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை பற்றி அறிந்துள்ளோம். இவ்வாறான முக்கோணவியல் விகிதங்களை கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

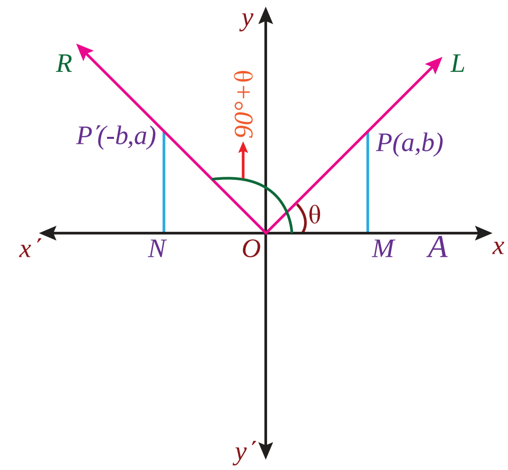
$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta, \quad \cos(90° - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90° - \theta) = \cot\theta, \quad \operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$$

$$\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta, \quad \cot(90° - \theta) = \tan\theta$$

மேற்கண்டுள்ள முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கு, $(90° + \theta)$ என்ற கோணத்திற்கு தற்போது வரையறுப்போம்.

$(90^\circ + \theta),\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ அமைப்பிலுள்ள கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Trigonometric ratios of an angle of the form $(90^\circ + \theta),\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ in terms of θ).



படம் 3.12

$\angle AOL = \theta$ மற்றும் $\angle AOR = (90^\circ + \theta)$ என்க. இங்கு $P\ (a,\ b)$ என்பது OL மீது இருக்கும் ஒரு புள்ளி மற்றும் P' என்னும் ஒரு புள்ளியானது, $OP = OP'$ ஆக இருக்கும்படி OR இன் மீது தேர்வு செய்க.

Ox மற்றும் Ox' மீது P மற்றும் P' இலிருந்து, PM மற்றும் $P'N$ ஆகிய செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

இங்கு, $\angle AOP' = 90^\circ + \theta$

தெளிவாக, ΔOPM மற்றும் $\Delta P'ON$ ஆகியவை சர்வசமமுடையதாகும்.

$$ON = MP \text{ மற்றும் } NP' = OM.$$

எனவே, P மற்றும் P' இன் ஆயத் தொலைகள் முறையே $P\ (a,\ b)$ மற்றும் $P'\ (-\,b,\ a)$ ஆகும்.

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{P' \text{ இன் } y\text{-ஆயத்தொலை}}{OP'} = \frac{a}{OP} = \cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{P' \text{ இன் } x\text{-ஆயத்தொலை}}{OP'} = \frac{-\,b}{OP} = -\sin\theta,$$

எனவே, $$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta, \quad \operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta,$$

$$\sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta, \quad \cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$$

$\pi \pm \theta,\ \frac{3\pi}{2} \pm \theta,\ 2\pi \pm \theta$ ஆகிய தொடர்புடைய கோணங்களின் முக்கோணவியல் சார்புகளை இதே முறையில் கண்டறியலாம்.

மேற்கண்ட முடிவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் தொகுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

	$-\theta$	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\frac{\pi}{2} + \theta$	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$\frac{3\pi}{2} - \theta$	$\frac{3\pi}{2} + \theta$	$2\pi - \theta$	$2\pi + \theta$
sine	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cosine	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tangent	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$

குறிப்பு: (i) மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து ஒத்த தலைகீழ் விகிதங்களை எழுதலாம்.

(ii) $2n\frac{\pi}{2} \pm \theta,\ n \in \mathbb{Z}$ என்ற அமைப்பிலுள்ள தொடர்புடைய கோணங்கள் அதாவது $\pm\ \theta, \pi \pm \theta, 2\pi \pm \theta$ ஆகியவைகளுக்கு முக்கோணவியல் விகிதம் மாறாது. (சைன் மாறாமல் சைன் ஆகவும், கொசைன் மாறாமல் கொசைன் இருக்கும், . . .)

(iii) $(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta,\ n \in \mathbb{Z}$ என்ற அமைப்பில் உள்ள தொடர்புடைய கோணங்கள் அதாவது $\frac{\pi}{2} \pm \theta,\ \frac{3\pi}{2} \pm \theta$ ஆகியவைகளுக்கு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் அவற்றின் நிரப்பி விகிதங்களாக மாறும். 'co' இல்லாதவைகளுக்கு சேர்த்தும் அது இருப்பின் அதை விலக்கியும் எழுத வேண்டும் (சைனை கொசைனாகவும், கொசைனை சைனாகவும் மாற்ற வேண்டும்).

(iv) விகிதத்தின் குறியீடுகளைக் கண்டறியக் கோணம் அமையும் காற்பகுதிகளை முதலில் கண்டறியவேண்டும். பின்பு காற்பகுதி விதியான **"ASTC"** விதியின்படி குறியீடுகளை (+ அல்லது – ஐ) இணைக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.11 மதிப்புகளைக் காண்க (i) $\sin 150^\circ$ (ii) $\cos 135^\circ$ (iii) $\tan 120^\circ$.

தீர்வு:

(i) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

(அல்லது) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$

(ii) $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(அல்லது) $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$

(அல்லது) $\tan 120^\circ$ ஐ $\tan(90^\circ + 30^\circ)$ என எழுதி மதிப்பைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 3.12 மதிப்பு காண்க (i) $\sin(765^\circ)$ (ii) $\operatorname{cosec}(-1410^\circ)$ (iii) $\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$.

தீர்வு:

(i) $\sin 765^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\operatorname{cosec}(-1410^\circ) = -\operatorname{cosec}(1410^\circ) = -\operatorname{cosec}(4 \times 360^\circ - 30^\circ)$

$= \operatorname{cosec}30^\circ = 2$

(iii) $\cot\left(\frac{-15\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{15\pi}{4}\right) = -\cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1.$

எடுத்துக்காட்டு 3.13 நிறுவுக $\tan(315^\circ)\cot(-405^\circ) + \cot(495^\circ)\tan(-585^\circ) = 2.$

தீர்வு:

இடப்பக்கம் $= \tan(360^\circ - 45^\circ)[-\cot(360^\circ + 45^\circ)] + \cot(360^\circ + 135^\circ)[-\tan(360^\circ + 225^\circ)]$

$= [-\tan 45^\circ][-\cot 45^\circ] + [-\tan 45^\circ][-\tan 45^\circ]$

$= (-1)(-1) + (-1)(-1) = 2.$

3.4.4 முக்கோணவியல் சார்புகளின் சில குணாதிசயங்கள் (Some characteristics of Trigonometric functions)

முக்கோணவியல் சார்புகள் சில அருமையான குணாதிசயங்களைப் பெற்றிருக்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக,

(i) சைன் மற்றும் கொசைன் சார்புகள் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்பிகள் ஆகும். அதாவது $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ மற்றும் $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$.

(ii) ஓரலகு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் கூறுகளாக $\cos\theta$ மற்றும் $\sin\theta$ ஆகியவை பெறப்படுகின்றன, அவை $-1 \le \cos\theta \le 1$ மற்றும் $-1 \le \sin\theta \le 1$ என்ற சமனிலியை பூர்த்தி செய்கின்றன. எனவே, $\cos\theta,\ \sin\theta \in [-1, 1]$.

(iii) ஒரு சீரான இடைவெளியில் முக்கோணவியல் சார்புகள் அதன் மதிப்பை மீண்டும் மீண்டும் பெறுகின்றது.

(iv) சைன் மற்றும் கொசைன் சார்புகள் $\cos(-\theta) = \cos\theta$ மற்றும் $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ என்ற வியக்கத்தக்க பண்புகளை பெற்றிருக்கும்.

இறுதியில் உள்ள இரு பண்புகளை ஆராய்வோம்.

முக்கோணவியல் சார்புகளின் காலமுறைப் பண்புகள் (Periodicity of Trigonometric functions)

ஒரு சிறிய மிகை p-க்கு, சார்பு f ஆனது சார்பகத்தில் உள்ள அனைத்து x-ற்கும், $f(x+p) = f(x)$ என்றவாறு இருந்தால் அச்சார்பு p காலம் உடைய **திரும்பு அல்லது காலவட்டச் சார்பு** என்பது நமக்கு தெரியும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x,\ n \in \mathbb{Z}$$ என்பது நமக்குத் தெரியும்,

அதாவது $\sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin(x + 6\pi) = \cdots = \sin x.$

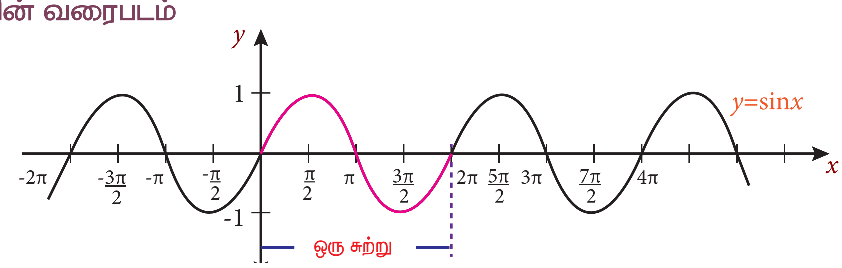
எனவே $\sin x$ 2π காலம் கொண்ட காலவட்டச் சார்பு 2π ஆகும்.

இதேபோல் 2π காலம் கொண்ட காலவட்டச் சார்புகள் $\cos x,\ \operatorname{cosec} x$ மற்றும் $\sec x$ ஆகும்.

ஆனால் π காலம் கொண்ட காலவட்டச் சார்புகள் $\tan x$ மற்றும் $\cot x$ ஆகும்.

$\sin x$ மற்றும் $\cos x$ ஆகியவற்றின் காலமுறைப் பண்பை அதன் வரைபடங்களைக் கொண்டு எளிதில் காணலாம்.

(i) சைன் சார்பின் வரைபடம்

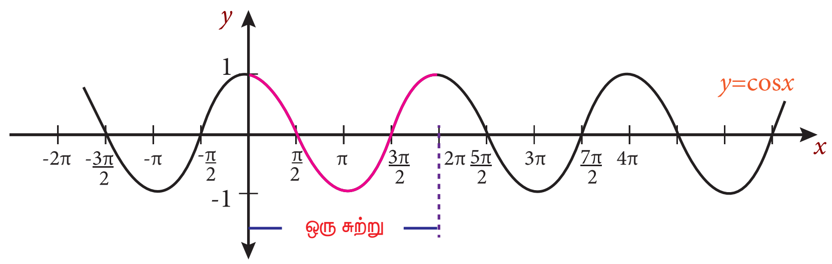


படம் 3.13 : $y = \sin x$

கோணத்தைக் குறிக்கும் மாறியை x என்க. கிடைமட்ட அச்சை x–அச்சாகவும், நேர்குத்து அச்சை y-அச்சாகவும் கொள்க. $y = \sin x$ என்ற சார்பின் வரைபடம் படம் 3.13 ஆகும். முதலாவதாக, 2π இடைவெளி கொண்ட காலமுறைச் சீரமைப்பைக் காணலாம். வடிவகணித ரீதியில் இதன்

பொருள் என்னவென்றால் படத்திலுள்ள வளைவரையை 2π அளவு இடப்பக்கமாகவோ அல்லது வலப்பக்கமாகவோ நகர்த்தினால் மீண்டும் அதே வளைவரை மீது சரியாகப் பொருந்தும். இரண்டாவதாக, வரைபடம் y அச்சில் ஓரலகிற்குள் மட்டும் இருப்பதைக் கவனிக்கவும். வரைபடம் சீர் இடைவெளியில் கூடும் மற்றும் குறையும் சார்பாக உள்ளது. அதாவது $-\frac{\pi}{2}$ லிருந்து $\frac{\pi}{2}$ வரை கூடும் சார்பாகவும், $\frac{\pi}{2}$ லிருந்து $\frac{3\pi}{2}$ வரை குறையும் சார்பாகவும் உள்ளது.

(ii) கொசைன் சார்பின் வரைபடம்



படம் 3.14 : $y = \cos x$

வரைபடம் $y = \cos x$ ஆனது $y = \sin x$ வரைபடத்தைப் போன்றுள்ளது என்பதைக் கவனிக்கலாம். சைன் சார்பின் வரைபடத்தை இடப்புறமாக $\frac{\pi}{2}$ அளவு நகர்த்தும்போது கொசைன் சார்பின் வரைபடம் கிடைக்கிறது. இதற்குக் காரணம் $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ என்ற முற்றொருமை ஆகும். $\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ என்பதை வரைபடத்தில் எளிதாகக் காணலாம்.

குறிப்பு: (i) சைன் மற்றும் கொசைன் சார்புகள் காலமுறை பண்பைப் பெற்றிருப்பதால் அவைகள் பெரிதும் பயன்படக் காரணமாகிறது. நம்மைச் சுற்றி நடக்கும் பல நிகழ்வுகள் காலமுறை பண்புடையவை. எடுத்துக்காட்டாக, சூரிய உதயம் மற்றும் மறைதல், சுருளின் (Spring) மேல் மற்றும் கீழ்நோக்கி இயக்கம், கடல் அலைகள் ஆகியவை சம இடைவெளியில் (நேரத்தில்) மீண்டும் மீண்டும் நிகழ்தல், அனைத்துக் காலமுறை நிகழ்வுகளையும் சைன் மற்றும் கொசைன் சார்புகளை இணைத்துப் புரிந்துகொள்ளமுடியும்.

(ii) அறிவியல் முழுவதும் சீரான இடைவெளியில் நடக்கும் அலைவுகள், அலைகள் மற்றும் பிற இயல்பான நிகழ்வுகளுக்குக் காலமுறைச் சார்புகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

ஒற்றை மற்றும் இரட்டை முக்கோணவியல் சார்புகள் (Odd and even trigonometric functions)

ஒற்றை மற்றும் இரட்டைச் சார்புகள் சில சமச்சீர் பண்புகளை நிறைவுப்படுத்துகிறது. x இன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்பிற்கும் $f(-x) = f(x)$ எனில், $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு மேலும் x இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $f(-x) = -f(x)$ எனில் $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு. பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லாத இரட்டை மற்றும் ஒற்றைச் சார்புகளுக்கு முக்கோணவியல் சார்புகள் ஒரு சிறந்த எடுத்துக்காட்டாகும்.

x இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $\cos(-x) = \cos x$ எனவே $\cos x$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு ஆகும்.

x இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $\sin(-x) = -\sin x$ எனவே $\sin(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

அதேபோல் sec x ஓர் இரட்டைச் சார்பு ஆகும். அதேபோல் tan x, cosec x மற்றும் cot x ஆகியவை ஒற்றைச் சார்புகளாகும். $f(t) = t - \cos t$ என்பது இரட்டைச் சார்பும் அல்ல, ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல (ஏன்?)

எடுத்துக்காட்டு 3.14 பின்வரும் சார்புகளை ஒற்றைச்சார்பு, இரட்டைச்சார்பு மற்றும் இரண்டும் இல்லை என வகைப்படுத்துக.

(i) $\sin^2 x - 2\cos^2 x - \cos x$ (ii) $\sin(\cos(x))$ (iii) $\cos(\sin(x))$ (iv) $\sin x + \cos x$

தீர்வு:

(i) $f(x) = \sin^2 x - 2\cos^2 x - \cos x$ என்க,

$f(-x) = f(x)$ [ஏனெனில், $\sin(-x) = -\sin x$ மற்றும் $\cos(-x) = \cos x$]

எனவே, $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு.

(ii) $f(x) = \sin(\cos(x))$ என்க,

$f(-x) = f(x)$, $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு.

(iii) $f(x) = \cos(\sin(x))$, $f(-x) = f(x)$, எனவே, $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு.

(iv) $f(x) = \sin x + \cos x$

$f(-x) \neq f(x)$ மற்றும் $f(-x) \neq -f(x)$

எனவே, $f(x) = \sin x + \cos x$ என்பது இரட்டைச் சார்பும் அல்ல, ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல.

குறிப்பு: (i) பொதுவாக ஒரு சார்பின் வரைபடத்தில் y-அச்சை பிரதிப்பலிப்பதில் மாறாமல் இருந்தால் அச்சார்பு இரட்டைச்சார்பாகும். ஆதியைப் பொறுத்து மாறாமல் வரைபடம் சமச்சீராக இருந்தால் அது ஒற்றைப்படை சார்பாகும்.

(ii) முக்கோணவியல் சார்புகளைப் பகுப்பாய்வு செய்வதற்குக் குறிப்பாகக் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் சூத்திரத்தில், ஒற்றை மற்றும் இரட்டைச் சார்புகளின் பண்புகள் பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

(iii) சில வரையறுக்கப்பட்ட தொகையிடலை மதிப்பீடு செய்வதற்கு இரட்டை மற்றும் ஒற்றைச் சார்புகளின் பண்புகள் பயனுள்ளதாக இருக்கும். இதை நாம் நுண்கணிதத்தில் பார்ப்போம்.

பயிற்சி 3.3

1. மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin(480°)$ (ii) $\sin(-1110°)$ (iii) $\cos(300°)$ (iv) $\tan(1050°)$

(v) $\cot(660°)$ (vi) $\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ (vii) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

2. திட்டநிலையில் உள்ள θ-ன் முனையப் பக்கம் $\left(\frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ என்ற புள்ளி செல்கிறது எனில் θ-ன் ஆறு முக்கோணவியல் சார்பின் மதிப்புகளைக் காண்க.

3. பின்வரும் சார்பின் மதிப்பிற்கு மற்ற ஐந்து முக்கோணவியல் சார்புகளைக் காண்க.

   (i) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, θ மூன்றாம் காற்பகுதியில் உள்ளது.

   (ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$, θ முதல் காற்பகுதியில் உள்ளது.

   (iii) $\sin\theta = -\frac{2}{3}$, θ நான்காம் காற்பகுதியில் உள்ளது.

   (iv) $\tan\theta = -2$, θ இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ளது.

   (v) $\sec\theta = \frac{13}{5}$, θ நான்காம் காற்பகுதியில் உள்ளது.

4. நிருபிக்க : $\frac{\cot(180^\circ+\theta)\sin(90^\circ-\theta)\cos(-\theta)}{\sin(270^\circ+\theta)\tan(-\theta)\operatorname{cosec}(360^\circ+\theta)} = \cos^2\theta\cot\theta$.

5. $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் 0° இக்கும் 360° இக்கும் இடைப்பட்ட அனைத்துக் கோணங்களைக் காண்க.

6. $\sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{7\pi}{18} + \sin^2\frac{4\pi}{9} = 2$ எனக் காண்பி.

3.5 முக்கோணங்களின் முற்றொருமைகள் (Trigonometric Identities)

3.5.1 கூட்டுக்கோணங்களின் சூத்திரங்கள் அல்லது கூட்டல் அல்லது கழித்தல் முற்றொருமைகள் (Sum and difference identities or compound angles formulas)

கூட்டுக்கோணங்கள் என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட கோணங்களின் கூடுதல் ஆகும். $f(x+y) = f(x) + f(y)$ மற்றும் $f(kx) = kf(x)$, (k என்பது ஒரு மெய்யெண்) போன்ற சார்புகளின் தொடர்பை முக்கோணவியல் சார்புகள் பூர்த்தி செய்யாது. எடுத்துக்காட்டாக $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$, $\sin(2\alpha) \neq 2\sin\alpha$, $\tan 3\alpha \neq 3\tan\alpha \cdots$ இவ்வாறு $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta), \cdots$ போன்ற சூத்திரங்களைக் தருவிப்பது அவசியம் மற்றும் அதைப் பயன்பாட்டு கணக்குகளில் கணக்கிடுவதற்கு பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

செவிப்பறையில் அழுத்தத்தை உருவாக்கும் அதிர்வுகளால் இசையானது உருவாகியுள்ளது. இசை ஒலி சைன் வளைக்கோட்டு வரைபடங்கள் மாதிரிகளாக இருக்கலாம் ($y = \sin x$ அல்லது $y = \cos x$ போன்ற வரைபடங்களைப் போன்றது), ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒலிகள் ஒலிக்கும்போது ஏற்படும் விளைவு அழுத்தமானது ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட ஒலிகள் ஏற்படும் அழுத்தத்தின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். இச்சூழலில் முக்கோணவியலின் கூடுதல் மற்றும் கழித்தல் முற்றொருமைகள் முக்கியமாக பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அத்துடன் அலைகளின் பகுப்பாய்வில் முக்கோணவியலின் கூடுதல் மற்றும் கழித்தல் முற்றொருமைகள் பயனுள்ளதாக இருக்கின்றன.

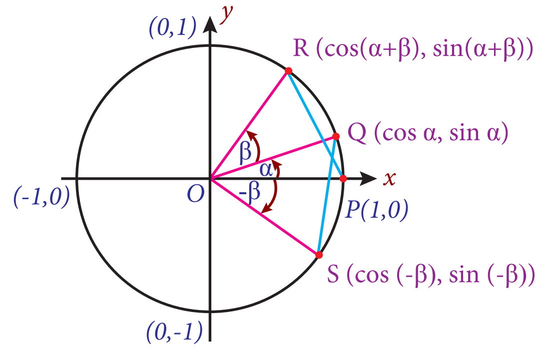
இரண்டு கோணங்களின் கூடுதலின் கொசைன் முற்றொருமையை முதலில் நாம் நிறுவுவோம், மற்றும் இதனை அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கும் நீட்டிப்போம்.

முற்றொருமை 3.1 : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

நிரூபணம் :

O-ஐ மையமாகக் கொண்ட ஓரலகு வட்டத்தைக் கருத்தில் கொள்க. $P = P\ (1,\ 0)$ என்க. $\angle POQ = \alpha, \angle POR = \alpha+\beta$ மற்றும் $\angle POS = -\beta$ என்றமையும்படி Q, R மற்றும் S புள்ளிகளை ஓரலகு

வட்டத்தில் படம் 3.15 இல் காட்டியபடி குறிக்க. $\alpha, \alpha+\beta$ மற்றும் $-\beta$ ஆகியவை திட்டநிலையிலுள்ளன. இப்பொழுது Q, R மற்றும் S ஆகிய புள்ளிகள், $Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $R(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ மற்றும் $S(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ ஆகக் கொடுக்கப் படுகிறது. ΔPOR மற்றும் ΔSOQ ஆகியவை சர்வசமமுடையதாகிறது. எனவே,



படம் 3.15

$PR = SQ$, ஆனது $PR^2 = SQ^2$ ஐக் கொடுக்கிறது.

ஆகவே,

$$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta) = [\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2$$

$$-2\cos(\alpha+\beta)+2 = 2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

எனவே, $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

குறிப்பு: (i) மேற்கண்ட நிரூபணத்தில் $PR = SQ$ கூறுவது என்னவென்றால் ஒரு வட்டத்தின் மீது இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவு அதன் ஆரம் மற்றும் மையக் கோணத்தை கொண்டு தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

(ii) வில்கள் PR மற்றும் SQ ஆகியவை முறையே மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha+(-\beta)$ ஆகும். எனவே $PR=SQ$. எனவே $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ மற்றும் $(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ இக்கு இடைப்பட்ட தூரமும் $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ மற்றும் $(1, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரமும் சமம் ஆகும்.

(iii) மேலே உள்ள வருவித்தலில் $0 \le \alpha < 2\pi,\ 0 \le \beta < 2\pi$ ஆகும். சைன் மற்றும் கொசைன் ஆகியவற்றின் சீர் சுழற்சித் தன்மையால் மேலே வருவித்த முடிவு எந்த ஒரு α மற்றும் β இக்கும் பொருந்தும்.

முற்றொருமை 3.2 : $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

நிரூபணம் :

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ என நமக்குத் தெரியும்,

இங்கு, $\cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha+(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$

எனவே, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

குறிப்பு: (i) மேலே உள்ள முற்றொருமையில் $\alpha = \beta$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$.

(ii) $\alpha = 0$ மற்றும் $\beta = x$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது $\cos(-x) = \cos x$ இது ஒரு இரட்டைச்சார்பு எனக் காட்டுகிறது.

முற்றொருமை 3.3 : $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

நிரூபணம் :

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$$

என எழுதி மற்றும் முற்றொருமை 3.2–ஐ பயன்படுத்தி நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ எனில், மேலே உள்ள முற்றொருமை $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ என மாறும்.

முற்றொருமை 3.4 : $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

நிரூபணம் :

$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)]$ என எழுதி மற்றும் முற்றொருமை 3.3ஐ பயன்படுத்தி நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: சைன் மற்றும் கொசைன் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் சூத்திரத்தை அணி அமைப்பில் எழுதலாம்.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

முற்றொருமை 3.5 : $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

நிரூபணம் :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

முற்றொருமை 3.6 : $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

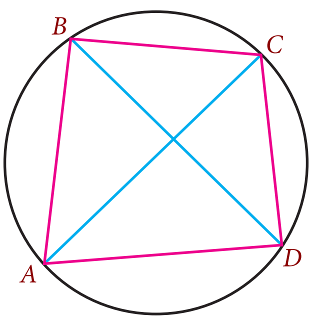
நிரூபணம் :

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan[\alpha+(-\beta)]$$

என எழுதி மற்றும் முற்றொருமை 3.5 ஐ பயன்படுத்தி நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: (i) தால்மி (CE 100-170) அவர்கள் கோணத்தின் நாணை முக்கோணவியல் சார்பாகக் கொண்டு ஒரு தேற்றத்தை நிரூபித்தார். ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் மூலைவிட்டங்களின் பெருக்கல் அதன் எதிர்ப்பக்கங்களின் பெருக்கலின் கூடுதலுக்குச் சமம். $ABCD$ என்ற வட்ட நாற்கரத்தில்

$$(AC)(BD) = (AB)(CD) + (AD)(BC)$$ ஆகும்.



படம் 3.16

இதைப் பயன்படுத்திக் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கலாம். எனவே, இது தால்மியின் கூடுதல் மற்றும் வேறுபாடு சூத்திரம் ஆகும்.

(ii) பொதுவாக, $\cos(\alpha \pm \beta) \neq \cos\alpha \pm \cos\beta$ மற்ற முக்கோணவியல் சார்புகளுக்கும் இது பொருந்தும்.

(iii) $\alpha = \beta$ எனில், $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ இலிருந்து $\sin 0 = 0$ எனக் கிடைக்கும். இது முன்பே கொடுக்கப்பட்ட ஒன்றாகும்.

(iv) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $\beta = \theta$ எனில், $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ இலிருந்து $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ எனக் கிடைக்கும். இது முன்பே நிரூபிக்கப்பட்ட ஒன்றாகும்.

(v) ஒரு கோணத்தை இரண்டு கோணங்களின் கூடுதலாகவோ அல்லது வேறுபாடுகளாகவோ எழுதுவதன் மூலம் சில முக்கோணவியல் சார்புகளின் மதிப்பை நாம் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக tan 75°-ஐ மதிப்பிடுவதற்கு tan (45° + 30°) என்றும் அதுபோல் cos 135°-ஐ cos (180° – 45°) என எழுதி மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15 மதிப்பு காண்க (i) cos 15° (ii) tan 165°.

தீர்வு:

(i)
$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

மேலும், $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ எனக் குறிக்கலாம். (செய்து பார்)

(ii) இங்கு, $\tan 165^\circ = \tan(120^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 120^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 120^\circ \tan 45^\circ}$

ஆனால், $\tan 120^\circ = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$

மற்றும் $\tan 45^\circ = 1$

எனவே, $\tan 165^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

எடுத்துக்காட்டு 3.16 $\sin x = \frac{4}{5}$ (முதல் காற்பகுதியில் உள்ளது) மற்றும் $\cos y = -\frac{12}{13}$ (இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ளது) எனில்,

(i) $\sin(x - y)$ (ii) $\cos(x - y)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

$\sin x = \frac{4}{5}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

கொடுக்கப்பட்ட முதல் காற்பகுதியில் $\cos x$ ஒரு மிகை எண். எனவே, $\cos x = \frac{3}{5}$.

இதேபோல் இரண்டாம் காற்பகுதியில் $\cos y = \frac{-12}{13}$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}.$$

$$= \pm\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

இரண்டாம் காற்பகுதியில் $\sin y$ ஒரு மிகை எண். எனவே, $\sin y = \frac{5}{13}$.

(i) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y = \frac{4}{5}\left(\frac{-12}{13}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65}$.

(ii) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y = \frac{3}{5}\left(\frac{-12}{13}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65}$.

எடுத்துக்காட்டு 3.17 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) = -\sqrt{2}\sin x$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

இடப்பக்கம் $= \cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x - \cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x$

$$= -2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sin x = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin x = -\sqrt{2}\sin x$$

குறிப்பு: $\cos(A+x) - \cos(A-x) = -2\sin A\sin x$

எடுத்துக்காட்டு 3.18 நிறுவுக. $A(9,12)$ என்ற புள்ளி தளத்தில் O ஐப் பொறுத்து இடஞ்சுழியாக 60° கோணத்தில் சுழலும்போது அடையும் புதிய நிலை B என்க, B இன் ஆயத்தொலைவுகளை காண்க.

தீர்வு:

$A(9,\ 12) = A(r\cos\theta,\ \ r\sin\theta)$ இங்கு $r = OA$ என்க.

எனவே, $r\cos\theta = 9$ மற்றும் $r\sin\theta = 12$ ஆகும்.

$$r^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow r = 15$$

எனவே, A என்பது $A(15\cos\theta,\ 15\sin\theta)$

இங்கு, B என்பது $B(15\cos(\theta+60^\circ),\ 15\sin(\theta+60^\circ))$

$$\begin{aligned} 15\cos(\theta+60^\circ) &= 15(\cos\theta\cos 60^\circ - \sin\theta\sin 60^\circ) \\ &= (15\cos\theta)\cos 60^\circ - (15\sin\theta)\sin 60^\circ \\ &= 9\times\frac{1}{2} - 12\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(3-4\sqrt{3}) \end{aligned}$$

அதே போல், $15\sin(\theta+60^\circ) = \frac{3}{2}(4+3\sqrt{3})$

எனவே, B என்பது $B\left(\frac{3}{2}(3-4\sqrt{3}),\ \frac{3}{2}(4+3\sqrt{3})\right)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.19 இரண்டு நீரலைகள் இணைவதை விளக்கும் அலைத்தொட்டி ஒன்று உள்ளது. $h = 8\cos t$ மற்றும் $h = 6\sin t$ இங்கு $t \in [0, 2\pi)$ என இரண்டு அலைகள் உள்ளன. இங்கு நேரம் t விகலைகளிலும், அலையா நீர்மட்டத்திலிருந்து அலையின் உயரம் மில்லி மீட்டரிலும் அளக்கப்படுகிறது என்க. கொடுக்கப்பட்ட இரு அலைகளும் இணையும்போது உருவாகும் அலையின் அதிகபட்ச உயரம் மற்றும் t இன் மதிப்பையும் காண்க.

தீர்வு:

t நேரத்தில் விளைவு அலையின் உயரம் H எனக் கொள்க.

$$\begin{aligned} H &= 8\cos t + 6\sin t \\ 8\cos t + 6\sin t &= k\cos(t - \alpha) \\ &= k(\cos t\cos\alpha + \sin t\sin\alpha) \end{aligned}$$

இங்கு, $k = 10$ மற்றும் $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$

எனவே, $H = 10\cos(t - \alpha)$

H-ன் மீப்பெரும் உயரம் = 10 மிமீ

$t = \alpha$ எனும்போது மீப்பெரும் மதிப்பையடைகிறது. இங்கு $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$.

எடுத்துக்காட்டு 3.20 விரிவாக்குக. (i) $\sin(A + B + C)$ (ii) $\tan(A + B + C)$.

தீர்வு:

(i) $$\begin{aligned} \sin(A + B + C) &= \sin[A + (B + C)] \\ &= \sin A\cos(B + C) + \cos A\sin(B + C) \\ &= \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C - \sin A\sin B\sin C \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} \tan(A + B + C) &= \tan[A + (B + C)] \\ &= \frac{\tan A + \tan(B + C)}{1 - \tan A\tan(B + C)} = \frac{\tan A + \dfrac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C}}{1 - \tan A\dfrac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C}} \\ &= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A} \end{aligned}$$

குறிப்பு: (i) $A + B + C = 0$ அல்லது π எனில், $\tan(A + B + C) = 0$ மேலும் $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

இம்முடிவு விரிகோண முக்கோணத்திற்கும் பொருந்தும்.

(ii) $\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y)\tan(y - z)\tan(z - x)$

(iii) $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A + \tan(-2A) + \tan(-A) = \tan 3A\tan 2A\tan A$

(iv) $A + B + C = \dfrac{\pi}{2}$ எனில் $\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A = 1$ (எப்படி?)

பயிற்சி 3.4

1. $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $\sin x = \frac{15}{17}$ மற்றும் $\cos y = \frac{12}{13}$, எனில்

   (i) $\sin(x+y)$ (ii) $\cos(x-y)$ (iii) $\tan(x+y)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

2. $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$, $\sin A = \frac{3}{5}$ மற்றும் $\cos B = \frac{9}{41}$ எனில்

   (i) $\sin(A+B)$ (ii) $\cos(A-B)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

3. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ மற்றும் $\sin y = -\frac{24}{25}$, $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ எனில் $\cos(x-y)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

4. $\sin x = \frac{8}{17}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $\cos y = -\frac{24}{25}$, $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ எனில் $\sin(x-y)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

5. (i) $\cos 105^\circ$ (ii) $\sin 105^\circ$ (iii) $\tan\frac{7\pi}{12}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

6. நிறுவுக: (i) $\cos(30^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{2}$ (ii) $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$

   (iii) $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$

7. $\sin 15^\circ$ மற்றும் $\cos 15^\circ$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. $\cos(A+B+C)$ ஐ விரிவாக்கு. இங்கு $A+B+C = \frac{\pi}{2}$ எனில்,
   $\cos A \cos B \cos C = \sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B$ என நிறுவுக.

9. நிறுவுக (i) $\sin(45^\circ+\theta) - \sin(45^\circ-\theta) = \sqrt{2}\sin\theta$

   (ii) $\sin(30^\circ+\theta) + \cos(60^\circ+\theta) = \cos\theta$

10. $a\cos(x+y) = b\cos(x-y)$ எனில் $(a+b)\tan x = (a-b)\cot y$ எனக் காண்பி.

11. நிறுவுக. $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ$

12. நிறுவுக. $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

13. நிறுவுக. $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = 4$

14. நிறுவுக. $\cos(A+B)\cos C - \cos(B+C)\cos A = \sin B\sin(C-A)$

15. நிறுவுக. $\sin(n+1)\theta\sin(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta\cos(n-1)\theta = \cos 2\theta,\ n\in\mathbb{Z}$.

16. $x\cos\theta = y\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) = z\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$ எனில் $xy+yz+zx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

17. நிறுவுக. (i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

    (ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

    (iii) $\sin^2(A+B) - \sin^2(A-B) = \sin 2A\sin 2B$

    (iv) $\cos 8\theta\cos 2\theta = \cos^2 5\theta - \sin^2 3\theta$

18. $\cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A\cos B\cos(A+B) = \sin^2(A+B)$ எனக் காண்பி.

19. $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{3}{2}$ எனில்
$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ எனக் காண்பி.

20. (i) $\tan(45^\circ+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$ (ii) $\tan(45^\circ-A)=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$ எனக் காண்பி.

21. நிறுவுக. $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$

22. $\tan x=\frac{n}{n+1}$ மற்றும் $\tan y=\frac{1}{2n+1}$ எனில், $\tan(x+y)$ ஐக் காண்க.

23. நிறுவுக. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)=-1$

24. $\cot\alpha=\frac{1}{2},\ \alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ மற்றும் $\sec\beta=-\frac{5}{3},\ \beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ எனில் $\tan(\alpha+\beta)$-இன் மதிப்பைக் காண்க.

25. $\theta+\phi=\alpha$ மற்றும் $\tan\theta=k\tan\phi$ எனில், $\sin(\theta-\phi)=\frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ என நிறுவுக.

3.5.2 மடங்குக் கோண முற்றொருமைகள் மற்றும் உபமடங்குக் கோண முற்றொருமைகள் (Multiple angle identities and submultiple angle identities)

1831ஆம் ஆண்டு மைக்கேல் பாரடே (Michael Faraday) அவர்கள், ஒரு கம்பியை ஒரு காந்தத்தின் அருகே கொண்டு செல்லும்போது கம்பியில் சிறிதளவு மின்சாரம் உருவாகிறது என்பதைக் கண்டறிந்தார். இந்தப் பண்பு உலகம் முழுவதும் உள்ள வீடுகள், வியாபார நிறுவனங்கள், கல்விக்கூடங்கள், ஆகியவற்றிற்குத் தேவையான மின்சாரம் தயாரிக்கப் பயன்படுகிறது. ஆயிரக்கணக்கான கம்பிகளை மிகப்பெரிய மின்காந்தத்தைச் சுற்றிச் சுழற்றுவதால் மிக அதிகமாக மின்சாரம் தயாரிக்கப்படுகிறது.

மின்னழுத்தம் என்ற அளவை சைன் சார்பாகவும் வரைபடமாகவும் மாற்றலாம். தற்கால மின்சாரவியல் மற்றும் வேறு சில இயல்பான நிகழ்வுகளுக்கு முக்கோணவியல் சார்புகளையும் மற்றும் மடங்குக் கோணம் அல்லது உபமடங்குக் கோண முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

A என்பது ஒரு கோணம் எனில், பிறகு $2A, 3A, \cdots,$ ஆகியவை A–ன் **மடங்கு கோணங்கள்** என்று கூறப்படும் மற்றும் $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \cdots$ ஆகியவை கோணங்கள் A-ன் **உபமடங்கு கோணங்கள்** என்றுகூறப்படும். இப்போது நாம் மடங்கு கோணங்கள் மற்றும் உபமடங்கு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை விவாதிப்போம் மற்றும் சில முற்றொருமைகளை தருவிப்போம்.

இருமடங்குக் கோண முற்றொருமைகள் (Double Angle Identities)

கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் முற்றொருமைகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றிலிருந்து வரக்கூடிய சில விளைவுகளைப் ஆராய்வோம். இருமடங்குக் கோண முற்றொருமைகள் கூட்டல் முற்றொருமையின் சிறப்பு அமைப்பாகும். இரண்டு கோணங்கள் சமம் எனில் கூட்டல் முற்றொருமை இருமடங்கு கோண முற்றொருமையாக மாறும். அவைகள் முக்கோணவியல் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணவும் மற்றும் முற்றொருமைகளை சரிபார்க்கவும் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. இருமடங்குக் கோண முற்றொருமைகள் குறைப்பு முற்றொருமைகள் (அடுக்குக் குறைப்பு முற்றொருமைகள்) வருவிக்கப் பயன்படுகிறது. மேலும் முக்கோணவியல் கோவைகளின் மிகை மற்றும் குறை மதிப்புகளைக் காண இரு மடங்கு கோண முற்றொருமைகள் பயன்படுகிறது.

முற்றொருமை 3.7 : $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

நிரூபணம்

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\alpha = \beta = A$ என எடுத்துக் கொள்க.

எனில், நமக்குக் கிடைப்பது, $\sin(A+A) = \sin A\cos A + \sin A\cos A$

எனவே, $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

குறிப்பு: (i) $y = \sin 2x$ மற்றும் $y = 2\sin x$ ஆகியவை வெவ்வேறானவை. அவைகளின் வரைபடம் வரைந்து வித்தியாசத்தை உணரலாம்.

(ii) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ இன் பயன்பாடு : α எனும் திசைவேகத்தில் கிடைமட்டத்திற்கு u எனும் கோணத்தில் எறியப்பட்ட ஒரு பொருள், தரையிரங்குவதற்கு முன் அது பயணிக்கும் கிடைமட்ட தொலைவை அளவிடும் சூத்திரம் $R = \dfrac{u^2\sin 2\alpha}{g}$.

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ எனும் போது R-ன் மீப்பெரும் மதிப்பு $\dfrac{u^2}{g}$ என்பது நமக்கு தெளிவாகிறது.

(iii) $|\sin A\cos A| = \left|\dfrac{\sin 2A}{2}\right| \le \dfrac{1}{2}$

$A = \dfrac{\pi}{4}$ எனும்போது $\sin A\cos A$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $\dfrac{1}{2}$ ஆகும். எனவே, $-\dfrac{1}{2} \le \sin A\cos A \le \dfrac{1}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 3.21 ஒரு கால்பந்து விளையாட்டு வீரர் விளையாட்டுத்திடல் தரைமட்டத்திலிருந்து கால்பந்தை 80 அடி/விகலை தொடக்கத் திசைவேகத்துடன் உதைக்கிறார், பந்து அடையும் அதிகபட்சக் கிடைமட்டத் தூரத்தையும், பந்து உதைக்கப்பட்டு மேலே எழும்பும் போது கிடைமட்டத்துடன் அது ஏற்படுத்தும் கோணத்தையும் காண்க ($g = 32$ என்க).

தீர்வு:

கிடைமட்டத் தூரம் R காணப் பயன்படும் சூத்திரம்

$$R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{(80\times 80)\sin 2\alpha}{32} = 10\times 20\sin 2\alpha$$

எனவே, அதிகபட்ச உயரம் = 200 அடி ஆகும். $\alpha = 45^\circ$ எனும் கோணத்தில் உதைக்கும்போது பந்து அதிகபட்ச உயரத்தை அடையும்.

முற்றொருமை 3.8 : $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

நிரூபணம்

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ என நமக்கு தெரியும்

$\alpha = \beta = A$ என எடுத்துக்கொள்க

$\cos(A+A) = \cos A\cos A - \sin A\sin A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ எனக் கிடைக்கும்

குறிப்பு: $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ என்ற முற்றொருமையிலிருந்து

$\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1$ மற்றும்

$\cos 2A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$ எனக் கிடைக்கிறது.

முற்றொருமை 3.9 : $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

நிரூபணம்

இங்கு, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\alpha = \beta = A$ என எடுத்துக்கொள்க

$\tan(A + A) = \dfrac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$ என நமக்குக் கிடைக்கும்.

எனவே, $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

முற்றொருமை 3.10 : $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

நிரூபணம்

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ என நமக்குத் தெரியும்

$$= \frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$$

முற்றொருமை 3.11 : $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

நிரூபணம்

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ என நமக்குத் தெரியும்

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

எனவே, $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

அடுக்குக் குறைப்பு முற்றொருமைகள் அல்லது குறைப்பு முற்றொருமைகள் (Power reducing identities or reduction identities)

இருமடங்குக் கோண முற்றொருமையிலிருந்து sine, cosine மற்றும் tangent இக்கான குறைப்பு முற்றொருமைகளைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

பின்வரும் அட்டவணையில் அடுக்குக் குறைப்பு முற்றொருமைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

அடுக்குக் குறைப்பு முற்றொருமைகள்
$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$, $\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$, $\tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

குறிப்பு: (i) அடுக்குக் குறைப்பு முற்றொருமையில் அடுக்கு இரண்டிலிருந்து ஒன்றாகக் குறைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) அடுக்குக்குறைப்பு முற்றொருமைகள் sine மற்றும் cosine ஆகியவற்றின் இரட்டைப்படை அடுக்குகளை, அடுக்கு ஒன்றையுடைய cosine ஆக மாற்றப் பயன்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, அடுக்குக் குறைப்பு முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி, $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$ மற்றும் $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$, என நிரூபிக்கலாம். (முயற்சி செய்!)

(iii) உயர் கணிதத்தில் அடுக்குக் குறைப்பு முற்றொருமைகள் பெரிதும் பயன் படுகின்றன.

மும்மடங்குக் கோண முற்றொருமைகள் (Triple–Angle Identities)

இருமடங்குக்கோண முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி மும்மடங்குக் கோண முற்றொருமைகளைக் காணலாம்.

முற்றொருமை 3.12 : $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

நிரூபணம்

$$\begin{aligned}\sin 3A = \sin(2A + A) &= \sin 2A\cos A + \cos 2A \sin A\\ &= 2\sin A\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A\end{aligned}$$

முற்றொருமை 3.13 : $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

நிரூபணம்

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A + A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A \sin A\\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A\end{aligned}$$

$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A)$$

$$= 4\cos^3 A - 3\cos A$$

முற்றொருமை 3.14 : $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

நிரூபணம்

$$\tan 3A = \tan(2A + A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$$ என நமக்கு தெரியும்

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

இருமடங்கு மற்றும் மும்மடங்குக் கோண முற்றொருமைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

sine	cosine	tangent
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

அரைக்கோண முற்றொருமைகள் (Half–angle Identities)

அரைக்கோண முற்றொருமைகள் இருமடங்குக் கோண முற்றொருமைகளோடு தொடர்புடையவை. சிறப்புக் கோணங்களின் சரிபாதிக் கோணம் தேவைப்படும்போது அரைக்கோண முற்றொருமைகள் பயன்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sin 15^\circ$ ஆனது $\sin 15^\circ = \sin\dfrac{30^\circ}{2}$ எனக் கொண்டு கணக்கிடவேண்டும். மேலும் அரைக்கோண முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி மிகச்சரியான மதிப்புகளைக் காணலாம்.

இருமடங்குக் கோண முற்றொருமைகளில் $2A = \theta$ அல்லது $A = \dfrac{\theta}{2}$ எனப் பிரதியிட $\dfrac{\theta}{2}$ கோணங்களுடைய புதிய முற்றொருமைகள் கிடைக்கும்.

அரைக்கோண முற்றொருமைகளை பின்வரும் அட்டவணையில் காணலாம்.

இருமடங்கு கோணமுற்றொருமைகள்	அரைக்கோண முற்றொருமைகள்
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$	$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$
$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$	$\cos\theta = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}$
$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$	$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$
$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$	$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$	$\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$
$\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$	$\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$
$\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$	$\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

குறிப்பு: (i) வர்க்கப்படுத்தப்பட்ட முக்கோணவியல் சார்புகளை வர்க்கப்படுத்தாத முக்கோணவியல் சார்பாக மாற்றுவதற்கு அரைக்கோண முற்றொருமைகள் அதிகம் பயன்படுகின்றன.

(ii) ஒரு கோணத்தின் cosine மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதன் அரைக்கோணத்தின் sine மற்றும் cosine மதிப்புகளைக் கண்டறிய அரைக்கோண முற்றொருமைகள் பயன்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 3.22 $\sin\left(22\frac{1}{2}^{\circ}\right)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\theta = 45^{\circ}$ என்க.

$$\sin\frac{45^{\circ}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^{\circ}}{2}}$$ என கிடைக்கிறது, ($22\frac{1}{2}^{\circ}$ முதல் காற்பகுதியில் அமைவதால் மிகைக் குறீயீடு என எடுத்துக்கொள்வோம்.)

எனவே, $$\sin 22\frac{1}{2}^{\circ} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.23 $\sin\theta = \frac{12}{13}$, θ முதல் காற்பகுதியில் அமைகிறது எனில், $\sin 2\theta$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்தி $\cos\theta = \frac{5}{13}$, என்பதை எளிதாகக் காணலாம்.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{120}{169}.$$

குறிப்பு: முக்கோணத்தை வடிவமைக்காமல் நாம் $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$ எனும் கொசைன் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி $\cos\theta$ மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.24 நிறுவுக. $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A &= 4\sin A\cos A(\cos^2 A - \sin^2 A) \\ &= 4\sin A\cos A\cos 2A = 2(2\sin A\cos A)\cos 2A \\ &= 2(\sin 2A)\cos 2A = \sin 4A \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.25 நிறுவுக. $\sin x = 2^{10}\sin\left(\frac{x}{2^{10}}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{10}}\right)$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\times 2\times\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2} \\ &= 2^2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2} \end{aligned}$$

அரைக்கோண sine சூத்திரத்தை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்தினால் நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\sin x = 2^{10}\sin\left(\frac{x}{2^{10}}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{10}}\right)$$

குறிப்பு: மேலே உள்ள முடிவானது எந்த முடிவுறு எண்ணிக்கைக்கும் நீட்டிக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.26 நிறுவுக. $\dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos\theta + \cos 2\theta} = \tan\theta$

தீர்வு:

$$\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos\theta + \cos 2\theta} = \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + (1 + \cos 2\theta)} = \frac{\sin\theta(1 + 2\cos\theta)}{\cos\theta(1 + 2\cos\theta)} = \tan\theta$$

எடுத்துக்காட்டு 3.27 நிறுவுக. $1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} &= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} \\ &= 1 - \sin x\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.28 $-\pi \le x \le \pi$ மற்றும் $\cos 2x = \sin x$ எனில் x-இன் மதிப்புகளைக் காண்.

தீர்வு:

$\cos 2x = \sin x$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனில், $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

மேலே உள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\sin x = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = -1$ அல்லது $\dfrac{1}{2}$ ஆகும்.

இங்கு, $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

மேலும், $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

எனவே, $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

எடுத்துக்காட்டு 3.29 மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) sin 18° (ii) cos 18° (iii) sin 72° (iv) cos 36° (v) sin 54°

தீர்வு:

(i) $\theta = 18^\circ$ என்க.

இவ்வாறாக,
$$
\begin{aligned}
5\theta &= 90^\circ \\
3\theta + 2\theta &= 90^\circ \Rightarrow 2\theta = 90^\circ - 3\theta \\
\sin 2\theta &= \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta \\
2\sin\theta\cos\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}
$$

$\cos\theta = \cos 18^\circ \neq 0$ ஆதலால் நமக்கு கிடைப்பது

$$
\begin{aligned}
2\sin\theta &= 4\cos^2\theta - 3 = 4(1-\sin^2\theta) - 3 \\
4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 &= 0 \\
\sin\theta &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}
\end{aligned}
$$

எனவே, $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (மிகைக் குறி எடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஏன்?)

(ii)
$$
\begin{aligned}
\cos 18^\circ &= \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} \\
&= \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

(iii)
$$
\begin{aligned}
\sin 72^\circ &= \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

(iv) $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(v) $\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

குறிப்பு: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$, $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ$ மற்றும் $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$ என கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.30 $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{\phi}{2}$ எனில் $\cos\phi = \frac{\cos\theta - a}{1 - a\cos\theta}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

அரைக்கோண முற்றொருமைகளின்படி நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\cos\phi = \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)-a}{1-a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{\cos\theta-a}{1-a\cos\theta}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.31 $\sqrt{3}\operatorname{cosec}20^\circ - \sec 20^\circ$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\sqrt{3}\operatorname{cosec}20^\circ - \sec 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = 4\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}\right]$$

$$= 4\left[\frac{\sin 60^\circ\cos 20^\circ - \cos 60^\circ\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}\right] = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 3.32 நிறுவுக. $\cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A = \dfrac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}$

தீர்வு:

இடப்பக்கம் $= \cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$

$$= \frac{1}{2\sin A}2\sin A\cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

$$= \frac{1}{2\sin A}\sin 2A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

$$= \frac{1}{2^2\sin A}\sin 4A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

இவ்வாறு, தொடர்ந்து செய்தால் நமக்குக் கிடைப்பது,

$$= \frac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}$$

பயிற்சி 3.5

1. A முதல் காற்பகுதியில் இருக்கும்போது $\cos 2A$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $\cos A = \frac{15}{17}$ (ii) $\sin A = \frac{4}{5}$ (iii) $\tan A = \frac{16}{63}$

2. θ ஒரு குறுங்கோணம் எனில்,

   (i) $\sin\theta = \frac{1}{25}$ எனும்போது $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

   (ii) $\sin\theta = \frac{8}{9}$ எனில் $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

3. $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ எனில் $\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$ எனக் காண்பி.
4. $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ என நிறுவுக
5. $\sin 4\alpha = 4\tan\alpha\frac{1-\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^2}$ என நிறுவுக.
6. $A+B = 45^\circ$ எனில், $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ என நிறுவுக.
7. $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)$ என்பது 4 இன் மடங்கு என நிறுவுக.
8. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 2\tan 2\theta$ என நிறுவுக.
9. $\cot\left(7\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}$ எனக் காண்பி.
10. $(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta) = \tan 2^n\theta\cot\theta$ என நிறுவுக.
11. $32(\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = 3$ என நிறுவுக.

3.5.3 பெருக்கலிலிருந்து கூட்டல் மற்றும் கூட்டலிலிருந்து பெருக்கல் முற்றொருமைகள் (Product to sum and sum to product identities)

முக்கோணவியல் சார்புகளின் சில பயன்பாட்டின்போது முக்கோணவியல் சார்புகளின் பெருக்கலை முக்கோணவியல் சார்புகள் கூட்டல் அல்லது கழித்தலாக எழுத வேண்டிய தேவை ஏற்படுகிறது. சைன் மற்றும் சொசைனின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் முற்றொருமைகள் நடுவில் இருக்கும் குறியைத் தவிர மற்றவைகள் ஒன்றுபோல் இருப்பது ஆச்சரியத்திற்குரியதாகும்.

இப்பண்பு அவற்றை இணைத்துப் புதிய முற்றொருமையை உருவாக்க ஏதுவாக உள்ளது. அதன் மூலம் பெருக்கலைக் கூட்டலாகவும், கூட்டலைப் பெருக்கலாகவும் மாற்றி எழுதக்கூடிய பல முற்றொருமைகள் கிடைக்கிறது.

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \qquad (3.1)$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B \qquad (3.2)$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \qquad (3.3)$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \qquad (3.4)$$

மேலேயுள்ள முற்றொருமைகளிலிருந்து நாம் எளிதாகப் பின்வரும் பெருக்கலிலிருந்து கூடுதல் முற்றொருமைகள் தருவிக்கலாம்.

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)] \qquad (3.5)$$
$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)] \qquad (3.6)$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)] \qquad (3.7)$$
$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)] \qquad (3.8)$$

sine மற்றும் cosine-களின் பெருக்கலைக் கூடுதலாக மாற்றி அமைக்க வேண்டிய அவசியம் தேவைபடும்போது மேற்கண்ட முற்றொருமைகள் அவசியமாகிறது. சில தொகையிடலை மதிப்பிடுவதற்கு இந்த யுக்தி பெரிதும் பயன்படுகிறது.

கூட்டலிலிருந்து பெருக்கல் முற்றொருமைக்கு, $A+B=C$ மற்றும் $A-B=D$ எனப் பிரதியிடலாம் அல்லது மேலும் அதற்குச் சமமான $A=\frac{C+D}{2}, B=\frac{C-D}{2}$ இவற்றை முற்றொருமைகள் (3.5) இலிருந்து (3.8) வரை பிரதியிடவேண்டும். இதன் மூலம் பின் வருமாறு கூட்டலிருந்து பெருக்கலுக்கான முற்றொருமைகள் நமக்கு கிடைக்கின்றன.

$$\sin C+\sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (3.9)$$

$$\sin C-\sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \qquad (3.10)$$

$$\cos C+\cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (3.11)$$

$$\cos C-\cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \qquad (3.12)$$

முற்றொருமை 3.15 : நிறுவுக. $\sin(60^\circ-A)\sin A\sin(60^\circ+A)=\frac{1}{4}\sin 3A$

நிரூபணம்

$$\begin{aligned}\sin(60^\circ-A)\sin A\sin(60^\circ+A) &= \sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)\sin A\\ &= \frac{1}{2}[\cos 2A-\cos 120^\circ]\sin A\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos 2A\sin A+\frac{1}{2}\sin A\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 3A\right]=\frac{1}{4}\sin 3A\end{aligned}$$

இதேபோல் பின்வரும் இரண்டு முக்கியமான முற்றொருமைகளை நாம் நிரூபிக்கலாம்

முற்றொருமை 3.16 : $\cos(60^\circ-A)\cos A\cos(60^\circ+A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

முற்றொருமை 3.17 : $\tan(60^\circ-A)\tan A\tan(60^\circ+A)=\tan 3A$

எடுத்துக்காட்டு 3.33 பின்வருவனவற்றைக் கூட்டல் அல்லது கழித்தலாகக் கூறு.

(i) $\sin 40^\circ\ \cos 30^\circ$ (ii) $\cos 110^\circ\ \sin 55^\circ$ (iii) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

தீர்வு:

(i) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$A=40^\circ$ மற்றும் $B=30^\circ$ என்க.

$$2\sin 40^\circ\cos 30^\circ = \sin(40^\circ+30^\circ)+\sin(40^\circ-30^\circ)=\sin 70^\circ+\sin 10^\circ$$

எனவே, $$\sin 40^\circ\cos 30^\circ = \frac{1}{2}[\sin 70^\circ+\sin 10^\circ]$$

(ii) $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$A = 110^\circ$ மற்றும் $B = 55^\circ$ என்க.

$$2\cos 110^\circ \sin 55^\circ = \sin(110^\circ + 55^\circ) - \sin(110^\circ - 55^\circ)$$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, $$\cos 110^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2}[\sin 165^\circ - \sin 55^\circ]$$

(iii) $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$A = \frac{x}{2}$ மற்றும் $B = \frac{3x}{2}$ என்க

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}\right)$$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}[\sin 2x - \sin x]$

எடுத்துக்காட்டு 3.34 பின் வருவனவற்றை கூட்டல் மற்றும் கழித்தலைப் பெருக்கலாக கூறுக.

(i) $\sin 50^\circ + \sin 20^\circ$ (ii) $\cos 6\theta + \cos 2\theta$ (iii) $\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{9x}{2}$

தீர்வு:

(i) $$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$ என நமக்குத் தெரியும்.

$C = 50^\circ$ மற்றும் $D = 20^\circ$ என்க.

$$\sin 50^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin\frac{50^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ - 20^\circ}{2} = 2\sin 35^\circ \cos 15^\circ$$ எனக் கிடைக்கிறது.

(ii) $$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$ என நமக்குத் தெரியும்.

$C = 6\theta$ மற்றும் $D = 2\theta$ என்க.

$$\cos 6\theta + \cos 2\theta = 2\cos\frac{6\theta + 2\theta}{2}\cos\frac{6\theta - 2\theta}{2} = 2\cos 4\theta\cos 2\theta$$ எனக் கிடைக்கிறது.

(iii) $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$ என நமக்குத் தெரியும்.

$C = \frac{3x}{2}$ மற்றும் $D = \frac{9x}{2}$ என்க.

$$\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{9x}{2} = 2\sin\frac{\frac{3x}{2}+\frac{9x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{9x}{2}-\frac{3x}{2}}{2} = 2\sin 3x\sin\frac{3x}{2}$$ எனக் கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.35 $\sin 34^\circ + \cos 64^\circ - \cos 4^\circ$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\sin 34^\circ + \cos 64^\circ - \cos 4^\circ &= \sin 34^\circ - 2\sin\left(\frac{64^\circ + 4^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{64^\circ - 4^\circ}{2}\right)\\ &= \sin 34^\circ - 2\sin 34^\circ \sin 30^\circ = 0\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.36 நிறுவுக. $\cos 36^\circ \cos 72^\circ \cos 108^\circ \cos 144^\circ = \frac{1}{16}$

தீர்வு:

$$\text{இடப்பக்கம்} = \cos 36^\circ \cos(90^\circ - 18^\circ)\cos(90^\circ + 18^\circ)\cos(180^\circ - 36^\circ)$$
$$= \sin^2 18^\circ \cos^2 36^\circ$$
$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.37 சுருக்குக. $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$

தீர்வு:

$$\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{2\cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}$$
$$= \frac{2\cos 45^\circ \sin 30^\circ}{2\cos 45^\circ \cos 30^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

குறிப்பு: $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ மற்றும் $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$ எனக் கொண்டு தீர்வு காண முயற்சி செய்க.

எடுத்துக்காட்டு 3.38 $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{3}{16}$ எனக் காண்பி.

தீர்வு:

$\cos(60^\circ - A)\cos A\cos(60^\circ + A) = \frac{1}{4}\cos 3A$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \cos 30^\circ[\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ]$$
$$= \cos 30^\circ[\cos(60 - 10^\circ)\cos 10^\circ \cos(60^\circ + 10^\circ)]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4}\cos 30^\circ\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

பயிற்சி 3.6

1. பின்வருவனவற்றைக் கூட்டல் அல்லது கழித்தலாக கூறுக.

   (i) $\sin 35^\circ \cos 28^\circ$ (ii) $\sin 4x \cos 2x$ (iii) $2\sin 10\theta \cos 2\theta$

   (iv) $\cos 5\theta \cos 2\theta$ (v) $\sin 5\theta \sin 4\theta$

2. பின்வருவனவற்றைப் பெருக்கலாக கூறுக.

   (i) $\sin 75^\circ - \sin 35^\circ$ (ii) $\cos 65^\circ + \cos 15^\circ$

   (iii) $\sin 50^\circ + \sin 40^\circ$ (iv) $\cos 35^\circ - \cos 75^\circ$

3. $\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{8}$ எனக் காண்பி.

4. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{128}$ எனக் காண்பி.

5. $\frac{\sin 8x\cos x-\sin 6x\cos 3x}{\cos 2x\cos x-\sin 3x\sin 4x}=\tan 2x$ எனக் காண்பி.

6. $\frac{(\cos\theta-\cos 3\theta)(\sin 8\theta+\sin 2\theta)}{(\sin 5\theta-\sin\theta)(\cos 4\theta-\cos 6\theta)}=1$ எனக் காண்பி.

7. நிறுவுக. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sin 2x(1+2\cos x)$.

8. நிறுவுக. $\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\cos 4x+\cos 2x}=\tan 3x$

9. நிறுவுக. $1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=4\cos x\cos 2x\cos 3x$

10. நிறுவுக. $\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{11\theta}{2}=\sin 2\theta\sin 5\theta$

11. நிறுவுக. $\cos(30^\circ-A)\cos(30^\circ+A)+\cos(45^\circ-A)\cos(45^\circ+A)=\cos 2A+\frac{1}{4}$

12. நிறுவுக. $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}=\tan 4x$

13. நிறுவுக. $\frac{\sin(4A-2B)+\sin(4B-2A)}{\cos(4A-2B)+\cos(4B-2A)}=\tan(A+B)$

14. $\cot(A+15^\circ)-\tan(A-15^\circ)=\frac{4\cos 2A}{1+2\sin 2A}$ எனக் காண்பி.

3.5.4 நிபந்தனைக்குட்பட்ட முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் (Conditional Trigonometric Identities)

கொடுக்கப்பட்ட கோணத்தின் அனைத்து ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய மதிப்புகளுக்கும் முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் உண்மை என்பதை நாம் அறிவோம். சில முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் கொடுக்கப்பட்ட கூடுதல் நிபந்தனையையும் நிறைவு செய்கிறது. அப்படிப்பட்ட முற்றொருமைகள் **நிபந்தனைக்குட்பட்ட முக்கோணவியல் சமன்பாடுகள்** ஆகும். முன் பகுதிகளில் கண்ட தொடர்புகளின் அடிப்படையில் சில நிபந்தனைக்குட்பட்ட முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளை இப்பகுதியில் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.39 $A+B+C=\pi$ எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$

(ii) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)\le\frac{1}{8}$

(iii) $1<\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

தீர்வு:

(i)
$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos C\\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+\cos C \quad \left(\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+1-2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\\ &= 1+2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-\sin\left(\frac{C}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

(ii) $u = \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$ என்க.

$$u = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\cos^2\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} + 2u = 0$$

இது $\cos\frac{A+B}{2}$ இன் இருபடிச்சமன்பாடாகும்.

$\cos\frac{A+B}{2}$ ஒரு மெய்யெண் என்பதால் இச்சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு உண்டு.

எனவே, தன்மைகாட்டி $b^2 - 4ac \geq 0$, தருவது யாதெனில்,

$$\cos^2\frac{A-B}{2} - 8u \geq 0 \Rightarrow u \leq \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leq \frac{1}{8}$$

எனவே, $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$

(iii) இங்கு (i) மற்றும் (ii) இலிருந்து, $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ எனக் கிடைக்கிறது மற்றும்

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + 4 \times \frac{1}{8}$$

எனவே, $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

குறிப்பு: $A + B + C = \pi$ எனில், $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3.40 $A + B + C = \pi$ எனில்,
$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\left(\frac{\pi-A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-C}{4}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

இடப்பக்கம் $= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$= \left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right)\right] + \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[2\sin\left(\frac{\frac{B-A}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4} - \frac{B-A}{4}}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 4\sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 3.41 $A + B + C = \pi$ **எனில்,** $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}[2\cos^2 A + 2\cos^2 B + 2\cos^2 C]$$

$$= \frac{1}{2}[(1 + \cos 2A) + (1 + \cos 2B) + (1 + \cos 2C)]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B) + (2\cos^2 C - 1)]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[-2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1] \quad (\because A + B = \pi - C)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[-2\cos C(\cos(A-B) - \cos C)]$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C]$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 1 - \cos C[2\cos A\cos B]$$

$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

பயிற்சி 3.7

1. $A + B + C = 180^\circ$ எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

(ii) $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(iii) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

(iv) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C$

(v) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

(vi) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(vii) $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4\sin A\sin B\sin C$

2. $A+B+C=2s$ எனில், $\sin(s-A)\sin(s-B)+\sin s\sin(s-C)=\sin A\sin B$ என நிறுவுக.

3. $x+y+z=xyz$ எனில், $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\frac{2y}{1-y^2}\frac{2z}{1-z^2}$ என நிறுவுக.

4. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

   (i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\cos B\cos C$

   (ii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=1+4\sin A\sin B\sin C$

5. ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம் மற்றும் $\angle A=\frac{\pi}{2}$ எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

   (i) $\cos^2 B+\cos^2 C=1$ (ii) $\sin^2 B+\sin^2 C=1$

   (iii) $\cos B-\cos C=-1+2\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3.6 முக்கோணவியல் சமன்பாடுகள் (Trigonometric Equations)

அறியப்படாத கோணங்களினாலான, முக்கோணவியல் சார்புகளை உள்ளடக்கிய சமன்பாட்டை முக்கோணவியல் சமன்பாடுகள் என்று அழைக்கலாம். அறியப்படாத கோணங்களின் மதிப்பு, சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்தால் அதுவே **முக்கோணவியல் சமன்பாட்டின் தீர்வு** ஆகும்.

சார்பகத்தை கட்டுபடுத்தவில்லை என்றால், முக்கோணவியல் சார்பின் கால வட்ட பண்பின் காரணத்தால் முக்கோணவியல் சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். சில சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு இல்லாமல் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sin\theta=\frac{3}{2}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு இல்லை காரணம் $-1\le\sin\theta\le 1$.

$\sin\theta=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற பல தீர்வுகள் உள்ளன அதாவது $\theta=\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\cdots$

இவ்வாறு முக்கோணவியல் சமன்பாட்டின் தீர்வு எண்ணற்றவை மற்றும் அத்தீர்வுகள் கால வட்டங்களில் காணப்படும்.

பொதுத் தீர்வு (General Solution)

ஒரு முக்கோணவியல் சார்பின் காலவட்டத்தின் உதவியுடன் பெறப்படும் ஒரு முக்கோணவியல் சமன் பாட்டின் அனைத்து மதிப்புகள் அச்சமன்பாட்டின் **பொதுத் தீர்வு** என்று அழைக்கப்படும்.

முதன்மைத் தீர்வு (Principal Solution)

$[0,2\pi]$ அல்லது $[-\pi,\pi]$ இடைவெளிகளில் சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் அறியப்படாத கோணத்தின் எண்ணளவில் சிறிய எண் மதிப்பை **முதன்மை தீர்வு** என்று அழைக்கலாம். இங்கு நாம் முதன்மை தீர்வு வரையறுக்க $[-\pi,\pi]$ என்ற இடைவெளியை எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும் இந்த இடைவெளியில் இரண்டு தீர்வுகள் இருக்கலாம். இரண்டு தீர்வுகள் சரியாக இருந்தாலும் நாம் எண்ணளவில் மிகச்சிறியதை எடுத்துக்கொள்வோம். இது நமக்கு முக்கோணவியல் சார்புகளுக்கு ஒத்த முதன்மை சார்பகத்தை வரையறுக்க உதவுகிறது.

$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என்ற இடைவெளியில் சைன் சார்பின் முதன்மை மதிப்பு இருக்கிறது. அதாவது முதல் அல்லது நான்காம் காற்பகுதியில் இருக்கிறது.

$[0, \pi]$ என்ற இடைவெளியில் கொசைன் சார்பின் முதன்மை மதிப்பு இருக்கிறது. அதாவது முதல் அல்லது இரண்டாம் காற்பகுதியில் இருக்கிறது.

$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ என்ற இடைவெளியில் தொடுசார்பின் முதன்மை மதிப்பு இருக்கிறது. அதாவது முதல் அல்லது நான்காம் காற்பகுதியில் இருக்கிறது.

குறிப்பு: (i) முக்கோணவியல் சமன்பாடுகள் முக்கோணவியல் முற்றொருமையிலிருந்து வேறுபடுகின்றன. ஏனென்றால் கோணம் θ-வின் அனுமதிக்கப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளுக்கு முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் உண்மையாகும். ஆனால் அறியப்படாத சில குறிப்பிட்ட கோணங்களுக்கு மட்டும் முக்கோணவியல் சமன்பாடுகள் செல்லுபடியாகும்.

(ii) முக்கோணவியல் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகாணப் பொதுவான முறை ஏதும் இல்லை. ஆனாலும் சில சமன்பாடுகளைக் காரணிப்படுத்தியும்; சில சமன்பாடுகளைத் தனித் தனிச் சார்புகளாக மாற்றியும்; சில சார்புகளை வர்க்கப்படுத்தியும் தீர்வு காணலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

(iii) முக்கோணவியல் சமன்பாடுகளைச் சில நேரங்களில் இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தும் யுக்தியைப் பயன்படுத்தலாம். அச்சமயத்தில் தவறான தீர்வுகளும் கிடைக்க வாய்ப்புள்ளது **(வெளிப்புறத் தீர்வு – Extraneous solution)**. எடுத்துக்காட்டாக, $0 \leq x < 360^\circ$ எனும்போது $\sin x - \cos x = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகாண இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தக் கிடைப்பது $(\sin x - 1)^2 = \cos^2 x$ $\Rightarrow 2\sin x(\sin x - 1) = 0$ அதாவது $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. ஆகவே, $x = 0$ ஒரு தவறான தீர்வு. எனவே, வர்க்கப்படுத்தும் முறையில் சரியான தீர்வு காணச் சரிபார்த்தல் செய்தல் வேண்டும்.

(iv) முக்கோணவியல் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை எழுதும்போது ஆரையன் அளவு அதிகம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

இப்போது நாம் வெவ்வேறு வடிவில் உள்ள முக்கோணவியல் சமன்பாடுகளின் தீர்வை காண்போம்.

(i) $\sin\theta = k(-1 \leq k \leq 1)$ என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு :

$\sin\alpha = k$ என்றவாறு எண்ணளவில் சிறிய கோணம் α என எடுத்துக்கொள்வோம்.

எனவே,
$$\sin\theta = \sin\alpha$$
$$\sin\theta - \sin\alpha = 0$$
$$2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

இதன் மூலம் $\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ அல்லது $\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$ என நமக்குக் கிடைக்கிறது.

இங்கு, $\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$

$\frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

$\theta = (2n+1)\pi - \alpha,\ n\in\mathbb{Z}$ ... (i)

இங்கு, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0,$

$\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$\theta = 2n\pi + \alpha,\ n\in\mathbb{Z}$ ... (ii)

(i) மற்றும் (ii)-லிருந்து நமக்குக் கிடைப்பது.

$$\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n\in\mathbb{Z} \qquad (3.13)$$

(ii) $\cos\theta = k\ (-1\le k\le 1)$ என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு :

$\cos\alpha = k$ என்றவாறு எண்ணளவில் சிறிய கோணம் α என எடுத்துக்கொள்வோம்.

இவ்வாறாக,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos\alpha\\ \cos\theta - \cos\alpha &= 0\\ 2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2} &= 0\\ \sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} &= 0\end{aligned}$$

இதன் மூலம் $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ அல்லது $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ என நமக்குக் கிடைக்கிறது.

$\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$\theta = 2n\pi - \alpha,\ n\in\mathbb{Z}$ .... (i)

$\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$\theta = 2n\pi + \alpha,\ n\in\mathbb{Z}$ ... (ii)

(i) மற்றும் (ii)-லிருந்து நமக்கு கிடைப்பது.

$$\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n\in\mathbb{Z} \qquad (3.14)$$

(iii) $\tan\theta = k\ (-\infty < k < \infty)$ என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு :

$\tan\alpha = k$ என்றவாறு α எண்ணளவில் சிறிய கோணம் என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan\alpha\\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha = 0\\ \sin(\theta-\alpha) &= 0 \Rightarrow \theta-\alpha = n\pi\\ \theta &= n\pi+\alpha,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

எனவே, $$\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi+\alpha,\ n\in\mathbb{Z} \qquad (3.15)$$

(iv) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு :

$a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{a^2+b^2};\ \tan\alpha = \frac{b}{a},\ a\neq 0\\ a\cos\theta + b\sin\theta &= c \Rightarrow r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta = c\\ r\cos(\theta-\alpha) &= c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\theta-\alpha) &= \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\phi \text{ (எனக் கொள்க.)}\\ \theta-\alpha &= 2n\pi \pm \phi,\ n\in\mathbb{Z}\\ \theta &= 2n\pi+\alpha\pm\phi,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

குறிப்பு: $c \le \sqrt{a^2+b^2}$ எனும் போது மட்டுமே மேலே குறிப்பிட்ட முறையைப் பயன்படுத்தலாம். $c > \sqrt{a^2+b^2}$ எனில், $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு எந்த தீர்வும் இல்லை.

நாம் இப்போது முக்கோணவியலின் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வை சுருக்கமாகக் கூறுவோம்.

முக்கோணவியல் சமன்பாடுகள்	பொதுத் தீர்வு
$\sin\theta = 0$	$\theta = n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
$\cos\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}$
$\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
$\sin\theta = \sin\alpha$ இங்கு $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha;\ n\in\mathbb{Z}$
$\cos\theta = \cos\alpha$ இங்கு $\alpha\in[0,\pi]$	$\theta = 2n\pi\pm\alpha,\ n\in\mathbb{Z}$
$\tan\theta = \tan\alpha$ இங்கு $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi+\alpha,\ n\in\mathbb{Z}$

எடுத்துக்காட்டு 3.42 முதன்மை தீர்வை காண்க

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\operatorname{cosec}\theta = -2$ (iv) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

தீர்வு:

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2} > 0$ எனவே முதன்மை மதிப்பு முதல் காற்பகுதியில் இருக்கும்

$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ என்பது நமக்குத் தெரியும்

எனவே, $\theta = \frac{\pi}{6}$ என்பது முதன்மைத் தீர்வாகும்.

(ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என்ற இடைவெளியில் $\sin\theta$-வின் முதன்மை மதிப்பு இருக்கும் என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, எனவே, $\sin\theta$ இன் முதன்மை மதிப்பு நான்காம் காற்பகுதியில் இருக்கும்

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\theta = -\frac{\pi}{3}$ என்பது முதன்மைத் தீர்வாகும்.

(iii) $\quad \operatorname{cosec}\theta = -2$

$$\operatorname{cosec}\theta = -2 \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = -2 \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} < 0$$

எனவே , $\sin\theta$ இன் முதன்மை மதிப்பு நான்காம் காற்பகுதியில் இருக்கும்

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ என்பது முதன்மைத் தீர்வாகும்.

(iv) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\cos\theta$ இன் முதன்மை மதிப்பு முதல் மற்றும் இரண்டாம் காற்பகுதியில் இருக்கும்

$$\cos\theta = \frac{1}{2} > 0$$

எனவே, முதன்மை மதிப்பு $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ என்ற இடைவெளியில் இருக்கும்

$$\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ என்பது முதன்மைத் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.43 $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ -ன் பொதுத் தீர்வை காண்க.

தீர்வு:

$\sin\theta = \sin\alpha,\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ இன் பொதுத் தீர்வு $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

எனவே, பொதுத் தீர்வு ஆனது

$$\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) = n\pi + (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right);\quad n \in \mathbb{Z} \qquad \text{..... (1)}$$

குறிப்பு: மேலே கிடைக்கப் பெற்ற பொதுத் தீர்வில் $-\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$-ஐ முதன்மை மதிப்பாக எடுக்கிறோம் அது வழக்கமாக $[-\pi, \pi]$ என்ற இடைவெளியில் எண்ணளவில் சிறியதை முதன்மை மதிப்பு என்கிறோம். இந்த எடுத்துகாட்டின் மூலம் முதன்மை தீர்வு வரையறையில் குறிப்பிட்டதுபோல் $[0, 2\pi]$ என்ற இடைவெளியிலும் முதன்மை மதிப்பை எடுக்கலாம் என்பதை நியாயப்படுத்தலாம்.

$[0, 2\pi]$ என்ற இடைவெளியில் முதன்மை தீர்வு எடுத்துக்கொண்டால், பிறகு முதன்மை தீர்வு $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ மற்றும் பொதுத்தீர்வு

$\theta = n\pi + (-1)^n\left(\dfrac{4\pi}{3}\right),\ n \in \mathbb{Z},\quad \dfrac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi]$ ..... (ii) என்றாகிறது

(ii)-இல் $n = 0, -1, 1, -2, 2, \cdots$ எனக் கொண்டால் அதற்கொத்த தீர்வுகள் $\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{-7\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{10\pi}{3}, \cdots$ ஆகும்.

(i)-இல் $n = 0, -1, 1, -2, 2, \cdots$ எனக் கொண்டால் அதற்கொத்த தீர்வுகள் $\frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \cdots$ ஆகும்.

இரண்டு வழிகளிலும் நமக்கு ஓரே தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன, ஆனால் வெவ்வேறு வரிசை கொண்டவை. இந்த விவாதத்திலிருந்து $[0, 2\pi]$ அல்லது $[-\pi, \pi]$ என்ற இடைவெளியில் எண்ணளவில் சிறியதை முதன்மை தீர்வாக எடுக்கலாம் என்பது நியாயப்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.44 பொதுத் தீர்வை காண்க. (i) $\sec\theta = -2$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$

தீர்வு:

(i)
$$\sec\theta = -2$$
$$\sec\theta = -2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$\cos\theta = \cos\alpha, \alpha \in [0, \pi]$ இன் பொதுத் தீர்வு

$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\alpha \in [0, \pi]$ என்றவாறு $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

ஆதலால் $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

எனவே பொதுத் தீர்வு $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

(ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$

$$\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$$

$\tan\theta = \tan\alpha,\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ இன் பொதுத் தீர்வு $\theta = n\pi + \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே, பொதுத் தீர்வு $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.45 தீர்க்க $3\cos^2\theta = \sin^2\theta$.

தீர்வு:

$$3\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\cos 2\theta + 1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$$

குறிப்பு: $\tan^2\theta = 3$ என எழுதித் தீர்வுகாண முயற்சி செய்க.

எடுத்துக்காட்டு 3.46 தீர்வு காண் $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$.

தீர்வு:

$$\sin x + \sin 5x = \sin 3x \Rightarrow 2\sin 3x \cos 2x = \sin 3x$$
$$\sin 3x(2\cos 2x - 1) = 0$$

எனவே, $\sin 3x = 0$ அல்லது $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\sin 3x = 0$ எனில், $3x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3}, \; n \in \mathbb{Z}$ ..... (i)

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ எனில், $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, \; n \in \mathbb{Z}$ ..... (ii)

(i) மற்றும் (ii) இலிருந்து பொதுத் தீர்வு $x = \frac{n\pi}{3}$ அல்லது $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, \; n \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.47 தீர்வு காண்க $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$.

தீர்வு:

$$\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos x - \cos 2x = \sin 2x - \sin x$$

$$2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{2x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right)$$

$$2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right] = 0$$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ அல்லது $\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0.$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ எனும்போது,

$\frac{x}{2} = n\pi \Rightarrow x = 2n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$

$\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$ எனும்போது,

$\tan\left(\frac{3x}{2}\right) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}$

எனவே, பொதுத் தீர்வு $x = 2n\pi$ அல்லது $x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \; n \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

குறிப்பு: $\sin\theta = \cos\theta$ எனில், $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \; n \in \mathbb{Z}$ எனவே, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 3.48 $\sin 9\theta = \sin\theta$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

$$\sin 9\theta = \sin\theta \Rightarrow \sin 9\theta - \sin\theta = 0$$

$2\cos 5\theta \sin 4\theta = 0 \Rightarrow \cos 5\theta = 0$ அல்லது $\sin 4\theta = 0$

$\cos 5\theta = 0$ எனும்போது $5\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{10}, \; n \in \mathbb{Z}$

$\sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = n\pi$

$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4}, \; n \in \mathbb{Z}$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{10}, \; \theta = \frac{n\pi}{4}, \; n \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.49 தீர்க்க $\tan 2x = -\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

தீர்வு:

$$\tan 2x = -\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$$

$$2x = n\pi + \frac{5\pi}{6} + x,\ n\in\mathbb{Z} \Rightarrow x = n\pi + \frac{5\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.50 தீர்க்க $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$.

தீர்வு:

$$\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$$

$$\sin 3x + \sin x - 3\sin 2x = \cos 3x + \cos x - 3\cos 2x$$

$$2\sin 2x\cos x - 3\sin 2x = 2\cos 2x\cos x - 3\cos 2x$$

$$(\sin 2x - \cos 2x)(2\cos x - 3) = 0$$

எனவே, $\sin 2x - \cos 2x = 0$ ஏனெனில், $2\cos x - 3 \neq 0$

$$\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8},\ n\in\mathbb{Z}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.51 தீர்க்க $\sin x + \cos x = 1 + \sin x\cos x$.

தீர்வு:

$\sin x + \cos x = t$ என்க

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$ என ஆகிறது.

எனவே, $\sin x + \cos x = 1$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

எனவே, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ அல்லது $x = 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

எடுத்துக்காட்டு 3.52 தீர்க்க $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$.

தீர்வு:

$$2\sin^2 x+\sin^2 2x = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x+(2\sin x\cos x)^2 = 2$$
$$\cos^2 x(2\sin^2 x-1) = 0$$

$\cos x = 0$ அல்லது $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n\in\mathbb{Z}$ (எப்படி)

எனவே, பொதுத் தீர்வு $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ அல்லது $x = n\pi\pm\frac{\pi}{4},\ n\in\mathbb{Z}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.53 a மற்றும் b என்ற எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும் $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta+b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$a\sin\theta+b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right]$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\,[\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta]$$

இங்கு, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\theta)$$

எனவே, $|a\sin\theta+b\cos\theta| \le \sqrt{a^2+b^2}$

இவ்வாறாக, $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta+b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$

எடுத்துக்காட்டு 3.54 தீர்க்க $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta = \sqrt{2}$.

தீர்வு:

$$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta = \sqrt{2}$$

இங்கு, $a = -1;\ b = \sqrt{3};\ c = \sqrt{2};\ r = \sqrt{a^2+b^2} = 2$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{4}$$
$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$
$$\theta-\frac{\pi}{6} = n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{4},\ n\in\mathbb{Z}$$

எனவே, $$\theta = n\pi+\frac{\pi}{6}\pm(-1)^n\frac{\pi}{4},\ n\in\mathbb{Z}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.55 தீர்க்க $\sqrt{3}\tan^2\theta+(\sqrt{3}-1)\tan\theta-1=0.$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\tan^2\theta+(\sqrt{3}-1)\tan\theta-1&=0\\ \sqrt{3}\tan^2\theta+\sqrt{3}\tan\theta-\tan\theta-1&=0\\ (\sqrt{3}\tan\theta-1)(\tan\theta+1)&=0\end{aligned}$$

எனவே, $\sqrt{3}\tan\theta-1=0$ அல்லது $\tan\theta+1=0$

$\sqrt{3}\tan\theta-1=0$ எனில்,

$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\theta=n\pi+\frac{\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z}$ ..... (i)

$\tan\theta+1=0$ எனில்,

$\tan\theta=-1=\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow\theta=n\pi-\frac{\pi}{4},\ n\in\mathbb{Z}$ ..... (ii)

(i) மற்றும் (ii) இலிருந்து நமக்குப் பொதுத் தீர்வு கிடைக்கிறது.

பயிற்சி 3.8

1. பின்வருவனவற்றுக்கு முதன்மை தீர்வு மற்றும் பொதுத் தீர்வுகளைக் காண்க

   (i) $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\cot\theta=\sqrt{3}$ (iii) $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $0^\circ\le\theta<360^\circ$ என்ற இடைவெளியில் இருக்கும் கீழ்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு சரியான தீர்வுகளைக் காண்க.

   (i) $\sin^4x=\sin^2x$ (ii) $2\cos^2x+1=-3\cos x$ (iii) $2\sin^2x+1=3\sin x$

   (iv) $\cos 2x=1-3\sin x$

3. பின் வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்

   (i) $\sin 5x-\sin x=\cos 3x$ (ii) $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$

   (iii) $\cos\theta+\cos 3\theta=2\cos 2\theta$ (iv) $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta=0$

   (v) $\sin 2\theta-\cos 2\theta-\sin\theta+\cos\theta=0$ (vi) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

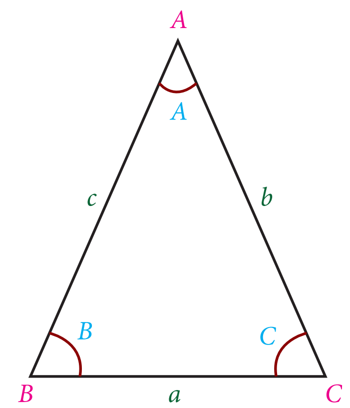
   (vii) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1$ (viii) $\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{3}$

   (ix) $\tan\theta+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

   (x) $\cos 2\theta=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (xi) $2\cos^2x-7\cos x+3=0$

3.7 முக்கோணத்தின் பண்புகள் (Properties of Triangle)

ஒரு முக்கோணத்தால் வடிவமைக்கப்பட்ட செயல் முறை கூடிய பயன்பாட்டு கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பது முக்கோணவியலின் ஒரு முக்கியப் பயன்பாடாகும். ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களையும் மற்றும் கோணங்களையும் காண்பது முக்கோணத்தைத் தீர்க்கும் விதமாகக் குறிப்பிடப்படுகிறது. எந்தவொரு முக்கோணத்திலும் மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் மூன்று கோணங்களை ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்படை உறுப்புகள் என்று அழைக்கிறோம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் தீர்வு காண்பதில் பித்தாகரஸ் தேற்றம் பெரும் பங்காற்றுகிறது. ஒரு செங்கோணம் அல்லாத முக்கோணத்தைத் தீர்ப்பதில் சைன் மற்றும் கொசைன் விதிகள் திறம்பட பயன்படுத்தக்கூடிய முக்கியமான கருவிகள் ஆகும். இப்பிரிவில் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் மூன்று கோணங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளை பற்றி விவாதிப்போம் மற்றும் சைன் மற்றும் கொசைன் விதிகளைத் தருவிப்போம்.



படம் 3.17

குறியீடு : ஒரு முக்கோணம் ABC என்க. ΔABC இன் மூன்று முனைகள் A, B, C இன் கோணங்கள் A, B, C என்றே குறிக்கப்படுகிறது. A, B, C ஆகிய கோணங்களுக்கு எதிர் பக்கங்கள் முறையே a, b, c எனக் குறிக்கப்படுகின்றன. Δ என்ற குறியீடு முக்கோணத்தின் பரப்பைக் குறிக்கிறது.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று முனைகளின் வழியாகச் செல்லக்கூடிய வட்டத்தை அதன் சுற்றுவட்டம் என்கிறோம். சுற்று வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் R ஆகியவை முறையே சுற்றுவட்ட மையம் மற்றும் சுற்றுவட்ட ஆரம் எனப்படும்.

குறிப்பு: ΔABC இல், $A+B+C=\pi$ மற்றும் $a+b>c,\ b+c>a,\ a+c>b$ ஆகும்.

சைன் விதி அல்லது சைன் சூத்திரம் (Law of sine or sine formula)

3.7.1. சைன் விதி (Law of sines)

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்கும் மற்றும் பக்கங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பே சைன் விதி ஆகும். ஒரு முக்கோணத்தை தீர்க்க, பின்வரும் சூழலில் சைன் விதியை திறம்பட பயன்படுத்தலாம்.

(i) இருபக்கங்கள் மற்றும் ஒரு கோணம் கொடுக்கப்பட்டால், கொடுக்கப்பட்ட இரு பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் இதில் சேர்க்கப்படவில்லை என்றால் மற்றைய கோணங்களைக் காணலாம்.

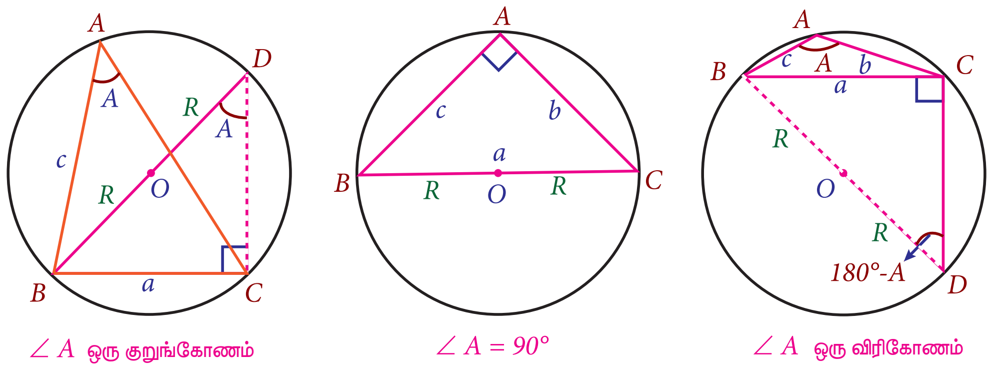
(ii) இரு கோணங்கள் மற்றும் ஒரு பக்கம் கொடுக்கப்பட்டு அது கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனுமொரு கோணத்திற்கு எதிர்பக்கம் என்றால் மற்றைய பக்கங்களைக் காணலாம்.

தேற்றம் 3.1 (சைன் விதி)

எந்த ஒரு முக்கோணத்திலும் பக்கங்களின் நீளங்கள் அவற்றிற்கு எதிரே உள்ள கோணங்களின் சைன் மதிப்பிற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும். இங்கு, ΔABC இல், $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, இங்கு, R என்பது முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட ஆரம் ஆகும்.

நிரூபணம் :

ΔABC இல் A என்ற கோணம் குறுங்கோணமாகவோ அல்லது செங்கோணமாகவோ அல்லது விரிகோணமாகவோ இருக்கலாம். இங்கு O என்பது ΔABC-இன் சுற்றுவட்ட மையம் எனவும் மற்றும் R என்பது ஆரம் எனவும் கொள்வோம்.



படம் 3.18

நிலை I

$\angle A$, ஒரு குறுங்கோணம்

BO ஐ நீட்டும்போது வட்டத்தின் மீது D என்ற புள்ளியை சந்திக்கின்றது.

$$\angle BDC = \angle BAC = A$$

$$\angle BCD = 90^\circ$$

$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} \text{ அல்லது } \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

நிலை II

$\angle A$, ஒரு செங்கோணம்

இந்நிலையில் O என்பது ΔABC இல் உள்ள BC -இன் பக்கம் மீது அமையும்.

இங்கு, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{BC}{\sin 90^\circ} = \dfrac{2R}{1} = 2R \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = 2R$

நிலை III

$\angle A$, ஒரு விரிகோணம்.

BO ஐ நீட்டும்போது வட்டத்தில் D என்ற புள்ளியைச் சந்திக்கின்றது.

$$\angle BDC + \angle BAC = 180^\circ$$

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - A$$

$$\angle BCD = 90^\circ$$

$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} \text{ அல்லது}$$

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

ஒவ்வொரு நிலையிலும், $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ எனக் கிடைக்கிறது.

இதைப்போன்று கோணங்கள் B மற்றும் C ஆகியவற்றைக் கருத்தில் கொண்டால், $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ மற்றும் $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ என்பனவற்றை நிரூபிக்கலாம்.

எனவே, $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

குறிப்பு: (i) சைன் விதியை மூன்று சமன்பாடுகளின் தொகுப்பாக எழுதலாம்.
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$; $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin A}{\sin C}$; $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$;

(ii) சைன் விதியின்படி ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் அவைகளுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்களின் சைன் மதிப்பிற்கு நேர்விகிதத்தில் அமையும்.

(iii) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும் அவற்றிற்கிடைப்பட்ட கோணமும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் சைன் விதியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் தீர்வு காண இயலாது.

(iv) ஒரு முக்கோணத்தின் மிகப்பெரிய பக்கம், மிகப்பெரிய கோணத்திற்கு எதிரே அமையும் என்பது சைன் விதியின் சுவாரஸ்யமான வடிவகணித விளைவாகும். (நிரூபி)

நேப்பியரின் சூத்திரம்

தேற்றம் 3.2

ΔABC இல்

(i) $$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

(ii) $$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

(iii) $$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

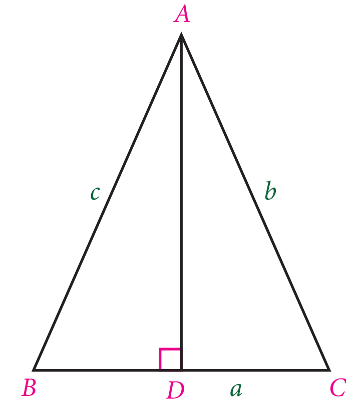
நிரூபணம் :

சைன் சூத்திரம் $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ என்பது நமக்குத் தெரியும்

இங்கு,
$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} &= \frac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin A + 2R\sin B}\cot\frac{C}{2} \\
&= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}\cot\frac{C}{2} \\
&= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\ \sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\ \cos\frac{A-B}{2}}\cot\frac{C}{2} \\
&= \cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2} \\
&= \cot\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2} \\
&= \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A-B}{2}
\end{aligned}$$

இதேபோன்று, மற்ற இரு சூத்திரங்களையும் நிரூபிக்கலாம்.

3.7.2 கொசைன் விதி (Law of Cosines)



படம் 3.19

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றிடைப்பட்ட கோணமும் அல்லது முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் சைன் விதியைப்பயன்படுத்தி அம்முக்கோணத்தைத் தீர்க்க இயலாது. அச்சமயங்களில் கொசைன் விதியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் தீர்வைக் காணலாம். மேலும், இது இரண்டு பக்கங்களும் மற்றும் இடைப்பட்ட கோணமும் கொடுக்கப்பட்டால் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காணும் சூத்திரத்தை வருவிக்கப் பயன்படுகிறது.

தேற்றம் 3.3 (கொசைன் விதி)

ΔABC இல்,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

நிரூபணம் :

ΔABC இல் $AD \perp BC$ என வரைக.

ΔABD இல் $AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow c^2 = AD^2 + BD^2$.

ΔABC இன் உறுப்புகளின் மூலம் AD மற்றும் BD இன் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{AC} &= \sin C \Rightarrow AD = b\sin C \\
BD &= BC - DC = a - b\cos C \\
c^2 &= (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 \\
&= b^2\sin^2 C + a^2 + b^2\cos^2 C - 2ab\cos C \\
&= a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C
\end{aligned}$$

எனவே, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ அல்லது $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

இதேபோன்று, மற்ற இரு சூத்திரங்களையும் நிரூபிக்கலாம். அவையாவன,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ அல்லது } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \text{ அல்லது } \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

குறிப்பு: (i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ என்பது ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலிலிருந்து அவைகளின் பெருக்கட்பலனின் இருமடங்கை அவ்விரு பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் கொசைன் மதிப்போடு பெருக்கக் கிடைக்கும் மதிப்பைக் கழிக்கக் கிடைக்கும் மதிப்புக்குச் சமம். மேலும் a, b, c ஆகிய எழுத்துக்களை ஒரு சூத்திரத்தில் சுழற்றும் போது மற்றொரு சூத்திரம் கிடைக்கப் பெறுகிறது.

(ii) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்திற்கு கொசைன் விதியை எழுதும்போது அது பித்தாகரஸ் தேற்றமாகக் குறைகிறது. எனவே, கொசைன் விதியைப் பித்தாகரஸ் தேற்றத்தின் பொதுமையாக்கப்பட்ட தேற்றமாகக் பார்க்கலாம்.

(iii) குறுங்கோணம் மற்றும் விரிகோணம் ஆகியவற்றில் கொசைன் சார்புகள் சைன் சார்பைப் போல் அல்லாமல் வித்தியாசமானவை என்பதால் சைன் விதியோடு ஒப்பிடும்போது கொசைன் விதியைப் பயன்படுத்துவது பயனுள்ளதாக இருக்கும். கோணத்தின் கொசைன் மதிப்பு மிகை எனில் அது குறுங்கோணம் இல்லையேல் அது விரிகோணம் ஆகும்.

(iv) கொசைன் விதியின் பொருள் : நேர்வழித்தடம் குறைந்த தூரத்தையுடையது. இதன் விளக்கம் பின்வருமாறு.

ΔABC இல், $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, $-\cos C < 1$ என்பதிலிருந்து நமக்கு $c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$ என கிடைக்கிறது. எனவே, $c < a + b$. ஆகவே, ΔABC இல், $a < b + c,\ b < c + a,\ c < a + b$ எனக் கிடைக்கிறது.

(v) கொசைன் விதியைப் பயன்படுத்தும் போது முதலில் அறியப்படாத அளவீட்டில் பெரிய கோணத்தைக் கண்டறிவது உத்தமம். இப்படியொரு கோணம் இருக்குமேயானால் அது முக்கோணத்தின் விரிகோணம் ஆகும்.

3.7.3. வீழல் சூத்திரம் (Projection Formula)

தேற்றம் 3.4

ΔABC இல் நமக்குக் கிடைப்பது,

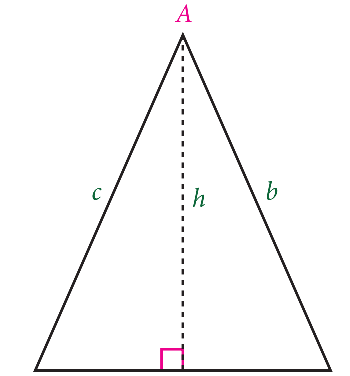
(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$ (iii) $c = a\cos B + b\cos A$

நிரூபணம் :

ΔABC இல் நமக்குக் கிடைப்பது, $a = BC$

$AD \perp BC$ ஐ வரைக.

$$\begin{aligned} a &= BC = BD + DC \\ &= \frac{BD}{AB}AB + \frac{DC}{AC}AC \\ &= (\cos B)c + (\cos C)b \\ a &= b\cos C + c\cos B \end{aligned}$$

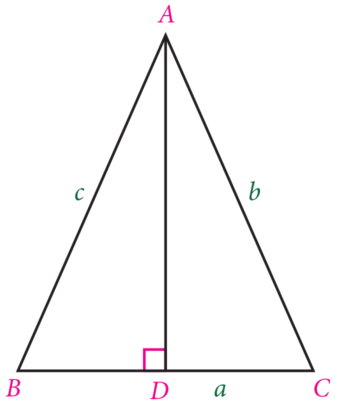


படம் 3.20

இதேபோல், மற்ற இரு வீழல் சூத்திரங்களையும் நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: $a = b$ cos C + c cos B என்பது, a = a இன் மீது b இன் வீழல் + a இன் மீது c இன் வீழல் ஆகும். எனவே, ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் அதன் மீது மற்ற இரு பக்கங்களின் வீழல்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

3.7.4 முக்கோணத்தின் பரப்பளவு (Area of the triangle)



படம் 3.21

விரிகோண முக்கோணத்தின் சில உறுப்புகள் மற்றும் சைன் சார்பு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காணலாம். அடிப்பக்கம் b மற்றும் உயரம் h-ஐ கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவை காணும் சூத்திரம் $\frac{1}{2}bh$ என்பதை நாம் நினைவூட்டுவோம்.

விரிகோண முக்கோணத்தில் பரப்பளவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதற்கு முன் உயரம் h-ன் மதிப்பை நாம் காணவேண்டும்.

தேற்றம் 3.5

ΔABC இல், முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$

நிரூபணம் :

ΔABC இல், $AD \perp BC$ என வரைக.

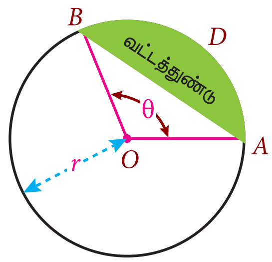
ΔADC இல், $\frac{AD}{AC} = \sin C \Rightarrow AD = b\sin C$

எனவே, $\Delta = \frac{1}{2} \times$ **அடிப்பக்கம்** $\times$ **உயரம்** $= \frac{1}{2}ab\sin C$

இதே முறையில் மற்ற இரண்டு முடிவுகளை நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: (i) விரிகோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காணும் சூத்திரம் கூறுவது யாதெனில் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் மதிப்பு ஆகியவற்றின் பெருக்கட்பலனில் பாதியாகும்.

(ii) வட்டத்துண்டின் பரப்பளவைக் காண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு சூத்திரம் பயன்படுகிறது. வட்டத்துண்டு என்பது ஒரு நாணிற்கும் அது வெட்டும் வில்லிற்கும் இடைப்பட்ட பகுதி ஆகும்.



படம் 3.22

r என்பது வட்டத்தின் ஆரம் மற்றும் θ என்பது வட்டநாண் AB மையத்தில் தாங்கு கோணம் என்க.

வட்டத்துண்டு ABD இன் பரப்பு = வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு $-$ ΔOAB இன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta \quad = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$

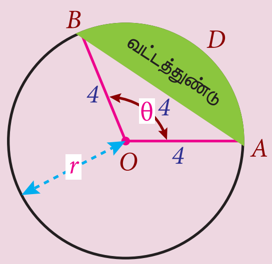
(iii) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு காணும் சூத்திரத்தின் பொதுமையாக்கப்பட்ட சூத்திரமாக முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காணும் சூத்திரத்தைப் பார்க்கலாம்.

(iv) மேற்கண்ட சூத்திரத்திலிருந்து, முக்கோணங்களின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கு மூன்றாவது பக்கத்தின் அளவு தேவையில்லை எனத் தெளிவாகிறது. மேலும், ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண அதனுடைய உயரத்தைக் காண வேண்டிய அவசியமில்லை.

XI_Maths_Ch3B_V-1_TM.indd 172 15-12-2021 13:55:50

எடுத்துக்காட்டு 3.56

8 கி.மீ. விட்டமுள்ள வட்ட வடிவ மிருகக்காட்சி பூங்கா ஒன்றை அமைக்க அரசு திட்டமிடுகிறது. கால்நடை மருத்துவமனை அமைக்க 4 கி.மீ. நீளமுடைய வட்ட நாண் கொண்ட வட்டத்துண்டு தனியாக ஒதுக்கப்படுகிறது. கால்நடை மருத்துவமனை அமைக்க ஒதுக்கப்பட்ட வட்டத்துண்டின் பரப்பைக் காண்க.



படம் 3.23

தீர்வு:

O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் நாண் AB என்க.

$\angle AOB = \theta$ என்க.

வட்டத்துண்டின் பரப்பு = வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு $-\,\Delta OAB$ இன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 4^2\right)[\theta - \sin\theta] = 8[\theta - \sin\theta] \qquad \text{..... (i)}$$

ஆனால், $$\cos\theta = \frac{4^2+4^2-4^2}{2(4)(4)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

(i) இலிருந்து கால்நடை மருத்துவமனைக்கு ஒதுக்கப்பட்ட வட்டத்துண்டின் பரப்பு

$= 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})$ மீ^{2} ஆகும்.

3.7.5. அரைகோண சூத்திரங்கள் (Half–Angle Formula)

தேற்றம் 3.6

ΔABC இல்,

$$\text{(i)}\quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\text{(ii)}\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\text{(iii)}\quad \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

இங்கு, s என்பது ΔABC இன் அரை சுற்றளவு, அதாவது $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

நிரூபணம் :

$$\text{(i)}\ \sin\frac{A}{2} = +\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2s-2b)(2s-2c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

எனவே, $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

இதே போன்று மற்ற இரு முடிவுகளையும் நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: மற்ற அரைக்கோண சூத்திரங்கள்

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}, \quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}; \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \quad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

கிளைத்தேற்றம் :

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

முக்கோணத்தின் பரப்பு – ஹிரான்ஸ் சூத்திரம் (Area of Triangle – Heron's Formula)

கிரேக்கப் பொறியாளர் மற்றும் கணிதமேதையான அலக்சாந்திரியாவின் ஹீரோ (கிபி 10–70) இன் பொருட்டு இந்தச் சூத்திரத்திற்கு ஹீரான்ஸ் சூத்திரம் எனப் பெயர் சூட்டப்பட்டுள்ளது. மூன்று பக்கங்களின் நீளங்கள் கொடுக்கப்படும்போது மட்டும் இச்சூத்திரம் பயன்படுகிறது.

தேற்றம் 3.7

ΔABC இல் $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ இங்கு S என்பது ΔABC அரைச் சுற்றளவாகும்.

நிரூபணம் :

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

குறிப்பு: (i) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்திற்கு ஹீரான்ஸ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பித்தாகரஸ் தேற்றத்தை நிறுவலாம். இதன் மறுதலையாகச் செங்கோண முக்கோணத்திற்கு, பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஹீரான்ஸ் பரப்புச் சூத்திரத்தை நிறுவலாம்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு ஒரு முழு எண் எனில், அதன் முழு எண் நீளங்களைக் கொண்ட பக்கங்களை ஹீரான்ஸ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கண்டறியலாம்.

(iii) முக்கோணத்தின் சுற்றளவு நிர்ணயிக்கப்பட்டால் ஹீரான்ஸ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் முழுஎண் பரப்பளவு மற்றும் முழுஎண் பக்கங்களைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 100 மீ எனில், 32 மீ, 34 மீ, 34 மீ எனும் பக்கங்களும் மற்றும் 480 மீ^{2} பரப்பளவுடைய முக்கோணம் ஒன்று கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.57 ΔABC இல், $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 2bc\sin A$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ என்பது சைன் சூத்திரம்.

எனவே, $a = 2R\sin A;\ b = 2R\sin B;\ c = 2R\sin C$

$$\begin{aligned} b^2\sin 2C + c^2\sin 2B &= 4R^2\sin^2 B\sin 2C + 4R^2\sin^2 C\sin 2B \\ &= 4R^2(2\sin^2 B\sin C\cos C + 2\sin^2 C\sin B\cos B) \\ &= 8R^2\sin B\sin C(\sin B\cos C + \sin C\cos B) \\ &= 8R^2\sin B\sin C\sin(B+C) \\ &= 8R^2\sin B\sin C\sin(\pi - A) = 8R^2\sin B\sin C\sin A \\ &= 8R^2\left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{c}{2R}\right)\sin A = 2bc\sin A \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.58 ΔABC இல், $\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ என்பது சைன் சூத்திரம்.

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2} &= \frac{2R\sin B - 2R\sin C}{2R\sin A}\cos\frac{A}{2} \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.59 ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் விகிதங்கள் $1:2:3$ எனில் அதன் பக்கங்களின் விகிதங்கள் $1:\sqrt{3}:2$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $\theta,\ 2\theta,\ 3\theta$ என்க.

எனவே, $\theta + 2\theta + 3\theta = 180^\circ$

ஆகவே, $\theta = 30^\circ$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ என்ற சைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி,

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 90^\circ}$$ என நமக்குக் கிடைக்கிறது,

$$\Rightarrow a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

எடுத்துக்காட்டு 3.60 ΔABC இல், $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = a + b + c$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

இடப்பக்கம் $= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$= b\cos C + c\cos B + c\cos A + a\cos C + b\cos A + a\cos B$

$= a + b + c$ (வீழல் சூத்திரத்தின் மூலம்)

எடுத்துக்காட்டு 3.61 ΔABC இல், $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} = \dfrac{1 + \cos(A - B)\cos C}{1 + \cos(A - C)\cos B}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ என்பது சைன் சூத்திரம்.

இடப்பக்கம் $= \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} = \dfrac{(2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2}{(2R\sin A)^2 + (2R\sin C)^2}$

$$= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 C} = \frac{1 - \cos^2 A + \sin^2 B}{1 - \cos^2 A + \sin^2 C}$$

$$= \frac{1 - (\cos^2 A - \sin^2 B)}{1 - (\cos^2 A - \sin^2 C)} = \frac{1 - \cos(A + B)\cos(A - B)}{1 - \cos(A + C)\cos(A - C)}$$

$$= \frac{1 + \cos(A - B)\cos C}{1 + \cos(A - C)\cos B}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.62 ΔABC இல், சைன் விதியிலிருந்து கொசைன் விதியை வருவி.

தீர்வு:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ என்பது சைன் சூத்திரம்.

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2R\sin B)^2 + (2R\sin C)^2 - (2R\sin A)^2}{2(2R\sin B)(2R\sin C)}$$

$$= \frac{\sin^2 B + \sin(C + A)\sin(C - A)}{2\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\sin B[\sin B + \sin(C - A)]}{2\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C} = \cos A$$

எனவே, $$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

இதே போல் மற்ற இரண்டு கொசைன் சூத்திரங்களை வருவிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.63 ஹீரான்ஸ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு நிலையான சுற்றளவுக்கும் சமபக்க முக்கோணம் ஒரு மீப்பெரு பரப்பளவைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காண்பி. (குறிப்பு: $xyz \le k$ இல், $x = y = z$ என்றிருக்கும்போது மீப்பெரு மதிப்பு கிடைக்கும்).

தீர்வு:

ΔABC இன் நிலையான சுற்றளவு $2s$ என்க. எனவே, s ஒரு மாறிலி ஆகும்.

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ என்பது நமக்குத் தெரியும்

$(s-a)(s-b)(s-c)$ என்பது மீப்பெரு மதிப்பாக இருக்கும்போது, Δ -ம் மீப்பெரு மதிப்பாக இருக்கும் என கவனிக்க.

$$(s-a)(s-b)(s-c) \le \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27} \quad [\text{GM} \le \text{AM} \text{ என்பதால்}]$$

எனவே, $(s-a)(s-b)(s-c) \le \dfrac{s^3}{27}$ எனக் கிடைக்கிறது.

$s-a = s-b = s-c$ எனும் போது, மேலே உள்ள அசமன்பாடு சமன்பாடாகும்.

$a = b = c$ ஆக இருக்கும்போது, $(s-a)(s-b)(s-c)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பு $\dfrac{s^3}{27}$ ஆக இருக்கும்.

எனவே, $a = b = c$ ஆக இருக்கும்போது, $2s$ என்ற நிலையான சுற்றளவு உடைய முக்கோணத்தின் பரப்பு மீப்பெரு மதிப்பாகும்.

ஆகவே, நிலையான சுற்றளவு உடைய சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பு மீப்பெரு மதிப்பாகும்.

இந்த மீப்பெரு மதிப்பானது, $\Delta = \sqrt{\dfrac{s(s^3)}{27}} = \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

பயிற்சி 3.9

1. ΔABC இல் $\dfrac{\sin A}{\sin C} = \dfrac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ எனில், a^2, b^2, c^2 ஆகியவை ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும் என நிறுவுக.
2. ΔABC இன் கோணங்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும், மற்றும் $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ எனில், $\angle A$ ஐக் காண்க.
3. ΔABC இல் $\cos C = \dfrac{\sin A}{2\sin B}$ எனில், அது ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் எனக் காண்பி.
4. ΔABC இல் $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{c - a\cos B}{b - a\cos C}$ என நிறுவுக.
5. ΔABC இல் $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$ என நிறுவுக.

6. ΔABC இல் $\angle A = 60^\circ$ எனில் $b + c = 2a\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$ என நிறுவுக.

7. ΔABC இல் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $a\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$ (ii) $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$

(iii) $\frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{\sin(A-C)}{\sin(A+C)}$

(iv) $\frac{a\sin(B-C)}{b^2 - c^2} = \frac{b\sin(C-A)}{c^2 - a^2} = \frac{c\sin(A-B)}{a^2 - b^2}$

(v) $\frac{a+b}{a-b} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\cot\left(\frac{A-B}{2}\right)$

8. ΔABC இல் $(a^2 - b^2 + c^2)\tan B = (a^2 + b^2 - c^2)\tan C$ என நிறுவுக.

9. ஒரு கிராமத்தில் ஒரு பொறியாளர் 120 மீ சுற்றளவுள்ள முக்கோண வடிவ பூங்காவை வடிவமைக்க முனைகிறார். பூங்காவின் பரப்பு அதிகபட்சமாக இருக்கும்படி அமைக்கப்படும்போது அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

10. 12 மீ நீளமுள்ள ஒரு கயிறு கொடுக்கப்பட்டு அதைக் கொண்டு அதிகபட்சப் பரப்புடைய முக்கோணம் அமைக்கப்பட்டால் அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

11. (i) சைன் விதி (ii) கொசைன் விதி ஆகியவைகளைப் பயன்படுத்தி வீழல் சூத்திரத்தை வருவி.

3.8 முக்கோணத்தின் பயன்பாடுகள் (Application to triangle)

கட்டிடக்கலை மற்றும் பொறியியலில் எங்கெல்லாம் உறுதியான கட்டமைப்புகள் தேவைப்படுகிறதோ அங்கெல்லாம் முக்கோணங்கள் துணைபுரிகின்றன. கட்டமைப்புக்குத் தேவையான முக்கோணங்களின் கோணங்களைக் கண்டறிய முக்கோணவியல் பெரிதும் பயன்படுகிறது. கட்டிடக் கலைஞர்கள் வளைவுக் கட்டமைப்புகளை அமைப்பதற்கு முக்கோணவியல் பயன்படுகிறது. ஒரு செங்கோண முக்கோணம் குறைந்தது ஒரு பக்கத்துடன் ப–ப மற்றும் ப–கோ அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதன் மற்ற உறுப்புகளைக் காணலாம். ஆனால் விரிகோண முக்கோணத்தின் தீர்வு காண ஒரு பக்கம் உட்பட மூன்று உறுப்புகள் தேவை குறைந்தது ஒரு பக்க அளவுடன் மூன்று உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் சைன் விதி, கொசைன் விதி மற்றும் வீழல் சூத்திரம் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி மற்ற மூன்று உறுப்புகளையும் காணலாம்.

தீர்வு காண விதிகள்

- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் பித்தாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி மூன்றாம் பக்கத்தைக் காணலாம். மேலும், ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள குறுங்கோணங்கள் நிரப்பு கோணங்கள் என்ற கருத்தின்படி, ஒரு குறுங்கோணம் மற்றொரு குறுங்கோணத்தைத் தீர்மானிக்கும்.
- முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் கொசைன் விதி அல்லது அரைகோண சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி அதன் கோணங்களைக் காணலாம்.

- ஏதேனும் இரு கோணங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கு எதிராக உள்ள ஏதேனும் ஒரு பக்கம் கொடுக்கபட்டிருந்தால் சைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மற்ற பக்கங்களைக் கணக்கிடலாம்.
- ஒரு முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரு பக்கங்களும் அதற்கு இடைப்பட்டக் கோணமும் கொடுக்கப்பட்டால் சைன் விதியைப் பயன்படுத்த இயலாது. அதற்குப் பதிலாகக் கொசைன் விதியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் மற்ற பக்கங்கள் மற்றும் மற்ற கோணங்களைக் கணக்கிடலாம். இந்நிலையில் நமக்குத் தனித்தொரு முக்கோணம் கிடைக்கும்.
- விரிகோண முக்கோணத்தை அனைத்து முறைகளிலும் தீர்ப்பதற்குக் குறைந்தபட்சம் ஒரு பக்கத்தின் அளவீடு ஆவது கொடுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

விரிகோண முக்கோணத்தின் தீர்வு காணும் முறைப் பின்வரும் அட்டவணையில் தொகுக்கப்பட்டுள்ளது.

விரிகோணம் (அனைத்துக் கோணங்களும் குறுங்கோணங்கள் அல்லது ஒரு கோணம் விரிகோணம்)	கொடுக்கப்பட்டவைகள்				
	ப–கோ–கோ	ப–ப–கோ*	ப–கோ–ப	ப–ப–ப	கோ–கோ–கோ
தீர்வு காணும் முறை	சைன் விதி	# (தெளிவின்மை எழுகிறது)	இரண்டு பக்கங்களுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் கொடுக்கப்பட வேண்டும் ; கொசைன் விதி அல்லது tangent சூத்திரம்	கொசைன் விதி: முதலில் பெரிய கோணத்தைக் காண்க.	எண்ணிலடங்கா முக்கோணங்கள்

கோணம் இடைப்பட்டது இல்லை எனில், ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட முக்கோணங்கள் இருக்கலாம்.

சைன் விதியை உபயோகிக்கும் போது மூன்று விதமான சூழ்நிலைகள் உருவாகிறது : தீர்வு இல்லை அல்லது ஒரு முக்கோணம் அல்லது இரண்டு முக்கோணங்கள்.

a, b, A ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டவை எனில் $h = b \sin A$ என்க.

$a < h$ எனில், முக்கோணம் அமையாது. $a = h$ எனில், அது ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

$a > h$ மற்றும் $a < b$ எனில், நமக்கு இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கும்.

$a \geq b$ எனில், நமக்கு ஒரே ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும்.

* ப–ப–கோ என்பது பக்கம் பக்கம் மற்றும் கோணம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.64 ΔABC இல் $a = 3, b = 5$ மற்றும் $c = 7$ எனில், $\cos A, \cos B$ மற்றும் $\cos C$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

கொசைன் விதியின்படி,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5^2+7^2-3^2}{2(5)(7)} = \frac{13}{14}$$

இதே போன்று, $\cos B = \frac{11}{14}$, $\cos C = -\frac{1}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 3.65 ΔABC இல் $A = 30°, B = 60°, c = 10$ எனில், a மற்றும் b-ஐ காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை, $A = 30°, B = 60°, C = 180° - (A + B) = 90°$

சைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{10}{\sin 90°}$$

$$a = \frac{10\sin 30°}{\sin 90°} = \frac{10\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = 5$$

$$b = \frac{10\sin 60°}{\sin 90°} = \frac{10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1} = 5\sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.66 ΔABC இல் $a = 2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{3}$ மற்றும் $C = 75°$ எனில், மூன்றாவது பக்கம் மற்றும் கோணங்களைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை, $a = 2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{3}$ மற்றும் $C = 75°$

கொசைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\cos 75° = \frac{8+12-c^2}{8\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{8+12-c^2}{8\sqrt{6}} \Rightarrow c = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

மேலும், $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

எனவே $A = 60°, B = 180° - (A + C) = 45°$.

எடுத்துக்காட்டு 3.67 13 செ.மீ., 14 செ.மீ. மற்றும் 15 செ.மீ. ஆகிய பக்க அளவுகளை உடைய முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$s = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow \quad s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ செ.மீ. என நமக்குத் தெரியும்.

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\quad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ சதுர செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 3.68 எந்தவொரு, ΔABC இல் $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{8\Delta^2}{abc}$ என நிறுவுக.

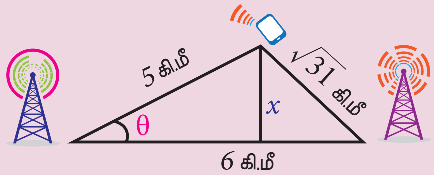
தீர்வு:

$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே,

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\left(\frac{2\Delta}{ac}\right)\left(\frac{2\Delta}{ab}\right) = \frac{8\Delta^2}{abc}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.69 ஒரு கைபேசியின் எல்லைக்குட்பட்ட பகுதியில் இரு கைபேசி கோபுரங்கள் அமைந்துள்ளன. ஒரு கைபேசியின் எல்லைக்குட்பட்ட இரண்டு கைபேசி கோபுரங்கள் கிழக்கு மேற்காக 6 கி.மீ இடைவெளியில் தேசிய நெடுஞ்சாலையில் ஒரே நோர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன மற்றும் கைபேசி நெடுஞ்சாலைக்கு வடக்கே உள்ளது. கைபேசிக்கு வரக்கூடிய சமிக்கைகள் முதல் மற்றும் இரண்டாம் கோபுரத்திலிருந்து 5 கி.மீ. மற்றும் $\sqrt{31}$ கி.மீ. தொலைவில் உள்ளது. கிழக்கிலிருந்து வடக்காக முதல் கோபுரத்திலிருந்து எந்த நிலையில் உள்ளது மற்றும் கைபேசி நெடுஞ்சாலைக்கு எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது என்பதையும் காண்க.



படம் 3.24

தீர்வு:

முதல் கோபுரத்திலிருந்து கைபேசியின் நிலை வடக்கிலிருந்து கிழக்கிற்கு ஏற்படுத்தும் கோணம் θ என்க.

கொசைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$(\sqrt{31})^2 = 5^2 + 6^2 - 2\times 5\times 6\cos\theta$$

$$31 = 25 + 36 - 60\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

நெடுஞ்சாலையிலிருந்து கைபேசியின் தூரம் x என்க.

$$\sin\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5\sin\theta = 5\sin 60^\circ = \frac{5\times\sqrt{3}}{2} \text{ கி.மீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.70 துறைமுகத்திலிருந்து ஒரு படகு 10 கி.மீ. தொலைவு கிழக்கே செல்கிறது. பின்பு இடக்கைப்பக்கம் 60° கோணத்தில் திரும்ப, மீண்டும் படகு 8 கி.மீ. சென்றால் அப்படகிற்கும் துறைமுகத்திற்கும் உள்ள தொலைவைக் காண்க.

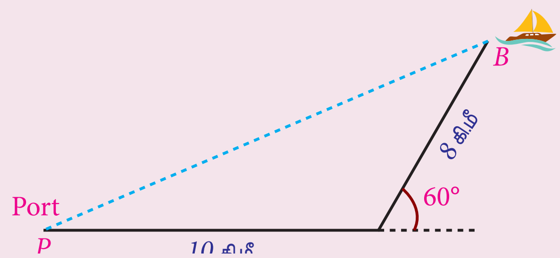
தீர்வு:

BP என்பது தேவையான தூரம் என்க.

கொசைன் விதியின்படி,

$BP^2 = 10^2 + 8^2 - 2\times 10\times 8\times \cos 120^\circ = 244$ கி.மீ.

$\Rightarrow BP = 2\sqrt{61}$ கி.மீ.

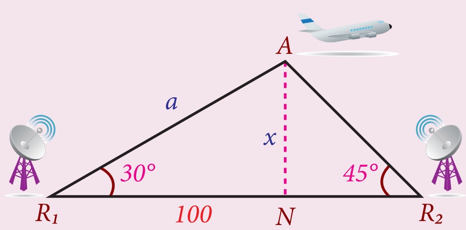


படம் 3.25

இரண்டு ரேடார் நிலையங்கள் 100 கி.மீ. இடைவெளியில் அமைந்திருப்பதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு ரேடாரும் அவைகளுக்கு இடையே பறக்கக் கூடிய போர் விமானம் ஒன்றைக் கண்டறிகிறது. முதல் ரேடார் நிலையத்திலிருந்து 30° ஏற்றக் கோணத்திலும் மற்றும் இரண்டாவது ரேடார் நிலையத்திலிருந்து 45° ஏற்றக் கோணத்திலும் போர் விமானம் இருப்பின், அந்நிலையில் போர் விமானத்தின் உயரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

R_1 மற்றும் R_2 ஆகியவை ரேடார் நிலையங்கள் என்க. போர் விமானத்தைக் கண்டறியும்போது அப்போர் விமானத்தின் நிலை A என்க, x என்பது தரைக்கும் போர் விமானத்திற்கும் இடைப்பட்ட தேவையான உயரம் என்க. R_1R_2 இக்கு A இலிருந்து ஒரு குத்துக்கோடு வரைய அது N இல் சந்திக்கிறது.



படம் 3.26

$$\angle A = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

எனவே, $$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{100}{\sin 105^\circ} \Rightarrow a = \frac{100}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{200(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$= 100\times(\sqrt{3}-1) \text{ கி.மீ.}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{a} \Rightarrow x = 50\times(\sqrt{3}-1) \text{ கி.மீ.}$$

பயிற்சி 3.10

1. $\angle B = 88^\circ, a = 23, b = 2$ என்ற அளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணங்கள் ஒன்றா அல்லது இரண்டா? அல்லது முக்கோணம் வரைய இயலாதா? முக்கோணம் உண்டு எனில், அதன் தீர்வைக் காண்க.
2. ΔABC இல் $a = 4, b = 6$ மற்றும் $c = 8$ எனில் $4\cos B + 3\cos C = 2$ எனக் காண்பி.
3. ΔABC இல் $a = \sqrt{3}-1,\ b = \sqrt{3}+1$ மற்றும் $C = 60^\circ$ எனில், மூன்றாவது பக்கம் மற்றும் இரு கோணங்களைக் காண்க.
4. ΔABC -இல் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\Delta = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4\cot A}$ என நிறுவுக.

5. ΔABC-இல் $a = 12$ செ.மீ., $b = 8$ செ.மீ. மற்றும் $C = 30°$ எனில் முக்கோணத்தின் பரப்பு 24 ச. செ.மீ. எனக் காண்பி.

6. ΔABC-இல் $a = 18$ செ.மீ., $b = 24$ செ.மீ. மற்றும் $c = 30$ செ.மீ. எனில் ΔABC இன் பரப்பு 216 ச. செ.மீ. எனக் காண்பி.

7. பூமிக்கு அடியில் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ள இரண்டு வெவ்வேறு குழிகளில் A மற்றும் B என்ற இராணுவ வீரர்கள் பதுங்கி, மலை உச்சியில் ஒரு ஊடுருபவரை கவனித்தனர். A மற்றும் B லிருந்து ஊடுருபவரின் கோணங்கள் கிழக்கு திசையில் முறையே $30°$ மற்றும் $45°$ மற்றும் A-க்கு B-க்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 5 கி.மீ. எனில் B-யிலிருந்து ஊடுருபவரின் தொலைவினைக் காண்க.

8. ஓர் ஆராய்ச்சியாளர் ஓர் குளத்தின் அகலத்தைக் கிழக்கிலிருந்து மேற்காகச் சரியாக அளவிட முடியாத போது அதைக் கண்டறிய விழைகிறார். P என்ற புள்ளியிலிருந்து குளத்தின் கிழக்குப்பகுதியின் முனை 8 கி.மீ. தொலைவிலும் அதே சமயத்தில் மேற்கு பகுதியின் முனை 6 கி.மீ. தொலைவிலும் உள்ளது மற்றும் P-யையும் கிழக்குப் பகுதியின் முனையை இணைக்கும் கோட்டிற்கும், P-யையும் மேற்கு பகுதியின் முனையையும் இணைக்கும் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்டக் கோணம் $60°$ எனில் குளத்தின் அகலத்தைக் காண்க.

9. கடல் மட்டத்திலிருந்து ஒரே உயரத்தில் வங்காள விரிகுடாவிற்கு மேல் A மற்றும் B என்ற இரண்டு கடற்படை ஹெலிகாப்டர்கள் தொலைந்த படகைத் தேடுகின்றன. 10 கி.மீ. இடைவெளியில் அவைகள் பறக்கும்போது அதன் பைலட்டுகள் ஒரே நேரத்தில் அந்தப் படகைப் பார்க்கிறார்கள். A இலிருந்து படகு 6 கி.மீ. தூரத்தில் உள்ளது. மேலும், கோட்டுத்துண்டு AB படகில் தாங்கும் கோணம் $60°$ எனில், B இற்கும் படகிற்கும் உள்ள தொலைவைக் காண்க.

10. ஒரு மலை வழியாக ஒரு நேர்க் குகை அமைக்கையில், மலைக்கு எதிரே உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து மலையின் இரு முனைகள் A மற்றும் B னை நிலமளப்பவர் காண்கிறார். $AP = 3$ கிமீ, $BP = 5$ கிமீ, $\angle APB = 120°$ எனில் மலைக்குகையின் நீளத்தினைக் காண்க.

11. 120 அடி மற்றும் 60 அடி, பக்கங்களின் நீளங்கள் அவற்றிற்கிடைப்பட்ட கோணம் $60°$ உடைய ஒரு முக்கோண வடிவ நிலத்தை ஒரு விவசாயி வாங்க விரும்புகிறார். ஒரு சதுர அடி நிலத்தின் விலை ₹500எனில், அந்த நிலத்தை வாங்கத் தேவையான மொத்தத் தொகை எவ்வளவு? மேலும் நிலத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

12. ஒரு போர் ஜெட் விமானம் கிடைமட்டமாகப் பறந்து பூமியிலுள்ள ஒரு சிறு இலக்கைத் தாக்க வேண்டும். அவ்விலக்கை விமானி $30°$ இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கிறார். 100 கி.மீ. பறந்த பின்பு மீண்டும் அதே இலக்கை $60°$ இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கும் அந்த நேரத்தில் ஜெட் விமானத்திற்கும் இலக்கிற்கும் உள்ள தொலைவு எவ்வளவு?

13. ஒரு விமானம் ஒரு மைல் கல்லிலிருந்து 1கி.மீ. தூரத்தில் பறக்கிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு மைல் கல்லுடன் உள்ள தூரம் 2கி.மீ. இரண்டு மைல் கல்களும் விமானத்துடன் தாங்கும் கோணம் $45°$ எனில் இரண்டு மைல் கல்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

14. ஒருவன் காலை நடைப்பயிற்சியின் போது A என்ற புள்ளியில் தொடங்கி B மற்றும் C ஆகிய புள்ளிகளுக்குச் சென்று இறுதியில் மீண்டும் A வை வந்தடைகிறார். முக்கோணம் ABC-இல் $\angle A = 60°$ $\angle B = 45°$ $AC = 4$ கி.மீ. எனில், அவர் நடந்த மொத்தத் தொலைவைக் காண்க.

15. இரண்டு வாகனங்கள் ஒரு புள்ளி P லிருந்து ஒரே நேரத்தில் தொடங்கி இரு வெவ்வேறு சாலைகளில் பயணிக்கிறது. ஒரு வாகனம் 60 கிமீ/மணி, மற்றொரு வாகனம் 80 கிமீ/மணி என்ற சராசரி வேகத்தில் பயணிக்கிறது. அரை மணி நேரத்திற்குப் பிறகு அவ்வாகனங்கள் A மற்றும் B ஐ அடைகின்றன. கோடு AB ஆனது P இல் தாங்கும் கோணம் 60° எனில், AB ஐக் காண்க.

16. ஒரு செயற்கைக்கோள் ஒரு விண்வெளியில் உள்ளதாகக் கொள்வோம், பூமியிலுள்ள நிலையம் மற்றும் பூமியின் மையம் ஆகியவை ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன, பூமியின் அதன் ஆரம் r என்றும் அதன் மையத்திலிருந்து செயற்கைக்கோள் R தொலைவில் உள்ளது என்றும் கொள்வோம். செயற்கைக்கோளுக்கும் செயற்கைக்கோளின் நிலையத்திற்கும் உள்ள தொலைவு d என்க. செயற்கைக்கோள் நிலையத்திலிருந்து செயற்கைக்கோள் 30° ஏற்றக் கோணத்தில் உள்ளது. செயற்கைக்கோள் மற்றும் பூமியிலுள்ள நிலையம் ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு பூமியின் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் α எனில், $d = R\sqrt{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R}\cos\alpha}$ என நிறுவுக.

3.9 நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள் (Inverse Trigonometric Function)

$f(x)$ என்ற சார்பு 1-1 மற்றும் மேல் சார்பு என்றிருந்தால் இருந்தால் மட்டுமே அதற்கு நேர்மாறு உண்டு. 1-1 பண்பு இல்லை எனில், அச்சார்புக்கு நேர்மாறு வரையறுக்க இயலாது. எனினும் சார்பகத்தை பொருத்தமாக நாம் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகத்தில் 1-1 சார்பாக மாற்றலாம்.

எடுத்துகாட்டாக, $y = x^2$ என்பது அனைத்து மெய்யெண்களுக்கு 1-1 அல்ல, ஆனால் $x \geq 0$ அல்லது $x \leq 0$ எனில் $y = x^2$, 1-1 மற்றும் மேல்சார்பு ஆகும். எனவே $x \geq 0$ விற்கு $y = x^2$ என்ற சார்பின் நேர்மாறல் $f^{-1}(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$. கால வட்ட ஒழுங்குடைமையால் ஆறு முக்கோண சார்புகளில் எந்தவொரு சார்பிற்கும் அதன் சார்பகத்தில் 1-1 ஆக இருக்காது.

முக்கோணவியல் சார்புகளின் சார்பகத்தை கட்டுப்படுத்தி அவைகளை ஒன்றிற்கொன்று பெறும்படிச் செய்து நேர்மாறு சார்புகள் இருத்தலை உறுதி செய்யலாம்.

காலவட்ட ஒழுங்குடைமையால் கட்டுப்படுத்தலை பல வகையில் செய்யலாம். கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகத்தை முறையாகத் தேர்ந்தெடுப்பது எதேச்சையானது, ஆனால் அவைகள் சில முக்கியமான குணாதிசயங்களைப் பெற்றிருக்கும்.

ஒவ்வொரு கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகமும் 0, மிகை கோணங்கள் மற்றும் முழுவீச்சகத்தை கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகத்தின் பிம்பம் உள்ளடக்கியது.

சைனின் நேர்மாறலை நாம் வரையறை செய்வோம். $f(x) = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ஐ கருதுவோம். கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகத்தில் சைன் 1-1 மற்றும் மேல் சார்பு. எனவே சைனின் நேர்மாறு சார்பு உண்டு.

$f^{-1}(y) = x$ என இருந்தால் இருந்தால் மட்டுமே $f(x) = y$ ஆகும் என்பதனை கவனிக்க. $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$ என எழுதுக. இவ்வாறாக $\sin x = y$ என்றவாறு இருந்தால் மட்டுமே சைனின் நேர்மாறை $\sin^{-1}(y) = x$ என வரையறுக்கலாம்.

$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ மற்றும் $\sin^{-1} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என்பது தெளிவு. $\sin^{-1} t$ என்பது ஒரு கோணம். அதன் சைன் மதிப்பு t ஆகும். இம்மதிப்பு $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ இல் இருக்கும். இதேபோல், மற்ற முக்கோணவியல் சார்புகளின் நேர்மாறல்களையும் வரையறுக்கலாம்.

$\sin^{-1}x,\ \cos^{-1}x,\ \tan^{-1}x,\ \text{cosec}^{-1}(x),\ \sec^{-1}(x),\ \cot^{-1}(x)$ ஆகிய நேர்மாறல் சார்புகள். நேர்மாறல் வட்டச் சார்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. $y = \sin x$ என்ற சார்பின் எண்ணிலடங்காக் கோணங்கள் x, $\sin x = t,\ -1 \le t \le 1$ ஐ நிறைவு செய்யும். இந்த எண்ணிலடங்கா மதிப்புகளில் ஒன்று $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என்ற இடைவெளியில் இருக்கும். இக்கோணம் **முதன்மை கோணம்** என்று அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் அதனை $\sin^{-1} t$ எனக் குறிப்போம். பொது மதிப்புகளில் மிகச்சிறிய எண்ணளவுடைய மதிப்பு நேர்மாறு சார்பின் முதன்மை மதிப்பு ஆகும். இது மிகையாகவோ அல்லது குறையாகவோ இருக்கலாம். ஒரே எண்ணளவு கொண்ட இரு மதிப்புகளில் ஒன்று மிகையாகவும் மற்றொன்று குறையாகவும் இருப்பின், மிகை மதிப்பே முதன்மை மதிப்பு ஆகும்.

முக்கோணவியல் சார்புகளின் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகங்கள், வீச்சகங்கள் மற்றும் அதற்கு ஒத்த நேர்மாறல் சார்புகளின் சார்பகங்களும் வீச்சகங்களும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]\ ;\ \sin^{-1}x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]\ ;\ \cos^{-1}x : [-1, 1] \to [0, \pi]$

(iii) $\tan x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, \infty)\ ;\ \tan^{-1}x : (-\infty, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(iv) $\cot x : [0, \pi] \to (-\infty, \infty)\ ;\ \cot^{-1}x : (-\infty, \infty) \to [0, \pi]$

(v) $\text{cosec}\, x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \to \mathbb{R} - (-1, 1)\ ;\ \text{cosec}^{-1}x : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

(vi) $\sec x : [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R} - (-1, 1)\ ;\ \sec^{-1}x : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

குறிப்பு: (i) $\sin^{-1}x$ இன் பொருள் $\frac{1}{\sin x}$ அல்ல.

(ii) சர் ஜான் ஹர்சல் (1813) (Sir John FW Harschel) அவர்கள் $\sin^{-1}x$ என்ற குறியீட்டிற்கு arc sin x எனக் குறிப்பிட்டார்.

(iii) சைன் சார்பின் நேர்மாறலை விவாதிக்கும்போது $y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $x = \sin^{-1}y, -1 \le y \le 1$ என நாம் கட்டுண்டோம்.

(iv) நேர்மாறல் சார்பு f^{-1} இன் வரைபடம், $y = x$ என்ற அச்சைப் பொறுத்து, f-இன் வரைபடத்தின் பிரதிபலிப்பாகும். எனவே, $(a,b) \in f$ எனில், $(b,a) \in f^{-1}$.

நேர்மாறல் முக்கோணவியல் சார்புகளின் முதன்மை மதிப்புகள் கீழே பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

$x \geq 0$-ற்கு முதன்மை மதிப்பு	$x < 0$-ற்கு முதன்மை மதிப்பு
$0 \leq \sin^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}(x) < 0$
$0 \leq \cos^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \cos^{-1}(x) \leq \pi$
$0 \leq \tan^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}(x) < 0$
$0 < \cot^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \cot^{-1}(x) < 0$
$0 \leq \sec^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \sec^{-1}(x) \leq \pi$
$0 < \operatorname{cosec}^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{cosec}^{-1}(x) < 0$

குறிப்பு: (i) முக்கோணவியல் நேர்மாறல் சார்புகளின் பண்புகள், வரைபடங்கள் மற்றும் தேற்றங்கள் ஆகியவற்றை மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டில் படிப்போம்.

(ii) சில தொகையிடலை மதிப்பிட நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள் பெரிதும் பயன்படுகிறது. அவற்றைப் பின்பு படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.71 (i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, (ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ஆகியவைகளுக்கு முதன்மை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$ என்க. இங்கு $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$$

எனவே, $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ இன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

(ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y$ என்க. இங்கு $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec} y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

எனவே, $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ இன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$ என்க. இங்கு $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$$\tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan y = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi}{6}$$

எனவே, $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ இன் முதன்மை மதிப்பு $-\frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.11

1. (i) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, (ii) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, (iii) $\text{cosec}^{-1}(-1)$, (iv) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$, (v) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ ஆகியவற்றின் முதன்மை மதிப்பைக் காண்க.

2. x மீட்டர் அகலமுடைய பாதையின் ஒரு புறத்திலிருந்து பாதையின் மறுபக்கம் அமைக்கப்பட்ட a மீட்டர் விட்டமுடைய வட்ட வடிவப் போக்குவரத்து சமிக்கையின் பச்சை விளக்கை ஒருவர் பார்க்கிறார். பச்சை விளக்கின் அடிப்பகுதியிலிருந்து பார்ப்பவரின் கண்ணின் கிடைமட்டக் கோடு வரையில் உள்ள உயரம் b மீட்டர் ஆகும். பச்சை விளக்கின் விட்டம் பார்ப்பவரின் கண்களில் தாங்கும் கோணம் α எனில் $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{a+b}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{x}\right)$ என நிறுவுக.

பயிற்சி 3.12

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $\dfrac{1}{\cos 80^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} =$

(1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 2 (4) 4

2. $\cos 28^\circ + \sin 28^\circ = k^3$ எனில், $\cos 17^\circ$ இன் மதிப்பு

(1) $\dfrac{k^3}{\sqrt{2}}$ (2) $-\dfrac{k^3}{\sqrt{2}}$ (3) $\pm\dfrac{k^3}{\sqrt{2}}$ (4) $-\dfrac{k^3}{\sqrt{3}}$

3. $4\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}$ இன் மீப்பெரு மதிப்பு

(1) $4+\sqrt{2}$ (2) $3+\sqrt{2}$ (3) 9 (4) 4

4. $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{8}\right) =$

(1) $\dfrac{1}{8}$ (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5. $\pi < 2\theta < \dfrac{3\pi}{2}$ எனில், $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}}$ இன் மதிப்பு

(1) $-2\cos\theta$ (2) $-2\sin\theta$ (3) $2\cos\theta$ (4) $2\sin\theta$

6. $\tan 40^\circ = \lambda$ எனில், $\dfrac{\tan 140^\circ - \tan 130^\circ}{1+\tan 140^\circ\ \tan 130^\circ} =$

(1) $\dfrac{1-\lambda^2}{\lambda}$ (2) $\dfrac{1+\lambda^2}{\lambda}$ (3) $\dfrac{1+\lambda^2}{2\lambda}$ (4) $\dfrac{1-\lambda^2}{2\lambda}$

7. $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \cdots + \cos 179^\circ =$

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 89

8. $f_k(x) = \dfrac{1}{k}[\sin^k x + \cos^k x]$ என்க. இங்கு, $x \in R$ மற்றும் $k \geq 1$ எனில், $f_4(x) - f_6(x) =$

(1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{1}{12}$ (3) $\dfrac{1}{6}$ (4) $\dfrac{1}{3}$

9. பின்வருவனவற்றில் எது சரியானதல்ல?

(1) $\sin\theta = -\dfrac{3}{4}$ (2) $\cos\theta = -1$ (3) $\tan\theta = 25$ (4) $\sec\theta = \dfrac{1}{4}$

10. $\cos 2\theta \cos 2\phi + \sin^2(\theta - \phi) - \sin^2(\theta + \phi)$ இன் மதிப்பு

(1) $\sin 2(\theta + \phi)$ (2) $\cos 2(\theta + \phi)$ (3) $\sin 2(\theta - \phi)$ (4) $\cos 2(\theta - \phi)$

11. $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \dfrac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} =$

(1) $\sin A + \sin B + \sin C$ (2) 1 (3) 0 (4) $\cos A + \cos B + \cos C$

12. $\cos p\theta + \cos q\theta = 0$, $p \neq q$, n ஏதேனும் ஒரு முழு எண் n எனில் θ–வின் மதிப்பு.

(1) $\dfrac{\pi(3n+1)}{p-q}$ (2) $\dfrac{\pi(2n+1)}{p \pm q}$ (3) $\dfrac{\pi(n \pm 1)}{p \pm q}$ (4) $\dfrac{\pi(n+2)}{p+q}$

13. $x^2 + ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் $\tan \alpha$ மற்றும் $\tan \beta$ எனில், $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \ \sin\beta}$ இன் மதிப்பு

(1) $\dfrac{b}{a}$ (2) $\dfrac{a}{b}$ (3) $-\dfrac{a}{b}$ (4) $-\dfrac{b}{a}$

14. ΔABC இல் $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ எனில், அந்த முக்கோணமானது

(1) சமபக்க முக்கோணம் (2) இரு சமபக்க முக்கோணம்

(3) செங்கோண முக்கோணம் (4) அசமபக்க முக்கோணம்

15. $f(\theta) = |\sin\theta| + |\cos\theta|, \theta \in \mathbb{R}$ எனில், $f(\theta)$ அமையும் இடைவெளி,

(1) $[0, 2]$ (2) $[1, \sqrt{2}]$ (3) $[1, 2]$ (4) $[0, 1]$

16. $\dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x} =$

(1) $\cos 2x$ (2) $\cos x$ (3) $\cos 3x$ (4) $2\cos x$

17. மாறாத சுற்றளவு 12 மீ கொண்ட முக்கோணத்தின் அதிகபட்ச பரப்பளவானது,

(1) 4 மீ பக்கத்தினைக் கொண்ட சமபக்க முக்கோணமாக அமையும்.

(2) 2 மீ, 5 மீ மற்றும் 5 மீ பக்கங்களைக் கொண்ட இரு சமபக்க முக்கோணமாக அமையும்.

(3) 3 மீ, 4 மீ மற்றும் 5 மீ பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணமாக அமையும்.

(4) முக்கோணம் அமையாது.

18. ஒரு சக்கரமானது 2 ஆரையன்கள் அளவில் / விகலைகள் சுழல்கிறது. எனில், 10 முழு சுற்று சுற்றுவதற்கு எத்தனை விகலைகள் எடுத்துக் கொள்ளும்?

(1) 10π விகலைகள் (2) 20π விகலைகள்

(3) 5π விகலைகள் (4) 15π விகலைகள்

19. $\sin\alpha + \cos\alpha = b$ எனில், $\sin 2\alpha$ இன் மதிப்பு

(1) $b \leq \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$ (2) $b > \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$

(3) $b \geq 1$ எனில், $b^2 - 1$ (4) $b \geq \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$

20. ΔABC இல் (i) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} > 0$ (ii) $\sin A \sin B \sin C > 0$

(1) (i) மற்றும் (ii) ஆகிய இரண்டும் உண்மை. (2) (i) மட்டுமே உண்மை.

(3) (ii) மட்டுமே உண்மை. (4) (i) மற்றும் (ii) ஆகிய இரண்டும் உண்மையில்லை.

பாடத்தொகுப்பு (Summary)

கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் முற்றொருமைகள் (தால்மியின் முற்றொருமைகள்)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;\ \ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta};\ \ \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

sine	cosine	tangent
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$	$\cos\theta = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}$ $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$ $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$	$\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

முக்கோணவியல் சமன்பாடு	பொதுத் தீர்வு
$\sin\theta = \sin\alpha$, இங்கு, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = \cos\alpha$, இங்கு, $\alpha \in [0, \pi]$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$
$\tan\theta = \tan\alpha$, இங்கு, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi + \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$

sine விதி	cosine விதி	tangent விதி
$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$	$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	$\tan\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}$ $\tan\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$ $\tan\dfrac{C-A}{2} = \dfrac{c-a}{c+a}\cot\dfrac{B}{2}$

ΔABC-இல், நமக்கு கிடைப்பது,

(i) $a = b\cos C + c\cos B,\ b = c\cos A + a\cos C$ மற்றும் $c = a\cos B + b\cos A$ (வீழல் சூத்திரம்)

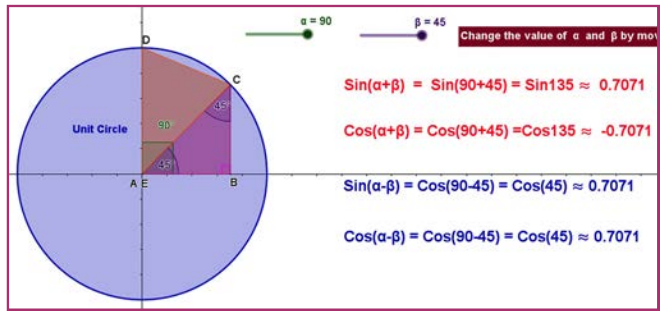
(ii) $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$ (முக்கோணத்தின் பரப்பு)

(iii) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(iv) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\dfrac{A}{2} - \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}},\ \tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

இங்கு, s என்பது ΔABC –இன் அரைச்சுற்றளவு, அதாவது $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ (அரைக்கோண சூத்திரங்கள்)

இணையச் செயல்பாடு – 3 (அ)



படி–1

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

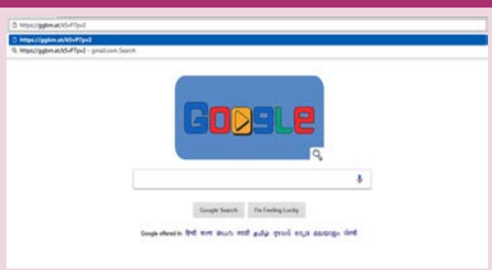
படி–2

ஜியோஜீப்ராவில் “XI Std Trigonometry” என்ற புதிர் பயிற்சி புத்தகம் தோன்றும். அங்கே திரிகோணமிதி தொடர்பான பல்வேறு பயிற்சித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். அதில் உனக்குத் தேவையான ஒரு பயிற்சியைத் தேர்ந்தெடு. எடுத்துக்காட்டாக “Sine and Cosine – Addition Formula ” என்ற பயிற்சித்தாளைத் தெரிவு செய்து அதைத் திற.

படி–3

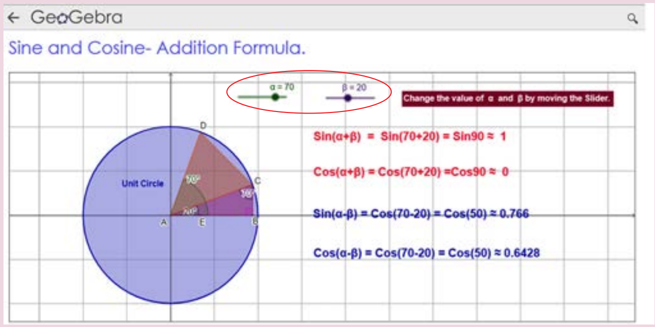
இப்போது நழுவுக்கோட்டை நகர்த்தினால் α மற்றும் β-வின் மதிப்புகள் மாறுவதைக் காணலாம். மேலும், படத்தில் உள்ள கோணங்களை மாற்றும் போது சூத்திரத்தில் உள்ள மதிப்புகள் அதற்கேற்ப மாறுவதைக் காணலாம்.

படி–1



படி–2

படி–3



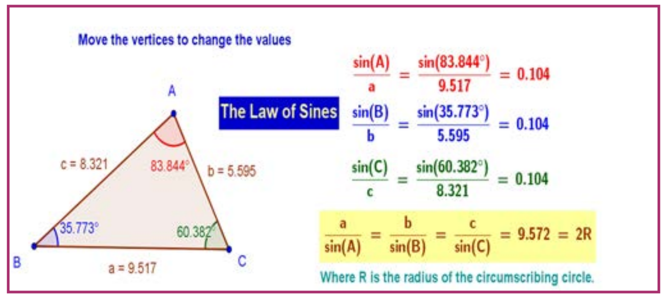
சூத்திரத்தில் மதிப்புகளை மாற்றிக் கணக்கீட்டு முடிவுகளை உற்றுநோக்கு. இதேபோன்று கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்வேறு பயிற்சித்தாள்களைத் திறந்து செயல்படுத்துக.

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/k5vP7pv2

XET06

இணையச் செயல்பாடு – 3 (ஆ)



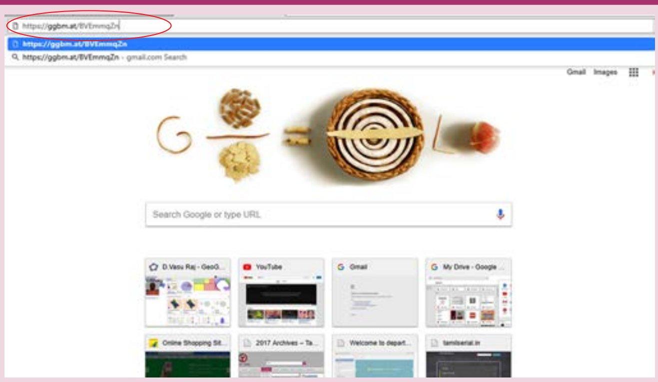
படி–1

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

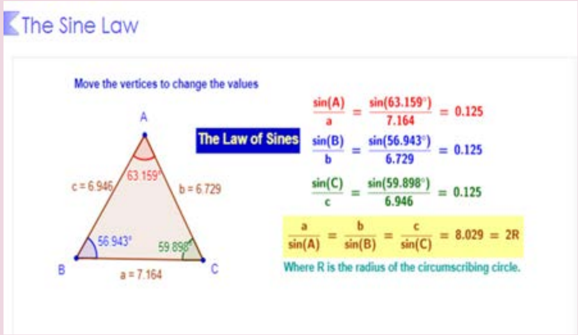
படி–2

The Sine Law எனும் GeoGebra பணிப்புத்தகம் தோன்றும். அங்கே திரிகோணமிதி தொடர்பான பல்வேறு பயிற்சித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். அதில் உனக்குத் தேவையான ஒரு பயிற்சியைத் தேர்ந்தெடுக்க. எடுத்துக்காட்டாக "The Sine Law" என்ற பயிற்சித்தாளை தெரிவு செய்து அதைத் திறக்க. முக்கோணத்தின் A, B மற்றும் C-ஆகிய உச்சி புள்ளிகளை நகர்த்தி விதியின் படி மதிப்புகள் மாறாமல் இருப்பதை ஆய்வு செய்க.

படி–1



படி–2



*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/k5vP7pv2

அத்தியாயம் 4

சேர்ப்பியல் மற்றும் கணிதத் தொகுத்தறிதல்

Z87IM

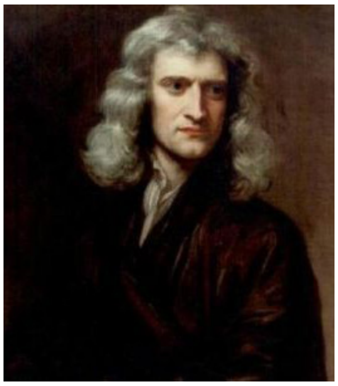
"துணிச்சலான ஊகமின்றி எந்த ஒரு பெரிய கண்டுபிடிப்பும் நிகழ்ந்ததில்லை."

–சர் ஐசக் நீயூட்டன்.

4.1 அறிமுகம் (Introduction)

சேர்ப்பியல் என்பது எவ்வாறு எண்ணுவது என்பதை எடுத்துரைக்கும் கணிதப் பிரிவு ஆகும். இதில் பொருட்களை எத்தனை வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம் எனவும் சில குறிப்பிட்ட பண்புடைய பொருட்களை எவ்வாறு எண்ணுவது என்பது பற்றியும் இங்கு விரிவாக காணலாம். இப்பாடத்தின் அடிப்படையானது, கி.மு (பொ.ஆ.மு) 2800 இல் மாய சதுரங்கள் மற்றும் அதனுடைய வடிவங்களைப் பற்றி படிப்பதற்கு பயன்படுத்தியுள்ளதாக அறிகிறோம்.

இங்கிலாந்தை சேர்ந்த இயற்பியல் மற்றும் கணிதவியல் வல்லுநரான சர் ஐசக் நியூட்டன் (*Sir Isaac Newton*) அவரது ஈர்ப்பு விசையை பற்றிய விதிகளுக்கு மிகவும் பிரபலமானவர், 17 ஆம் நூற்றாண்டின் அறிவியல் புரட்சியின் வித்தாக இருந்தார். நியூட்டனின் "வடிவங்களின் நிலைத்தன்மை" பற்றிய நம்பிக்கை அவரது குறிப்பிடத்தக்க முதல் கண்டுபிடிப்பான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் விரிவினை பொதுமைப்படுத்துவதற்கு பயன்பட்டது.



சர் ஐசக் நியூட்டன்
(1643–1727)

நியூட்டனின் ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் கண்டுபிடிப்பானது வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண எளிமையான வழியாக அமைந்தது. அவரது இந்த கண்டுபிடிப்பு நிகழ்தகவைப் புரிந்துகொள்வதற்கு மிகவும் அவசியம். பல்வேறு மாறிகளுக்கான பொதுமைப்படுத்தப்பட்ட ஈருறுப்புத் தேற்றம் (*Multinomial Theorem*) சேர்ப்பியல் மற்றும் நிகழ்தகவில் பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

பின்ன குறியீடுகளை அவர்தான் முதன்முதலில் பயன்படுத்தினார் மற்றும் இருபரிமாண வடிவியலை பயன்படுத்தி திவோபேன்டைனின் சமன்பாடுகளுக்கு (*Diophantine Equations*) தீர்வு கண்டார். அவர் இசைத் தொடர்முறைகளுக்கு பகுதி கூட்டுத் தொகையின் தோராயத்தை மடக்கையைக் கொண்டு கண்டறிந்தார். (இது யூலரின் கூட்டுத் தொகை சூத்திரத்திற்கு ஓர் முன்னோடி), அடுக்குத் தொடர்முறையை முதன் முதலில் உறுதியாக பயன்படுத்தியது மட்டுமல்லாமல் அடுக்குத் தொடரை மாற்றியும் அமைத்தார். நியூட்டனின் முடிவில்லா தொடர்முறையின் கண்டுபிடிப்புகள் சைமன் ஸ்டீவின்ஸ் தசமங்களால் (*Simon Stevin's decimals*) உந்தப்பட்டு உருவானவை.

1705 இல் இங்கிலாந்து ராஜ்ஜியத்தின் அரசி அன்னே (*Queen Anne*) சர் ஐசக் நியூட்டன் என பட்டம் கொடுத்து பாராட்டினார். லெபினிட்ஸ் (*Libnitz*) உடன், நுண்கணிதத்தின் இன்றியமையாத கோட்பாடுகளை வளர்த்த பெருமை நியூட்டனுக்கு உண்டு.

நடைமுறை வாழ்வில் எங்கெல்லாம் எண்ணுதல் அவசியப்படுகின்றதோ அங்கெல்லாம் சேர்ப்பியல் பயன்படுகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, தேவைக்கு ஏற்றாற்போல் போதுமான அளவு அலைபேசி எண்களை உருவாக்க முடியுமா அல்லது கணிப்பொறியில் எத்தனை வித்தியாசமான கடவுச் சொற்களை அமைக்கலாம் என்பனவற்றை சேர்ப்பியலைக் கொண்டு தீர்மானிக்கலாம். மேலும், இது எத்தனை சிறந்த வழிகள் உள்ளன எனக் காண்பதற்கு அதாவது நடைமுறையில் உள்ள பல வாய்ப்புகளில் எத்தனை வாய்ப்புகள் உண்மையில் நமக்குச் சிறந்ததாக அமையும் எனக் காணப் பயன்படுகின்றது. இப் பகுதியில் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மற்றும் வரிசைப்படுத்தப்படாத அடுக்குதல்களை பற்றி நாம் படிக்கவுள்ளோம். இவ்வாறான அடுக்குதல்களை வரிசை மாற்றங்கள் மற்றும் சேர்வுகள் என்று அழைக்கிறோம். சேர்ப்பியலானது பெருமளவில் தகவல் தொடர்பு வலைப்பின்னல், குறியாக்கம், பாதுகாப்பு வலைப்பின்னல் மற்றும் நிகழ்தகவு கோட்பாடு போன்றவற்றில் எண்ணுதலுக்குப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. நாம் இவற்றின் பண்புகளை ஆராய்ந்து அவற்றை எண்ணுதல் கணக்குகளில் பயன்படுத்துவோம்.

நாம் இப்பொழுது மற்றொரு சூழலை கருதுவோம்: நாம் பயன்படுத்தும் நுகர்வோர் மின் அட்டையில் நுகர்வோர் எண் $A{:}B{:}C$ என்ற வடிவில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளதைப் பார்த்திருப்போம். இதில் A ஆனது துணை மின் நிலைய $(Sub\text{–}station)$ அல்லது அதிக மின் திறன் கொண்ட மின்மாற்றி எண்ணையும், B ஆனது குறைந்த மின்திறன் கொண்ட மின்மாற்றி $(Transformer)$ எண்ணையும் மேலும் C ஆனது நுகர்வோர் எண்ணையும் $(Consumer\ Number)$ குறிக்கும். ஒவ்வொரு துணை மின் நிலையத்திற்கும் அதிகபட்சமாக ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான மின் மாற்றிகளைத்தான் இணைக்க இயலும், எனவும் மேலும் ஒவ்வொரு மின்மாற்றியிலும் அதிகபட்சமாக ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான நுகர்வோர்களைத்தான் இணைக்க இயலும் என்கின்ற கட்டுப்பாடுகள் இருக்கலாம். ஒரு புதிய மின் நிலையமோ அல்லது மின்மாற்றியோ எப்பொழுது தேவைப்படும் என்பதை அறிய எத்தனை நுகர்வோர்கள் அந்த மின்மாற்றியில் அல்லது மின் நிலையத்தில் இணைக்கப்பட்டுள்ளனர் என்பதை அறிய எண்ணுவது அவசியமாகிறது. இந்த எண்ணிக்கையை எவ்வாறு நாம் பெறுவது? இத்தகைய எண்ணிக்கையை எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் எளிதாக காணலாம்.

இப்பாடப்பகுதியில் எண்ணுதல் எனும் செயல் எவ்வாறு மேற்கொள்ள பட உள்ளது என்பதை எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளில் தொடங்கி வரிசை மாற்றங்கள் மற்றும் சேர்வுகள் வாயிலாக விரிவாகக் காணலாம்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதியை கற்ற பின் மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டிய பாடக் கருத்துகள்.

- எண்ணுதலின் அடிப்படை கொள்கைகளை பல்வேறு சூழ்நிலைகளில் பயன்படுத்தலாம் என்பதை அறிதல்.
- எத்தனை வழிகளில் வெவ்வேறான பொருட்களை வரிசைப்படுத்தலாம் என்பதை அறிதல்.
- ஒரு கணமானது ஒரே மாதிரியான பொருட்களை உள்ளடக்கியிருந்தால் அவற்றை எத்தனை வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம் என்பதை அறிதல்.
- ஒரு கணத்திலுள்ள வெவ்வேறான பொருட்களின், சேர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண உத்திகளைப் பயன்படுத்துதல்.
- கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையின் பயன்பாடுகளை அறிதல்.

நாம் கீழ்க்காணும் பாடப்பகுதியில் இருந்து தொடங்குவோம்.

4.2 எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள் (Fundamental Principles of Counting)

1. **கூட்டல் விதி :** (*Sum Rule*) செய்து முடிக்க வேண்டிய இரண்டு பணிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரே நேரத்தில் செய்ய இயலாத இரண்டு பணிகளில் முதல் பணியினை M வழிகளிலும், இரண்டாவது பணியினை N வழிகளிலும் செய்யலாம் எனில், இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு பணியினை $M+N$ வழிகளில் செய்யலாம். இதனை எண்ணுதலின் கூட்டல் விதி என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.1 17 மாணவர்கள், 29 மாணவிகள் உள்ள வகுப்பிலிருந்து ஒரு போட்டிக்காக ஒரு மாணவியையோ அல்லது மாணவனையோ எத்தனை வேறுபட்ட வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

தீர்வு:

முதல் செயலான ஒரு மாணவியை தேர்ந்தெடுக்க 29 வழிகளும், இரண்டாவது செயலான ஒரு மாணவனை தேர்ந்தெடுக்க 17 வழிகளும் உள்ளன. எனவே இந்த தேர்வினை செய்ய எண்ணுதலின் கூட்டல் விதியின்படி, $17 + 29 = 46$ வழிகள் உள்ளன.

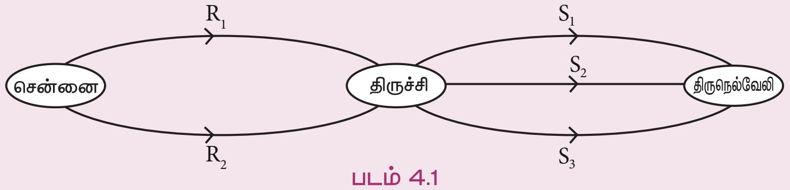
குறிப்பு: இந்த விதியினை இரண்டிற்கு மேலான பணிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். ஆகவே ஒரே நேரத்தில் செய்ய இயலாத n பணிகள் $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ ஆகியவற்றை செய்து முடிக்க முறையே $m_1, m_2, \ldots, m_n$ வழிகள் உள்ளன எனில், இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றை $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ வழிகளில் செய்யலாம்.

2. **பெருக்கல் விதி :** (*Product Rule*) ஒரு செயலை செய்ய இரு படி நிலைகள் உள்ளன எனக் கொள்க. முதல் படி நிலையை செய்ய M வெவ்வேறான வழிகளும் முதல் படி நிலையை செய்து முடித்தபின் இரண்டாவது படி நிலையைச் செய்ய N வெவ்வேறான வழிகளும் உள்ளன எனில், மொத்தமாக அந்த செயலை $M \times N$ வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.2 சென்னை, திருச்சி மற்றும் திருநெல்வேலி என்ற மூன்று நகரங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒருவர் சென்னையிலிருந்து திருச்சி வழியாகத்தான் திருநெல்வேலி செல்ல முடியும் என்க. சென்னை மற்றும் திருச்சிக்கு இடையே 2 சாலைகளும், திருச்சியிலிருந்து திருநெல்வேலி செல்ல 3 சாலைகளும் உள்ளன. சென்னையிலிருந்து திருநெல்வேலிக்கு எத்தனை வழிகளில் செல்ல முடியும்?

தீர்வு:

சென்னையிலிருந்து திருச்சி செல்ல 2 சாலைகள் உள்ளன. இவற்றை R_1 மற்றும் R_2 எனக் கொள்க. மேலும் திருச்சியிலிருந்து திருநெல்வேலி செல்ல 3 சாலைகள் உள்ளன. இவற்றை S_1, S_2 மற்றும் S_3 எனக் கொள்க. ஒருவர் சென்னையிலிருந்து திருச்சி செல்ல R_1 ஐ தேர்ந்தெடுத்தால் திருச்சியிலிருந்து திருநெல்வேலி செல்ல S_1, S_2 அல்லது S_3 இல் ஏதேனும் ஒன்றைத் தேர்வு செய்யலாம். எனவே $(R_1, S_1), (R_1, S_2), (R_1, S_3)$ என்ற சாத்தியமான சாலை வழிகள் உள்ளன. இதுபோலவே, சென்னையிலிருந்து திருச்சி செல்ல R_2 வை தேர்ந்தெடுத்தால் $(R_2, S_1), (R_2, S_2), (R_2, S_3)$ என்ற சாத்தியமான சாலை வழிகள் உள்ளன.



படம் 4.1

எனவே, சென்னையிலிருந்து திருநெல்வேலி செல்ல $2 \times 3 = 6$ வழிகள் உள்ளன.

குறிப்பு: இதனை இரண்டிற்கு மேலான படி நிலைகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். ஒரு செயலில் உள்ள $P_1, P_2,..., P_n$ என்ற n படிநிலைகளை செய்ய முறையே $m_1, m_2,..., m_n$ என்ற வழிகள் உள்ளன என்க. மேலும், $P_1, P_2,..., P_{i-1}$ படி நிலைகளுக்கு பிறகு P_i என்ற படிநிலையை செய்தால், அந்த செயலை $m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$ வழிகளில் செய்யலாம்.

3. **சேர்த்தல் – நீக்கல் கொள்கை :** (*The Inclusion – Execlution Principle*) A, B என்ற இரு பணிகளை ஒரே நேரத்தில் செய்வதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொன்றையும் தனித்தனியே முறையே $n(A), n(B)$ வழிகளில் செய்யலாம் எனக் கொள்க. மேலும் A, B ஆகியவற்றை ஒரே நேரத்தில் சேர்த்து $n(A\cap B)$ வழிகளில் செய்யலாம் எனில், இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு பணியை செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கையை காண கூட்டல் விதியைப் பயன்படுத்தினால் அது உண்மையில் உள்ளதைவிட அதிக எண்ணிக்கையை கொடுக்கும். சரியான விடையை பெற இவ்விரு பணிகளைச் செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கையை கூட்டிய பின்னர், இரண்டு பணிகளையும் ஒரே நேரத்தில் சேர்த்து செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கையை கழிக்க வேண்டும். இந்த முறையை சேர்த்தல் – நீக்கல் கொள்கை என்கிறோம். கணங்களின் குறியீட்டால் இதனை கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கின்றோம்.

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

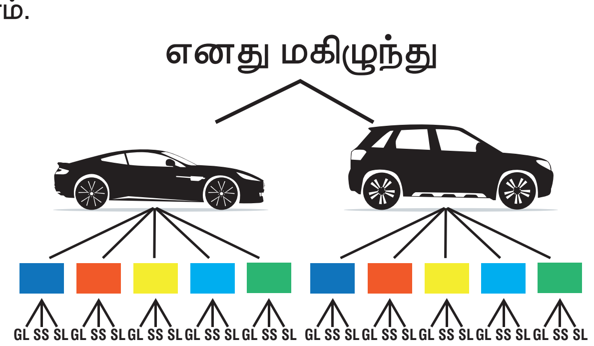
1000 வரை உள்ள மிகை முழு எண்களில் 2 அல்லது 7 ஆல் வகுபடும் (ஆனால், இவ்விரு எண்களால் வகுபடும் எண்களைத் தவிர்த்து) எண்களை காண்பதாக கொள்வோம். 2 ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கையை $n(A)$ எனவும், 7 ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கையை $n(B)$ எனவும் 2 மற்றும் 7 ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கையை $n(A\cap B)$ எனவும் கொள்க. 2 அல்லது 7 ஆல் வகுபடும் மிகை முழு எண்களின் எண்ணிக்கை.

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B) = 500+142-71 = 571$$

(குறிப்பு : இங்கு 1000 வரை உள்ள எல்லா 2–ன் மடங்குகளின் எண்ணிக்கையை $n(A)$ எனவும், எல்லா 7–ன் மடங்குகளின் எண்ணிக்கையை $n(B)$ எனவும் மேலும் இவ்வாறாகப் பலவற்றிற்கும் தொடரலாம்.)

மர வரைபடங்கள்:

மர வரைபடங்கள் பெரும்பாலும் எண்ணுதலுக்கான பல்வேறு வாய்ப்புகளை குறிக்க பயன்படுகிறது. மரத்தில் உள்ள கிளைகள் பல்வேறு வாய்ப்புகளை குறிக்கிறது. உதாரணமாக, ஒருவர் தன் குடும்பத்திற்காக ஒரு மகிழுந்தை வாங்குவதாக கொள்வோம். இரண்டு வெவ்வேறான வியாபார முத்திரை (*Branded*) மகிழுந்துகளும் ஒவ்வொரு வியாபார முத்திரையிலும் 5 நிறங்களில் மகிழுந்துகளும் உள்ளன. மேலும், ஒவ்வொரு நிறத்திலும் GL, SS, SL என மூன்று வகைகள் உள்ளன எனில், ஒரு மகிழுந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான பல்வேறு வாய்ப்புகளை மர வரைபடம் வாயிலாக கீழ்க்காணுமாறு குறிக்கலாம்.



படம் 4.2

நாம் இப்பொழுது மேற்கூறிய விதிகளை எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் விரிவாக விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3 ஒரு பள்ளி நூலகத்தில் 75 கணிதப் புத்தகங்களும், 35 இயற்பியல் புத்தகங்களும் உள்ளன. ஒரு மாணவன் இதில் ஏதேனும் ஒரே ஒரு புத்தகத்தை தேர்ந்தெடுக்கலாம். கணிதம் அல்லது இயற்பியல் புத்தகங்களில் ஏதாவது ஒன்றை எத்தனை வழிகளில் அம்மாணவனால் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

தீர்வு:

(i) கணிதப் புத்தகத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க 75 வழிகள் உள்ளன.

(ii) இயற்பியல் புத்தகத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க 35 வழிகள் உள்ளன.

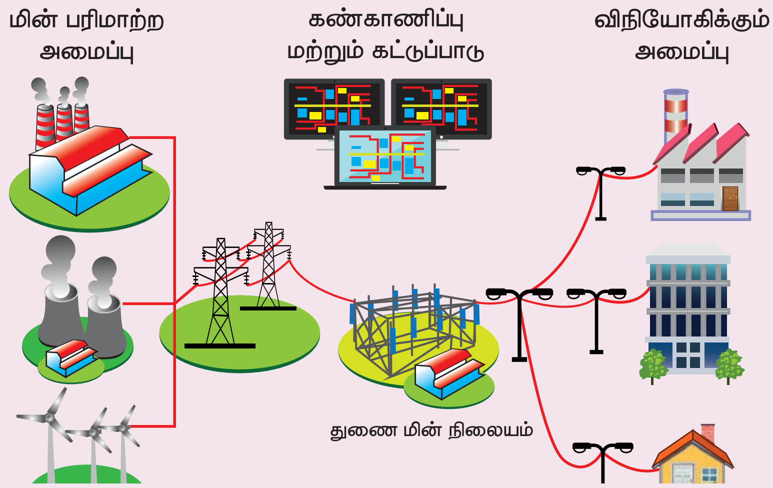
எனவே, கணிதம் அல்லது இயற்பியல் புத்தகங்களில் ஏதேனும் ஒன்றை தேர்ந்தெடுக்க கூட்டல் விதிப்படி $75 + 35 = 110$ வழிகள் உள்ளன.

நாம், இப்பொழுது பாட அறிமுகத்தில் விவரித்ததுபோன்ற போன்ற கணக்கினைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.4 ஒரு மின் நுகர்வோரின் மின் அட்டை எண் $238 : 110 : 29$ என உள்ளது. 238 வது அதிக மின் திறன் கொண்ட மின் மாற்றியில் இந்த 29 வது நுகர்வோர் எண் வரை உள்ள மின் இணைப்புகளின் எண்ணிக்கையை குறைந்த மின் திறனுடைய மின்மாற்றியில் அதிகப்பட்சம் 100 மின் இணைப்புகள் மட்டுமே இணைக்க முடியும் என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு காண்க.

தீர்வு:

படமானது மின் வழங்கல் வலைப்பின்னல் முறையை விளக்குகிறது.



படம் 4.3

இங்கு 110 குறைந்த மின் திறனுடைய மின் மாற்றிகள் அதிக மின் திறனுடைய மின்மாற்றியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு குறைந்த மின் திறனுடைய மின் மாற்றியுடனும் 100 நுகர்வோர்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளதால், 109 மின்மாற்றிகளுக்கு மொத்தம் $109 \times 100 = 10900$ இணைப்புகள் இருக்கும். 110 வது மின்மாற்றியில் 29 நுகர்வோர்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளனர். எனவே, 238 வது அதிக மின் திறன் கொண்ட மின்மாற்றியில் மொத்தம் $10900 + 29 = 10929$ மின் இணைப்புகள் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5 ஒரு நபர் ஒரு மகிழுந்து வாங்க விரும்புகிறார், சந்தையில் இரண்டு வகையான வியாபார முத்திரை மகிழுந்துகள் உள்ளன. மேலும் ஒவ்வொரு வியாபார முத்திரை மகிழுந்திலும் 3 வெவ்வேறு வகைகள் உள்ளன. மேலும் இந்த ஒவ்வொரு வகையிலும் படம் 4.2 இல் உள்ளது போல் 5 வெவ்வேறு நிறங்களில் மகிழுந்துகள் வருகின்றன. எத்தனை வழிகளில் மகிழுந்துகளை அவரால் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

தீர்வு:

ஒரு மகிழுந்து வாங்க ஒரு வியாபார முத்திரை, ஒரு வகை மற்றும் ஒரு நிறம் ஆகியவற்றை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். மகிழுந்தின் வியாபார முத்திரையைத் தேர்ந்தெடுக்க 2 வழிகளும் ஒவ்வொரு வியாபார முத்திரைக்கும் மகிழுந்தின் வகையை தேர்ந்தெடுக்க 3 வழிகளும் ஒவ்வொரு வகையிலும் நிறங்களை தேர்ந்தெடுக்க 5 வழிகளும் உள்ளன. எனவே, பெருக்கல் விதியின் படி, $2\times3\times5 = 30$ வழிகளில் மகிழுந்துகளை தேர்ந்தெடுக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6 காஞ்சிபுரத்தில் உள்ள ஜவுளிக்கடையில் ஒரு பெண் ஒரு பட்டுப் புடைவையையும், ஒரு சுங்குடி புடவையையும் வாங்க நினைக்கிறார். கடையில் 20 வெவ்வேறு வகையான பட்டுப் புடவைகளும், 8 வெவ்வேறு வகையான சுங்குடி புடவைகளும் உள்ளன. புடவைகளை எத்தனை வகையில் அவரால் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

தீர்வு:

ஒரு பெண் ஒரு பட்டு புடவையும் மற்றும் ஒரு சுங்குடி புடவையையும் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அந்த பெண் பட்டுப் புடவையைத் தேர்ந்தெடுக்க 20 வழிகளும் சுங்குடி புடவையை தேர்ந்தெடுக்க 8 வழிகளும் உள்ளன. இந்த இரண்டு புடவைகளையும் தேர்ந்தெடுக்க பெருக்கல் விதிப்படி, $20 \times 8 = 160$ வழிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 4.7 ஒரு கிராமத்தில் உள்ளவர்களில் 80 சதவீதம் பேர் தென்னந்தோப்பையும், 65 சதவீதம் பேர் நெல் வயலையும் வைத்துள்ளனர். குறைந்தபட்சம் எத்தனை சதவீதம் பேர் இரண்டையும் வைத்திருப்பார்கள்?

தீர்வு:

தென்னந்தோப்பை வைத்திருப்பவர்களின் சதவீதத்தை $n(C)$ எனவும் நெல்வயலை வைத்திருப்பவர்களின் சதவீதத்தை $n(P)$ எனவும் கொள்க. இங்கு $n(C) = 80,\ n(P) = 65$ என கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது. சேர்த்தல் – நீக்கல் கொள்கையின் படி, $n(C\cap P) = n(C) + n(P) - n(C\cup P)$ $n(C\cup P)$ –ன் பெரும மதிப்பு 100. எனவே, $n(C\cap P)$ –ன் குறைந்தபட்ச மதிப்பு $80 + 65 - 100 = 45$.

எனவே, குறைந்தபட்சம் 45 சதவீதம் பேர் இரண்டையும் வைத்திருப்பார்கள்.

குறிப்பு: அடுத்துவரும் கணக்குகளில் 'எழுத்துச்சரம்' என்ற கருத்தை பயன்படுத்த உள்ளோம். எழுத்துச்சரம் என்பது எழுத்துகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக வரிசையாக அமைப்பது ஆகும். a, b, c மற்றும் d என்ற எழுத்துகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் மூன்று எழுத்துச் சரங்களை aaa, abb, bda, dca, cdd,... என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.8

(i) BIRD என்ற ஆங்கில வார்த்தையில் உள்ள 4 எழுத்துகளையும் பயன்படுத்தி எழுத்துகள் திரும்ப வராமல் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்.

(ii) PRIME என்ற ஆங்கில வார்த்தையில் உள்ள 5 எழுத்துகளையும் பயன்படுத்தி எழுத்துகள் திரும்ப வராமல் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்.

தீர்வு:

(i) 4 காலி இடங்களை 4 எழுத்துகளைக் கொண்டு எத்தனை வழிகளில் நிரப்பலாமோ அத்தனை 4 எழுத்துச் சரங்கள் இருக்கும். இதில் எழுத்துகள் திரும்பவரக்கூடாது என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். முதல் இடத்தை B, I, R, D என்ற எழுத்துகளில் ஒன்றினைக் கொண்டு 4 வெவ்வேறான வழிகளில் நிரப்பலாம். இதே போல, இரண்டாவது இடத்தை மீதமுள்ள 3 எழுத்துகளைக் கொண்டு 3 வெவ்வேறான வழிகளிலும், மூன்றாவது இடத்தை 2 வழியிலும் நிரப்பலாம், நான்காவது இடத்தை 1 வழியிலும் நிரப்பலாம்.

ஆகவே, 4 இடங்களை நிரப்பும் வழிகளின் எண்ணிக்கை, பெருக்கல் விதிப் படி $4\times3\times2\times1 = 24$. எனவே, தேவையான எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை 24 ஆகும்.

(ii) இங்கு 5 இடங்களை நிரப்ப 5 வெவ்வேறான எழுத்துகள் உள்ளன. முதல் இடத்தை P,R,I,M,E என்ற எழுத்துகளில் ஏதேனும் ஒன்றைக் கொண்டு 5 வழிகளில் நிரப்பலாம். முதல் இடத்தை 5 எழுத்துகளில் ஏதேனும் ஒன்றைக் கொண்டு நிரப்பிய பின்பு, மீதமுள்ள 4 எழுத்துகளைக் கொண்டு இரண்டாவது இடத்தையும், மூன்றாம் இடத்தை நிரப்ப 3 எழுத்துக்களும் மேலும் நான்காம் இடத்தை நிரப்ப 2 எழுத்துகளும் உள்ளன. மீதமுள்ள கடைசி எழுத்தை ஐந்தாம் இடத்தில் நிரப்பலாம்.

எனவே,ஐந்து இடங்களை நிரப்பும் வகைகளின் எண்ணிக்கை $5\times4\times3\times2\times1 = 120$.

குறிப்பு: இந்த இரு நிலைகளுக்கும் இடையே உள்ள ஒப்புமையை கவனிக்க.

எடுத்துக்காட்டு 4.9 FLOWER என்ற வார்த்தையில் உள்ள 6 எழுத்துகளைக் கொண்டு கீழ்க்காணும் கட்டுப்பாடுகளுடன் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்.

(i) F இல் தொடங்க வேண்டும் அல்லது R இல் முடிக்க வேண்டும்.

(ii) F இல் தொடங்கவோ, R இல் முடிக்கவோ கூடாது.

தீர்வு:

எந்த ஒரு எழுத்துச் சரத்திலும் F, L, O, W, E, R என்ற எழுத்துகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே ஒரு முறைதான் வரும்.

(i) ஒரு எழுத்துச் சரத்தை F இல் தொடங்கினால் மீதமுள்ள ஐந்து இடங்களை L, O, W, E, R என்ற எழுத்துகளைக் கொண்டு நிரப்பலாம்.

எழுத்துகளைத் திரும்ப பயன்படுத்த முடியாது என்பதால் 2 ஆவது, 3 ஆவது, 4 ஆவது, 5 ஆவது மற்றும் 6 ஆவது இடங்களை முறையே $5, 4, 3, 2$ மற்றும் 1 வழிகளில் நிரப்பலாம்.

எனவே பெருக்கல் விதிப்படி, F இல் தொடங்கும் எழுத்துச் சரங்களை $5\times4\times3\times2\times1 = 120$ வழிகளில் அமைக்கலாம்.

F					
1 வழி	5 வழி	4 வழி	3 வழி	2 வழி	1 வழி

படம் 4.4

ஒரு சரம் R இல் முடியவேண்டும் எனில் மீதமுள்ள 5 இடங்களை F, L, O, W, E என்ற எழுத்துகளைக் கொண்டு நிரப்பலாம்.

மேற்சொன்னது போலவே R இல் முடியும் எழுத்துச் சரங்களையும் 120 வழிகளில் அமைக்கலாம்.

					R
5 வழி	4 வழி	3 வழி	2 வழி	1 வழி	1 வழி

படம் 4.5

ஓர் சரம் F இல் தொடங்கி R இல் முடியும் எனில், மீதமுள்ள 4 இடங்களை L, O, W, E என்ற எழுத்துகளைக் கொண்டு நிரப்பலாம்.

F					R
1 வழி	4 வழி	3 வழி	2 வழி	1 வழி	1 வழி

படம் 4.6

மேற்கூறியது போலவே, F இல் தொடங்கி R இல் முடியும் 6 எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

சேர்த்தல் – நீக்கல் கொள்கையின் படி, F இல் தொடங்க வேண்டும் அல்லது R இல் முடிக்க வேண்டும் என்றவாறுள்ள எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை $120 + 120 - 24 = 216$ ஆகும்.

(ii) F இல் தொடங்கவோ, R இல் முடிக்கவோ கூடாத எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை ஆனது (i) இல் கணக்கிடப்படவில்லை. இதுமட்டுமல்லாமல் F, L, O, W, E, R என்ற எழுத்துகளை திரும்ப வராதவாறு உள்ள எல்லா 6 எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையை கணக்கிடவேண்டும்.

இப்பொழுது, முதல் இடத்தை இந்த 6 எழுத்துகளில் ஏதேனும் ஒன்றை பயன்படுத்தியும், இரண்டாவது இடத்தை மீதமுள்ள 5 எழுத்துகளில் ஏதாவது ஒன்றை பயன்படுத்தியும், இதுபோலவே, மற்ற இடங்களையும் நிரப்பக் கிடைக்கும் எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. F இல் தொடங்கவோ R இல் முடிக்கவோ கூடாத எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையை, மொத்த எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையில் இருந்து F இல் தொடங்கி அல்லது R இல் முடிக்கும் எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையை கழிக்க பெறலாம். இதன் மதிப்பு $720 - 216 = 504$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.10 முதலில் இரண்டு வெவ்வேறான ஆங்கில எழுத்துகளையும் அதனைத்தொடர்ந்து நான்கு வெவ்வேறான எண்களையும் அல்லது முதலில் இரண்டு வெவ்வேறான எண்களையும் அதனைத்தொடர்ந்து நான்கு வெவ்வேறான எழுத்துகளையும் கொண்டு எத்தனை வெவ்வேறான உரிமத் தட்டுகளை (*Licence Plates*) உருவாக்கலாம்?

தீர்வு:

இத்தீர்வினை இரு நிலைகளில் காணலாம்.

நிலை 1 : முதலில் இரண்டு வெவ்வேறான ஆங்கில எழுத்துகளையும் நான்கு வெவ்வேறான எண்களையும் கொண்டு உருவாக்கும் உரிமத் தட்டுகளின் எண்ணிக்கை $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 32,76,000$.

நிலை 2 : முதலில் நான்கு வெவ்வேறான எழுத்துகளையும் பின்னர் இரண்டு வெவ்வேறான எண்களையும் கொண்டு உருவாக்கும் உரிமத் தட்டுகளின் எண்ணிக்கை $10 \times 9 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 3,22,92,000$ ஆகும்.

நிலை 1 இல் அல்லது நிலை 2 இல் உள்ளவாறு உருவாகும் உரிமத் தட்டுகளின் எண்ணிக்கை, கூட்டல் விதியின் படி, $(26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7) + (10 \times 9 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23) = 3,55,68,000$.

எடுத்துக்காட்டு 4.11 7000–த்தை விட அதிகமாகவும் 8000–த்தை விட குறைவாகவும் உள்ள எண்களில் இலக்கங்கள் திரும்ப வராதவாறு உள்ள 5 ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கையினை காண்க.

தீர்வு:

7000–த்தை விட அதிகமாகவும் 8000–த்தை விட குறைவாகவும் உள்ள எண்கள், 4–இலக்கங்களைக் கொண்டு இருக்க வேண்டும். எனவே, அதன் 1000 மாவது இடத்தில் 7 இருக்க

வேண்டும். மேலும், இது 5 ஆல் வகுபட வேண்டியுள்ளதால் ஒன்றாவது இடம் 0 அல்லது 5 ஆக இருக்கவேண்டும்.

இலக்கங்கள் திரும்ப வராது என்பதால், 100 ஆவது மற்றும் 10 ஆவது இடங்களை மீதமுள்ள எண்களைக் கொண்டு முறையே 8 மற்றும் 7 வழிகளில் நிரப்பலாம்.

7			0/5
1 வழி	8 வழி	7 வழி	2 வழி

படம் 4.7

எனவே, தேவையான எண்களின் எண்ணிக்கை $1 \times 8 \times 7 \times 2 = 112$.

எடுத்துக்காட்டு 4.12 இலக்கங்கள் திரும்ப வராமல் எத்தனை $4-$இலக்க இரட்டைப் படை எண்களை $0, 1, 2, 3$ மற்றும் 4 ஆகிய எண்களை கொண்டு அமைக்கலாம்?

தீர்வு:

இதில் இரண்டு கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன.

1. $4-$இலக்க எண் எனவே 1000 மாவது இடத்தில் 0 வரக்கூடாது.
2. இரட்டைப்படை எண் என்பதால் ஒன்றாம் இடத்தில் 0 , 2 அல்லது 4 வர வேண்டும்.

ஒன்றாம் இடத்தில் 0 உள்ளவாறு அல்லது 0 இல்லாதவாறு எனக்கொண்டு இக்கணக்கினை இரண்டு நிலைகளில் தீர்வு காணலாம்.

நிலை 1 : ஒன்றாம் இடத்தில் 0 உள்ளபோது 1000மாவது இடத்தை பூர்த்தி செய்ய 4 வழிகளும், 100ஆவது இடத்தை பூர்த்தி செய்ய 3 வழிகளும், 10ஆவது இடத்தை பூர்த்தி செய்ய 2 வழிகளும் உள்ளன. எனவே, ஒன்றாம் இடத்தில் 0 உள்ளவாறு $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ எண்களை உருவாக்கலாம்.

			0
4 வழி	3 வழி	2 வழி	1 வழி

படம் 4.8

நிலை 2 : ஒன்றாம் இடத்தில் 0 இல்லாதபோது 2 அல்லது 4 என்ற இரு எண்களைக் கொண்டு ஒன்றாம் இடத்தை 2 வழிகளில் பூர்த்தி செய்யலாம், 1000ஆவது இடத்தை பூர்த்தி செய்ய 3 வழிகளும், 100ஆவது இடத்தை பூர்த்தி செய்ய 3 வழிகளும் மற்றும் 10ஆவது இடத்தை பூர்த்தி செய்ய 2 வழிகளும் உள்ளன.

$\bar{0}$			2/4
3 வழி	3 வழி	2 வழி	2 வழி

படம் 4.9

எனவே, ஒன்றாம் இடத்தில் 0 இல்லாதவாறு $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ எண்களை உருவாக்கலாம்.

$4-$இலக்க இரட்டைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை கூட்டல் விதியின் படி $24 + 36 = 60$.

எடுத்துக்காட்டு 4.13 5 நாணயங்களை ஒரு முறை சுண்டும் போது ஏற்படும் விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் போது {தலை, பூ} என 2 விளைவுகள் கிடைக்கும். எண்ணுதல் விதிப்படி, 5 நாணயங்களைச் சுண்டும் போது ஏற்படும் விளைவுகளின் எண்ணிக்கை $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$.

குறிப்பு: பொதுவாக, n நாணயங்களை சுண்டும் போது ஏற்படும் விளைவுகளின் எண்ணிக்கை 2^n ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.14

(i) 5 பந்துகளை எத்தனை வழிகளில் 3 பெட்டிகளில் விநியோகிக்கலாம்.

(ii) 3 பந்துகளை எத்தனை வழிகளில் 5 பெட்டிகளில் விநியோகிக்கலாம்.

தீர்வு:

(i) ஒவ்வொரு பந்தையும் 3 வெவ்வேறான பெட்டிகளில் 3 வழிகளில் வைக்கலாம். எனவே, பெருக்கல் விதிப்படி 5 பந்துகளை 3 பெட்டிகளில் $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ வழிகளில் விநியோகிக்கலாம்.

(ii) ஒவ்வொரு பந்தையும் 5 வெவ்வேறான பெட்டிகளில் 5 வழிகளில் வைக்கலாம். எனவே, பெருக்கல் விதிப்படி 3 பந்துகளை 5 பெட்டிகளில் $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ வழிகளில் விநியோகிக்கலாம்.

குறிப்பு: இது போன்ற கணக்குகளில் ஏற்படும் குழப்பங்களைத் தவிர்க்க பொருட்களை (பந்துகளை) எடுத்து, இடங்களில் (பெட்டிகளில்) விநியோகிக்க வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

பொதுவாக, n வெவ்வேறான பொருட்களை m இடங்களில் வைக்க மொத்தம் m^n வழிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 4.15 ஒரு அறையில் 10 விளக்குகள் உள்ளன. ஒவ்வொன்றையும் தனித்தனியாக இயக்க முடியும். அந்த அறையை எத்தனை வழிகளில் ஒளியூட்டலாம்.

தீர்வு:

ஒவ்வொரு விளக்குகளையும் தனித்தனியாக ஒளியூட்டுதல் அல்லது அணைத்தல் என இரண்டு வழிகள் உள்ளன. எனவே அத்தனை விளக்குகளையும் 2^{10} வழிகளில் இயக்கலாம். இதில், எல்லா விளக்குகளையும் அணைத்து வைக்கும் வகையும் உள்ளடங்கியுள்ளது. இங்கு எல்லா விளக்குகளையும் அணைத்து வைத்து அறையை ஒளியூட்ட முடியாது. ஆதலால், அந்த அறையை ஒளியூட்ட $2^{10}-1 = 1024-1 = 1023$ வழிகள் உள்ளன.

எண்ணுவதற்கு பயன்படும் மற்றொரு முக்கிய கருவியை கீழ்க்காணுமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

புறாக் கூடு கொள்கை (Pigeonhole Principle)

ஒரு புறாக் கூட்டுத் தொகுப்பை நோக்கி ஒரு புறாக் கூட்டம் பறந்து வருவதாகக் கொள்வோம். புறா கூடுகளின் எண்ணிக்கையை விட புறாக்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருந்தால், குறைந்த பட்சம் ஒரு புறா கூட்டிலாவது குறைந்த பட்சம் இரண்டு புறாக்கள் இருக்க வேண்டும் என்பதாகும். இதனை பொதுமைப்படுத்தி பல்வேறு வகையான பொருட்களுக்கும் பயன்படுத்தலாம். அதாவது, k பெட்டிகளில் $k + 1$ பொருட்கள் இருந்தால், குறைந்தபட்சம் ஒரு பெட்டியிலாவது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பொருட்கள் இருக்க வேண்டும் என்பதாகும்.

சில உதாரணங்கள்:

1. எந்த ஒரு 27 ஆங்கில வார்த்தைகளைக் கொண்ட தொகுப்பிலும் குறைந்த பட்சம் இரண்டு வார்த்தைகளாவது ஒரே எழுத்தில் தொடங்க வேண்டும். (ஆங்கிலத்தில் 26 எழுத்துகள் மட்டுமே உள்ளது.)

2. ஒரு வாரத்தில் உள்ள 5 வேலை நாட்களில் நடைபெறும் எந்த 6 கூட்டங்களில் குறைந்த பட்சம் இரண்டு கூட்டங்களாவது ஒரே நாளில் நடை பெற வேண்டும்.

வரிசை மாற்றங்கள் மற்றும் சேர்வுகளை புரிந்து கொள்ள நாம் "காரணியப் பெருக்கம்" என்ற கருத்தாக்கத்தை அடுத்த பகுதியில் காண்போம்.

4.3 காரணியப் பெருக்கம் (Factorials)

முதல் n இயல் எண்களின் தொடர்ச்சியான பெருக்கல் n–ன் காரணியப் பெருக்கம் எனப்படும். இதனை $n!$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

அதாவது, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n\,.$

இந்த குறியீட்டை " n factorial " அல்லது " factorial of n" என படிக்க வேண்டும்.

இந்த $n!$ என்ற குறியீடு 1808 இல் பிரஞ்சு கணிதவியல் அறிஞர். கிருஸ்டியன் கிராம்ப் (*Christian Kramp*) என்பவரால் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. n என்ற ஒரு மிகை முழு எண்ணுக்கு,

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= n(n-1)!\ ,\ n > 1\text{–க்கு} \\ &= n(n-1)(n-2)!\ ,\ n > 2\text{–க்கு} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)!\ ,\ n > 3\text{–க்கு. இவ்வாறாக தொடரலாம்.} \end{aligned}$$

மேலும்,

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \times 1 = 2 \\ 3! &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ 5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ \ldots &= \ldots \\ 22! &= 22 \times 21 \times 20 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = 1124000727777607680000 \end{aligned}$$

காரணியப்பெருக்கத்தில் 22 (ஸ்ரீனிவாச இராமானுஜத்தின் பிறந்தநாள்) என்ற எண்ணுக்கு தனிச் சிறப்பு உண்டு. இது 1 ஐ விட பெரிய எண்களில் N–ன் காரணியப் பெருக்கத்தில் N இலக்கங்கள் உள்ளன என்ற பண்பை பெற்ற மிகச்சிறிய எண்.

$N!$ இல் சரியாக N இலக்கங்களைக் கொண்ட அடுத்த எண் N எது எனக் காண்பது, மாணவர் மற்றும் ஆசிரியருக்கு ஒரு நல்ல பயிற்சியாகும். $0! = 1$ என்பதை நிறுவ $n = 0$ என $(n+1)!=(n+1)\cdot n!$ என்பதில் பிரதியிட $1! = (0+1) \times 0! \Rightarrow 0! = \frac{1!}{1} = 1$ என நிருவலாம். இதுபோன்றே நாம் குறையற்ற முழு எண்களுக்கான காரணியப் பெருக்கத்தை பற்றியும் விவாதிக்கலாம். காரணியப் பெருக்கத்தினை சில குறை எண்களுக்கு மட்டும் அல்லாமல் கலப்பு எண்களுக்கு கூட வரையறுக்கலாம். இது இப்பாட நூலின் பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

காரணியப் பெருக்கத்தினை காணும் முறையைத் தெளிவாக்க சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.16 மதிப்பைக் காண்க

(i) $5!$ (ii) $6!-5!$ (iii) $\dfrac{8!}{5!\times 2!}$

தீர்வு:

(i) $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120.$

(ii) $6!-5! = 6\times5!-5! = (6-1)\times5! = 5\times120 = 600.$

(iii) $\dfrac{8!}{5!\times2!} = \dfrac{8\times7\times6\times5!}{5!\times2!} = \dfrac{8\times7\times6}{2} = 168.$

எடுத்துக்காட்டு 4.17 சுருக்குக $\dfrac{7!}{2!}$

தீர்வு:

$$\frac{7!}{2!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 7\times6\times5\times4\times3 = 2520.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.18 மதிப்பிடுக : $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ இங்கு (i) $n = 7$, $r = 5$ (ii) $n = 50$, $r = 47$ (iii) $r = 3$, எந்த n–க்கும்.

தீர்வு:

(i) $n = 7$, $\mathrm{r} = 5$ எனில்

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7\times6\times5!}{5!\times2!} = \frac{7\times6}{1\times2} = 21.$$

(ii) $n = 50$, $r = 47$ எனில்

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{50!}{47!(50-47)!} = \frac{50\times49\times48\times47!}{47!\times3!} = \frac{50\times49\times48}{1\times2\times3} = 19600.$$

(iii) $r = 3$, எந்த n–க்கும்

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{1\times2\times3\times(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.19 N என்பது நாட்களின் எண்ணிக்கை என்க. N நாட்களின் உள்ள மொத்த மணி நேரங்களின் எண்ணிக்கை $N!$ எனக் கொண்டால், N–ன் மதிப்புக் காண்க?

தீர்வு:

இதற்கு $N! = 24\times N$ என்ற சமன்பாட்டை தீர்க்க வேண்டும்.

$N = 1,2,3,4$ எனில், $N! < 24\times N$.

$N = 5$ எனில், $N! = 5! = 4!\times5 = 24N.$

$N > 5$ எனில், $N! \geq 5!N > 24\times N$ எனவே, $N = 5$.

எடுத்துக்காட்டு 4.20 $\dfrac{6!}{n!} = 6$ எனில், n–ன் மதிப்புக் காண்க?

தீர்வு:

$$\frac{6!}{n!} = \frac{1.2.3.4.5.6.}{1.2.3...n} = 6.$$

$n < 6$ ஆக இருக்க வேண்டும் எனவே, $n = 5$.

எடுத்துக்காட்டு 4.21 $n! + (n-1)! = 30$ எனில், n–ன் மதிப்புக் காண்க?

தீர்வு:

$$30 = 6 \times 5.$$

மேலும், $n! + (n-1)! = (n+1)(n-1)!$ சமப்படுத்த $(n-1)! = 6 = 3!$ இதிலிருந்து, $n = 4$ என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.22 $2! + 3! + 4! + ... + 22!$–ன் ஒன்றாம் இலக்கம் என்ன?

தீர்வு:

$5!$ இல் தொடங்கி எல்லா $n!$–க்கும் ஒன்றாம் இலக்கம் பூச்சியமாகும். எனவே ஒன்றாம் இலக்கமானது $2! + 3! + 4!$ ஐ மட்டுமே பெறுத்து அமையும். இதன் மதிப்பு $2 + 6 + 24 = 32$. எனவே, இதன் ஒன்றாம் இலக்கம் 2.

எடுத்துக்காட்டு 4.23 $\dfrac{1}{7!} + \dfrac{1}{8!} = \dfrac{A}{9!}$ எனில் A–ன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு:

இதனை

$$\frac{A}{9 \times 8 \times 7!} = \frac{1}{7!} + \frac{1}{8 \times 7!}$$ என எழுதலாம்.

எனவே, $\dfrac{1}{7!} \times \dfrac{A}{9 \times 8} = \dfrac{1}{7!} \times \left[1 + \dfrac{1}{8}\right]$ இது $\dfrac{A}{72} = \dfrac{9}{8}$ –க்கு சமமான மதிப்பை பெறும், இதிலிருந்து, $A = 81$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.24 $\dfrac{(2n)!}{n!} = 2^n(1.3.5...(2n-1)$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1.2.3.4...(2n-2)(2n-1)\times 2n}{n!}$$

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1))(2.4.6...(2n-2)\times 2n)}{n!}$$

(இரட்டை மற்றும் ஒற்றை படை எண்களை தனித்தனியே சேர்க்க)

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1)\times 2^n \times (1.2.3...(n-1).n))}{n!}$$

(எல்லாவற்றிலிருந்தும் 2 ஐ வெளியே எடுக்க)

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1))\times 2^n \times n!}{n!}$$

$$= 2^n(1.3.5...(2n-1)).$$

பயிற்சி 4.1

1. (i) ஒருவர் இரவு விருந்திற்காக ஒரு உணவு விடுதிக்கு சென்றார். அங்கிருந்த உணவு பட்டியலில் 10 இந்திய மற்றும் 7 சீன உணவு வகைகள் இருந்தன. ஒரு இந்திய அல்லது ஒரு சீன உணவை அவர் எத்தனை வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

   (ii) ஓர் கடையில் 3 விதமான மகிழுந்து பொம்மைகளும், 2 விதமான தொடர் வண்டி பொம்மைகளும் உள்ளன. ஒரு குழந்தை ஒரு மகிழுந்து பொம்மையையும் மற்றும் ஒரு தொடர் வண்டி பொம்மையையும் எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

   (iii) $1, 2, 3, 4, 5$ என்ற இலக்கங்களை திரும்ப வராத முறையில் பயன்படுத்தி எத்தனை இரண்டு – இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்?

   (iv) 10 இருக்கைகள் உள்ள அரங்கில் மூன்று நபர்கள் நுழைகிறார்கள். எத்தனை வழிகளில் அவர்கள் அந்த இருக்கைகளில் அமரலாம்?

   (v) 5 நபர்களை ஒரு வரிசையில் எத்தனை வழிகளில் அமர வைக்கலாம்?

2. (i) ஒரு அலைபேசியில் 6 வெவ்வேறான இலக்கங்களைக்கொண்ட கடவுச் சொல் உள்ளது. அந்த கடவுச்சொல்லை மீட்டெடுக்க அதிகபட்சம் எத்தனை முயற்சிகளை செய்ய வேண்டும்?

   (ii) 4 வெவ்வேறு நிற கொடிகளில் 3 கொடிகளை ஒன்றின் கீழ் ஒன்றாக அமைத்து எத்தனை வெவ்வேறு விதமான சமிக்கைகளை உருவாக்கலாம்?

3. நான்கு குழந்தைகள் ஒரு ஓட்டப்பந்தயத்தில் ஓடுகிறார்கள்.

   (i) முதல் இரண்டு இடங்களை எத்தனை வழிகளில் நிரப்பலாம்?

   (ii) அந்த பந்தயத்தை எத்தனை வழிகளில் முடிக்கலாம்?

4. $2, 4, 6, 8$ என்ற இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி எத்தனை 3 – இலக்க எண்களை

   (i) இலக்கங்கள் திரும்ப வருமாறு

   (ii) இலக்கங்கள் திரும்ப வராதவாறு காணலாம்.

5. எத்தனை மூன்று – இலக்க எண்களை 3 ஆனது ஒன்றாம் இலக்க இடத்தில் வருமாறு

   (i) இலக்கங்கள் திரும்ப வரும் நிலையில்

   (ii) இலக்கங்கள் திரும்ப வராதவாறு காணலாம்.

6. 100 மற்றும் 500–க்கு இடையில் $0,1,2,3,4,5$ என்ற இலக்கங்களை பயன்படுத்தி

   (i) இலக்கங்கள் திரும்ப வரும் நிலையில் எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்.

   (ii) இலக்கங்கள் திரும்ப வராமல் எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்.

7. எத்தனை 3 – இலக்க ஒற்றைப்படை எண்களை $0,1,2,3,4,5$ என்ற இலக்கங்களை பயன்படுத்தி

   (i) இலக்கங்கள் திரும்ப வராமல்

   (ii) இலக்கங்கள் திரும்பவருமாறு காணலாம்.

8. கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு 999 மற்றும் 10000–க்கு இடையே உள்ள எண்களை எண்ணுக.

   (i) எந்த நிபந்தனையும் இல்லாமல்

   (ii) எந்த இலக்கமும் திரும்ப வராமல்

   (iii) குறைந்தபட்சம் ஏதேனும் ஒரு இலக்கம் திரும்ப வருமாறு.

9. $0, 1, 2, 3, 4, 5$ என்ற இலக்கங்களை பயன்படுத்தி, 5 ஆல் வகுபடும், மூன்று–இலக்க எண்கள் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு எத்தனை உள்ளன.

   (i) இலக்கங்கள் திரும்ப வராமல்?

   (ii) இலக்கங்கள் திரும்ப வருமாறு?

10. A என்ற இடத்திலிருந்து B என்ற இடத்திற்கு செல்ல B_1, B_2 என்ற இரண்டு பேருந்து வழித் தடங்களும், T_1 , T_2 என்ற இரண்டு இரயில் வழித்தடங்களும் மேலும் A_1 என்ற வான் வழித்தடமும் உள்ளது. B என்ற இடத்திலிருந்து C என்ற இடத்திற்கு செல்ல B_1' என்ற ஒரு பேருந்து வழித்தடமும், T_1', T_2' என்ற இரண்டு இரயில் வழித்தடங்களும் மேலும் A_1' என்ற வான் வழித்தடமும் உள்ளது. A என்ற இடத்திலிருந்து C என்ற இடத்திற்கு B என்ற இடம் வழியே ஒரே வழித்தடத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தாமல் எத்தனை வழிகளில் செல்லலாம்?

11. 1–க்கும் 1000–க்கும் இடையே உள்ள (இரண்டையும் உள்ளடக்கிய) எண்களில் 2 ஆலும் 5 ஆலும் வகுபடாத எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

12. LOTUS எனும் வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி

   (i) L இல் ஆரம்பித்து அல்லது S இல் முடிக்கும் வகையில் எத்தனை எழுத்துச் சரங்கள் உள்ளன.

   (ii) L இல் துவங்கவோ, மற்றும் S இல் முடிக்கவோ கூடாத எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

13. (i) ஒவ்வொரு குறிக்கோள் வினாவிற்கும் 4 வாய்ப்புகள் உள்ளன, 6 வினாக்களுக்கு எத்தனை வழிகளில் விடையளிக்கலாம்?

   (ii) 3 புறாகூடுகளில் 10 புறாக்களை எத்தனை வழிகளில் தங்கவைக்கலாம்?

   (iii) 10 மாணவர்களுக்கு 12 வெவ்வேறான பரிசுகளை எத்தனை வழிகளில் பகிர்ந்தளிக்கலாம்?

14. மதிப்பினைக் காண்க

   (i) $6!$ (ii) $4! + 5!$ (iii) $3! - 2!$ (iv) $3! \times 4!$ (v) $\dfrac{12!}{9! \times 3!}$ (vi) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$

15. மதிப்புக் காண்க $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ இங்கு

   (i) $n = 6$, $r = 2$ (ii) $n = 10, r = 3$ (iii) எந்த n–க்கும், $r = 2$

16. n–ன் மதிப்பை காண்க

   (i) $(n+1)! = 20(n-1)!$ (ii) $\dfrac{1}{8!} + \dfrac{1}{9!} = \dfrac{n}{10!}$

காரணியப் பெருக்கத்தைப் பொதுமைப்படுத்தி இரட்டைக் காரணியப் பெருக்கம் என கீழ்காணுமாறு வரையறுக்கலாம்.

n–ன் இரட்டை காரணியப் பெருக்கம்: (Double Factorial of n)

n–ன் காரணியப் பெருக்கத்தை $n!$ என குறிக்கிறோம். இதனை $f:\mathbb{N}\cup\{0\}\longrightarrow\mathbb{N}$,

இங்கு $\mathbb{N}$ இயல் எண்களின் கணம். இதன் வரையறை,

$$f(n)=\begin{cases}1 & ,n=0,\\ n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1, & n\neq0.\end{cases}$$

$n!!$ ஐ (n–ன் இரட்டை காரணியப் பெருக்கம்) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

$$g(n)=\begin{cases}1 & n=0,\\ n\times(n-2)\times(n-4)\times\ldots\times4\times2 & n \text{ இரட்டைப்படை எண் எனில்,}\\ n\times(n-2)\times(n-4)\times\ldots\times3\times1 & n \text{ ஒற்றைப்படை எண் எனில்.}\end{cases}$$

இதிலிருந்து $5!!=5\times3\times1=15$ மேலும்

$8!!=8\times6\times4\times2=384$ என அறியலாம்

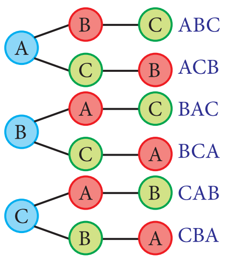
குறிப்பாக $n!!\neq(n!)!$ ஏனெனில் $4!!=8$ ஆனால் $(4!)!=(24)!$ ஆகும்.

4.4 வரிசை மாற்றங்கள் (Permutations)

வரிசை மாற்றம் என்றால் என்ன?

வரிசை மாற்றங்களை பல்வேறு சூழல்களில் எதிர்கொள்கிறோம்.

மூன்று நண்பர்கள் A, B மற்றும் C ஒரு புகைப்படம் எடுக்க வரிசையாக நிற்கவேண்டும். எத்தனை விதமான வரிசைகளில் நிற்கலாம்? இவை இடமிருந்து வலமாக கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



$A, B, C : A, C, B : B, A, C$

$B, C, A : C, A, B : C, B, A$

ஆகவே, மொத்தமாக புகைப்படம் எடுக்க 6 வழிகளில் தங்களுக்குள் வரிசையாக நிற்க வைக்கலாம்.

ஆகவே, 3 பொருட்களை ஒரு வரிசையில் அடுக்க $3\times2\times1=3!$ வரிசை மாற்றங்கள் இருக்கும். நான்கு பொருட்களை ஒரு சமயத்தில் எடுக்கும் போது கிடைக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $4\times3\times2\times1=4!$ ஆகும். எனவே, பொதுவாக n பொருட்களை ஒரு வரிசையில் அடுக்க மொத்தம் $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1=n!$ வரிசை மாற்றங்கள் இருக்கும்.

நம்மிடம் உள்ள A, B, C, D, E, F மற்றும் G என்ற 7 எழுத்துகளில் நாம் 4 எழுத்துகளை கொண்டு எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கும் போது, முதல் எழுத்தினை தேர்ந்தெடுக்க நம்மிடம் 7 வழிகள் உள்ளன. முதல் எழுத்தை தேர்ந்தெடுத்த பின்னர், நம்மிடம் இரண்டாம் இடத்திற்கு 6 எழுத்துகள் உள்ளன. இதுபோல தொடர, 4 ஆவது எழுத்திற்கு 4 வாய்ப்புகள் உள்ளன.

எனவே, 7 எழுத்துகளில் இருந்து உருவாக்கப்படும் 4 எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை

$$7\times6\times5\times4=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}=\frac{7!}{3!}=\frac{7!}{(7-4)!}$$

பொதுவாக, n வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து r பொருட்களை கொண்டு உருவாக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{n!}{(n-r)!}$. இதனை குறியீட்டால் ${}^nP_r$ என குறிக்கலாம். இதற்கான முறையான நிரூபணத்தை இந்தப் பகுதியில் காண்போம்.

4.4.1 வெவ்வேறான பொருட்களின் மீதான வரிசை மாற்றங்கள் (Permutations of Distinct Objects)

சார்புகளின் வாயிலாக வரிசை மாற்றத்தை $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ என்ற முடிவுற்ற கணத்திலிருந்து S–ன் மீதே வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் இருபுற சார்பை ஓர் வரிசை மாற்றம் என வரையறுக்கலாம். S–ன் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையும் S–ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட இருபுற சார்புகளின் எண்ணிக்கையும் சமம்.

இந்த வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை ${}^nP_r$ என குறிக்கலாம்.

தேற்றம் 4.1

n, r ஆகியவை மிகை முழு எண்கள் மேலும் $r \le n$ எனில், n வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து ஒரு சமயத்தில் r பொருட்களை கொண்டு உருவாக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ ஆகும்.

நிரூபணம் ஒரு வரிசை மாற்றம் என்பது வரிசையில் அமைத்தலாகும். n வெவ்வேறான பொருட்களிலிருந்து ஒரு சமயத்தில் r பொருட்களை கொண்டு உருவாக்கும் வரிசை மாற்றத்தினை, n பொருட்களை r இடங்களில் அமைத்து பெறலாம்.

			$\cdots$	
n வழி	$(n$-$1)$ வழி	$(n$-$2)$ வழி		$(n-r+1)$ வழி

r இடங்கள்

முதல் இடத்தை நிரப்ப n பொருட்கள் உள்ளன இரண்டாவது இடத்தை நிரப்புவதற்கு $n-1$ பொருட்கள் உள்ளன. மூன்றாம் இடத்தை நிரப்ப $n-2$ பொருட்கள் உள்ளன. இதுபோல கடைசி வரை தொடர, அதாவது r ஆவது இடத்தை நிரப்ப $(n-(r-1))$ பொருட்கள் உள்ளன. பெருக்கல் விதியின் படி நாம் ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ எனப் பெறலாம். □

தேற்றம் 4.2

$n \ge 1$ மற்றும் $0 \le r \le n$ எனில் ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

நிரூபணம் தேற்றம் 4.1 –லிருந்து,

$$\begin{aligned} {}^nP_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1) \\ &= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1) \times (n-r) \times (n-r-1) \times ... \times 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times ... \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$ □

குறிப்பு: குறிப்பாக எந்த ஒரு மிகை முழு எண் n மற்றும் குறையற்ற முழு எண் r–க்கும்,

இதனை

$${}^nP_r = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!} & , r \le n \\ 0 & , r > n. \end{cases}$$ என குறிப்பிடலாம்.

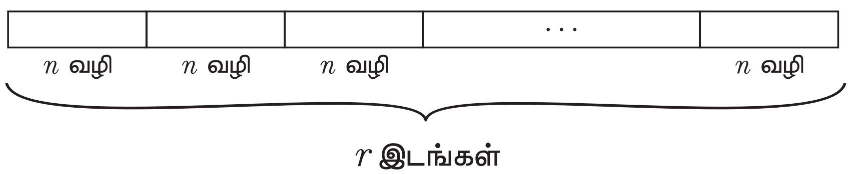
குறிப்பு: $\quad {}^{n}P_{r} = \begin{cases} {}^{n}P_{n} = n! & ,r = n \\ {}^{n}P_{0} = 1 & ,r = 0. \end{cases}$

குறிப்பு: n வெவ்வேறான பொருட்களை ஒரு வரிசையில் ${}^{n}P_{n} = n!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

தேற்றம் 4.3

n வெவ்வேறான பொருட்களிலிருந்து ஒரு சமயத்தில் r பொருட்களை திரும்ப வரும் முறையில் n^{r} வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

நிரூபணம் தேற்றம் 4.1 இல் உள்ளது போல்,



நாம் முதல் இடத்தை நிரப்ப n பொருட்களும், இரண்டாவது இடத்தை நிரப்ப (முதலில் பயன்படுத்திய பொருளை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம்) n பொருட்களும், இதுபோலவே r வது இடத்தை நிரப்ப n பொருட்களும் உள்ளன. பெருக்கல் விதியிலிருந்து வெவ்வேறான n பொருட்களிலிருந்து ஒரு சமயத்தில் பொருட்களை திரும்ப வரும் முறையில் $n \times n \times n \times \ldots \times n$ (r முறைகள்) $= n^{r}$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். $\square$

4.4.2 வரிசை மாற்றங்களின் பண்புகள் (Properties of Permutations)

பண்பு 1 : ${}^{n}P_{n} = {}^{n}P_{n-1}$

நிரூபணம்

$${}^{n}P_{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n! = \frac{n!}{(n-n)!} = {}^{n}P_{n} \qquad \square$$

பண்பு 2 : ${}^{n}P_{r} = n \times {}^{n-1}P_{r-1}$

நிரூபணம்

$$n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^{n}P_{r}$$

இதைப்போலவே தொடர்ந்தால், நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} {}^{n}P_{r} &= n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times (n-1) \times {}^{n-2}P_{r-2} \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times {}^{n-3}P_{r-3} \times \ldots \times (n-(r-1)) \times {}^{n-r}P_{0} \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{{}^{n}P_{r} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1).}$$

$\square$

பண்பு 3 : ${}^{n}P_{r} = {}^{n-1}P_r + r \times {}^{n-1}P_{r-1}$

நிரூபணம்

$$\begin{aligned}
{}^{n-1}P_r + r \times {}^{n-1}P_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{((n-1)-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times (n-r)}{(n-1-r)! \times (n-r)} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times (n-r)}{(n-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times ((n-r)+r)}{(n-r)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} = {}^{n}P_{r}
\end{aligned}$$

□

எடுத்துக்காட்டு 4.25 மதிப்பிடுக : (i) ${}^{4}P_{4}$ (ii) ${}^{5}P_{3}$ (iii) ${}^{8}P_{4}$ (iv) ${}^{6}P_{5}$

தீர்வு:

(i) ${}^{4}P_{4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24.$

(ii) ${}^{5}P_{3} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$

(iii) ${}^{8}P_{4} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680.$

(iv) ${}^{6}P_{5} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 6! = 720.$

எடுத்துக்காட்டு 4.26 ${}^{(n+2)}P_{4} = 42 \times {}^{n}P_{2}$ எனில், n ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
{}^{(n+2)}P_{4} &= 42 \times {}^{n}P_{2} \\
\Rightarrow \frac{{}^{n+2}P_4}{{}^{n}P_2} &= 42 \\
\Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{n(n-1)} &= 42 \\
\Rightarrow (n+2)(n+1) &= 42 = 7 \times 6 \\
\Rightarrow n+2 &= 7 \Rightarrow n = 5.
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.27 ${}^{10}P_{r} = {}^{7}P_{r+2}$ எனில், r ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
{}^{10}P_{r} &= {}^{7}P_{r+2} \\
\frac{10!}{(10-r)!} &= \frac{7!}{(5-r)!}
\end{aligned}$$

$$\frac{10\times9\times8\times7!}{(10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r)\times(5-r)!} = \frac{7!}{(5-r)!}$$

$$(10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r) = 10\times9\times8$$

$$(10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r) = 6\times5\times4\times3\times2$$

$(10\times 9\times 8$ ஐ ஐந்து அடுத்தடுத்த எண்களின் பெருக்கலாக இறங்கு வரிசையில் எழுத$)$

எனவே, $10-r = 6 \Rightarrow r = 4$.

எடுத்துக்காட்டு 4.28 "VOWELS" என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைக் கொண்டு பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கமுடியும்.

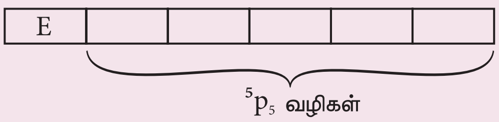
(i) E இல் தொடங்கும் வகையில்

(ii) E இல் தொடங்கி, W இல் முடிக்கும் வகையில்.

தீர்வு:

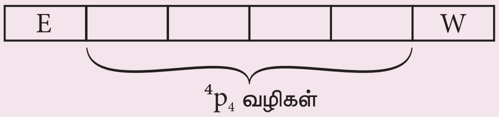
கொடுக்கப்பட்ட வார்த்தையில் 6 எழுத்துகள் (V, O, W, E, L, S) உள்ளன

(i) எல்லா எழுத்துச் சரங்களும் E இல் துவங்க வேண்டும். எனவே, மீதமுள்ள 5 எழுத்துகளை வரிசைப்படுத்த $^5P_5 = 5!$ வழிகள் உள்ளன.



படம் 4.10

ஆகவே, E இல் தொடங்கும் எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை $5! = 120$.



படம் 4.11

(ii) எல்லா எழுத்துச் சரங்களும் E இல் தொடங்கி, W இல் முடிக்க வேண்டும், $5! = 120$.

எனவே, E ஐ முதலிலும், W ஐ கடைசியிலும் வைக்கவேண்டும். மீதமுள்ள 4 எழுத்துகளை $^4P_4 = 4!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

ஆகவே, E இல் தொடங்கி, W இல் முடிக்கும் எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை $4! = 24$.

எடுத்துக்காட்டு 4.29 நான்கு வெவ்வேறான இலக்கங்களைக் கொண்ட 4–இலக்க எண்களை 1,2,3,4 மற்றும் 5 என்ற இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி உருவாக்கும்போது, கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.

(i) இவ்வாறான எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

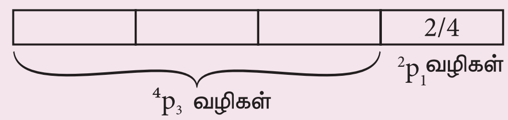
(ii) இவற்றில் எத்தனை எண்கள் இரட்டைப்படை?

(iii) இவற்றில் எத்தனை எண்கள் சரியாக 4 ஆல் வகுபடும்?

தீர்வு:

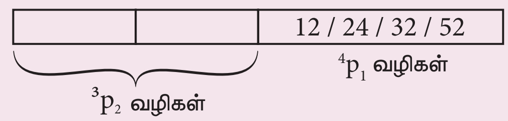
(i) நான்கு–இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கையானது கொடுக்கப்பட்ட 5 இலக்கங்களிலிருந்து 4 இலக்கங்களைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கு சமம். எனவே, இதன் மதிப்பு $^5P_4 = 5\times4\times3\times2 = 120$

(ii) இரட்டைப்படை எண்ணிற்கு கடைசி இலக்கம் 2 அல்லது 4 ஆக இருக்கவேண்டும். எனவே, கடைசி இலக்கத்தை ${}^2P_1$ வழிகளில் நிரப்பலாம். மேலும் மீதி இருக்கும் 3 இடங்களை மீதி இருக்கும் 4 இலக்கங்களை கொண்டு ${}^4P_3$ வழிகளில் நிரப்பலாம். எனவே தேவையான இரட்டைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை ${}^2P_1 \times {}^4P_3 = 2 \times 24 = 48$.



படம் 4.13

(iii) ஓர் எண் 4 ஆல் வகுபட அந்த எண்ணின் கடைசி இரண்டு இலக்கங்கள் 4 ஆல் வகுபட வேண்டும். எனவே, கடைசி இரண்டு இலக்கங்கள் நிரப்ப $12, 24, 32, 52$ (4 வழிகள்) என இருக்க வேண்டும். மீதமுள்ள முதல் இரண்டு இடங்களை மீதமுள்ள 3 இலக்கங்களை கொண்டு ${}^3P_2$ வழிகளில் நிரப்பலாம். எனவே, 4 ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை ${}^4P_1 \times {}^3P_2 = 4 \times 6 = 24$.



படம் 4.14

4.4.3 பொருட்கள் எப்பொழுதும் ஒன்றாக வருதல் (Objects always together (String method))

n வெவ்வேறான பொருட்களில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான m பொருட்கள் எப்பொழுதும் ஒன்றாக வரும் வகையில் உள்ள வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை காண

- ஒன்றாக வரவேண்டிய குறிப்பிட்ட m பொருட்களை கட்டி அதை ஒரு அலகு ஆக கொள்க.
- இப்போது, நம்மிடம் $(n - m + 1)$ பொருட்கள் உள்ளது. இந்த $(n - m + 1)$ பொருட்களை $(n - m + 1)!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.
- பிறகு ஒன்றாக வரவேண்டிய m பொருட்களை தங்களுக்குள் $m!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.
- தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $m! \times (n - m + 1)!$.

4.4.4 எந்த இரண்டு பொருட்களும் ஒன்றாக வராதிருத்தல் (No two things are together (Gap method))

n வெவ்வேறான பொருட்களில், கொடுக்கப்பட்ட எந்த இரு k பொருட்களும் ஒன்றாக வராமலும் மற்றும் மீதமுள்ள $m = n - k$ பொருட்களின் மீது எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாமலும் உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை காண, கீழ்க்காணும் விதிமுறையைப் பின்பற்றுவோம்.

- முதலில், கட்டுப்பாடில்லாத m பொருட்களை ஒரே வரிசையில் வரிசைப்படுத்துக. இந்த m பொருட்களை ${}^mP_m = m!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.
- எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாத m பொருட்களுக்கு இடையே உள்ள இடைவெளிகளை, முதல் மற்றும் கடைசி இடங்களையும் சேர்த்து எண்ண வேண்டும். இவ்வாறான இடைவெளிகள் m ஐ விட ஒன்று அதிகமாக அதாவது $(m + 1)$ இடைவெளிகள் இருக்கும். இந்த $(m + 1)$ இடங்களில் k பொருட்களை ${}^{(m+1)}P_k$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.
- எனவே தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $m! \times {}^{(m+1)}P_k$.

எடுத்துக்காட்டு 4.30 "EQUATION" என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை பயன்படுத்தி

(i) உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வரும் வகையில் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்?

(ii) உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வராத வகையில் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு:

(i) "EQUATION" என்ற வார்த்தையில் 8 எழுத்துகள் உள்ளன. இவற்றில் 5 உயிரெழுத்துகள் (E, U, A, I, O) மற்றும் 3 மெய்யெழுத்துகள் (Q, T, N) உள்ளன. 5 உயிரெழுத்துகளையும் ஒரு எழுத்து போல கருத நம்மிடம் 4 எழுத்துகள் உள்ளன. இவற்றை ${}^4P_4 = 4!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். ஆனால் இந்த ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றத்திலும், உயிரெழுத்துகள் E, U, A, I, O ஆகியவற்றை ${}^5P_5 = 5!$ வழிகளில் தங்களுக்குள் வரிசைப்படுத்தலாம்.

எனவே, பெருக்கல் விதிப்படி தேவையான எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$.

(ii) "EQUATION" என்ற வார்த்தையில் உள்ள 8 எழுத்துகளைக் கொண்டு உருவாக்கும் எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை ${}^8P_8 = 8! = 40320$.

எனவே, உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வராத வகையில் உள்ள எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையை மொத்த எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையிலிருந்து உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வரும் வகையில் உள்ள எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கையை கழித்துப் பெறலாம். ஆகவே, தேவையான எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை $40320 - 2880 = 37440$.

எடுத்துக்காட்டு 4.31 15 மாணவர்கள் எழுதும் ஒரு தேர்வில், 7 மாணவர்கள் கணிதத் தேர்வையும் மீதமுள்ள 8 மாணவர்கள் வெவ்வேறு பாடங்களுக்கான தேர்வையும் எழுதுகின்றனர். கணிதத் தேர்வு எழுதும் எந்த இரு மாணவர்களும் ஒரே வரிசையில் அடுத்தடுத்து இல்லாத வகையில் எத்தனை வழிகளில் அமரவைக்கலாம்?

தீர்வு:

கணிதத்தைத் தவிர மற்ற பாடங்களில் தேர்வு எழுதும் 8 மாணவர்களை ${}^8P_8 = 8!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். இந்த ஒவ்வொரு வரிசைபடுத்தல்களிலும் 9 இடைவெளிகள் இருக்கும். எனவே கணிதத் தேர்வு எழுதும் 7 மாணவர்களை இந்த 9 இடைவெளிகளில் ${}^9P_7$ வழிகளில் அமரவைக்கலாம்.

$$\_O_1\_O_2\_O_3\_O_4\_O_5\_O_6\_O_7\_O_8\_$$

எனவே, பெருக்கல் விதிப்படி தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$8! \times {}^9P_7 = 8! \times \frac{9!}{2!} = \frac{8! \times 9!}{2!}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.32 5 மாணவர்கள் மற்றும் 4 மாணவிகளை ஒரே வரிசையில் எந்த இரு மாணவிகளும் அடுத்தடுத்து வராமல் எத்தனை வழிகளில் அமரவைக்கலாம்.

தீர்வு:

$$\_B_1\_B_2\_B_3\_B_4\_B_5\_$$

5 மாணவர்களை ஒரே வரிசையில் ${}^5P_5 = 5!$ வழிகளில் அமரவைக்கலாம். இந்த ஒவ்வொரு வரிசைப் படுத்தலிலும், 6 இடைவெளிகள் உருவாகும். இந்த, 6 இடங்களில் 4 மாணவிகளை ${}^6P_4$ வழிகளில் அமர வைக்கலாம்.

எனவே, அமரவைக்கும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$5! \times {}^6P_4 = 120 \times 360 = 43200.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.33 4 மாணவர்கள் மற்றும் 4 மாணவிகளை ஒரே வரிசையில் மாணவனும் மாணவியும் அடுத்தடுத்து வருமாறு எத்தனை வழிகளில் நிற்க வைக்கலாம்?

தீர்வு:

4 மாணவர்களை ஒரு வரிசையில் நிற்க வைக்கும் வழிகள் ${}^4P_4 = 4!$ மாணவனை முதலாவதாகக் கொண்டு, இந்த ஒவ்வொரு வரிசையும் 4 இடைவெளிகளை உருவாக்கும். இந்த 4 இடங்களில் 4 மாணவிகளை ${}^4P_4 = 4!$ வழிகளில் அமர வைக்கலாம்.

$$B_1\_B_2\_B_3\_B_4\_ \text{ or } G_1\_G_2\_G_3\_G_4\_$$

எனவே, மாணவனை முதலாவதாக கொண்ட வரிசைகளின் எண்ணிக்கை $4! \times 4!$.

இதுபோலவே, மேற்கூறிய வழிமுறையின்படி மாணவியை முதலாவதாகக் கொண்ட வரிசைகளின் எண்ணிக்கை $4! \times 4!$. எனவே கூட்டல் விதிப்படி, மாணவனையோ அல்லது மாணவியையோ முதலாவதாகக் கொண்ட வரிசை மாற்றங்களின், மொத்த எண்ணிக்கை

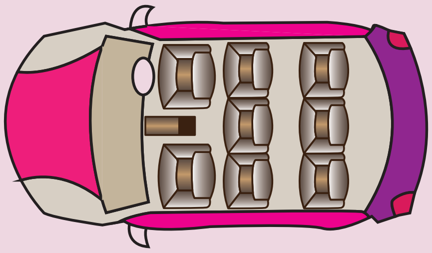
$$(4! \times 4!) + (4! \times 4!) = 2(4!)^2 = 1152.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.34 ஒரு வண்டியில் 8 இருக்கைகள் உள்ளன. முன்வரிசையில் 2 இருக்கைகளும் அதற்கு பின்புறம் இரண்டு வரிசைகளில் ஒவ்வொன்றிலும் மூன்று இருக்கைகள் உள்ளன. அந்த வண்டியானது ஏழு நபர்கள் $F, M, S_1, S_2, S_3, D_1, D_2$ உள்ள ஒரு குடும்பத்திற்கு சொந்தமானது. பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு அக்குடும்பத்தை அந்த வண்டியில் எத்தனை வழிகளில் அமர வைக்கலாம்?

(i) எந்த கட்டுப்பாடும் இல்லாமல்

(ii) F அல்லது M வண்டியை ஓட்ட வேண்டும்

(iii) F வண்டியை ஓட்டும்போது D_1, D_2 சன்னலோர இருக்கையில் அமர்ந்திருக்கவேண்டும்.



தீர்வு:

(i) வண்டியில் உள்ள 8 இருக்கையில் ஒரு இருக்கை ஓட்டுனருக்காக ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது. எந்த கட்டுப்பாடும் இல்லாததால் யார் வேண்டுமானாலும் வேனை ஓட்டலாம். எனவே, ஓட்டுநர் இருக்கையில் அமர ${}^7P_1 = 7$ வழிகள் உள்ளன. மீதமுள்ள 7 இருக்கைகளில் மீதமுள்ள 6 நபர்கள் ${}^7P_6 = 5040$ வழிகளில் அமரலாம். எனவே, வண்டியில் அந்த குடும்பத்தை $7 \times 5040 = 35280$ வழிகளில் அமரவைக்க முடியும்.

(ii) ஓட்டுநர் இருக்கை F அல்லது M ஆல் நிரப்பப்படவுள்ளதால், இதனை நிரப்ப இரண்டு வழிகள் உள்ளன. எனவே, வண்டியில் அந்த குடும்பத்தை $2 \times 5040 = 10080$ வழிகளில் அமரவைக்க முடியும்.

(iii) 5 சன்னலோர இருக்கைகள் மட்டுமே இருப்பதால், D_1 மற்றும் D_2 ஆகியோர் சன்னலோர இருக்கையில் அமர ${}^5P_2 = 20$ வழிகள் உள்ளன. ஓட்டுநர் இருக்கையில் அமர்கிறார், மீதமுள்ள 4 நபர்கள் மீதமுள்ள 5 இருக்கைகளில் அமர ${}^5P_4 = 120$ வழிகள் உள்ளன. எனவே, வண்டியில் அந்த குடும்பம் $20 \times 1 \times 120 = 2400$ வழிகளில் அமரமுடியும்.

அடுத்த கணக்கைப் புரிந்து கொள்ள நாம் **ஆங்கில அகராதியில் வார்த்தையின் தரம்** (*Rank of a word in the English Dictionary*) என்பதை வரையறுப்போம். கொடுக்கப்பட்ட வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் எழுத்துச் சரங்களை ஆங்கில அகராதியில் உள்ள வரிசையின் படி எழுதும் போது, அந்த வார்த்தை வரும் இடம் அதன் தரம் என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 4.35 TABLE என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றம் செய்து கிடைக்கும் எல்லா எழுத்துச் சரங்களையும் ஆங்கில அகராதியில் உள்ளபடி வரிசையாக அமைத்தால், கீழ்க்கண்ட வார்த்தைகளின் தரம் காண்க.

(i) TABLE (ii) BLEAT

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட வார்த்தையின் எழுத்துகள் ஆங்கில அகராதியில் A, B, E, L, T என்ற வரிசையில் அமையும். அகராதியில் A யில் துவங்கும் வார்த்தைகள் தான் முதலில் வரும். முதல் இடத்தில் A ஐ அமைத்து மீதம் உள்ள 4 எழுத்துகளை (B,E,L,T) 4! வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். இதேபோல் தொடர நமக்கு கிடைப்பது,

(i) TABLE என்ற வார்த்தையின் தரம்

A _ _ _ _ $= 4! = 24$ வழிகள்

B _ _ _ _ $= 4! = 24$ வழிகள்

E _ _ _ _ $= 4! = 24$ வழிகள்

L _ _ _ _ $= 4! = 24$ வழிகள்

T A B E L $= 1$ வழி

T A B L E $= 1$ வழி

TABLE என்ற வார்த்தையின் தரம் $4 \times 4! + 1 + 1 = 98$.

(ii) BLEAT என்ற வார்த்தையின் தரம்

A _ _ _ _ $= 4! = 24$ வழிகள்

B A _ _ _ $= 3! = 6$ வழிகள்

B E _ _ _ $= 3! = 6$ வழிகள்

B L A _ _ $= 2! = 2$ வழிகள்

BLEAT $= 1$ வழி

BLEAT என்ற வார்த்தையின் தரம் $24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 39$.

4.4.5 அனைத்தும் வெவ்வேறாக அமையாத பொருட்களின் மீதான வரிசை மாற்றங்கள் (Permuntations of not all distinct objects)

J E E என்ற வார்த்தையை வரிசை மாற்றம் செய்வதாக கொள்வோம். இதில் உள்ள எழுத்துகள் அனைத்தும் வெவ்வேறாக இல்லை. இதில் E என்ற எழுத்து இரண்டு முறை வந்து ஒரே வகையாக அமைந்துள்ளன. தற்காலிகமாக, இந்த இரண்டு E இக்களில் ஒன்றை E_1 எனவும் E_2 மற்றொன்றை எனவும் கொள்வோம். மூன்று வெவ்வேறான எழுத்துக்களால் ஒரே நேரத்தில் உருவாகும் எல்லா வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $3!$ ஆகும்.

E_1, E_2 ஆகியவற்றை வெவ்வேறாக கருதும் போது வரிசை மாற்றங்கள்	E_1, E_2 ஆகியவற்றை ஒரே மாதிரியாக கருதும் போது வரிசை மாற்றங்கள்
$J\,E_1\,E_2$, $J\,E_2\,E_1$	JEE
$E_1\,J\,E_2$, $E_2\,J\,E_1$	EJE
$E_1\,E_2\,J$, $E_2\,E_1\,J$	EEJ

E_1,E_2 என்ற 2 எழுத்துகளை தங்களுக்குள் வரிசை மாற்றம் செய்யும்போது உண்மையில் அதே வரிசை மாற்றம் கிடைப்பதே இதற்கு காரணமாகும். இவை இரண்டும் ஒன்றே ஆதலால், தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{3!}{2!} = 3$.

தேற்றம் 4.4

n பொருட்களில், p பொருட்கள் ஒரே மாதிரியாகவும் மற்றவை அனைத்தும் வெவ்வேறாகவும் உள்ள பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n!}{p!}$.

பொதுவாக, n பொருட்களில், p_1 பொருட்கள் முதல் வகையாகவும், p_2 பொருட்கள் இரண்டாம் வகையாகவும்,... p_k பொருட்கள் k ஆவது வகையாகவும் மற்றபொருட்கள் ஒவ்வொன்றும் வெவ்வேறாகவும் இருப்பின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n!}{p_1! \times p_2! \times \ldots \times p_k!}$. □

எடுத்துக்காட்டு 4.36 BANANA என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை எத்தனை வகைகளில் வரிசைப் படுத்தலாம்?

தீர்வு:

இந்த வார்த்தையில் 6 எழுத்துகள் உள்ளன. இதில் மூன்று A களும், இரண்டு N களும் மேலும் ஒரு B யும் உள்ளது. இவற்றை வரிசைப்படுத்தும் முறைகளின் எண்ணிக்கை $\dfrac{6!}{3! \times 2!} = 60$.

எடுத்துக்காட்டு 4.37 RAMANUJAN என்ற வார்த்தையில் உள்ள உயிர் மற்றும் மெய் எழுத்துகளின் இருப்பிட நிலைகளை மாற்றாமல் எத்தனை வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்?

தீர்வு:

RAMANUJAN என்ற வார்த்தையில் 4 உயிர் எழுத்துகள் (A,A,U,A) உள்ளன. இதில் மூன்று A களும், ஒரு U வும் உள்ளது. மேலும், 5 மெய் எழுத்துகள் (R,M,N,J,N) உள்ளன. இதில், இரண்டு N–களும் மற்றவை வெவ்வேறானதாகவும் உள்ளது. இந்த 4 உயிரெழுத்துக்களை (A,A,A,U) அவற்றிற்குள் $\dfrac{4!}{3!} = 4$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். மேலும் 5 மெய் எழுத்துகளை (R,M,N,J,N) அவற்றிற்குள் $\dfrac{5!}{2!} = 60$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். எனவே, தேவையான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{4!}{3!} \times \dfrac{5!}{2!} = 4 \times 60 = 240$.

எடுத்துக்காட்டு 4.38 ஒரு புகைப்படத்திற்காக ஒரு வரிசையில் மூன்று ஜோடி இரட்டையர்கள் நிற்கிறார்கள். கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு எத்தனை வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

(i) எந்த ஒரு கட்டுப்பாடும் இல்லாமல்

(ii) ஒவ்வொரு நபரும் அவரின் இரட்டையருக்கு அருகில் நிற்க வேண்டும்.

தீர்வு:

(i) எந்த ஒரு கட்டுப்பாடும் இல்லாமல் 6 நபர்களை ${}^{6}P_{6} = 6! = 720$ வழிகளில் நிற்க வைக்கலாம்.

(ii) மூன்று ஜோடி இரட்டையர்களை T_1, T_2, T_3 என்க. ஒவ்வொரு ஜோடி இரட்டையர்களையும் ஒரு அலகாக கொண்டு இவர்களை $3!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். இதில் உள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி இரட்டையர்களையும் அவர்களுக்குள் $2!$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். எனவே, எல்லா வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$.

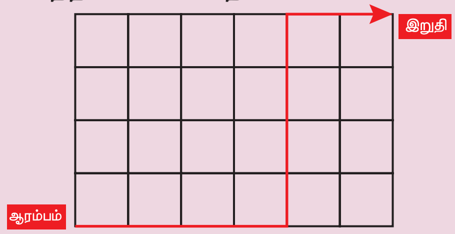
எடுத்துக்காட்டு 4.39 $1,2,3,4,2,1$ என்ற இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி இரட்டைப் படை எண்கள் இரட்டை இடத்தில் வருமாறு எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு:

இதில் காணப்படும் 6 இடங்களில் உள்ள 3 இரட்டைப்படை இடங்களில் $2,4,2$ என்ற இரட்டைப்படை எண்கள் வரவேண்டும். $2,4,2$ என்ற இலக்கங்களை 3 இரட்டைப்படை இடங்களில் $\frac{3!}{2!} = 3$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். மீதமுள்ள, $1,3,1$ என்ற இலக்கங்களை மீதமுள்ள 3 இடங்களில் $\frac{3!}{2!} = 3$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். எனவே, தேவையான எண்களின் எண்ணிக்கை $3 \times 3 = 9$.

எடுத்துக்காட்டு 4.40 படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு போல 6×4 கட்டகத்தில் ஆரம்பத்தில் இருந்து இறுதி வரை செல்ல எத்தனை பாதைகள் உள்ளன?

எத்தனை பாதைகள் உள்ளன?



படம் 4.15

தீர்வு:

ஒவ்வொரு பாதையிலும் 6 கிடைமட்ட நீள அலகுகளும், மற்றும் 4 செங்குத்து நீள அலகுகளும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பாதையிலும் 10 நீள அலகுகள் உள்ளன. இதில் 6 ஒரு வகையிலும் (கிடைமட்டம்) மற்றும் 4 மற்றொரு வகையிலும் (செங்குத்து) உள்ளது.

ஆதலால், மொத்த பாதைகளின் எண்ணிக்கை $\frac{10!}{4! \times 6!} = 210$.

எடுத்துக்காட்டு 4.41 BHASKARA என்ற ஆங்கில வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை ஆங்கில அகராதியில் உள்ளபடி வரிசை மாற்றம் செய்யும்போது B யில் துவங்கும் வார்த்தைகளுக்கு முன்னதாக எத்தனை எழுத்துச் சரங்கள் இருக்கும்?

தீர்வு:

B–க்கு முன்னதாக A யில் துவங்கும் வார்த்தைகள் வரும். எனவே, A யில் துவங்கும் A,A,B,H,K,R,S என்ற எழுத்துகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் எழுத்துச் சரங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{7!}{2!} = 2520$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.42 IITJEE என்ற வார்த்தையில் உள்ள அனைத்து எழுத்துகளையும் எல்லா வழிகளிலும் வரிசை மாற்றம் செய்து உருவாக்கப்படும் எழுத்துச்சரங்களை ஆங்கில அகராதியில் உள்ளவாறு வரிசைப்படுத்தும் போது IITJEE என்ற வார்த்தையின் தரம் காண்க.

தீர்வு:

IITJEE யில் உள்ள எழுத்துகள் அகராதி வரிசையில் E,E,I,I,J,T என்றவாறு இருக்கும். அகராதியில் E யில் துவங்கும் வார்த்தைகள் முதலில் வரும். முதல் இடத்தை E ஆல் நிரப்பி, மீதமுள்ள 5 (E,I,I,J,T) எழுத்துகளை $\frac{5!}{2!}$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

இதுபோல் தொடர நமக்கு கிடைப்பது,

$$\begin{aligned}
&E\,_\,_\,_\,_\,_ = \frac{5!}{2!} &&= 60 \text{ வழிகள்}\\
&E\,_\,_\,_\,_\,_ = 4! &&= 24 \text{ வழிகள்}\\
&I\,I\,E\,_\,_\,_ = 3! &&= 6 \text{ வழிகள்}\\
&I\,I\,J\,_\,_\,_ = \frac{3!}{2!} &&= 3 \text{ வழிகள்}\\
&I\,I\,T\,E\,_\,_ = 2! &&= 2 \text{ வழிகள்}\\
&I\,I\,T\,J\,E\,E = 1 \text{ வழி.}
\end{aligned}$$

எனவே, IITJEE என்ற வார்த்தையின் தரம் $60 + 24 + 6 + 3 + 2 + 1 = 96$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.43 1, 2, 4, 6, 8 என்ற இலக்கங்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் எல்லா 4–இலக்க எண்களின் கூடுதலைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட 5 இலக்கங்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் 4–இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை $^5P_4 = 120$ நாம் முதலில் ஒன்றாம் இடத்தில் உள்ள எல்லா 120 எண்களின் கூடுதலைக் காண்போம். ஒன்றாம் இடத்தில் 1ஐ அமைத்து, மற்ற இடங்களில் மீதமுள்ள 4 எண்களை $^4P_3 = 24$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். இதுபோலவே, 2, 4, 6, 8 ஆகிய இலக்கங்கள் ஒன்றாம் இடத்தில் 24 முறை வருகின்றன. எல்லா 120 எண்களின் ஒன்றாம் இடத்தில் வரும் இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை கிடைக்கும். எனவே,

$$\begin{aligned}
&({}^4P_3 \times 1) + ({}^4P_3 \times 2) + ({}^4P_3 \times 4) + ({}^4P_3 \times 6) + ({}^4P_3 \times 8)\\
&\qquad = {}^4P_3 \times (1 + 2 + 4 + 6 + 8)
\end{aligned}$$

$$= {}^4P_3 \times \text{(இலக்கங்களின் கூடுதல்)}$$

$$= {}^4P_3 \times 21.$$

இதுபோலவே, 10ஆம் இடத்தில் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை ${}^4P_3 \times 21.$ இது 10ஆம் இடத்தில் உள்ளதால் இதன் மதிப்பு ${}^4P_3 \times 21 \times 10.$ இதுபோலவே, 100ஆம் இடம் மற்றும் 1000மாவது இடத்தில் உள்ள எண்களின் மதிப்புகள் முறையே ${}^4P_3 \times 21 \times 100$ மற்றும் ${}^4P_3 \times 21 \times 1000.$ எனவே, $1, 2, 4, 6, 8$ என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு உருவாகும் எல்லா 4–இலக்க எண்களின் கூட்டுத்தொகை

$$({}^4P_3 \times 21) + ({}^4P_3 \times 21 \times 10) + ({}^4P_3 \times 21 \times 100) + ({}^4P_3 \times 21 \times 1000)$$

$$= {}^4P_3(21 \times 1111)$$

$$= 24 \times 21 \times 1111$$

$$= 559944.$$

ஊகித்து உணர்தல் 4.1

n பூச்சியமற்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு உருவாகும் எல்லா r –இலக்க எண்களின் கூடுதல்

$$\{ {}^{n-1}P_{r-1} \times \text{(இலக்கங்களின் கூடுதல்)} \times 111...1 \, (r \text{ முறை}) \}$$

ஊகித்து உணர்தல் 4.2

கொடுக்கப்பட்ட n இலக்கங்களில் 0 ஒரு இலக்கம் எனில், இவற்றைக் கொண்டு உருவாகும் எல்லா r இலக்க எண்களின் கூடுதல்

$$\{ {}^{n-1}P_{r-1} \times \text{(இலக்கங்களின் கூடுதல்)} \times 111...1 \, (r \text{ முறை}) \} -$$
$$\{ {}^{n-2}P_{r-2} \times \text{(இலக்கங்களின் கூடுதல்)} \times 111...1 \, ((r-1) \text{ முறை}) \}.$$

சார்புகளாக வரிசை மாற்றங்கள் (Permutation as Function)

$S_n = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ என்ற முடிவுற்ற கணத்தின் மீதான வரிசை மாற்றமானது $S_n \rightarrow S_n$ –க்கு வரையறுக்கப்பட்ட இருபுற சார்பாகும். எனவே n உறுப்புகளைக் கொண்ட முடிவுறு கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை அக்கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட இருபுற சார்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும். இது துல்லியமாக $n!$ ஆகும். ஆகவே ஒரு கணத்தின் மீதான வரிசை மாற்றங்களை பற்றிப் படிப்பதும், அக்கணத்தின் மீதான இருபுற சார்புகளைப் பற்றிப் படிப்பதும் ஒன்றே ஆகும். S_3–ன் மீதான சில வரிசை மாற்றங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}, ...$$

பயிற்சி 4.2

1. ${}^{(n-1)}P_3 : {}^nP_4 = 1:10$ எனில், n ஐக் காண்க.

2. ${}^{10}P_{r-1} = 2 \times {}^6P_r$ எனில், r ஐக் காண்க.

3. (i) ஒரு நீச்சல் போட்டியில் 8 பேர் கலந்து கொள்கின்றனர். தங்கம், வெள்ளி மற்றும் வெண்கலப் பரிசுகளை எத்தனை வழிகளில் வழங்க இயலும்?

   (ii) மூன்று ஆண்களிடம் 4 சட்டை, 5 மேல் சட்டை மற்றும் 6 தொப்பிகள் உள்ளன. அவற்றை அவர்கள் எத்தனை வழிகளில் அணியலாம்?

4. SIMPLE என்ற வார்த்தையில் உள்ள அனைத்து எழுத்துகளையும் ஒரே நேரத்தில் பயன்படுத்தி எத்தனை வரிசை மாற்றங்களை உருவாக்கலாம்?

5. ஒரு தேர்வில் 10 பல்வாய்ப்பு விடையளி வினாக்கள் உள்ளன. கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்குட்பட்டு எத்தனை வழிகளில் இத்தேர்விற்கு விடையளிக்கலாம்.

   (i) ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் நான்கு வாய்ப்புகள் உள்ளன.

   (ii) முதல் நான்கு வினாக்களுக்கு மூன்று வாய்ப்புகளும் மீதமுள்ள வினாக்களுக்கு ஐந்து வாய்ப்புகளும் உள்ளன.

   (iii) n ஆவது வினாவிற்கு $n+1$ வாய்ப்புகள் உள்ளன.

6. ஒரு மாணவன் 5 பல்வாய்ப்பு விடையளி வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் உள்ள நான்கு வாய்ப்புகளில் ஒன்று சரியானது.

   (i) அதிகபட்சமாக எத்தனை வெவ்வேறான விடைகளை ஒரு மாணவனால் தரமுடியும்?

   (ii) ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் ஒன்றிற்கு மேலான வாய்ப்புகளும் சரியானதாக இருக்கலாம் எனில், இந்த விடை எவ்வாறு மாற்றமடையும்?

7. ARTICLE என்ற வார்த்தையில் உள்ள மெய் எழுத்துகள் இரட்டை இலக்க இடத்தில் வருமாறு எத்தனை எழுத்துச் சரங்கள் உருவாக்க முடியும்?

8. 8 பெண்கள் மற்றும் 6 ஆண்கள் ஓர் வரிசையில் நிற்கிறார்கள்.

   (i) எவரும் எந்த இடத்திலும் நிற்கலாம் என்ற வகையில் எத்தனை வழிகளில் நிற்கலாம்?

   (ii) 6 ஆண்களும் அடுத்தடுத்து வருமாறு எத்தனை வழிகளில் நிற்கலாம்?

   (iii) எந்த இரு ஆண்களும் ஒன்றாக நிற்காமல் எத்தனை வழிகளில் நிற்கலாம்?

9. MISSISSIPPI என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வெவ்வேறான வரிசை மாற்றங்களை உருவாக்கலாம்?

10. $a^2\, b^3\, c^4$ என்ற பெருக்கலில் அடுக்குக் குறிகளைப் பயன்படுத்தாமல் எத்தனை வழிகளில் எழுதலாம்?

11. 4 கணிதப் புத்தகங்கள், 3 இயற்பியல் புத்தகங்கள், 2 வேதியியல் புத்தகங்கள் மற்றும் 1 உயிரியல் புத்தகத்தை ஓர் அலமாரியில் ஒரே பாட புத்தகங்கள் ஒன்றாக வரும் வகையில் எத்தனை வழிகளில் அடுக்கலாம்?

12. SUCCESS என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளில் எல்லா S களும் ஒன்றாக வரும் வகையில் எத்தனை வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்?

13. ஒரு நாணயம் 8 முறை சுண்டப்படுகின்றது.

   (i) வெவ்வேறான தலைகள் மற்றும் பூக்களைக் கொண்ட வரிசைகள் எத்தனை இருக்கும்?

   (ii) ஆறு தலைகள் மற்றும் இரண்டு பூக்கள் கொண்ட வெவ்வேறான வரிசைகள் எத்தனை இருக்கும்?

14. INTERMEDIATE என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்.

    (i) உயிர் எழுத்துகள் மற்றும் மெய் எழுத்துகள் அடுத்தடுத்து வருமாறு

    (ii) எல்லா உயிரெழுத்துகளும் ஒன்றாக வருமாறு

    (iii) உயிரெழுத்துகள் ஒன்றாக வராத வகையில்

    (iv) எந்த இரு உயிரெழுத்துகளும் ஒன்றாக வராத வகையில்

15. $1, 1, 2, 3, 3$ மற்றும் 4 என்ற இலக்கங்கள் தனித்தனியாக அட்டையில் எழுதப்பட்டுள்ளது. ஒரு 6–இலக்க எண்ணை அமைக்க இந்த ஆறு அட்டைகளையும் வரிசைப்படுத்தும்போது

    (i) எத்தனை வெவ்வேறான 6–இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்?

    (ii) இவற்றில் எத்தனை 6–இலக்க எண்கள் இரட்டைப்படை?

    (iii) இவற்றில் எத்தனை 6–இலக்க எண்கள் 4 ஆல் வகுபடும்?

16. GARDEN என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்திக் கிடைக்கும் எழுத்துச் சரங்களை ஆங்கில அகராதியில் உள்ளது போன்று வரிசைப்படுத்தும்போது, கீழ்க்காணும் வார்த்தைகளின் தரத்தைக் காண்க. (i) GARDEN (ii) DANGER

17. THING என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்தி எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை பெறலாம். மேலும், இதனை ஆங்கில அகராதியில் உள்ளது போன்று வரிசைப்படுத்தும்போது 85 ஆவது எழுத்துச் சரம் என்னவாக இருக்கும்?

18. FUNNY என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்திக் கிடைக்கும் எழுத்துச் சரங்களை ஆங்கில அகராதியில் உள்ளது போன்று வரிசைப்படுத்தும்போது FUNNY என்ற வார்த்தையின் தரம் காண்க.

19. $1, 2, 3, 4$ மற்றும் 5 என்ற இலக்கங்கள் மீண்டும் திரும்ப வராத வகையில் உருவாகும் எல்லா 4–இலக்க எண்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

20. $0, 2, 5, 7, 8$ என்ற இலக்கங்கள் மீண்டும் வராத வகையில் உருவாக்கப்படும் எல்லா 4–இலக்க எண்களின் கூட்டுத் தொகையை காண்க.

4.5 சேர்வுகள் (Combinations)

A,B,C மற்றும் D எனும் ஏதேனும் நான்கு நபர்களில் மூன்று நபர்களைத் தேர்வு செய்து ஒரு குழு அமைப்பதாகக் கொள்வோம். இந்த தேர்வினை எத்தனை வழிகளில் செய்யலாம்? எடுத்துக்காட்டாக A,B,C என்பது ஒரு தேர்வு. இங்கு தேர்வு செய்த உறுப்பினர்களின் வரிசை முக்கியமல்ல. எனவே, A,B,C என்பதும் B,A,C அல்லது C,A,B என்பதும் அதே மூன்று நபர்களைத் தேர்வு செய்வதால் ஒன்றே ஆகும். எனவே, சாத்தியமான வெவ்வேறான தேர்வுகள் A,B,C; A,B,D; A,C,D; மற்றும் B,C,D ஆகும். எனவே, 4 நபர்களில் இருந்து 3 நபர்களை 4 வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இந்த ஒவ்வொரு தேர்வும் 4 வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து ஒரு சமயத்தில் 3 பொருட்களைத் தேர்வு செய்யும் சேர்வு எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றது.

நான்கு நபர்களில் இருந்து இரண்டு நபர்களை தேர்ந்தெடுப்பதாக கொள்வோம். சாத்தியமான தேர்வுகள் A,B: A,C: A,D: B,C: B,D: C,D எனவே, 4 வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து

2 பொருட்களை தேர்வு செய்யும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். n வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து r பொருட்களைத் தேர்வு செய்யும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கையை ${}^{n}C_{r}$ என்கிறோம். மேற்கூறியவற்றிலிருந்து நாம் ${}^{4}C_{3} = 4$ மற்றும் ${}^{4}C_{2} = 6$ என அறியலாம். ${}^{4}C_{3}$ என்பது 4 வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து ஒரு சமயத்தில் 3 பொருட்களைத் தேர்வு செய்யும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை ஆகும். ஒவ்வொரு மூன்று பொருட்களின் சேர்விலும் $3!$ வழிகளில் இவற்றை வரிசைப்படுத்தலாம். எனவே, 4 வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து ஒரு சமயத்தில் 3 பொருட்களை வரிசைப்படுத்தும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ${}^{4}C_{3} \times 3!$ ஆகும். மேலும் இது ${}^{4}P_{3}$ –க்கு சமமானதாகும். எனவே, ${}^{4}P_{3} = {}^{4}C_{3} \times 3!$.

பொதுவாக, வரிசை மாற்றங்களுக்கும் சேர்வுகளுக்கும் இடையேயான முக்கியமான தொடர்பினை கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்,

$${}^{n}P_{r} = {}^{n}C_{r} \times r!$$

இயல்பாக வரிசை மாற்றம் மற்றும் சேர்வு பற்றி படிக்கும் எவருக்கும் ஒரு குழப்பம் வர வாய்ப்புள்ளது. எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்கப்பட்டுள்ள கீழ்க்காணும் அட்டவணையானது இத்தகைய குழப்பத்தை நீக்க பெரிதும் உதவி புரியும்.

வ. எண்	விளக்கம்	வரிசை மாற்றம்	சேர்வு
1	வரையறை	பொருட்களை வரிசைப்படுத்துதல் அல்லது அடுக்குதல்களின் எண்ணிக்கை.	தேர்வு செய்யும் அல்லது குழுக்களை உருவாக்கும் முறைகளின் எண்ணிக்கை.
2	பயன்படுத்தப்படும் இடம்	பொருட்களின் வரிசை முக்கியத்துவம் பெறும்போது	பொருட்களின் வரிசை முக்கியத்துவம் பெறாதபோது
3	குறிப்பிடும் முறை	${}^{n}P_{r}$	${}^{n}C_{r}$
		எடுத்துக்காட்டுகள்	
4	மட்டைப்பந்து விளையாட்டில்	15 மட்டை வீரர்களிலிருந்து 11 மட்டை வீரர்கள் கொண்ட வரிசைகளின் எண்ணிக்கை.	15 மட்டை வீரர்களிலிருந்து 11 வீரர்கள் கொண்ட அணிகளின் எண்ணிக்கை.
5	பரிசு வழங்குதலில்	3 வெவ்வேறான பரிசுகளை வழங்கும் முறைகளின் எண்ணிக்கை.	3 ஒரே மாதிரியான பரிசுகளை வழங்கும் முறைகளின் எண்ணிக்கை.
6	குழுவினை உருவாக்குதல்	13 உறுப்பினர்களில் இருந்து ஒரு தலைவர் மற்றும் துணைத் தலைவர் தேர்வு செய்யும் முறைகளின் எண்ணிக்கை	13 உறுப்பினர்களில் இருந்து 2 உறுப்பினர்கள் கொண்ட குழுவை உருவாக்கும் முறைகளின் எண்ணிக்கை
7	பொருட்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல்	15 வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து 3 பொருட்களை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக தேர்வு செய்யும் முறைகளின் எண்ணிக்கை	15 வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து 3 பொருட்களை ஒரே சமயத்தில் தேர்வு செய்யும் முறைகளின் எண்ணிக்கை

தேற்றம் 4.5

n வெவ்வேறான பொருட்களிலிருந்து ஒரு சமயத்தில் r பொருட்களை தேர்வு செய்யும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை ${}^{n}C_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \leq r \leq n$.

நிரூபணம் வரிசை மாற்றங்களுக்கும், சேர்வுகளுக்கும் இடையேயான தொடர்பிலிருந்து நாம் ${}^{n}C_{r} = \dfrac{{}^{n}P_{r}}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (வரிசை மாற்றத்தின் முடிவிலிருந்து) எனப் பெறலாம்.

4.5.1 சேர்வுகளின் பண்புகள்

பண்பு 1 :

(i) ${}^{n}C_{0} = 1$ (ii) ${}^{n}C_{n} = 1$ (iii) ${}^{n}C_{r} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$

நிரூபணம்

(i) ${}^{n}C_{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

(ii) ${}^{n}C_{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$

(iii) ${}^{n}C_{r} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$.

பண்பு 2 : ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$

நிரூபணம்

$${}^{n}C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^{n}C_{r}$$

என்பதிலிருந்து, ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$ எனக் காணலாம்.

பண்பு 3 :

${}^{n}C_{x} = {}^{n}C_{y}$ எனில் $x = y$ அல்லது $x + y = n$.

நிரூபணம்

பண்பு 2–ன் படி ${}^{n}C_{y} = {}^{n}C_{n-y}$ எனவே, ${}^{n}C_{x} = {}^{n}C_{y} = {}^{n}C_{n-y}$ –யிலிருந்து

$x = y$ அல்லது $x = n - y$ ஆகவே, $x = y$ அல்லது $x + y = n$

பண்பு 4 :

${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$

நிரூபணம்

சேர்வுகளுக்கான முடிவிலிருந்து பெறுவது,

$$\begin{aligned} {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} &= \frac{n!}{r!.(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-(r-1))!} \\ &= \frac{n!}{r! \times (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r+1)!} \\ &= \frac{n!}{r.(r-1)! \times (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-r)!(n-r+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{(n-r+1)}\right)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \frac{(n-r+1+r)}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \frac{(n+1)}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r! \times (n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r. \qquad \square$$

பண்பு 5 :

$${}^{n}C_r = \frac{n}{r} \times {}^{(n-1)}C_{(r-1)}$$

நிரூபணம்

$$\frac{n}{r} \times {}^{(n-1)}C_{(r-1)} = \frac{n}{r}\frac{(n-1)!}{(r-1)! \times ((n-1)-(r-1))!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!} = {}^{n}C_r. \qquad \square$$

எடுத்துக்காட்டு 4.44 கீழ்க்காண்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) ${}^{10}C_3$ (ii) ${}^{15}C_{13}$ (iii) ${}^{100}C_{99}$ (iv) ${}^{50}C_{50}$

தீர்வு:

(i) $${}^{10}C_3 = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

(ii) $${}^{15}C_{13} = \frac{15!}{2! \times 13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{2 \times 1 \times 13!}$$

$$= \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105$$

(iii) $${}^{100}C_{99} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$$

(iv) $${}^{50}C_{50} = \frac{50!}{50! \times 0!} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 4.45 பண்பு 5 பயன்படுத்தி ${}^{5}C_2$ மற்றும் ${}^{7}C_3$ –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$${}^{n}C_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}$$

$n = 5$ மற்றும் $r = 2$ என பிரதியிட

$${}^{5}C_2 = \frac{5}{2} \times {}^{4}C_1 = \frac{5}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$n = 7$ மற்றும் $r = 3$ என பிரதியிட

$${}^{7}C_3 = \frac{7}{3} \times {}^{6}C_2 = \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times {}^{5}C_{2-1}$$

$$= \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times {}^{5}C_1 = \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{1}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

எடுத்துக்காட்டு 4.46 ${}^{n}C_4 = 495$ எனில், n–ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு:

$$ {}^{n}C_4 = 495 $$

$$ \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)}{4\times3\times2\times1} = 495 $$

$$ \Rightarrow n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3) = 495\times4\times3\times2\times1 $$

495ஐ காரணிப்படுத்த $495 = 3\times3\times5\times11$ மேலும், இந்த பெருக்கலை 4 அடுத்தடுத்த எண்களின் பெருக்கலாக இறங்கு வரிசையில் எழுத $n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3) = 12\times11\times10\times9$ என பெறுகிறோம். n –ஐ பெரிய எண்ணுடன் சமப்படுத்த, $n = 12$ எனக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.47 ${}^{n}P_r = 11880$ மற்றும் ${}^{n}C_r = 495$ எனில் n மற்றும் r-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$\frac{{}^{n}P_r}{{}^{n}C_r} = r!$ என அறிவோம்.

எனவே, $r! = \frac{11880}{495} = 24 = 4!$.

இதிலிருந்து, $r = 4$ எனப் பெறலாம். எனவே, $r = 4$ எனப் பிரதியிட ${}^{n}C_4 = 495$ என கிடைக்கும் எடுத்துக்காட்டு 4.46 இல் இருந்து $n = 12$ எனப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.48 ${}^{24}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(28-r)}C_3 = {}^{29}C_4$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$ \begin{aligned} {}^{24}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(28-r)}C_3 &= {}^{24}C_4 + {}^{28}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{25}C_3 + {}^{24}C_3 \\ &= {}^{24}C_4 + {}^{24}C_3 + {}^{25}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\ &= {}^{25}C_4 + {}^{25}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\ &= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\ &= {}^{27}C_4 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\ &= {}^{28}C_4 + {}^{28}C_3 \\ &= {}^{29}C_4. \end{aligned} $$

எடுத்துக்காட்டு 4.49 ${}^{10}C_2 + 2\times{}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 = {}^{12}C_4$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$ \begin{aligned} {}^{10}C_2 + 2\times{}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 &= {}^{10}C_2 + ({}^{10}C_3 + {}^{10}C_3) + {}^{10}C_4 \\ &= ({}^{10}C_2 + {}^{10}C_3) + ({}^{10}C_3 + {}^{10}C_4) \\ &= {}^{11}C_3 + {}^{11}C_4 \\ &= {}^{12}C_4. \end{aligned} $$

எடுத்துக்காட்டு 4.50 ${}^{(n+2)}C_7 : {}^{(n-1)}P_4 = 13:24$ எனில், n–ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
{}^{(n+2)}C_7 : {}^{(n-1)}P_4 &= 13:24 \\
\frac{{}^{(n+2)}C_7}{{}^{(n-1)}P_4} &= \frac{13}{24} \\
\frac{(n+2)!}{(n-5)!\times 7!} \times \frac{(n-5)!}{(n-1)!} &= \frac{13}{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!\times 7!} = \frac{13}{24} \\
(n+2)(n+1)(n) &= \frac{13}{24}\times 7! = \frac{13}{24}\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 \\
(n+2)(n+1)(n) &= 13\times 14\times 15 \\
n+2 &= 15 \Rightarrow n = 13.
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.51 ஓர் உணவு விடுதியில் பழக் கலவை (*Fruit Salad*) செய்ய ஆப்பிள், வாழை, கொய்யா, மாதுளை, திராட்சை, பப்பாளி மற்றும் அன்னாசி பழங்களில் இருந்து 4 பழங்களை பயன்படுத்துகிறார்கள். பழக் கலவைகளை மொத்தம் எத்தனை வழிகளில் செய்ய முடியும்?

தீர்வு:

7 பழங்களில் இருந்து 4 பழங்களை பழக் கலவை செய்ய தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். எனவே, சாத்தியமான பழக் கலவைகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ${}^{7}C_4 = {}^{7}C_3 = 35$.

எடுத்துக்காட்டு 4.52 ஒரு கணித மன்றத்தில் 15 உறுப்பினர்கள் உள்ளனர். இதில் 8 உறுப்பினர்கள் பெண்கள். பாதி பெண்களாக இருக்குமாறு ஒரு போட்டிக்கு 6 நபர்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். எத்தனை சாத்தியமான வழிகளில் இவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

தீர்வு:

கணித மன்றத்தில் 8 பெண்கள் மற்றும் 7 ஆண்கள் உள்ளனர். இதில் 6 உறுப்பினர்களில் பாதி பெண்கள் $(3$ பெண்கள் மற்றும் 3 மற்றவர்கள்$)$ இருக்குமாறு ${}^{8}C_3 \times {}^{7}C_3 = 56\times 35 = 1960$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.53 20 வியாபார முத்திரை மகிழுந்துகளில், மகிழுந்துகளை மதிப்பீடு செய்யும் நிறுவனம் 5 வியாபார முத்திரை மகிழுந்துகளை முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது மற்றும் ஐந்தாவது மிகச்சிறந்த வியாபார முத்திரை மகிழுந்துகள் எனவும், மேலும் மீதமுள்ள 15 இல் 7 ஐ தேர்ந்தெடுத்து ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய வகையிலுள்ளவை எனக் கூற எத்தனை வழிகள் உள்ளன?

தீர்வு:

20 வியாபார முத்திரை மகிழுந்துகளில் 5 மகிழுந்துகளை முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது மற்றும் ஐந்தாவது என மொத்தம் ${}^{20}P_5$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். மீதமுள்ள 15 வியாபார முத்திரை மகிழுந்துகளில் 7 ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய வகையிலுள்ளன என கூற ${}^{15}C_7$ வழிகள் உள்ளன. எனவே பெருக்கல் விதிப்படி, ${}^{20}P_5 \times {}^{15}C_7$ வழிகளில் இதனைச் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.54 25 மாணவர்கள் கொண்ட வகுப்பறையில் 10 மாணவர்களை சுற்றுலா பயணத்திற்காக தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இதில் 4 மாணவர்கள் எல்லோரும் ஒன்றாக வருவது அல்லது ஒன்றாக வராமல் இருப்பது என முடிவெடுக்கிறார்கள். சுற்றுலா பயணத்திற்கு எத்தனை வழிகளில் மாணவர்களை தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

தீர்வு:

இதில் இரண்டு சாத்தியக்கூறுகள் உள்ளன.

(i) 4 மாணவர்களும் ஒன்றாக சுற்றுலா பயணத்திற்கு வருவதானால், மீதமுள்ள 6 மாணவர்களை 21 மாணவர்களில் இருந்து ${}^{21}C_6 = \dfrac{21!}{6! \times 15!}$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

(ii) 4 மாணவர்களும் ஒன்றாக சுற்றுலா பயணத்திற்கு வரவில்லை எனில், 10 மாணவர்களை மீதமுள்ள 21 மாணவர்களில் இருந்து ${}^{21}C_{10} = \dfrac{21!}{10! \times 11!}$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எனவே, மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை ${}^{21}C_6 + {}^{21}C_{10} = \dfrac{21!}{6! \times 15!} + \dfrac{21!}{10! \times 11!}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.55 ஒரு டஜன் ஆப்பிள் பழங்கள் உள்ள ஒரு பெட்டியில் ஒரு அழுகிய ஆப்பிள் உள்ளது. இவற்றில் 3 ஆப்பிள்களை ஒரே சமயத்தில் எடுக்கும்போது, எத்தனை வழிகளில் நல்ல ஆப்பிள்களை மட்டும் பெறமுடியும்?

தீர்வு:

12 ஆப்பிள்களில் இருந்து 3 பழங்களை ${}^{12}C_3 = 220$ வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்.

12 ஆப்பிள்களில் இருந்து 3 ஆப்பிள்களைத் தேர்வு செய்யும் போது ஒரு அழுகிய ஆப்பிளை தேர்வு செய்யும் எண்ணிக்கை என்பது ஒரு அழுகிய ஆப்பிளை தேர்வு செய்து மற்ற 2 ஆப்பிள்களை மீதமுள்ள 11 நல்ல ஆப்பிள்களில் இருந்து ${}^{11}C_2 = 55$ வழிகளில் தேர்வு செய்யும் எண்ணிக்கை ஆகும்.

எனவே, அனைத்தும் நல்ல பழங்களாக கிடைக்கும் முறைகளின் எண்ணிக்கை

$${}^{12}C_3 - {}^{11}C_2 = 220 - 55 = 165.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.56 ஒரு வினாத்தாளில் உள்ள 8 வினாக்களில் 4 வினாக்கள் பகுதி அ –விலும் 4 வினாக்கள் பகுதி ஆ–விலும் உள்ளன. தேர்வு எழுதுபவர் 5 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும். கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளை நிறைவுசெய்யும் வகையில் எத்தனை வழிகளில் இதனைச் செய்யலாம்.

(i) இரு பகுதிகளிலிருந்தும் எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாமல் எத்தனை வினாக்களை வேண்டுமானாலும் தேர்வு செய்யலாம்.

(ii) குறைந்தபட்சம் இரண்டு வினாக்களையாவது பகுதி அ –வில் இருந்து எழுதவேண்டும்.

தீர்வு:

(i) எந்த கட்டுப்பாடும் இல்லாமல் : பகுதி அ மற்றும் பகுதி ஆ –வில் உள்ள மொத்த 8 வினாக்களில் 5 வினாக்களை ${}^{8}C_5 = {}^{8}C_3 = 56$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

(ii) குறைந்தபட்சம் இரண்டு வினாக்களுக்கு பகுதி அ–வில் விடையளித்தல்: இக்கட்டுப்பாட்டிற்கு சாதகமாக உள்ள வாய்ப்புகள் பின்வருமாறு அட்டவணை படுத்தப்பட்டுள்ளது.

பகுதி அ	பகுதி ஆ	சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
2	3	${}^4C_2 \times {}^4C_3$
3	2	${}^4C_3 \times {}^4C_2$
4	1	${}^4C_4 \times {}^4C_1$

எனவே, விடையளிக்கும் விதங்களின் எண்ணிக்கை

$${}^4C_2 \times {}^4C_3 + {}^4C_3 \times {}^4C_2 + {}^4C_4 \times {}^4C_1 = 24 + 24 + 4 = 52.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.57 7 மெய்யெழுத்துக்கள் மற்றும் 4 உயிரெழுத்துகளில் இருந்து 3 மெய் எழுத்துகள் மற்றும் 2 உயிரெழுத்துக்கள் உள்ள எழுத்துச் சரங்கள் எத்தனை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு:

7 மெய்யெழுத்துக்களில் இருந்து 3 மெய் எழுத்துகளையும், மேலும், 4 உயிரெழுத்துக்களில் இருந்து 2 உயிரெழுத்துக்களையும் ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். ஒவ்வொரு எழுத்துச் சரத்திலும் 5 எழுத்துகள் உள்ளன. அவற்றை தங்களுக்குள் $5! = 120$ வழிகளில் வரிசை மாற்றம் செய்யலாம். எனவே, தேவையான வழிகள் ${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times 5! = 35 \times 6 \times 120 = 25200$.

எடுத்துக்காட்டு 4.58 PROPOSITION எனும் வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை பயன்படுத்தி 5 எழுத்துகளில் எத்தனை எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்.

தீர்வு:

இதில் 11 எழுத்துகள் உள்ளன. இதில் 4 வெவ்வேறான எழுத்துகள் (R,S,T,N) 2 ஒரே மாதிரியான எழுத்துகள் கொண்ட 2 தொகுப்புகள் (PP, II) மற்றும் 3 ஒரே எழுத்துகளை கொண்ட ஒரு தொகுப்பு (OOO) ஆகியவை உள்ளன.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையானது, மேற்கண்ட தொகுப்பிற்கு சாதகமான பல்வேறு சேர்வுகளையும் மற்றும் அதற்கான வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கையையும் தருகின்றது.

வ. எண்	எழுத்துகளின் வாய்ப்புகள்	தேர்வுகள்	வரிசை படுத்துதல்கள்
1	5 வெவ்வேறானவை (R,S,T,N,P,I,O)	${}^7C_5$	${}^7C_5 \times 5! = 2520$
2	3 ஒரே எழுத்துகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுப்பு (OOO), ஒரே மாதிரியான 2 எழுத்துகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுப்பு (PP,II)	${}^1C_1 \times {}^2C_1$	${}^1C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 20$
3	3 ஒரே மாதிரியான எழுத்துகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுப்பு (OOO), 2 வெவ்வேறானவை (R,S,T,N,P,I)	${}^1C_1 \times {}^6C_2$	${}^1C_1 \times {}^6C_2 \times \frac{5!}{3!} = 300$

4	ஒரே மாதிரியான 2 எழுத்துகளைக் கொண்ட இரண்டுத் தொகுப்புகள் (PP,II,OO), 1 வெவ்வேறானது $(R,S,T,N$ மற்றும் மீதமுள்ள ஒன்று ஒரே மாதிரியான 2 எழுத்து தொகுப்பிலிருந்து$)$	${}^{3}C_{2}\times{}^{5}C_{1}$	${}^{3}C_{2}\times{}^{5}C_{1}\times\dfrac{5!}{2!\times 2!}=450$
5	ஒரே மாதிரியான 2 எழுத்துகளை கொண்ட ஒரு தொகுப்பு (PP,II,OO), 3 வெவ்வேறானவை $(R,S,T,N$ மற்றும் மீதமுள்ள இரண்டு ஒரே மாதிரியான 2 எழுத்து தொகுப்பிலிருந்து$)$	${}^{3}C_{1}\times{}^{6}C_{3}$	${}^{3}C_{1}\times{}^{6}C_{3}\times\dfrac{5!}{2!}=3600$

ஆகவே, மொத்த எழுத்துச்சரங்களின் எண்ணிக்கை

$$2520+20+300+450+3600=6890.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.59 m இணையான கோடுகளின் ஒரு தொகுப்பு மற்றொரு n இணையான கோடுகளின் ஒரு தொகுப்பை (முதல் தொகுப்பில் உள்ள கோடுகளுக்கு இணையில்லாத) வெட்டும் போது உருவாகும் பின்னல் அமைப்பில் (*lattice structure*) உள்ள இணைகரங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு:

m எண்ணிக்கையுள்ள முதல் தொகுப்பிலிருந்து 2 கோடுகளையும் n எண்ணிக்கையுள்ள இரண்டாம் தொகுப்பிலிருந்து 2 கோடுகளையும் தேர்வு செய்து ஓர் இணைகரத்தை உருவாக்கலாம். எனவே, மொத்த இணைகரங்களின் எண்ணிக்கை ${}^{m}C_{2}\times{}^{n}C_{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.60 n பக்கங்கள் உள்ள ஒரு பலகோணத்திற்கு எத்தனை மூலைவிட்டங்கள் இருக்கும்?

தீர்வு:

n பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு பல கோணத்தில் n முனைப்புள்ளிகள் இருக்கும். பல கோணத்தின் இரண்டு முனைப்புள்ளிகளை இணைக்கும்போது ஒரு பக்கம் அல்லது ஒரு மூலைவிட்டம் கிடைக்கும். இரண்டு முனைப்புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டுத்துண்டுகளின் எண்ணிக்கை ${}^{n}C_{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$. இந்த கோடுகளில், பல கோணத்தின் n பக்கங்களும் உள்ளது. எனவே, பலகோணத்தின் மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n(n-1)}{2}-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$.

குறிப்பாக ஒரு ஐங்கோணம் மற்றும் எழுகோணம் ஆகியவற்றின் மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கைகள் முறையே $\dfrac{5(5-3)}{2}=5$ மற்றும் $\dfrac{7(7-3)}{2}=14$.

பயிற்சி 4.3

1. ${}^{n}C_{12} = {}^{n}C_{9}$ எனில், ${}^{21}C_{n}$ ஐக் காண்க?

2. ${}^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$ எனில், r ஐக் காண்க?

3. ${}^{n}P_{r} = 720$ மற்றும் ${}^{n}C_{r} = 120$ எனில், n, r ஐக் காண்க?

4. நிறுவுக ${}^{15}C_{3} + 2 \times {}^{15}C_{4} + {}^{15}C_{5} = {}^{17}C_{5}$.

5. நிறுவுக ${}^{35}C_{5} + \sum_{r=0}^{4} {}^{(39-r)}C_{4} = {}^{40}C_{5}$.

6. ${}^{(n+1)}C_{8} : {}^{(n-3)}P_{4} = 57 : 16$ எனில், n ஐக் காண்க?

7. நிறுவுக ${}^{2n}C_{n} = \dfrac{2^n \times 1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{n!}$.

8. $1 \le r \le n$ எனில் $n \times {}^{(n-1)}C_{r-1} = (n-r+1) \times {}^{n}C_{r-1}$ என நிறுவுக.

9. (i) ஒரு கபடி பயிற்சியாளரிடம் 14 விளையாட்டு வீரர்கள் விளையாட தயார் நிலையில் உள்ளனர். 7 விளையாட்டு வீரர்களைக் கொண்ட எத்தனை வெவ்வேறான குழுக்களை அவர் அமைக்கலாம்?

   (ii) ஒரு விருந்தில் 15 நபர்கள் உள்ளனர். எந்த இரு நபர்களும் தங்களுக்குள் கைகுலுக்கிக் கொள்கிறார்கள் எனக் கொண்டால், அந்த விருந்தில் எத்தனை கைகுலுக்கல் நிகழும்?

   (iii) ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள 20 புள்ளிகள் வழியே எத்தனை நாண்களை வரைய முடியும்?

   (iv) ஒரு வண்டி நிறுத்தும் இடத்தில் ஒரு வருட பழைய மகிழுந்துகள் 100 நிறுத்தப்பட்டுள்ளன. அந்த மகிழுந்துகளின் மாசு கட்டுப்பாட்டுக் கருவிகள் எவ்வாறு செயல்படுகின்றன என்பதை சோதனை செய்ய ஏதேனும் ஐந்து மகிழுந்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். எத்தனை விதமாக இந்த ஐந்து மகிழுந்துகளை தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

   (v) 3 ஆண்கள், 2 பெண்கள் மற்றும் 1 திருநங்கை ஆகியோர்களை 5 ஆண்கள், 2 பெண்கள் மற்றும் 2 திருநங்கைகளில் இருந்து எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

10. கீழ்க்காணும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை உள்ள கணங்களின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

    [விடை குறிப்பு: ${}^{n}C_{0} + {}^{n}C_{1} + {}^{n}C_{2} + \ldots + {}^{n}C_{n} = 2^n$]

    (i) 4 உறுப்புகள் (ii) 5 உறுப்புகள் (iii) n உறுப்புகள்

11. ஓர் அறக்கட்டளையில் 25 உறுப்பினர்கள் உள்ளனர்.

    (i) இவர்களில் 3 அதிகாரிகளை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

    (ii) ஒரு தலைவர், ஒரு உப தலைவர் மற்றும் ஒரு செயலரை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

12. ஒரு குழுவில் உள்ள 10 நபர்களில் ஒரு தலைவர் மற்றும் ஒரு செயலர் உள்ளடக்கி 6 நபர்களை எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

13. 12 வெவ்வேறான புத்தகங்களில் 5 புத்தகங்களை கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

    (i) இரண்டு குறிப்பிட்ட புத்தகங்களை எப்பொழுதுமே தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

    (ii) இரண்டு குறிப்பிட்ட புத்தகங்களை எப்பொழுதுமே தேர்ந்தெடுக்கக் கூடாது.

14. 5 ஆசிரியர்கள் மற்றும் 20 மாணவர்களில் இருந்து 2 ஆசிரியர்கள் மற்றும் 3 மாணவர்களைக் கொண்டு ஒரு குழு அமைக்கப்படுகின்றது. எத்தனை வழிகளில் இதனைச் செய்யலாம்? மேலும் இவற்றில் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு எத்தனை குழுக்களைக் காணலாம்?

    (i) அக்குழுவில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆசிரியர் உள்ளவாறு.

    (ii) அக்குழுவில் குறிப்பிட்ட மாணவர் வராதவாறு.

15. ஒரு மாணவர் ஒரு தேர்வில் 9 வினாக்களில் 2 வினாக்களுக்கு கண்டிப்பாக விடையளிக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனையுடன் 5 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும். எத்தனை வழிகளில் அந்த வினாக்களுக்கு ஒரு மாணவர் விடையளிக்கலாம்?

16. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 5 சீட்டுகளைத் தேர்வு செய்யும் ஒவ்வொரு சேர்விலும் எப்பொழுதும் மூன்று ஏஸ்கள் $(aces)$ உள்ளவாறு எத்தனை சேர்வுகள் இருக்கும் எனக் காண்க.

17. 7 இந்தியர்கள் மற்றும் 5 அமெரிக்கர்களில் இருந்து இந்தியர்கள் அதிக அளவில் இருக்கும்படியான 5 நபர்களைக் கொண்ட எத்தனை விதமான குழுக்களை அமைக்கலாம்?

18. 8 ஆண்கள் மற்றும் 4 பெண்களில் இருந்து 7 பேர் கொண்ட குழு அமைக்கப்படுகின்றது. கீழ்க்காணும் நிபந்தனையை பூர்த்தி செய்யும் வகையில் எத்தனை குழுக்களை அமைக்கலாம்.

    (i) சரியாக 3 பெண்கள் இருக்குமாறு.

    (ii) குறைந்தபட்சம் 3 பெண்கள் இருக்குமாறு.

    (iii) அதிக பட்சம் 3 பெண்கள் இருக்குமாறு.

19. ஒரு ஆணுக்கு 4 பெண்கள் மற்றும் 3 ஆண்கள் என 7 உறவினர்கள் உள்ளனர். அவரது மனைவிக்கு 3 பெண்கள் மற்றும் 4 ஆண்கள் என 7 உறவினர்கள் உள்ளனர். ஒரு இரவு விருந்திற்கு 3 பெண்கள் மற்றும் 3 ஆண்கள் அழைக்கப்படும் போது, ஆணின் உறவினர்கள் 3 பேர் மற்றும் அவரது மனைவியின் உறவினர்கள் 3 பேர் என்றவாறு விருந்தில் கலந்துகொள்ள எத்தனை வழிகளில் அழைக்கலாம்?

20. ஒரு பெட்டியில் இரண்டு வெள்ளைப் பந்துகள், மூன்று கருப்புப் பந்துகள் மற்றும் நான்கு சிவப்புப் பந்துகள் உள்ளன. பெட்டியில் இருந்து மூன்று பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது, அவற்றில் குறைந்தபட்சம் ஒரு கருப்பு பந்து இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

21. EXAMINATION என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளைக் கொண்டு எத்தனை 4 எழுத்துச் சரங்களை உருவாக்கலாம்?

22. எந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையாதவாறு 15 புள்ளிகளைக் கொண்டு எத்தனை முக்கோணங்களை அமைக்கலாம்?

23. 15 புள்ளிகளில் 7 புள்ளிகள் ஒரு கோட்டிலும் மற்றும் மீதமுள்ள 8 புள்ளிகள் மற்றொரு இணைக்கோட்டிலும் அமைந்துள்ளது எனில் இந்த 15 புள்ளிகளைக் கொண்டு எத்தனை முக்கோணங்களை அமைக்கலாம்?

24. ஒரு தளத்தில் 11 புள்ளிகள் உள்ளன. இவற்றில் 4 புள்ளிகளைத் தவிர மற்ற எந்த 3 புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையவில்லை எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்க.

    (i) இப்புள்ளிகளில் ஒரு சோடி புள்ளிகளினால் அமையும் கோடுகள் எத்தனை?

    (ii) இந்த புள்ளிகளை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்டு எத்தனை முக்கோணங்களை அமைக்கலாம்?

25. 90 மூலைவிட்டங்கள் கொண்ட பலகோணத்தில் எத்தனை பக்கங்கள் உள்ளன?

4.6 கணிதத் தொகுத்தறிதல் (Mathematical Induction)

முதல் n ஒற்றை மிகை முழு எண்களின் கூடுதலை கருதுவோம். இவை $1, 3, 5, 7,..., 2n-1$ ஆகும். முதல் ஒற்றை எண் 1 இதன் கூடுதல் 1. முதல் இரண்டு ஒற்றை எண்கள் 1 மற்றும் 3. மேலும், இவற்றின் கூடுதல் 4. இதிலிருந்து பின்வருமாறு ஒரு வடிவம் அமைவதைக்காணலாம்.

$$1 = 1$$

$$1+3 = 4$$

$$1+3+5 = 9$$

$$1+3+5+7 = 16$$

$$1+3+5+7+9 = 25$$ மேலும் இவ்வாறு தொடரலாம்.

வலதுபுறத்தில் உள்ள எண்கள் $1, 4, 9, 16, 25,...$ அனைத்தும் முழு வர்க்க எண்களாகும். இந்த வடிவத்திலிருந்து முதல் n ஒற்றை மிகை முழு எண்களின் கூடுதல் n–ன் வர்க்கமான n^2 –க்குச் சமமாகும் என்பதை ஊகிக்கலாம். இதனை $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ என குறிக்கலாம். இருப்பினும், இது ஒரு ஊகக்கூற்று ஆகும். இதனை நிறுவ நாம் கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையினைப் பயன்படுத்துகின்றோம். இவ்வாறான ஊகக்கூற்றை நிறுவும் முறை கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறை ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட முடிவின் எல்லா சாத்தியமான நிலைகளையும் உற்றுநோக்கி உருவாக்கப்படும் ஊகக்கூற்றைப் பொருத்துதான் இந்த தொகுத்தறிதல் முறை உள்ளது. இது முக்கியமாக இயற்கணிதம் மற்றும் கணிதத்தின் மற்ற பிரிவுகளில் மிகை முழு எண் n இல் அமைந்த முடிவுகள் அல்லது தேற்றங்களை நிறுவ பயன்படுகின்றது.

இந்த கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையினை எண்ணற்ற மாடிப்படிகளை ஏறுவதுடன் தொடர்புபடுத்திப் பார்க்கலாம்.

நாம் மாடிப்படிகளின் மீது ஏறுவதை உறுதிசெய்ய, கீழ்க்கண்டவற்றை உறுதி செய்யவேண்டும்.

(அ) நாம் முதல் படியை ஏற வேண்டும்.

(ஆ) ஒரு குறிப்பிட்ட படியை அடைந்த பிறகு, நாம் அதற்கு அடுத்த படியில் ஏறவேண்டும்.

படிநிலைகள் (அ) மற்றும் (ஆ) ஆகியவற்றை உறுதி செய்தால் நாம் எல்லா படிகளையும் ஏறுவதை உறுதிசெய்யலாம். இதுபோலவே, இந்த முறையைக் கணித கூற்று $P(n)$–ஐ நிறுவ பயன்படுத்தும் போது, தொகுத்தறிதல் முறையில் கீழ்க்கண்ட படிநிலைகள் உள்ளன.

படம் 4.16

படி 1 : $n=1$–க்கு கூற்று உண்மை என நிறுவுக, அதாவது $P(1)$ உண்மை என சரிபார்க்க. படிக்கட்டின் முதல்படி ஏறுவதாக ஒப்பிட்டு இதனை **ஆரம்பநிலை** (*Initial step*) என்கிறோம்.

படி 2 : $n=k$–க்கு உண்மையாக இருக்கும்போது $n=k+1$–க்கு இந்த கூற்றை சரிபார்க்க, இங்கு k ஒரு மிகை முழு எண் ஆகும். அதாவது $P(k)$ உண்மை எனக்கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவவேண்டும். இதனை **தொகுக்கும் நிலை** (*Inductive step*) என்கிறோம்.

படி 3 : படி 1 மற்றும் 2 ஆகியவை நிறுவப்பட்டால் $P(n)$ ஆனது எல்லா மிகை முழு எண்கள் n–க்கும் உண்மை எனலாம்.

கணிதத்தில் தொகுத்தறிதல் என்பது கணிதத்தில் நிரூபிக்கும் முறைகளில் மிகவும் சுவாரஸ்யமான ஒன்று. இந்த முறையை எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம். கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் நமக்கு நன்றாக தெரிந்த முடிவினை கணித தொகுத்தறிதல் மூலம் நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.61 கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையை பயன்படுத்தி, எல்லா முழு எண்கள் $n \geq 1$–க்கு என $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ நிறுவுக.

தீர்வு:

$$P(n) := 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \text{ என்க.}$$

$n=1$ என பிரதியிட.

$$P(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

எனவே, $n=1$–க்கு இது உண்மை. அதாவது $P(1)$ என்பது உண்மை.

$n=k$–க்கு இந்த கூற்றை உண்மை எனக் கொள்வோம்.

எனவே,

$$P(k)=1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

இப்பொழுது $P(k+1)$ என்பது உண்மையென நிறுவவேண்டும்.

$$P(k+1) = \underbrace{1+2+3+...+k}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$P(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

எனவே, $P(k+1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக்கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம்.

எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையின் படி, எல்லா முழு எண்கள் $n \geq 1$–க்கும் $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.62 முதல் n ஒற்றை மிகை எண்களின் கூடுதல் n^2 என தொகுத்தறிதல் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு:

$P(n) = 1+3+5+...+(2n-1)$ என்க.

எனவே, $P(1) = 1 = 1^2$ என்பது உண்மை.

$n = k$–க்கு இந்த கூற்றை உண்மை எனக் கொள்வோம்.

எனவே,

$P(k) = 1+3+5+...+(2k-1)$

அதாவது $P(k) = k^2$

இப்பொழுது $P(k+1) = (k+1)^2$ என நிறுவவேண்டும்.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 1+3+5+...+(2(k+1)-1) \\ &= \underbrace{1+3+5+7+...+(2k-1)}+2k+1 \\ &= P(k)+2k+1 \\ &= k^2+2k+1 = (k+1)^2 \end{aligned}$$

எனவே, $P(k+1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம்.

எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம், எல்லா முழு எண்கள் $n \geq 1$–க்கும்,

முதல் n ஒற்றை மிகை எண்களின் கூடுதல் n^2 என நிறுவப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4.63 கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம், எல்லா முழு எண்கள் $n \geq 1$–க்கு

$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$P(n):=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ என்க.

$n=1$ என பிரதியிட

$$P(1)=\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}=1$$

எனவே, $n=1$–க்கு இது உண்மை. அதாவது $P(1)$ என்பது உண்மை

$n=k$–க்கு, இந்த கூற்றை உண்மை எனக் கொள்வோம்.

எனவே,

$$P(k)=1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

இப்பொழுது $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவவேண்டும்.

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \underbrace{1^2+2^2+3^2+...+k^2}+(k+1)^2\\
&= P(k)+(k+1)^2\\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}\\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
&= \frac{(k+1)[(k+2)(2k+3)]}{6}\\
&= \frac{(k+1)[((k+1)+1)(2(k+1)+1)]}{6}
\end{aligned}$$

எனவே $P(k+1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம்.

எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் எல்லா முழு எண்கள் $n\geq 1$–க்கு

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.64 கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம், எல்லா இயல் எண்கள் n–க்கும்

$\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$P(n)|=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ என்க.

$n=1$ என பிரதியிட

$P(1) = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$

எனவே, $P(1)$ உண்மை.

$n = k$–க்கு இந்த கூற்றை உண்மை எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $P(k) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

இப்பொழுது $P(k+1)$ என்பது உண்மை என நிறுவவேண்டும்.

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \underbrace{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= P(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{k}{1} + \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{(k+1)^2}{k+2}\right) = \frac{(k+1)}{(k+2)}
\end{aligned}$$

எனவே $P(k+1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ உண்மை எனக் கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம்.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல்படி, எல்லா இயல் எண்கள் n–க்கும்,

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.65 எந்த ஒரு இயல் எண் n–க்கும், $a > b$ எனில் $a^n - b^n$ ஆனது $a - b$ ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க.

தீர்வு:

$P(n)| = a^n - b^n$ ஆனது $a - b$ ஆல் வகுபடும் என்க.

$n = 1$ என பிரதியிட

$P(1) = a - b$ இது $a - b$ ஆல் வகுபடும்.

எனவே $P(1)$ உண்மை. இந்த கூற்று $n = k$–க்கு உண்மை எனக் கொள்க. எனவே $P(k) = a^k - b^k$ ஆனது $a - b$ ஆல் வகுபடும்.

$P(k) = a^k - b^k, \lambda(a-b), \lambda \in \mathbb{N}$

நிறுவவேண்டியது $P(k+1) = a^{k+1} - b^{k+1}$, ஆனது $a - b$ ஆல் வகுபடும்.

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= a^{k+1} - b^{k+1} \\
&= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a(a^k - b^k) + b^k(a-b)\\
&= a(\lambda(a-b)) + b^k(a-b)\\
&= (a-b)(a\lambda + b^k)\\
&= (a-b)\lambda_1,\ \lambda_1 = a\lambda + b^k, \lambda_1 \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

எனவே, இது $a-b$ ஆல் வகுபடும். ஆகவே, $P(k+1)$ என்பது உண்மை. $P(k)$ உண்மை எனக் கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம். எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையின்படி எந்த ஒரு இயல் எண் n–க்கும், $a > b$ எனில் $a^n - b^n$ ஆனது $a-b$ ஆல் வகுபடும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.66 $n \geq 1$–க்கு $3^{2n+2} - 8n - 9$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடும் என்பதை நிறுவுக.

தீர்வு:

$P(n)| = 3^{2n+2} - 8n - 9$, ஆனது 8ஆல் வகுபடும் என்க.

$n = 1$ என பிரதியிட $P(1) = 3^{2+2} - 8(1) - 9 = 64$, இது 8ஆல் வகுபடும். எனவே $P(1)$ உண்மை.

$n = k$–க்கு இந்த கூற்று உண்மை எனக் கொள்க.

எனவே $P(k) = 3^{2k+2} - 8k - 9$, ஆனது 8ஆல் வகுபடும்.

ஆகவே, $P(k) = 3^{2k+2} - 8k - 9 = 8k_1, k_1 \in \mathbb{N}$

ஆகவே, $3^{2k+2} = 8k_1 + 8k + 9$ என எழுதலாம்.

$P(k+1) = 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9$ ஆனது 8ஆல் வகுபடும் என நிறுவ வேண்டும்.

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9\\
&= 3^2 3^{2k+2} - 8k - 8 - 9\\
&= 3^2(8k_1 + 8k + 9) - 8k - 17\\
&= 72k_1 + 72k + 81 - 8k - 17 = 72k_1 + 64k + 64\\
&= 8(9k_1 + 8k + 1)\\
&= 8k_2, k_2 = 9k_1 + 8k + 1 \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

$P(k+1)$ என்பது 8ஆல் வகுபடும். எனவே $P(k+1)$ என்பது உண்மை. $P(k)$ உண்மை எனக் கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம். எனவே கணிதத் தொகுத்தறிதல்படி $n \geq 1$–க்கு $3^{2n+2} - 8n - 9$ ஆனது 8ஆல் வகுபடும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.67 கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $n \geq 2$ என உள்ள எந்த ஒரு முழு எண்ணுக்கும் $3n^2 > (n+1)^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$n \geq 2$ என இருக்கும்போது $3n^2 > (n+1)^2$ என்ற கூற்றை $P(n)$ என கொள்க.

எனவே முதல் படி $n = 2$ ஆகும்.

$P(2) = 3 \times 2^2 = 12$ மேலும் $3^2 = 9,\;\; 12 > 9$ ஆதலால் $P(2)$ என்பது உண்மை.

$n = k$–க்கு $P(n)$ உண்மை எனக் கொள்க.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3(k+1)^2 = 3k^2 + 6k + 3 \\ &= P(k) + 6k + 3 \\ &> (k+1)^2 + 6k + 3 \\ &= k^2 + 2k + 1 + 6k + 3 \\ &= k^2 + 8k + 4 \\ &= k^2 + 4k + 4 + 4k \\ &= (k+2)^2 + 4k \\ &> (k+2)^2, k > 0 \text{ ஆதலால்} \end{aligned}$$

எனவே, $P(k+1)$ என்பது உண்மை.

$P(k)$ என்பது உண்மை எனக் கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம்.

எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையின்படி எல்லா $n \geq 2$ –க்கும் $3n^2 > (n+1)^2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.68 கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் என உள்ள எந்த ஒரு முழு எண்ணுக்கும் $n \geq 2,\; 3^n > n^2$ என நிரூபி.

தீர்வு:

$n \geq 2$ –க்கு $3^n > n^2$ என்பதை $P(n)$ என்ற கூற்று என்க. முதல்படி $n = 2$ ஆகும்.

$P(2) = 3^2 = 9$ மேலும் $2^2 = 4$

$9 > 4$ ஆதலால் $P(2)$ உண்மை.

$n = k$–க்கு $P(n)$ உண்மை எனக் கொள்க.

எனவே, $P(k) > k^2$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} = 3 \times 3^k = 3 \times P(k) \\ &> 3k^2 \\ &> (k+1)^2 \;\; (\text{எடுத்துக்காட்டு } 4.67\text{லிருந்து}) \end{aligned}$$

எனவே $n \geq 2$ என உள்ள அனைத்து முழு எண்களுக்கும் $3^n > n^2$.

எடுத்துக்காட்டு 4.69 எந்த ஒரு இயல் எண் $n \in \mathbb{N}$ –க்கும் கணிதத் தொகுத்தறிதலின்படி

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+(n-1)\beta)=\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

எனக் காட்டு.

தீர்வு:

$$P(n):=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+(n-1)\beta)$$

$$=\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$ என்க.

$n=1$ என பிரதியிட

$$P(1)=\cos(\alpha)=\frac{\cos(\alpha).\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

எனவே $P(1)$ என்பது உண்மை. இந்த கூற்று $n=k$–க்கு $P(k)$ உண்மை எனக் கொள்க.

எனவே,

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+(k-1)\beta)=\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

இப்பொழுது $P(k+1)$ என்பது உண்மை என நிறுவவேண்டும்.

$$P(k+1)=\underbrace{\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+(k-1)\beta)}+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$P(k+1)=P(k)+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\left(\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+cos(\alpha+k\beta)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}\left(2\sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+2\cos(\alpha+k\beta)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}(\cos\alpha-\cos(\alpha+k\beta)+2cos(\alpha+k\beta))\right]$$

$$= \frac{1}{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}(cos\alpha+cos(\alpha+k\beta))\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}\left(2\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{-k\beta}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{k\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

அதாவது,

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(k-1)\beta)+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$= \cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

ஆகவே, $P(k+1)$ என்பது உண்மை. $P(k)$ உண்மை எனக் கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம். எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையின்படி எந்த ஒரு இயல் எண் $n\in\mathbb{N}$ –க்கும்,

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(n-1)\beta)=\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.70 கணிதத் தொகுத்தறிதலின்படி $i^2=-1$ எனக் கொண்டு எந்த ஒரு இயல் எண் n–க்கும் $(r(cos\theta+isin\theta))^n=r^n(cosn\theta+isinn\theta)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$P(n):=(r(cos\theta+isin\theta))^n=r^n(cosn\theta+isinn\theta)$ என்க.

$n=1$ எனப் பிரதியிட

$P(1)=(r(cos\theta+isin\theta))^1=r(cos\theta+isin\theta)$

எனவே $P(1)$ என்பது உண்மை. இந்த கூற்று $n=k$–க்கு $P(k)$ என்பது உண்மை எனக் கொள்க. எனவே

$(r(cos\theta+isin\theta))^k=r^k(cosk\theta+isink\theta)$

இப்பொழுது $P(k+1)$ என்பது உண்மை என நிறுவவேண்டும்.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (r(cos\theta + isin\theta))^{k+1} \\ &= (r(cos\theta + isin\theta))^{k} \times r(cos\theta + isin\theta) \\ &= r^{k}(cosk\theta + isink\theta) \times r(cos\theta + isin\theta) \\ &= r^{k+1} \times ((cosk\theta cos\theta + i^2 sink\theta sin\theta) + i(sink\theta cos\theta + cosk\theta sin\theta)) \\ &= r^{k+1} \times ((cosk\theta cos\theta - sink\theta sin\theta) + i(sink\theta cos\theta + cosk\theta sin\theta)) \\ &= r^{k+1} \times (cos(k+1)\theta + isin(k+1)\theta) \end{aligned}$$

ஆகவே, $P(k+1)$ என்பது உண்மை. $P(k)$ உண்மை எனக் கொண்டு $P(k+1)$ உண்மை என நிறுவியுள்ளோம். எனவே, கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையின்படி எந்த ஒரு இயல் எண் n–க்கும்,

$$(r(cos\theta + isin\theta))^{n} = r^{n}(cosn\theta + isinn\theta).$$

குறிப்பு: எடுத்துக்காட்டு 4.70 இல் நாம் நிரூபித்தது இயல் எண்களுக்கான டிமாய்வியரின் தேற்றம் *(Demoivre's Theorem)* ஆகும். இதைப்பற்றி மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டில் விரிவாகப் படிக்கலாம்.

பயிற்சி 4.4

1. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $n \geq 1$–க்கு
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$ என நிரூபிக்க.

2. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $n \geq 1$–க்கு
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$ என நிரூபிக்க.

3. பூஜ்ஜியமற்ற முதல் n இரட்டை எண்களின் கூடுதல் $n^2 + n$ என நிரூபிக்க.

4. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் $n \geq 1$–க்கு
$$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$ என நிரூபிக்க.

5. கணிதத்தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி $n \geq 2$ எனக் கொண்ட எந்த ஒரு இயல் எண்ணுக்கும்
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$ என நிரூபிக்க.

6. கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி $n \geq 2$ எனக் கொண்ட எந்த ஒரு இயல் எண்ணுக்கும்
$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+n} = \frac{n-1}{n+1}$$ என நிரூபிக்க.

7. கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு இயல் எண் n–க்கும்
$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ என நிரூபிக்க.

8. கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு இயல் எண் n–க்கும்
$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$$ என நிரூபிக்க.

9. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில் நிறுவுக.

$$1!+(2\times 2!)+(3\times 3!)+...+(n\times n!)=(n+1)!-1$$

10. கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு இயல் எண் n–க்கும் $x^{2n}-y^{2n}$ ஆனது $x+y$ ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க.

11. கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையின்படி $n\geq 1$–க்கு

$1^2+2^2+3^2+...+n^2>\frac{n^3}{3}$ என நிரூபிக்க.

12. தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எல்லா இயல் எண்கள் n–க்கும் n^3-7n+3 ஆனது 3ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க.

13. தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எல்லா இயல் எண்கள் n–க்கும் $5^{n+1}+4\times 6^n$ ஐ 20 ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி 9 என நிரூபிக்க.

14. தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி எல்லா இயல் எண்கள் n–க்கும் $10^n+3\times 4^{n+2}+5$ ஆனது 9 ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க.

15. கணிதத் தொகுத்தறிதலைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்ட கூற்றை நிறுவுக.

$$sin(\alpha)+sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{6}\right)+...$$

$$+sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{6}\right)=\frac{sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{12}\right)\times sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

XKN7E

பயிற்சி 4.5

சரியான அல்லது மிகச்சிறந்த விடையைத் தேர்வு செய்.

1. 2,4,5,7 ஆகிய அனைத்து எண்களையும் பயன்படுத்தி உருவாக்கப்படும் நான்கு இலக்க எண்களில் 10 –ஆவது இடத்திலுள்ள அனைத்து எண்களின் கூடுதல்.

(1) 432 (2) 108 (3) 36 (4) 18

2. ஒரு தேர்வில் 5 வாய்ப்புகளையுடைய மூன்று பல்வாய்ப்பு வினாக்கள் உள்ளன. ஒரு மாணவன் எல்லா வினாக்களுக்கும் சரியாக விடையளிக்கத் தவறிய வழிகளின் எண்ணிக்கை.

(1) 125 (2) 124 (3) 64 (4) 63

3. 30 மாணவர்களைக் கொண்ட வகுப்பில் கணிதத்தில் முதலாவது மற்றும் இரண்டாவது, இயற்பியலில் முதலாவது மற்றும் இரண்டாவது, வேதியியலில் முதலாவது மற்றும் ஆங்கிலத்தில் முதலாவது என பரிசுகளை வழங்கும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை.

(1) $30^4\times 29^2$ (2) $30^3\times 29^3$ (3) $30^2\times 29^4$ (4) 30×29^5

4. எல்லாம் ஒற்றை எண்களாகக் கொண்ட 5 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை.

(1) 25 (2) 5^5 (3) 5^6 (4) 625

5. 3 விரல்களில், 4 மோதிரங்களை அணியும் வழிகளின் எண்ணிக்கை.

(1) 4^3-1 (2) 3^4 (3) 68 (4) 64

6. ${}^{(n+5)}P_{(n+1)} = \left(\frac{11(n-1)}{2}\right){}^{(n+3)}P_n$ எனில், n–ன் மதிப்பு

(1) 7 மற்றும் 11 (2) 6 மற்றும் 7 (3) 2 மற்றும் 11 (4) 2 மற்றும் 6

7. அடுத்தடுத்த r மிகை முழு எண்களின் பெருகற்பலன் எதனால் வகுபடும்.

(1) $r!$ (2) $(r-1)!$ (3) $(r+1)!$ (4) r^r

8. குறைந்தபட்சம் ஒரு இலக்கம் மீண்டும் வருமாறு 5 இலக்க தொலைபேசி எண்களின் எண்ணிக்கை.

(1) 90000 (2) 10000 (3) 30240 (4) 69760

9. ${}^{a^2-a}C_2 = {}^{a^2-a}C_4$ எனில் a–ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

10. ஒரு தளத்தில் 10 புள்ளிகள் உள்ளன. அவற்றில் 4 ஒரே கோடமைவன. ஏதேனும் இரு புள்ளிகளை இணைத்து கிடைக்கும் கோடுகளின் எண்ணிக்கை

(1) 45 (2) 40 (3) 39 (4) 38

11. ஒரு விழாவிற்கு 12 நபர்களில் 8 நபர்களை ஒரு பெண் அழைக்கிறார். இதில் இருவர் ஒன்றாக விழாவிற்கு வரமாட்டார்கள் எனில், அவர்களை அழைக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை.

(1) $2\times{}^{11}C_7+{}^{10}C_8$ (2) ${}^{11}C_7+{}^{10}C_8$ (3) ${}^{12}C_8-{}^{10}C_6$ (4) ${}^{10}C_6+2!$

12. நான்கு இணையான கோடுகளின் தொகுப்பானது மூன்று இணையான கோடுகளைக் கொண்ட மற்றொரு தொகுப்பை வெட்டும்போது உருவாகும் இணைகரங்களின் எண்ணிக்கை.

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 18

13. ஓர் அறையில் உள்ள ஒவ்வொருவரும் மற்றவருடன் கைக்குலுக்குகிறார்கள். 66 கைக்குலுக்கல் நிகழ்கின்றது எனில், அந்த அறையில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை

(1) 11 (2) 12 (3) 10 (4) 6

14. 44 மூலைவிட்டங்கள் உள்ள ஒரு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை

(1) 4 (2) 4! (3) 11 (4) 22

15. எந்த இரண்டு கோடுகளும் இணையாக இல்லாமலும் மற்றும் எந்த மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளாமலும் இருக்குமாறு ஒரு தளத்தின் மீது 10 நேர்க்கோடுகள் வரையப்பட்டால், கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை..

(1) 45 (2) 40 (3) 10! (4) 2^{10}

16. ஒரு தளத்தில் உள்ள 10 புள்ளிகளில் 4 புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனில், அவற்றை கொண்டு உருவாக்கும் முக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை

(1) 110 (2) ${}^{10}C_3$ (3) 120 (4) 116

17. $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11:1$ எனில் n–ன் மதிப்பு

(1) 5 (2) 6 (3) 11 (4) 7

18. $^{(n-1)}C_r + {}^{(n-1)}C_{(r-1)}$ என்பது

(1) $^{(n+1)}C_r$ (2) $^{(n-1)}C_r$ (3) ^nC_r (4) $^nC_{r-1}$

19. 52 சீட்டுகள் உள்ள ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் 5 சீட்டுகளில் குறைந்தபட்சம் ஒரு இராஜா சீட்டு இருக்குமாறு உள்ள வழிகளின் எண்ணிக்கை.

(1) $^{52}C_5$ (2) $^{48}C_5$ (3) $^{52}C_5 + {}^{48}C_5$ (4) $^{52}C_5 - {}^{48}C_5$

20. ஒரு சதுரங்க அட்டையில் உள்ள செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கை.

(1) 81 (2) 9^9 (3) 1296 (4) 6561

21. 2 மற்றும் 3 என்ற இலக்கங்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் 10 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை

(1) $^{10}C_2 + {}^9C_2$ (2) 2^{10} (3) $2^{10} - 2$ (4) $10!$

22. P_r என்பது ^rP_r ஐ குறித்தால் $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + nP_n$ என்ற தொடரின் கூடுதல்

(1) P_{n+1} (2) $P_{n+1} - 1$ (3) $P_{n-1} + 1$ (4) $^{(n+1)}P_{(n-1)}$

23. முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் பெருக்கலின் மதிப்பு

(1) $^{2n}C_n \times {}^nP_n$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times {}^{2n}C_n \times {}^nP_n$ (3) $\left(\frac{1}{4}\right)^n \times {}^{2n}C_n \times {}^{2n}P_n$ (4) $^nC_n \times {}^nP_n$

24. $^nC_4, {}^nC_5, {}^nC_6$ ஆகியவை AP யில் (கூட்டுத் தொடரில்) உள்ளன எனில், n–ன் மதிப்பு

(1) 14 (2) 11 (3) 9 (4) 5

25. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 17$–ன் மதிப்பு

(1) 101 (2) 81 (3) 71 (4) 61

பாடத் தொகுப்பு (Summary)

- n என்ற எண்ணின் காரணியப் பெருக்கம் என்பது முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்கம் ஆகும்.
- எந்த ஒரு முழு எண் $n \geq 1$ க்கும் $n! = n(n-1)!$ ஆகும்.
- n வெவ்வேறான பொருட்களை அடுக்கும் முறைகளின் எண்ணிக்கை $n!$ ஆகும்.
- n வெவ்வேறான பொருட்களில் இருந்து r பொருட்களை வரிசைபடுத்தும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ ஆகும்.
- n பொருட்களில், ஒரே மாதிரியாக உள்ள p_1 பொருட்களை முதல் வகையாகவும், ஒரே மாதிரியாக உள்ள p_2 பொருட்களை இரண்டாம் வகையாகவும்,... ஒரே மாதிரியாக உள்ள p_k பொருட்களை k ஆவது வகையாகவும் மற்றவை வெவ்வேறாகவும் உள்ள பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}$ ஆகும்.
- வரிசை மாற்றத்தில் வரிசை முக்கியம் சேர்வில் வரிசை முக்கியமில்லை.
- n பொருட்களில் இருந்து r பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை ^nC_r ஆகும். இதனை $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$ என குறிக்கலாம்.

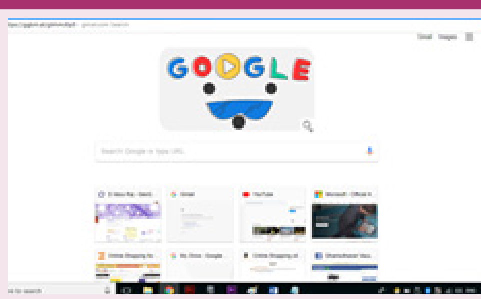
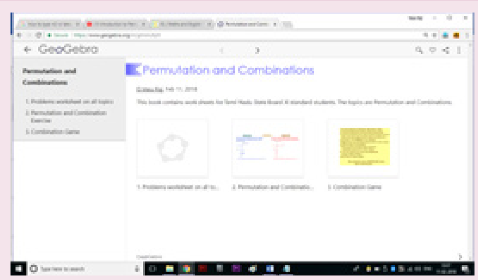
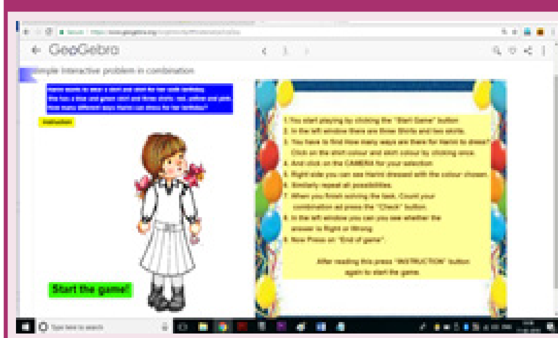
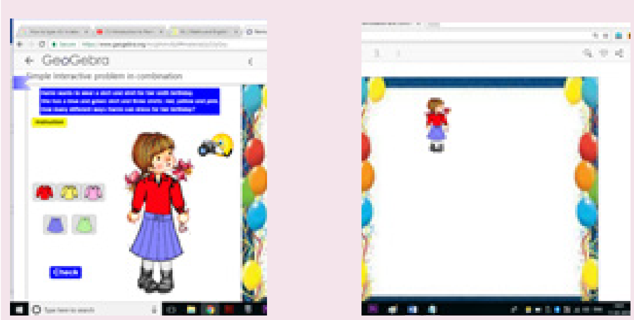
இணையச் செயல்பாடு – 4 (அ)

படி –1 : இணைய உலாவியில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலியை தட்டச்சு செய்யவும் அல்லது விரைவுக் குறியீட்டை பயன்படுத்துக.

படி – 2 : "Permutations and Combination" என்ற Geogebra பணிப் புத்தகம் திறக்கும். அதில் உங்களுக்குத் தேவையான பயிற்சியைத் தேர்வு செய்து பார்க்கவும். எ.கா: "Combination Game".

படி – 3 : "Instruction" பொத்தானை அழுத்தி விளையாடும் முறையை தெரிந்துக்கொண்டு "Start" பொத்தானை அழுத்தித் தொடங்கவும்.

படி – 4 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆடை வகைகளில் பெண்ணுக்கு பொருத்தமான ஆடையைத் தேர்ந்தெடுத்து பின் கேமராவை அழுத்தவும். அனைத்தையும் முடித்த பின் "Check" பொத்தானை அழுத்தி விடையைச் சரி பார்க்கவும்.

படி–1	படி–2
	
படி–3	**படி–4**
	

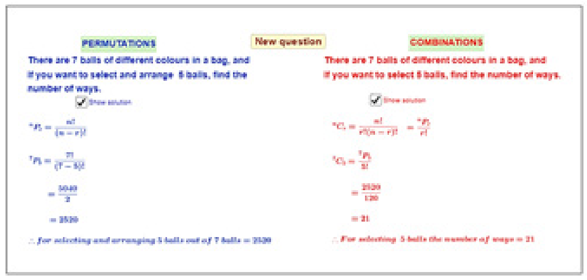
மற்ற பயிற்சித்தாள்களை செய்து வரிசை மாற்றம் மற்றும் சேர்க்கைகள் பற்றி மேலும் தெரிந்து கொள்ளவும்

***படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.**

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/gVnmcKp9

விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தவும்

இணையச் செயல்பாடு – 4 (ஆ)



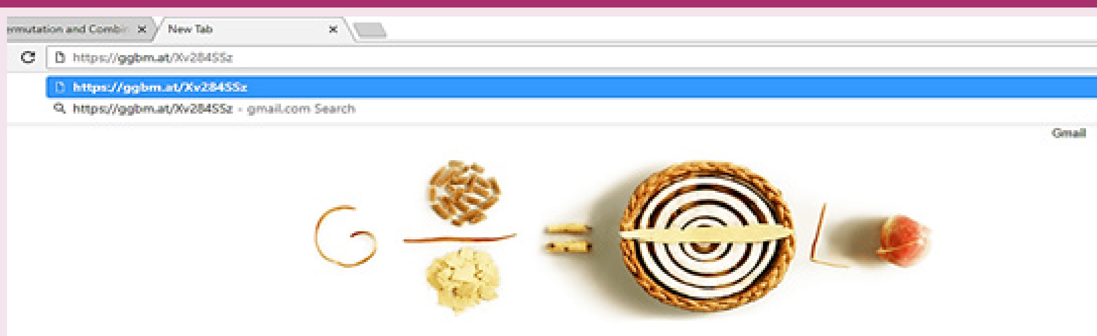
படி – 1 : இணைய உலாவியில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலியை தட்டச்சு செய்யவும் அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

படி – 2 : "Permutations and Combination" என்ற Geogebra பணிப் புத்தகம் திறக்கும். அதில் உங்களுக்குத் தேவையான பயிற்சியைத் தெரிவு செய்து பார்க்கலாம். இப்பொழுது "Problems on Permutations and Combination" என்னும் பயிற்சியைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

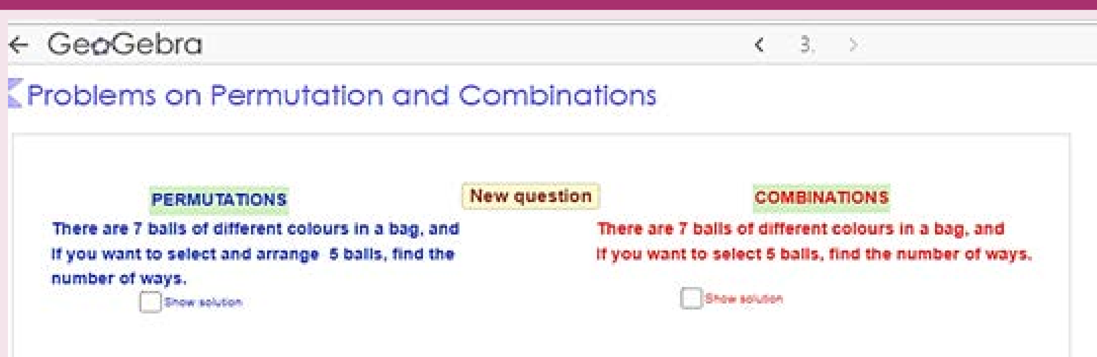
பயிற்சித் தாளில் "New Problem" என்கிற பொத்தானைச் சொடுக்கினால் புதிய கணக்கு தோன்றும். நீங்களாகவே கணக்கின் தீர்வைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

பிறகு "Show Solution" என்னும் பொத்தானைச் சொடுக்கினால் விடைகள் தோன்றும். விடையினைச் சரிபார்க்கவும்.

படி–1



படி–2



*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/gVnmcKp9

விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தவும்

ZXWR7

அத்தியாயம் **5**

ஈருறுப்புத் தேற்றம், தொடர்முறைகள் மற்றும் தொடர்கள்

AUI3H

"வாழ்க்கை புதிய மற்றும் ஒளிமிக்க ஆடைகளுடன் கூடிய நிலையான நீரூற்றுப் போல என்முன்னே நிற்கின்றது"

- ஜோஹன் கார்ல் ப்ரடெரிக் காஸ்.

5.1 அறிமுகம் (Introduction)

$(a+b)$ என்ற ஈருறுப்பின் எல்லா மிகை முழு எண் n–ன் அடுக்கிற்கும் விரிவாக்கம் காண ஈருறுப்புத் தேற்றம் வழி செய்கிறது. ஈருறுப்புத் தேற்றம் கணிதத்தின் எல்லாப் பிரிவுகளிலும் மற்றும் அறிவியல் பிரிவுகளிலும் பயன்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, $(2x-7)^{23}$ –ன் விரிவில் x^{20} –ன் கெழுவை ஈருறுப்புத் தேற்றம் மூலம் எளிமையாகக் காண இயலும். ஒருவர் தேசியமயமாக்கப்பட்ட ஒரு வங்கியில் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை 8% கூட்டு வட்டி விகிதத்தில் வைப்பு நிதியாகச் செலுத்தினால் 10 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் அவருக்கு எவ்வளவு முதிர்வுத் தொகை கிடைக்கும் எனக் காணவும், நம் நாட்டின் தற்போதைய மக்கள் தொகையும், மக்கள் தொகை வளர்ச்சி விகிதமும் தெரியுமானால் 15 ஆண்டுகளுக்குப் பின் நம் நாட்டின் மக்கள் தொகையைக் கணக்கிடவும் ஈருறுப்புத் தேற்றம் உதவுகிறது. $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ –ன் விரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் எனப்படும். ஒரு சம வாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி முடிவுள்ளதாகவும் அதன் ஒவ்வொரு நிகழ்வும் வெற்றி அல்லது தோல்வி என்றிருக்குமாயின், அந்தச் சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒவ்வொரு நிகழ்வின் நிகழ்தகவு காண்பதில் ஈருறுப்புத் தேற்றம் முக்கிய பங்காற்றுகிறது. இப்பகுதியில் ஈருறுப்புத் தேற்றமும் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகளையும் காண்போம்.

ஜோஹன் கார்ல் ப்ரடெரிக் காஸ் (1777–1855)

கிரேக்க கணித மேதை யூகிளிட் ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் அடுக்கு 2–க்கான ஒரு சிறப்பு நிலையினைக் குறிப்பிடுகிறார். அடுக்கு 3–க்கான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தினை 6 ஆவது நூற்றாண்டில் இந்தியர்கள் அறிந்திருந்தனர். 1544 ஆம் ஆண்டில் மைக்கேல் ஸ்டிஃபெல் என்ற ஜெர்மன் கணித மேதை **ஈருறுப்புக் கெழுக்களை** அறிமுகம் செய்து $(1+x)^n$ ஐ $(1+x)^{n-1}$ மூலமாக கூறினார்.

ஜோஹன் கார்ல் ப்ரடெரிக் காஸ் வரலாற்றில் மிகவும் புகழ்பெற்ற கணித மேதையாவார். பலர் இவரை, "கணிதத்தின் இளவரசர்" எனக் குறிப்பிடுவர். எண்கணிதம், இயற்பியல், வானியல் என்று பல பகுதிகளில் இவருடைய பங்களிப்பு இருந்தபோதிலும், அவருக்குப் பிடித்தமான பகுதி எண்கணிதம் ஆகும். மற்றும் இவர் எண்கணிதத்தை "கணிதத்தின் இளவரசி" என்று குறிப்பிடுகிறார். இவரைப் பற்றிய ஒரு துணுக்குக் கதையில், இவரது பள்ளி ஆசிரியர் மாணவர்களைச் சோதிக்க வேண்டி, 1 முதல் 100 வரை உள்ள எண்களைக் கூட்டி மதிப்பு காணும்படி கூறினார். அவர் கூறிய சில விநாடிகளில் காஸ் 5050 என விடை காண்பித்தார். சிறுவனான காஸ் அந்த தொடர்முறையின் கூடுதல் காண எந்த முறையைப் பயன்படுத்தினார் என்பது யாருக்கும் சரியாகத் தெரியாது.

ஆயிரம் ஆண்டுகளுக்கு மேல், புராணக்கதைகளில் தொடர் முறை மற்றும் தொடர்களைக் கொண்ட கணித புதிர்கள் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றில் தொடரைப் பற்றிய ஒரு புகழ்வாய்ந்த புராணக்கதை சதுரங்கம் கண்டுபிடித்ததாகும். இங்கு சதுரங்கப் பலகையில் உள்ள ஒவ்வொரு கட்டமும், $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ .\ \ .\ \ .$ என்ற எண்களுடன் தொடர்புடையதாகும். (64 ஆவது கட்டத்திற்குத் தொடர்புடைய எண்ணை கற்பனை செய்க). கூட்டுத் தொடர் மற்றும் பெருக்குத் தொடர்களின் பல பயன்பாடுகள் நிஜ வாழ்க்கைக்குப் பயன்படுவதாக உள்ளன.

முன் வகுப்புகளில் தொடர் முறைகள் மற்றும் தொடர்கள் பற்றி படித்துள்ளோம். தொடர்முறை என்பது தோராயமாக எண்களை ஒரு குறிப்பிட்ட முறையில் வரிசைப்படுத்துதல் என்றும் அந்தத் தொடர்முறையின் உறுப்புகளின் கூடுதல், தொடர் என்றும் அழைக்கப்படும். $\sin\frac{9}{44}\pi, \log 43$ மற்றும் e^{20} போன்றவற்றின் மதிப்புகளை தேவையான அளவுக்குத் தோராயமாக காண முடிவிலித் தொடர்கள் பயன்படுகின்றன. தொடர் முறைகள், வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் மற்றும் பகுப்பாய்விலும் $(analysis)$ பயன்படுகின்றன. இப்போது தொடர்முறைகள் மற்றும் தொடர்கள் பற்றி விரிவாகக் காண்போம்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இப் பாடப்பகுதி நிறைவுறும் போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டிய பாடக் கருத்துகள்

- ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் கருத்து, ஈருறுப்பு கெழுக்களை கணக்கிடல் மற்றும் ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் பயன்பாடுகள்;
- தொடர்முறையும் தொடர்களும் பற்றிய கருத்துகள்;
- கூட்டு, பெருக்கு மற்றும் இசைச் சராசரி கணக்கிடல்;
- மெய்யெண்களில் முடிவுறு மற்றும் முடிவுறா தொடர்களின் கூடுதல் காணல்;
- தொடர்களின் கூடுதல் காண தொலைநோக்கி கூட்டலை பயன்படுத்தும் முறை;
- ஈருறுப்புத் தொடர், அடுக்குக்குறித் தொடர் மற்றும் மடக்கைத் தொடர்களைப் பயன்படுத்தும் விதம், ஆகியவை.

5.2 ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem)

இரு சக்கர வாகனம், இரு கண் நோக்கி, இரண்டடிமானம் என்பவற்றைப் போன்று இரண்டு உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவைகள் ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $(1+x),(x+y),(x^2+xy)$ மற்றும் $(2a+3b)$ என்பன ஈருறுப்புக் கோவைகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

5.2.1 ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் (Binomial Coefficients)

பாடப்பகுதி 4–இல் , ${}^nC_r$ என்ற குறியீடும் அதன் பயன்பாடும் பற்றி கற்றுள்ளோம் மேலும் அதன் வரையறை ${}^nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r(r-1)(r-2)...1} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ என்பது பற்றியும் நாம் அறிந்துள்ளோம். ${}^nC_r$ என்பது, $(1+x)^n$ இல் x^r –ன் கெழுவாகவும் மற்றும் $(a+b)^n$ இல் a^rb^{n-r} –ன் கெழுவாகவும் இருப்பதால், இவை **ஈருறுப்புக் கெழுக்கள்** $(Binomial\ Coefficients)$ எனப்படும். ${}^nC_r$ –ன் மதிப்புகளை சூத்திரங்களை பயன்படுத்திக் காண இயலும் என்றாலும் அதைவிட எளிமையான முறையிலும் காணலாம்.

பாஸ்கல் முக்கோணம்

பாஸ்கல் முக்கோணம் என்பது ${}^nC_r$ –ன் மதிப்புகளை முக்கோண வடிவில் எழுதுதல் ஆகும். இங்கு $(k+1)$ ஆவது வரிசையானது ${}^kC_0, {}^kC_1, {}^kC_2, {}^kC_3, ..., {}^kC_k$ ஆகிய மதிப்புகளை உறுப்புகளாகப் பெற்றிருக்கும்.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & {}^0C_0 & & & & \\ & & & {}^1C_0 & & {}^1C_1 & & & \\ & & {}^2C_0 & & {}^2C_1 & & {}^2C_2 & & \\ & {}^3C_0 & & {}^3C_1 & & {}^3C_2 & & {}^3C_3 & \\ {}^4C_0 & & {}^4C_1 & & {}^4C_2 & & {}^4C_3 & & {}^4C_4 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \end{array}$$

$(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, (a+b)^3$ என்ற முற்றொருமைகளை நினைவுபடுத்தி அவற்றின் உறுப்புகளின் கெழுக்களை கவனிப்போம். அந்தக் கெழுக்களின் அமைப்பில் ஒரு அமைப்பு முறை உள்ளதைக் காணலாம்.

$$(a+b)^0 = 1 \qquad\qquad 1$$

$$(a+b)^1 = a+b \qquad\qquad 1 \quad 1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad\qquad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad\qquad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

பாஸ்கலின் முக்கோணத்தை உற்று நோக்கும்போது, ஒவ்வொரு வரிசையின் ஆரம்பமும், முடிவும் 1 ஆகவும் மற்றவை முன் வரிசையில் அதற்கு மேல் உள்ள இரு உறுப்புகளை கூட்ட கிடைப்பதாகவும் உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக, '3' என்பது அதற்கு முன் வரிசையில் உள்ள 1 மற்றும் 2–ன் கூடுதல் ஆகும். 10 என்பது அதற்குமுன் வரிசையில் 10–க்கு நேர்மேலே உள்ள இரு எண்கள் 4 மற்றும் 6–ன் கூடுதலாகும். $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + ... {}^nC_r a^{n-r} b^r + ... + {}^nC_n a^0 b^n$ என்பது $(a+b)^n$ –ன் **ஈருறுப்பு விரிவாகும்.** இதனை பின்னர் நிரூபிப்போம் n–ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், $(a+b)^n$ –ன் ஈருறுப்பு விரிவை பாஸ்கலின் முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக, பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் ஐந்தாவது வரிசையை பயன்படுத்தி $(a+b)^4$ –ன் விரிவையும், ஆறாவது வரிசையைப் பயன்படுத்தி $(a+b)^5$ –ன் விரிவையும் எழுதலாம்.

$(a+b)^5$ –ன் விரிவில், கெழுக்கள் இல்லாமல் உறுப்புகள்

$a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5$ என்ற வடிவில் அமையும்

பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் 6 ஆவது வரிசை,

$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$ என்பதாகும்.

இவை இரண்டையும் பயன்படுத்தி, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ என எழுதலாம்.

பெருக்கல், வகுத்தல் இல்லாமல் கூட்டலை மட்டுமே பயன்படுத்தி பாஸ்கல் முக்கோணம் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ என்ற ஈருறுப்பு விரிவினை எந்த வித பெருக்கலும் இல்லாமல் எழுத இயலும்.

மேற்கண்ட முக்கோண வடிவம், 17ஆம் நூற்றாண்டைச் சேர்ந்த பிரஞ்ச் கணித மேதை பிளய்சு பாஸ்கலின் கண்டுபிடிப்பாகும். இவர், இந்த அமைப்பின் கணித பண்புகளை கண்டறிந்து சரியான முறையில் நிகழ்தகவியலில் பயன்படுத்தியவர்.

5.2.2 மிகை முழு எண் அடுக்குக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem for Positive Integral Index)

இப்போது, மிகவும் புகழ் வாய்ந்த தேற்றங்களில் ஒன்றான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தினைக் காண்போம்.

தேற்றம் 5.1 மிகை முழு எண் அடுக்குக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem for Positive Integral Index)

ஏதேனும் ஒரு இயல் எண் n–க்கு,

$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n$ ஆகும்.

நிரூபணம் கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் இந்தத் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம். ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண் n–க்கு, $P(n)$ என்பது $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n$, ${}^1C_0 = 1$ மற்றும் ${}^1C_1 = 1$, எனவே, $P(1)$–ன் வலப்பக்கம் $a^1 b^0 + a^0 b^1$ ஆகும். இது இடப்பக்கம் உள்ள $(a+b)^1$ –க்குச் சமம். இதனால் $P(1)$ மெய் ஆகும். ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண் k–க்கு $P(k)$ மெய் எனக் கொள்வோம். அதாவது,

$$(a+b)^k = {}^kC_0 a^k b^0 + {}^kC_1 a^{k-1} b^1 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r} b^r + \ldots + {}^kC_k a^0 b^k$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)\left[{}^kC_0 a^k b^0 + {}^kC_1 a^{k-1} b^1 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r} b^r + \ldots + {}^kC_k a^0 b^k\right] \\
&= \left[{}^kC_0 a^{k+1} b^0 + {}^kC_1 a^k b^1 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r+1} b^r + \ldots + {}^kC_k a^1 b^k\right] \\
&\quad + \left[{}^kC_0 a^k b^1 + {}^kC_1 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r} b^{r+1} + \ldots + {}^kC_k a^0 b^{k+1}\right] \\
&= {}^kC_0 a^{k+1} b^0 + \left[{}^kC_1 + {}^kC_0\right] a^k b^1 + \ldots + \left[{}^kC_r + {}^kC_{r-1}\right] a^{k-r+1} b^r \\
&\qquad + \ldots + \left[{}^kC_k + {}^kC_{k-1}\right] a^1 b^k + {}^kC_k a^0 b^{k+1}
\end{aligned}$$

${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ என்ற சேர்வுகளின் பண்பின்படி,

$$\begin{aligned}
&= {}^{k+1}C_0 a^{k+1} b^0 + {}^{k+1}C_1 a^k b^1 + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_r a^{k-r+1} b^r \\
&\qquad + \ldots + {}^{k+1}C_k a^1 b^k + {}^{k+1}C_{k+1} a^0 b^{k+1} \\
(a+b)^{k+1} &= {}^{k+1}C_0 a^{(k+1)} b^0 + {}^{k+1}C_1 a^{(k+1)-1} b^1 + {}^{k+1}C_2 a^{(k+1)-2} b^2 + \ldots \\
&\qquad + {}^{k+1}C_r a^{(k+1)-r} b^r + \ldots + {}^{k+1}C_k a^1 b^{(k+1)-1} + {}^{k+1}C_{k+1} a^0 b^{k+1}
\end{aligned}$$

எனவே, $P(k)$ மெய் எனில் $P(k+1)$ மெய் ஆகும். இதனால் கணித தொகுத்தறிதல் மூலம் எல்லா இயல் எண் n–க்கும் $P(n)$ மெய் என நிரூபணமாகிறது.

எனவே, $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n, n \in \mathbb{N}$

குறிப்பு:

(i) $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ என்பதன் விரிவாக்கத்தினை,

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k$ அல்லது $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^k b^{n-k}$ எனவும் எழுதலாம்.

(ii) n ஓர் இயல் எண் எனில், $(a+b)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிவில் $(n+1)$ உறுப்புகள் இருக்கும்.

(iii) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k$ இல் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் a –ன் அடுக்கானது ஒன்று குறைகிறது. ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் b –ன் அடுக்கானது ஒன்று அதிகரிக்கிறது. இருந்தபோதிலும், ஒவ்வொரு உறுப்பிலும், a மற்றும் b –ன் அடுக்குகளின் கூடுதல் எப்பொழுதும் n ஆக இருக்கிறது.

(iv) n ஒரு இயல் எண் எனில், $(a+b)^n$ என்பதன் விரிவில் $(r+1)$ ஆவது உறுப்பு $T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} b^r,\ r = 0,1,2,...,n$ ஆகும்.

(v) $(a+b)(a+b)...(a+b)$, என்ற n காரணிகளின் பெருக்குத் தொகையில் b^r ஐப் பெற, இந்த n காரணிகளில் r காரணிகள் தேவை. இவற்றை ${}^nC_r$ வழிகளில் நாம் பெறலாம். அதனால்தான், ${}^nC_r$ என்பது $a^{n-r}b^r$ –ன் கெழுவாக நமக்குக் கிடைக்கிறது.

(vi) $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ என்பதன் விரிவில் தொடக்கம் மற்றும் முடிவிலிருந்து சமதொலைவில் உள்ள கெழுக்கள் சமம். ஏனெனில், ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(vii) $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ என்பதன் விரிவில் n ஒரு இரட்டைப்படை எண் எனில், கெழுவின் அதிகபட்ச மதிப்பு, ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ ஆகும். n ஒரு ஒற்றைப்படை எண் எனில், கெழுவின் அதிகபட்ச மதிப்பு ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ அல்லது ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ ஆக இருக்கும்.

(viii) $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ என்பதன் விரிவில் n ஒரு இரட்டைப்படை எண் எனில், மைய உறுப்பு $T_{\frac{n}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{n-\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$ ஆகும். n ஒற்றைப்படை எண் எனில், $T_{\frac{n-1}{2}+1}$ மற்றும் $T_{\frac{n+1}{2}+1}$ என்பன இரு மைய உறுப்புகள் ஆகும்.

5.3 ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் குறிப்பிட்ட வகைகள் (Particular Cases of Binomial Theorem)

(i) $n \in \mathbb{N}$ எனில் $(a+b)^n$ –ன் விரிவில் b–க்கு பதில் $(-b)$ ஐப் பிரதியிட,

$$(a-b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 - {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 - ... + (-1)^r\, {}^nC_r a^{n-r} b^r + ... + (-1)^n\, {}^nC_n a^0 b^n$$

இங்கு '+' மற்றும் '–' குறியீடுகள் அடுத்தடுத்து வருவதைக் கவனிக்கவும்.

(ii) $n \in \mathbb{N}$ எனில் $(a+b)^n$ –ன் ஈருறுப்பு விரிவில் $a = 1$ மற்றும் $b = x$ எனப் பிரதியிட, $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + ... + {}^nC_r x^r + ... + {}^nC_n x^n$ எனக் கிடைக்கும். குறிப்பாக, $x = 1$ எனில், ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n$

குறிப்பு: X என்பது n உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணம் எனில், r உறுப்புகளைக் கொண்ட X–ன் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை ${}^nC_r$ ஆகும். $r = 0, 1, 2, ...\ n$ என ${}^nC_r$ இல் பிரதியிட, X–ன் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை கிடைக்கும். எனவே, மேற்குறிப்பிட்ட முற்றொருமையைக் கொண்டு n **உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணமானது 2^n உட்கணங்களைப் பெற்றிருக்கும்** என்பதை அறியலாம்.

(iii) $(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - \dots + (-1)^r\, {}^nC_r x^r + \dots + (-1)^n x^n$

பொதுவாக, $x = 1$, எனும்பொழுது,

${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \dots = 2^{n-1}$.

எடுத்துக்காட்டு 5.1 $(2x+3)^5$ –ன் விரிவாக்கம் காண்க.

தீர்வு:

$(a+b)^n$ என்ற ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் விரிவில் $a = 2x$, $b = 3$ மற்றும் $n = 5$ எனப் பிரதியிட,

$$\begin{aligned}(2x+3)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4 3 + 10(2x)^3 3^2 + 10(2x)^2 3^3 + 5(2x)3^4 + 3^5 \\ &= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243.\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.2 98^4 –ன் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு:

$(a-b)^n$ –ன் ஈருறுப்பு விரிவில் $a = 100$, $b = 2$ மற்றும் $n = 4$ எனப் பிரதியிட,

$$\begin{aligned}98^4 &= (100-2)^4 \\ &= {}^4C_0 100^4 - {}^4C_1 100^3 2 + {}^4C_2 100^2 2^2 - {}^4C_3 100^1 2^3 + {}^4C_4 100^0 2^4 \\ &= 100000000 - 8000000 + 240000 - 3200 + 16 \\ &= 92236816.\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.3 $(x+y)^6$ –ன் விரிவில் மைய உறுப்பினைக் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு $n = 6$ இது இரட்டைப்படை எண். எனவே, $(x+y)^6$ –ன் விரிவில் மைய உறுப்பு $x^{\frac{6}{2}}y^{\frac{6}{2}}$ ஐக் கொண்ட உறுப்பு. அதாவது, x^3y^3 ஐ கொண்ட உறுப்பு. எனவே அந்த மைய உறுப்பு ${}^6C_3x^3y^3 = 20x^3y^3$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4 $(x+y)^7$ –ன் விரிவில் மைய உறுப்பினைக் காண்க.

தீர்வு:

$n = 7$ என்பது ஒற்றைப்படை எண். எனவே, இரண்டு மைய உறுப்புகள், அதாவது x^4y^3 மற்றும் x^3y^4 –ஐ கொண்டவையாக இருக்கும். அவை, ${}^7C_3x^4y^3$ மற்றும் ${}^7C_4x^3y^4$ ஆகும். எனவே மைய உறுப்புகள் $35x^4y^3$ மற்றும் $35x^3y^4$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.5 $(3+2x)^{10}$ –ன் விரிவில் x^6 –ன் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு:

$(a+b)^{10}$ –ன் ஈருறுப்புப் விரிவில் $a = 3$ மற்றும் $b = 2x$ எனக் கொள்க.

x^6 என்பது $(2x)^6$ எனக் கொண்டுள்ள உறுப்பில் மட்டுமே காணப்படும். x^6 ஐக் கொண்ட உறுப்பு,

$$^{10}C_6 a^4 b^6 = {}^{10}C_4 a^4 b^6 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} 3^4 (2x)^6 = 210 \times 3^4 \times 2^6 x^6 \quad [\because {}^{10}C_6 = {}^{10}C_4]$$

$(3+2x)^{10}$ என்ற விரிவில் x^6 –ன் கெழு $210 \times 3^4 2^6$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.6 $(2-3x)^7$ –ன் விரிவில் x^3 –ன் கெழுவினைக் காண்க.

தீர்வு:

$(a+b)^7$ –ன் ஈருறுப்பு விரிவில் $a = 2$ மற்றும் $b = -3x$ எனக் கொள்க. x^3 ஆனது, $(-3x)^3$ எனக் கொண்டுள்ள உறுப்பில் மட்டுமே காணப்படும். x^3 ஐக் கொண்ட உறுப்பு

$$^7C_3 a^4 b^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} 2^4 (-3x)^3 = 35 \times 2^4 \times (-3)^3 x^3.$$

எனவே, $(2-3x)^7$ –ன் விரிவில் x^3 –ன் கெழு $35 \times 16 \times (-27) = -15120$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.7 $(x+a)^n$ –ன் விரிவாக்கத்தில், இரண்டாவது, மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது உறுப்புகள் முறையே 240, 720 மற்றும் 1080 எனில் x, a மற்றும் n–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு $T_2 = 240, T_3 = 720$ மற்றும் $T_4 = 1080$

$$T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} a = 240 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$T_3 = {}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$T_4 = {}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

சமன்பாடு (2) ஐ (1) ஆல் மற்றும் (3) ஐ (2) ஆல் வகுக்க, நமக்கு கிடைப்பது,

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{n-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

சமன்பாடுகள் (4) மற்றும் (5) இவற்றிலிருந்து, $\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}$

எனவே, $n = 5$ ஆகும். $n = 5$ ஐ (1) மற்றும் (4) இல் பிரதியிட்டு, சமன்பாடு (1) ஐ சமன்பாடு (4) ஆல் வகுக்க, $\dfrac{5x^4 a}{\frac{a}{x}} = \dfrac{240}{\frac{6}{4}}$ என கிடைக்கும். எனவே, $5x^5 = 160$. மற்றும் இதன் மூலம் $x = 2$ எனவும், இதை சமன்பாடு (4) இல் பிரதியிட, $a = 3$ எனவும் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8 $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^4$ ஐ விரிவுப்படுத்துக.

தீர்வு:

$$\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^4 = {}^4C_0 (2x)^4 \left(-\frac{1}{2x}\right)^0 + {}^4C_1 (2x)^3 \left(-\frac{1}{2x}\right)^1 + {}^4C_2 (2x)^2 \left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + {}^4C_3 (2x)^1 \left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^4C_4 (2x)^0 \left(-\frac{1}{2x}\right)^4$$

$$= (2x)^4 - 4(2x)^3\left(\frac{1}{2x}\right) + 6(2x)^2\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - 4(2x)\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \left(\frac{1}{2x}\right)^4$$

$$= 16x^4 - 16x^2 + 6 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16x^4}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.9 $\left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5$ விரிவுபடுத்துக.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^5 &= {}^5C_0(x^2)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)^0 + {}^5C_1(x^2)^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)^1 \\
&\quad + {}^5C_2(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + {}^5C_3(x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 \\
&\quad + {}^5C_4(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4 + {}^5C_5(x^2)^0\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 \\
&= x^{10} + 5x^8\sqrt{1-x^2} + 10x^6(1-x^2) + 10x^4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \\
&\quad + 5x^2(1-x^2)^2 + (1-x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5 &= {}^5C_0(x^2)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)^0 - {}^5C_1(x^2)^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)^1 \\
&\quad + {}^5C_2(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - {}^5C_3(x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 \\
&\quad + {}^5C_4(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4 - {}^5C_5(x^2)^0\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 \\
&= x^{10} - 5x^8\sqrt{1-x^2} + 10x^6(1-x^2) - 10x^4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \\
&\quad + 5x^2(1-x^2)^2 - (1-x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)
\end{aligned}$$

ஆகவே,

$$\begin{aligned}
\left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5 &= 2\left[x^{10} + 10x^6(1-x^2) + 5x^2(1-x^2)^2\right] \\
&= 2\left[x^{10} + 10x^6 - 10x^8 + 5x^2(1-2x^2+x^4)\right] \\
&= 2\left[x^{10} - 10x^8 + 15x^6 - 10x^4 + 5x^2\right]
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.10 எல்லா மிகை முழு எண் n–க்கும் $6^n - 5n$ ஐ 25 ஆல் வகுக்க மீதி 1 என்பதை ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம் நிறுவுக.

தீர்வு:

இதை நிறுவ, $6^n - 5n = 25k + 1$, k என்பது ஒரு இயல் எண், என நிறுவினால் போதுமானது.

எனில், $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \dots + {}^nC_{n-1}x^{n-1} + {}^nC_nx^n, n \in \mathbb{N}$

$x = 5$என எடுத்துக் கொள்ள, $(1+5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + \dots + {}^nC_{n-1}5^{n-1} + {}^nC_n 5^n$ என கிடைக்கும்.

மேலே உள்ள சமன்பாடு, $6^n = 1 + 5n + 25\left({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + \dots + {}^nC_n 5^{n-2}\right)$ என மாறும்.

அதாவது, $6^n - 5n = 1 + 25\left({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + \dots + {}^nC_n 5^{n-2}\right) = 1 + 25k, k \in \mathbb{N}$

இதிலிருந்து, $6^n - 5n$ ஐ 25 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 1 என அறியலாம். இது எல்லா இயல் எண் $'n'$–க்கும் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.11 7^{400} –ன் கடைசி இரண்டு இலக்கங்கள் காண்க.

தீர்வு:

$$7^{400} = (7^2)^{200} = (50-1)^{200}$$

$$= {}^{200}C_0 50^{200} - {}^{200}C_1 50^{199} + \ldots$$

$$+ {}^{200}C_{198} 50^2 (-1)^{198} + {}^{200}C_{199} 50(-1)^{199} + {}^{200}C_{200} (-1)^{200}$$

$$= 50^2 \left({}^{200}C_0 50^{198} - {}^{200}C_1 50^{197} + \ldots + {}^{200}C_{198} (-1)^{198}\right) - 200 \times 50 + 1$$

50^2 மற்றும் 200 என்பன 100 ஆல் வகுபடும். எனவே, 7^{400} –ன் கடைசி இரண்டு இலக்கங்கள் 0 1.

பயிற்சி 5.1

1. விரிவு படுத்துக. (i) $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^3$ (ii) $\left(2x^2 - 3\sqrt{1-x^2}\right)^4 + \left(2x^2 + 3\sqrt{1-x^2}\right)^4$
2. மதிப்புக் காண்க. (i) 102^4 (ii) 99^4 (iii) 9^7
3. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(1.01)^{1000000}$ மற்றும் 10000 ஆகியவற்றில் எது பெரியது எனக் காண்க.
4. $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$ –ன் விரிவில் x^{15} –ன் கெழுவைக் காண்க.
5. $\left(x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^6$ –ன் விரிவில் x^2 மற்றும் x^6 –ன் கெழுக்களைக் காண்க.
6. $(1+x^3)^{50}\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^5$ –ன் விரிவில் x^4 –ன் கெழுவைக் காண்க.
7. $\left(2x^3 - \dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ –ன் விரிவில் மாறிலி உறுப்பைக் காண்க.
8. 3^{600} –ன் கடைசி இரண்டு இலக்கங்களைக் காண்க.
9. எல்லா மிகை முழு எண் n–க்கும் $9^{n+1} - 8n - 9$ என்பது 64 ஆல் வகுபடும் என ஈருறுப்புத் தேற்றம் மூலம் நிறுவுக.
10. n ஒரு ஒற்றைப்படை மிகை முழு எண் எனில், $(x+y)^n$ –ன் விரிவில் மைய உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமம் என நிறுவுக.
11. n ஒரு மிகை முழு எண் மற்றும் r என்பது குறையற்ற முழு எண் எனில், $(1+x)^n$ –ன் விரிவில் x^r மற்றும் x^{n-r} உறுப்புக்களின் கெழுக்கள் சமம் என நிறுவுக.
12. a மற்றும் b என்பவை வெவ்வேறு முழுக்கள் எண்கள் எனில், n என்ற மிகை முழு எண்ணிற்கு $a^n - b^n$ –ன் ஒரு காரணி $a - b$ என நிறுவுக. (குறிப்பு: $a^n = (a-b+b)^n$ என எடுத்து விரிவு படுத்துக.)
13. $(a+b)^n$ –ன் விரிவில், 4 ஆவது மற்றும் 13 ஆவது உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமம் எனில், n–ன் மதிப்பைக் காண்க.
14. $(a+x)^n$ –ன் விரிவில் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் விகிதம் 1:7:42 எனில், n–ன் மதிப்புக் காண்க.

15. $(1+x)^n$ –ன் விரிவில் 5 ஆவது, 6 ஆவது மற்றும் 7 ஆவது உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர் எனில், n–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

16. $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ என நிறுவுக.

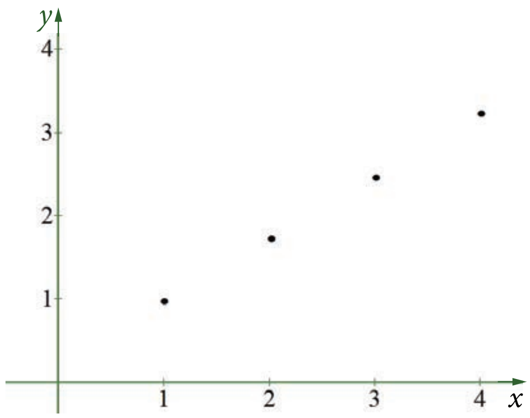
5.4 முடிவுறு தொடர்முறைகள் (Finite Sequences)

தொடர்முறை என்பது பட்டியலில் உள்ள உறுப்புகளை ஒரு குறிப்பிட்ட முறையில் வரிசைப்படுத்தி எழுதுவது ஆகும். எண்களின் தொடர்முறை பற்றிச் சிந்திக்கும்போது, $a_1, a_2, ...$ என்பது நேரிடையானது. தொடர்முறையை ஒரு சார்பாக கருத, அதன் சார்பகம் முதல் n இயல் எண்களின் கணம் அல்லது $\mathbb{N}$ ஆக அமையும். இந்தப் பாடப்பகுதி முழுவதும் மெய்யெண்களின் தொடர்முறைகளை மட்டுமே காண்கிறோம். இவற்றைத் தொடர்முறைகள் எனக் குறிப்பிடலாம். கூட்டுத்தொடர்முறை மற்றும் பெருக்குத் தொடர் முறை என்பன முறையே கூட்டு விருத்தி (AP) மற்றும் பெருக்கு விருத்தி (GP) என அழைக்கப்படும். இந்தப் பிரிவில் முன் வகுப்புகளில் படித்த தொடர்முறை மற்றும் தொடர்களின் வரையறைகள், முடிவுகள் பற்றி நினைவில் கொள்வோம்.

- X ஏதேனும் ஒரு கணம் மற்றும் $n \in \mathbb{N}$ எனில், $f:\{1,2,3,...,n\} \to X$ என்ற சார்பு, X–ன் மீதான **ஒரு முடிவுறு தொடர் முறை** எனப்படும். $g:\mathbb{N} \to X$ என்ற சார்பு, X–ன் மீதான ஒரு **முடிவுறா தொடர்முறை** எனப்படும். n இல் சார்பு f–ன் மதிப்பு $f(n)$ ஐ a_n எனக் குறிக்கலாம். அந்த தொடர் முறை (a_n) என குறிக்கப்படும்.
- X என்ற கணம் மெய் எண்களின் கணம் எனில் அந்த தொடர்முறை ஒரு எண்களின் தொடர்முறை அல்லது மெய்யெண்களின் தொடர்முறை எனப்படும்.
- எல்லா தொடர்முறையும் ஒரு சார்பாக இருந்தாலும், எல்லாச் சார்புகளும் தொடர்முறையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.
- கணங்களில் உறுப்புகள் மீண்டும் வராமல் இருப்பதை அறிவோம். ஆனால் ஒரு தொடர்முறையில் உறுப்புகள் மீண்டும் மீண்டும் வரலாம். குறிப்பாக,

ஒரு தொடர்முறையில் உறுப்புகள் அனைத்தும் சமமானால் அது ஒரு **மாறிலித் தொடர்முறை** எனப்படும்.

- ஒரு தொடர்முறை (a_n) –ஐ படமாகத் தெரிந்துகொள்ள $\{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ இக்கான வரைபடத்தினை வரைதல் வேண்டும். இது தொடர்முறையைப் பற்றிய சில விவரங்களைக் கொடுக்கிறது.



படம் 5.1

5.4.1 கூட்டு மற்றும் பெருக்குத் தொடர் முறைகள் (Arithmetic and Geometric Progressions)

சில சிறப்புத் தொடர்முறைகள், தொடர்விருத்திகள் எனப்படும். இங்கு, தொடர்முறையின் உறுப்புகள் ஏறுமுகமாகவோ அல்லது இறங்குமுகமாகவோ அமையலாம்.

நாம் முன் வகுப்புகளில் படித்துள்ள கூட்டு மற்றும் பெருக்குத் தொடர்முறைகளின் வரையறைகளையும், முடிவுகளையும் நினைவு கூர்வோம்.

கூட்டுத் தொடர் முறை (Arithmetic Progression)(AP)

- $a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+(n-1)d, a+nd, ...$ என்ற தொடர்முறை, **கூட்டுவிருத்தி** அல்லது **கூட்டுத்தொடர்முறை** (Arithmetic Progression) எனப்படும். இங்கு, முதல் உறுப்பு a தவிர, மற்ற உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் அதன் முந்தைய உறுப்புடன் ஒரு மாறிலியை கூட்டக் கிடைக்கின்றன. இங்கு, மாறிலி d என்பது பொது வித்தியாசம் எனப்படும் மற்றும் a என்பது முதல் உறுப்பு எனப்படும்.
- கூட்டுத்தொடர்முறையின் n ஆவது உறுப்பு $T_n = a+(n-1)d$.
- $\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}+2\sqrt{3}, \sqrt{2}+3\sqrt{3}, ...$ மற்றும் $12,\ 9,\ 6,\ 3,\ .\ .\ .$ என்ற தொடர்முறைகள், முறையே $\sqrt{3}$ மற்றும் -3ஐ பொது வித்தியாசங்களாக உடைய கூட்டுத்தொடர் முறைகள் ஆகும்.
- $3,\ 7,\ 11$ ஆகிய மூன்று பகா எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடரை அமைக்கின்றன.
- a மற்றும் b சார்பகா எண்கள் எனில், $T_n = an+b, n \in \mathbb{N}$ என்பது எண்ணற்ற பகா எண்கள் மற்றும் பகு எண்களைக் கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடராக அமையும்.

பெருக்குத் தொடர் முறை (Geometric Progression) (GP)

- $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}, ar^n, ...\quad a \neq 0, r \neq 0,$ என்ற தொடர்முறை, **பெருக்குவிருத்தி** அல்லது **பெருக்குத் தொடர்முறை** (Geometric Progression) எனப்படும். இங்கு முதல் உறுப்பு a தவிர, மற்ற உறுப்புகள் முந்தைய உறுப்பினை ஒரு மாறிலியால் பெருக்க கிடைக்கின்றன. இங்கு மாறிலி r என்பது, பொது விகிதம் மற்றும் a என்பது முதல் உறுப்பு எனப்படும்.
- பெருக்குத் தொடர்முறையின் n ஆவது உறுப்பு $T_n = ar^{n-1}$
- $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\ ...$ மற்றும் $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 16, ...$ என்ற தொடர்முறைகள், முறையே 2 மற்றும் $\sqrt{2}$ ஐ பொது விகிதங்களாக உடைய பெருக்குத் தொடர் முறைகளாகும்.
- பொது விகிதம் மிகை மதிப்பாக உள்ள ஒரு பெருக்குத்தொடர் முறையின், ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் மடக்கை காண அது ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாக மாறும். $a, ar, ar^2, ..., r > 0$ என்பது ஒரு பெருக்குத்தொடர்முறை எனில், $\log a, \log(ar), \log(ar^2), ...$ என்பது $log\ r$ ஐ பொது வித்தியாசமாகக் கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாகும்.

$c \neq 0$ எனில், $c,\ c,\ c,\ .\ .\ .$ என்ற மாறிலித் தொடர்முறை ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாகவும் பெருக்குத் தொடர்முறையாகவும் உள்ளதை அறியலாம்.

$0, 0, 0, . . .$ என்ற சிறப்பு மாறிலித் தொடர்முறையை எடுத்துக்கொள்வோம். இதை ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாக அறியலாம். ஆனால், அதை ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறையாக பார்க்கும்போது முதல் உறுப்பு a என்பது 0 ஆக உள்ளது. அதன் பொது விகிதம் என்னவாக இருக்கும்? 1, 2 அல்லது வேறு ஏதேனும் ஒரு எண் பொது விகிதம் எனக் கொண்டால், நாம் அதே தொடர் முறையை $0, 0, 0, . . .$ பெற முடியும். இங்கு, இந்த பெருக்குத் தொடர்முறையின் பொது விகிதம் எண்ணற்றதாக உள்ளது. இந்தக் குழப்பத்தினைத் தவிர்க்கவே கணிதவியலாளர்கள் பெருக்குத் தொடர்முறையின் வரையறையில் $a \neq 0$ என எடுத்துக் கொள்கிறார்கள்.

5.4.2 கூட்டு – பெருக்குத் தொடர் முறை (Arithmetico- Geometric Progression) (AGP)

கூட்டு மற்றும் பெருக்குத் தொடர்முறைகளின் சேர்ப்பு ஒரு புதிய தொடர்முறையை உருவாக்குகிறது. அது **கூட்டு–பெருக்குத் தொடர் விருத்தி** அல்லது **கூட்டு–பெருக்குத் தொடர்முறை** எனப்படும். கூட்டுத் தொடர் முறையை AP என்றும் பெருக்குத் தொடர் முறையை GP என்றும் குறிப்பது போல் இந்த கூட்டு–பெருக்குத் தொடர் முறையை AGP என குறிப்பிடலாம். நிகழ்தகவியலில் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பைக் கணக்கிடவும் மற்றும் பல்வேறு பயன்பாடுகளிலும் AGP–ன் தேவை உணரப்படுகிறது.

வரையறை 5.1 :

$a,(a+d)r,(a+2d)r^2,(a+3d)r^3,...,(a+(n-1)d)r^{n-1},(a+nd)r^n,...$ என்ற தொடர்முறை **கூட்டு–பெருக்குத் தொடர் விருத்தி** அல்லது **கூட்டு–பெருக்குத் தொடர்முறை** *(Arithmetico–Geometric Progression)* எனப்படும்.

$AP: a, a+d, a+2d, ...$ மற்றும் $GP: 1, r, r^2, ...$ எனில், $a,(a+d)r,(a+2d)r^2,...$ என்பது AGP ஆகும். இந்த AGP–ன் முதல் உறுப்பு a , பொது வித்தியாசம் d மற்றும் பொது விகிதம் r . இங்கு, $r=1$ எனில், AGP, AP ஆகவும் $d = 0$ எனில், AGP, GP ஆகவும் மாறும். எனவே, கூட்டுத்தொடர் முறை மற்றும் பெருக்குத் தொடர்முறைகள் என்பன கூட்டு பெருக்குத் தொடரின் சில குறிப்பிட்ட நிலைகள் ஆகும். இது கணிதத்தில் பொதுமைப்படுத்துதல் கோட்பாட்டின் நிலை எனலாம். AGP–ன் n ஆவது உறுப்பு $T_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$. எல்லா கூட்டுத்தொடர் மற்றும் பெருக்குத் தொடர்களை கூட்டுப்பெருக்குத்தொடர் எனவும் கூறலாம். எடுத்துக்காட்டாக, AP ஐ $0, 1, 2, 3, 4, . . .$ எனவும், GP ஐ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ எனவும் எடுத்துக்கொண்டால், AGP ஐ $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, ...$ எனவும் எழுதலாம்.

4, 14, 40, 104, 256, 608 . . . என்ற தொடர்முறை ஒரு கூட்டு–பெருக்குத் தொடர்முறைக்கான எடுத்துக்காட்டாகும். இந்த தொடர்முறையில் $a=4$, $d=3$ மற்றும் $r=2$.

5.4.3 இசைத் தொடர்முறை (Harmonic progression)

முக்கியமான தொடர்முறைகளில் ஒன்று **இசைத்தொடர் விருத்தி** அல்லது **இசைத்தொடர் முறை** ஆகும். இது கூட்டுத்தொடர் முறையோடு நெருங்கிய தொடர்புடையது. இசைத் தொடர் முறை பல இடங்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

வரையறை 5.2 :

$h_1, h_2, h_3, ...$ என்ற தொடர்முறை ஒரு **இசைத்தொடர்முறையாக** *(Harmonic Progression)* இருக்க, $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{1}{h_4}, ...$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர்முறையாக இருக்க வேண்டும்.

ஒரு தொடர்முறை இசைத்தொடர்முறையாக இருக்க வேண்டுமானால் அதன் உறுப்புகளின் தலைகீழிகள் ஒரு கூட்டுத்தொடர் முறையாக இருக்கவேண்டும் என நினைவில் கொள்ளலாம். ஆனால், இசைத் தொடர்முறையினை கூட்டுத் தொடர்முறையின் தலைகீழிகள் என கூற முடியாது. ஏனெனில் கூட்டுத்தொடர்முறையில் பூஜ்ஜியம் ஒரு உறுப்பாக இருந்தால், அதன் தலைகீழி அர்த்தமுள்ளதாக இருக்காது. ஒரு கூட்டுத்தொடர்முறையில் பூஜ்ஜியம் ஒரு உறுப்பாக இல்லையெனில், அதன் தலைகீழிகள் ஒரு இசைத்தொடர்முறையாகும்.

எனவே, $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, ...$ என்பது இசைத் தொடர்முறையின் பொதுவடிவம் ஆகும். ஒரு பின்னத்தின் பகுதி பூஜ்ஜியமாக இருக்க முடியாது. அதாவது, $a+kd \neq 0$; k ஒரு குறையற்ற முழுஎண் எனவே, $\frac{-a}{d}$ ஒரு முழு எண் இல்லை என்ற விதி அவசியம். இசைத்தொடர்முறையின் கணக்குகளை கூட்டுத்தொடர்முறைகளாக மாற்றி கூட்டுத் தொடர்முறை மூலம் தீர்வு காணலாம்.

குறிப்பு:

(i) தொடர்முறை $\left(\frac{1}{n}\right)=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...$ என்பது ஒரு இசைத் தொடர்முறை. நாம், $\left\{\left(n,\frac{1}{n}\right): n\in\mathbb{N}\right\}$–ன் வரைபடம் வரைந்து இசைத்தொடர் முறை $\left(\frac{1}{n}\right)$ ஐ காட்சியாக காணலாம்.

(ii) a, b, c என்பன HP எனில், $b=\dfrac{2ac}{a+c}$ ஆகும்.

(iii) ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் AP இல் இருக்குமானால் அவற்றின் பக்கங்கள் HP இல் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.12 a, b, c ஆகியவை இசைத் தொடராக இருந்தால், $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ எனவும், இதன் மறுதலையும் உண்மை என நிறுவுக.

தீர்வு:

a, b, c என்பன HP இல் இருந்தால் $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ என்பன AP இல் இருக்கும்.

எனவே, $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$. இதிலிருந்து கிடைப்பது, $ab-ac=ac-bc$.

எனவே, $a(b-c)=c(a-b)$. இதிலிருந்து கிடைப்பது $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$.

மறுதலையாக, $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ எனில், $a(b-c)=c(a-b)$

இருபுறமும் abc ஆல் வகுக்க $\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$.

எனவே, $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையாகிறது. இதனால் a, b, c ஒரு இசைத் தொடர் முறையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.13 ஒரு இசைத் தொடர் முறையின் ஐந்தாவது மற்றும் ஒன்பதாவது உறுப்புகள் முறையே $\frac{1}{19}$ மற்றும் $\frac{1}{35}$ எனில், அந்த தொடர்முறையின் பன்னிரண்டாவது உறுப்பினைக் காண்க.

தீர்வு:

(h_n) ஒரு இசைத்தொடர்முறை என்க மற்றும் $a_n=\frac{1}{h_n}$ என்க. (a_n) என்பது கூட்டுத்தொடர்முறை என்பதால் $a_5=19$ மற்றும் $a_9=35$

$a+4d=19$, $a+8d=35$ எனக் கிடைக்கும். இவற்றைத் தீர்க்க, $a=3$ மற்றும் $d=4$ எனக் கிடைக்கும். எனவே, கூட்டுத்தொடர்முறையின் 12 ஆவது உறுப்பு $a_{12}=a+11d=47$. இதனால் இசைத் தொடர் முறையின் 12 வது உறுப்பு $\frac{1}{47}$ ஆகும்.

மாறிலித் தொடர்முறைகள் பற்றி நாம் என்ன கூறலாம்?

பூஜ்ஜியத் தொடர்முறை தவிர மற்ற எல்லா மாறிலித் தொடர்முறையும் இசைத்தொடர்முறை ஆகும்.

5.4.4 கூட்டு, பெருக்கு மற்றும் இசைச் சராசரிகள் (Arithmetic, Geometric and Harmonic Means)

சராசரியைப் பற்றி நாம் அறிவோம். சராசரியில் பலவகை உள்ளது. கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி மற்றும் இசைச்சராசரி என்பன சில சராசரிகள் ஆகும். உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்முறை அல்லது

பெருக்குத் தொடர் முறையில் இல்லாமல் இருந்தாலும் கூட்டுச்சராசரி மற்றும் பெருக்குச் சராசரிகளின் வரையறைகளை காண்போம்.

கூட்டுச்சராசரி மற்றும் பெருக்குச் சராசரி

வரையறை 5.3 :

n ஒரு மிகை முழு எண் என்க. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்பன n எண்கள் என்க. இப்போது, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்ற எண்களின் **கூட்டுச்சராசரி** *(Arithmetic Mean)* $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$ ஆகும்.

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்ற எண்கள் வெவ்வேறாகவோ அல்லது மிகை எண்களாகவோ இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. $14, 14, 17, 20, 15$ என்ற எண்களின் சராசரி 16 என வரையறையிலிருந்து எளிதில் அறியலாம். கூட்டு சராசரியில், கூட்டல் மற்றும் n ஆல் வகுத்தலுக்குப் பதிலாக, பெருக்கல் மற்றும் n ஆம் படி மூலம் என எடுத்துக்கொண்டால் நமக்கு பெருக்குச் சராசரி கிடைக்கும்.

வரையறை 5.4 :

n ஒரு குறையற்ற எண் என்க. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்பன n குறையற்ற எண்கள் எனில், $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$ என்பது $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்ற எண்களின் **பெருக்குச்சராசரி** *(Geometric Mean)* எனப்படும்.

இங்கு, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ஆகிய எண்கள் வேறுபட்டவையாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. ஆனால், அவை குறையற்ற எண்களாக இருக்க வேண்டியது அவசியம். $4, 6, 9$ என்ற எண்களின் பெருக்குச்சராசரி $\sqrt[3]{216} = 6$ ஆகும். $4, 6, 9$ என்ற எண்களின் கூட்டுச்சராசரி $\dfrac{19}{3} = 6\dfrac{1}{3}$ ஆகும். கூட்டுச் சராசரி பெருக்குச் சராசரியைவிட அதிகமாக உள்ளதைக் காணலாம். இது எப்போதும் மெய்யாக இருக்குமா?

குறையற்ற n எண்களுக்கான கூட்டுச்சராசரி, பெருக்குச் சராசரியைவிட அதிகமாக அல்லது சமமாக இருக்கும் என நிரூபிக்கலாம். அதாவது, AM என்பது கூட்டு சராசரியையும், GM என்பது பெருக்குச் சராசரியையும் குறித்தால், $AM \geq GM$ எனலாம்.

நாம் இப்பொழுது, $AM \geq GM$ என்ற சமனிலியை இரு குறையற்ற எண்களுக்கு நிறுவலாம்.

தேற்றம் 5.2

இரு குறையற்ற எண்களுக்கான கூட்டுச்சராசரி மற்றும் பெருக்குச் சராசரி முறையே AM மற்றும் GM என குறிக்கப்படுமானால், $AM \geq GM$. அந்த இரு எண்களும் சமமாக இருக்கும்போது $AM = GM$ ஆக இருக்கும். அதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

நிரூபணம் a மற்றும் b என்பன ஏதேனும் இரு குறையற்ற எண்கள் என்க. இப்போது $AM = \dfrac{a+b}{2}$, $GM = \sqrt{ab}$ ஆகும்.

$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$. அதனால், $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$.

இதிலிருந்து, $(a+b) \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

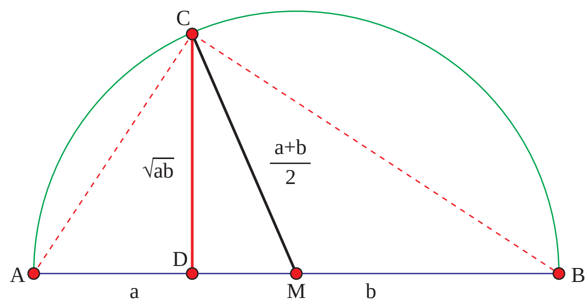
அதாவது $AM \geq GM$. மேலும், $AM = GM \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$ எனவே $AM = GM$ ஆக இருக்கும்.

$AM \geq GM$ –க்கான வடிவ கணித விளக்கம்

a மற்றும் b என்பன ஏதேனும் இரு குறையற்ற மெய்யெண்கள் என்க. இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் GM பூஜ்ஜியமாகும். எனவே, நிரூபிக்க ஏதுமில்லை. நாம் $a > 0$ மற்றும் $b > 0$ என கொள்வோம். $a+b$ நீளம் கொண்ட AB என்ற ஒரு நேர்க்கோட்டுத்துண்டு வரைந்து, AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு அரைவட்டம் வரைக. M என்பது AB–ன் நடுப்புள்ளி என்க. எனவே, அரைவட்டத்தின் மையம் M ஆகும். M என்பது AB–ன் நடுப்புள்ளி என்பதால், $AM = MB = \dfrac{a+b}{2}$.

எனவே, வட்டத்தின் ஆரம் $\dfrac{a+b}{2}$ ஆகும்.

$AD = a,\ DB=b$ எனுமாறு D என்ற புள்ளியை AB–ன் மீது எடுத்துக்கொள்க.



படம் 5.2

D வழியாக AB–க்கு செங்குத்து கோடு வரைக. அது அரை வட்டத்தை C என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும் என்க. CA, CB மற்றும் CM என்ற கோடுகளை வரைக. M ஆனது அரைவட்டத்தின் மையம் என்பதால் $CM =$ ஆரம் $= \dfrac{a+b}{2}$, $MD = \dfrac{a+b}{2} - a$ என்பது தெளிவாகும். ΔACD மற்றும் ΔCBD என்பன ஒத்த முக்கோணங்கள் என்பதால், $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BD}{CD}$. எனவே, $CD^2 = AD \times BD = ab$

மேலும், $CD = \sqrt{ab}$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியும் $CD = \sqrt{ab}$ என நிறுவலாம்.) ஒரு அரை நாணின் நீளம் எப்போதும் ஆரத்தைவிட குறைவாக அல்லது சமமாக இருக்கும் என்பதால், $CD \leq CM$ அல்லது $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$. அதாவது, $AM \geq GM$.

D ஆனது M–ல் அமையும் போது அரைநாண் DC ஆனது ஆரத்திற்கு சமமாக மாறும். அதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது, $AM=GM$ எனில், $a = b$ மற்றும் $a = b$ எனில் $AM=GM$ ஆகும்.

முடிவு 5.1 : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ என்பன கூட்டுத்தொடர்முறையில் இருக்குமானால், a_k $(k > 1)$ என்ற ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முன்னியான a_{k-1} மற்றும் அதன் தொடரியான a_{k+1} இவற்றிற்கான கூட்டுச்சராசரியாக இருக்கும்.

நிரூபணம் $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ என்பது முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d கொண்ட கூட்டுத்தொடர் முறையின் உறுப்புகள் என்க.

$$a_k = a + (k-1)d,\ a_{k-1} = a + (k-2)d \text{ மற்றும் } a_{k+1} = a + kd$$

$$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{a + (k-2)d + a + kd}{2} = \frac{2a + (2k-2)d}{2} = a + (k-1)d = a_k .$$

அதாவது, a_{k-1} மற்றும் a_{k+1} ஆகியவற்றின் கூட்டுச்சராசரி a_k ஆகும்.

முடிவு 5.2 : $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறை எனில், அதில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பு $a_k (k > 1)$, அதற்கு முன்னர் உள்ள முன்னியான a_{k-1} மற்றும் அதற்குப் பின்னர் உள்ள தொடரியான a_{k+1} ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரியாக இருக்கும்.

நிரூபணம் $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்பது முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது விகிதம் r உள்ள பெருக்குத் தொடர்முறை என்க.

ஆகையால், $a_k = ar^{k-1}, a_{k-1} = ar^{k-2}$ மற்றும் $a_{k+1} = ar^k$.

எனவே, $\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}} = \sqrt{ar^{k-2}ar^k} = \sqrt{a^2r^{2k-2}} = ar^{k-1} = a_k$.

அதாவது, a_{k-1} மற்றும் a_{k+1} ஆகியவைகளின் பெருக்குச்சராசரி a_k ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.14 $4, A_1, A_2, ..., A_7, 7$ என்ற தொடர்முறை கூட்டுத் தொடர்முறையாக இருக்குமாறு, $A_1, A_2, ..., A_7$ என்ற ஏழு எண்களைக் காண்க. மேலும், $12, G_1, G_2, G_3, G_4, \frac{3}{8}$ என்ற தொடர்முறை பெருக்குத் தொடர்முறையாக இருக்குமாறு, G_1, G_2, G_3, G_4 என்ற நான்கு எண்களையும் காண்க.

தீர்வு:

$a = 4$ மற்றும் $4 + 8d = 7$. இதிலிருந்து, $d = \frac{3}{8}$ எனக் கிடைக்கும். எனவே தேவையான 7 எண்கள் $4\frac{3}{8}, 4\frac{6}{8}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{4}{8}, 5\frac{7}{8}, 6\frac{2}{8}, 6\frac{5}{8}$ ஆகும்.

மேலும், $a = 12$ மற்றும் $ar^5 = \frac{3}{8}$ என்பதால் $r^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$. எனவே, தேவையான 4 எண்கள் $6, 3, 1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.15 ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறையின் 4 ஆவது, 5 ஆவது, 6 ஆவது உறுப்புகளின் பெருக்கல் 4096 மற்றும் 5 ஆவது, 6 ஆவது, 7 ஆவது உறுப்புகளின் பெருக்கல் 32768 எனில் அந்த பெருக்குத் தொடர்முறையின் முதல் 8 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட பண்புகள் உடைய பெருக்குத்தொடர்முறை $a, ar, ar^2, ...$ என்க.

4 ஆவது, 5 ஆவது, 6 ஆவது உறுப்புகள் முறையே, ar^3, ar^4 மற்றும் ar^5 ஆகும். இவற்றின் பெருக்கற்பலன், $a^3r^{12} = 4096$. இது போன்று, $a^3r^{15} = 32768$. எனவே, $\frac{a^3r^{15}}{a^3r^{12}} = \frac{32768}{4096}$ அதாவது, $r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$,

$a^3r^{12} = 4096$, இதில் $r = 2$ எனப் பிரதியிட, $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$.

முதல் 8 உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{1-2^8}{1-2} = 255$ ஆகும்.

இசைச் சராசரி (Harmonic Mean)

கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண்களின் **இசைச்சராசரி** என்பது அந்த எண்களின் தலைகீழிகளின் கூட்டுச்சராசரியின் தலைகீழியாகும். அதாவது, $h_1, h_2, ..., h_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண்கள் எனில், அவற்றின் தலைகீழிகள் $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, ..., \frac{1}{h_n}$ எனவே, இத்தலைகீழிகளின் கூட்டுச்சராசரி

$\dfrac{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+...+\frac{1}{h_n}}{n}$ ஆகும். இந்த கூட்டுச் சராசரியின் தலைகீழி $\dfrac{n}{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+...+\frac{1}{h_n}}$ என்பது $h_1, h_2, ..., h_n$ என்ற எண்களின் இசைச் சராசரி எனப்படும்.

வரையறை 5.5

$\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள மிகை எண்களின் இசைச்சராசரி $\dfrac{n}{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+...+\frac{1}{h_n}}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பாக, a மற்றும் b என்ற இரு மிகை எண்களின் இசைச்சராசரி $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

"n மிகை எண்கள் கொண்ட எந்வொரு கணத்திற்கும், பெருக்குச்சராசரி இசைச் சராசரியைவிட அதிகமாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கும்" என்பதை நிறுவலாம். அதாவது, $GM \geq HM$ இரு குறையற்ற எண்களுக்கு, $GM \geq HM$ என்ற சமனிலியை நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 5.3

இரு மிகை எண்களின் பெருக்குச் சராசரி மற்றும் இசைச்சராசரி முறையே GM மற்றும் HM என குறிக்கப்படுமாயின், $GM \geq HM$ என இருக்கும். அந்த இரு எண்களும் சமம் எனில் $GM = HM$ ஆக இருக்கும் இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

நிரூபணம் a மற்றும் b என்பன இரு மிகை எண்கள் என்க.

$$GM = \sqrt{ab} \text{ மற்றும் } HM = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\begin{aligned}
GM - HM &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}((a+b) - 2\sqrt{ab})}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

எனவே, $GM - HM \geq 0$ அதாவது, $GM \geq HM$

$$\begin{aligned}
\text{மேலும்} \quad GM = HM &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow a = b
\end{aligned}$$

தேற்றம் 5.2 இல் $AM \geq GM$ என நிரூபித்துள்ளோம். மேலும், தற்போது $GM \geq HM$ என நிரூபித்துள்ளோம். இரண்டையும் இணைத்து $AM \geq GM \geq HM$ என எழுதலாம்.

முடிவு 5.3 : ஏதேனும் இரு மிகை எண்களுக்கான சராசரிகள் AM, GM மற்றும் HM ஆகிய மூன்றும் ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறையாக இருக்கும்.

நிரூபணம் a மற்றும் b என்பன இரு மிகை மெய்யெண்கள் என்க.

$$AM = \frac{a+b}{2},\ GM = \sqrt{ab} \text{ மற்றும் } HM = \frac{2ab}{a+b}.$$

இப்போது,

$$AM \times HM = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = ab = (\sqrt{ab})^2 = GM^2$$

அதாவது, $AM \times HM = GM^2$. எனவே, $AM,\ GM$ மற்றும் HM என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர் முறையாகும்.

பின்வரும் முக்கிய முடிவுகளைக் காணலாம்.

- b என்பது a மற்றும் c–ன் கூட்டுச் சராசரி எனில், a,b,c ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையாகும்
- b என்பது a மற்றும் c–ன் பெருக்குச்சராசரி எனில், a,b,c ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறையாகும்.
- b என்பது a மற்றும் c–ன் இசைச்சராசரி எனில், a,b,c ஒரு இசைத் தொடர் முறையாகும்.

ஒரு வாகனம் மணிக்கு x கிமீ வேகத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட தூரம் பயணம் செய்து விட்டு திரும்பி மணிக்கு y கிமீ வேகத்தில் புறப்பட்ட இடத்தை வந்தடைந்தால், அந்த வாகனத்தின் முழு பயணத்தின் சராசரி வேகம் இரு வேகங்களின் இசைச்சராசரியாக இருக்கும். உண்மையில் தூரம் d எனில், ஒருபுறம் செல்வதற்கான நேரம் $\dfrac{d}{x}$ மற்றும் மறுபுறம் வருவதற்கான நேரம் $\dfrac{d}{y}$ ஆகும்.

எனவே, சராசரி வேகம், $\dfrac{2d}{\frac{d}{x}+\frac{d}{y}} = \dfrac{2xy}{x+y}$.

எடுத்துக்காட்டாக, மணிக்கு 60 கிமீ வேகத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தினை அடைந்து பின்னர் மணிக்கு 40 கிமீ வேகத்தில் திரும்ப வந்தடைந்தால், அந்த வாகனத்தின் மொத்த பயணத்துக்கான சராசரி வேகம் 60 மற்றும் 40–ன் இசைச்சராசரி ஆகும். அதாவது, $\dfrac{2\times 60\times 40}{60+40} = 48$ கிமீ/மணி வேகம் ஆகும்.

பயிற்சி 5.2

1. தொடர்முறைகளின் n ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க. மேலும், அந்த தொடர் முறைகள், கூட்டுத்தொடர்முறை, பெருக்குத்தொடர்முறை, இசைத்தொடர்முறை, கூட்டு–பெருக்குத்தொடர்முறை மற்றும் இவற்றில் எதுவுமில்லை என வகைப்படுத்துக.

   (i) $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ (ii) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{n+3(n+4)}$ (iii) $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (iv) $\dfrac{(-1)^n}{n}$ (v) $\dfrac{2n+3}{3n+4}$ (vi) 2018 (vii) $\dfrac{3n-2}{3^{n-1}}$

2. n-ஆவது உறுப்பு a_n ஐக் கொண்ட பின்வரும் தொடர்முறைகளின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $a_n = \begin{cases} n+1; & n \text{ ஒற்றைப்படை எண் எனில்} \\ n; & n \text{ இரட்டைப்படை எண் எனில்} \end{cases}$ (ii) $a_n = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \text{ எனில்} \\ 2 & ; n = 2 \text{ எனில்} \\ a_{n-1} + a_{n-2} & ; n > 2 \end{cases}$

   (iii) $a_n = \begin{cases} n & ; n \text{ என்பது } 1,\ 2, \text{ அல்லது } 3 \text{ எனில்} \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & ; n > 3 \end{cases}$

XI_Maths_Ch5_V-1_TM.indd 264 15-12-2021 14:41:17

3. பின்வரும் தொடர்முறைகளின் n–ஆவது உறுப்பு காண்க.

(i) 2, 2, 4, 4, 6, 6, . . . (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots$ (iv) 6, 10, 4, 12, 2, 14, 0, 16, −2, . . .

4. ஏறு வரிசையில் பெருக்குத்தொடர் முறையில் உள்ள மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கல் 5832. இரண்டாவது எண்ணுடன் 6 ஐயும் மூன்றாவது எண்ணுடன் 9 ஐயும் கூட்டக் கிடைக்கும் எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்முறையாக இருக்கும் எனில், பெருக்குத் தொடர் முறையின் அந்த மூன்று எண்களைக் காண்க.

5. $\frac{3}{1^2 2^2}, \frac{5}{2^2 3^2}, \frac{7}{3^2 4^2}, \ldots$ என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பினை இரு உறுப்புகளின் வித்தியாசமாக எழுதுக.

6. ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறையின் k ஆவது உறுப்பு t_k எனில், k–ன் எல்லா மிகை முழு எண்ணுக்கும் t_{n-k}, t_n, t_{n+k} என்பனவும் ஒரு பெருக்குத் தொடர் முறை என நிறுவுக.

7. a, b, c என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்முறையாக இருந்து $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ எனவும் இருக்குமானால், x, y, z என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையாகும் என நிறுவுக.

8. இரு எண்களின் கூட்டுச் சராசரியானது, பெருக்குச் சராசரியை விட 10 அதிகமாகவும், இசைச் சராசரியை விட 16 அதிகமாகவும் இருக்குமானால் அந்த இரு எண்களைக் காண்க.

9. $(q-r)x^2 + (r-p)x + p - q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமானவை எனில் p, q, r என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையாக இருக்கும் என நிறுவுக.

10. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் p, q மற்றும் r ஆவது, உறுப்புகள் முறையே a, b மற்றும் c எனில், $(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0$ என நிறுவுக.

5.5 முடிவுறு தொடர்கள் (Finite Series)

பொதுவாக, எண்களாலான ஒரு தொடர்முறையின் உறுப்புகளின் கூடுதல், தொடர் எனப்படும். உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறு எண்ணாக இருக்குமானால் அது **முடிவுறு தொடர்** (*Finite Series*) எனப்படும். (a_n) என்பது தொடர்முறை எனில், $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ என்பது ஒரு முடிவுறு தொடர் ஆகும். $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ என்பது $\sum_{k=1}^{n} a_k$ என குறிக்கப்படும். சில நேரங்களில் வினாக்களின் முக்கியத்துவம் மற்றும் எளிமையைப் பொறுத்து ஒரு தொடர் $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ என வழங்கப்படலாம். இதன் முதல் உறுப்பு a_0 ஆகும்.

Q6ZHI

5.5.1 கூட்டு, பெருக்கு மற்றும் கூட்டுப் பெருக்குத் தொடர் முறைகளின் கூடுதல் (Sum of Arithmetic, Geometric and Arithmetico-Geometric Progressions)

முந்தைய வகுப்புகளில் நாம் கூட்டுத்தொடர், பெருக்குத்தொடர் ஆகியவற்றின் குறிப்பிட்ட சில உறுப்புகள் வரையிலான கூடுதல் அல்லது முதல் n உறுப்புக்களின் கூடுதல் காண்பது பற்றி அறிந்துள்ளோம். இப்போது அவற்றை நினைவு கூர்வோம்.

கூட்டு மற்றும் பெருக்குத் தொடர் முறைகளின் கூடுதல் (Sum of Arithmetic and Geometric Progressions)

- ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர் முறையில் இருக்குமானால் அந்த தொடர் **கூட்டுத்தொடர்** (*Arithmetic Series*) எனப்படும். இதுபோல் ஒரு தொடரின் உறுப்புகள்

பெருக்குத்தொடர் முறையில் இருக்குமானால் அது **பெருக்குத் தொடர்** (*Geometric Series*) எனப்படும்.

- ஒரு கூட்டுத்தொடர் முறை $(a+(n-1)d)$–ன் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்
$S_n = na + \frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$
- பெருக்குத்தொடர் முறை (ar^{n-1})–ன் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல். $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
இங்கு, $r \neq 1$. $r = 1$, எனில், அந்த பெருக்குத் தொடர் முறை ஒரு மாறிலித் தொடர் $a, a, a, \ldots$ ஆக இருக்கும். எனவே, அதன் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் na என எளிதில் அறியலாம்.
அதனால், $r \neq 1$ எனில், $1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$

கூட்டு – பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் (Sum of Arithmetico–Geometric Progressions)

- ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டு – பெருக்குத் தொடர் முறையில் இருக்குமானால் அது **கூட்டு – பெருக்குத் தொடர்** (*Arithmetico–Geometric Series*) எனப்படும்.
- $((a+(n-1)d)r^{n-1})$ என்ற கூட்டு–பெருக்குத் தொடர்முறையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right)$, இங்கு $r \neq 1$

எடுத்துக்காட்டு 5.16 $1 + \frac{6}{7} + \frac{11}{49} + \frac{16}{343} + \ldots$ என்ற கூட்டு – பெருக்குத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு, $a = 1$, $d = 5$ மற்றும் $r = \frac{1}{7}$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right) \\
&= \frac{1-(1+5(n-1))\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{7}} + 5 \times \frac{1}{7}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}\right) \\
&= \frac{1-\frac{5n-4}{7^n}}{\frac{6}{7}} + \frac{\frac{5}{7}(7^{n-1}-1)}{7^{n-1}\left(\frac{6}{7}\right)^2} \\
&= \frac{7^n-5n+4}{7^{n-1}6} + \frac{5(7^{n-1}-1)}{7^{n-2}36}
\end{aligned}
$$

5.5.2 முடிவுறு தொடரின் தொலைநோக்கி கூடுதல் (Telescopic Summation for Finite Series)

முடிவுறு அல்லது முடிவுறா தொடர்களின் கூடுதல் காண பொதுவாக பயன்படுத்தும் முறை தொலைநோக்கி கூடுதல் ஆகும். இந்த முறையில் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் உறுப்புகளின் கூடுதலை இரண்டு உறுப்புகளின் மூலம் காணலாம். வழக்கமாக முதல் உறுப்பு மற்றும் கடைசி உறுப்பு தவிர மற்ற உறுப்புகள் ஒன்றையொன்று நீக்கிக் கொள்ளும். இடைப்பட்ட உறுப்புகளை நீக்கிய பின்பு, தொலைவில் இருந்த கடைசி உறுப்பு முதல் உறுப்பிற்கு வெகு அருகில் இருக்கும். எனவே இந்த முறை **தொலைநோக்கி கூடுதல்** (*Telescopic Summation*) எனப்படும். இந்த முறையைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைச் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.17 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் k ஆவது உறுப்பு t_k என்க. $t_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ இதை இரு கோவைகளின் வித்தியாசமாக எழுதினால் தொலைநோக்கி கூடுதல் முறை மூலம் தீர்க்கலாம்.

எனவே,

$$t_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

எனவே, $t_1+t_2+\ldots+t_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$

எடுத்துக்காட்டு 5.18 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் k ஆவது உறுப்பு $t_k=\frac{1}{k(k+1)}$ என்க.

பகுதி பின்னத்தைப் பயன்படுத்த, $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ என கிடைக்கும்.

எனவே,

$$t_1+t_2+\ldots+t_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

பயிற்சி 5.3

1. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் 10 உறுப்புகளின் கூடுதல் 52 மற்றும் முதல் 15 உறுப்புகளின் கூடுதல் 77 எனில், முதல் 20 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
2. $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் 17 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
3. பின்வரும் தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

   (i) 8+88+888+8888+...   (ii) 6 + 66 + 666 + 6666 + ...
4. $1+(1+4)+(1+4+4^2)+(1+4+4^2+4^3)+\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
5. $1,\frac{4}{3},\frac{7}{9},\frac{10}{27},\ldots$ என்ற தொடர் முறையின் n ஆவது உறுப்பு மற்றும் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
6. $\sqrt{3}+\sqrt{75}+\sqrt{243}+\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $435\sqrt{3}$ எனில், n–ன் மதிப்பு காண்க.
7. ஒரு கூட்டுத்தொடர்முறையின் $(m+n)$ ஆவது மற்றும் $(m-n)$ ஆவது உறுப்புகளின் கூடுதல் m ஆவது உறுப்பைப்போல் இருமடங்கு என நிறுவுக.

8. ஒருவர் ₹3250 என்ற தொகையை முதல் மாதம் ₹20–ம் அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு மாதமும் ₹15 அதிகப்படுத்தியும் செலுத்தி வருகின்றார் எனில், அவர் அந்தத் தொகையை முழுமையாக திருப்பிச் செலுத்த எத்தனை மாதங்கள் ஆகும்?

9. ஒரு பந்தயத்தில் 20 பந்துகள் ஒவ்வொன்றும் 4மீ இடைவெளியில் ஒரே நேர்க்கோட்டில் வைக்கப்படுகின்றன. முதல் பந்திற்கும் தொடக்கப்புள்ளிக்கும் உள்ள இடைவெளி 24மீ. ஒரு போட்டியாளர் ஒரு நேரத்தில் ஒரு பந்து வீதம் எல்லா பந்துகளையும் தொடக்கப்புள்ளிக்கு கொண்டுவந்து சேர்க்க எவ்வளவு தூரம் ஓட வேண்டும்.

10. நுண்ணுயிர் வளர்ச்சியில் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திற்கும் நுண்ணுயிரிகளின் எண்ணிக்கையானது அதன் முந்தைய மணி நேரத்தில் உள்ளது போல் இரு மடங்காகிறது. ஆரம்பத்தில் 30 நுண்ணுயிர்கள் இருக்குமானால் 2 ஆவது, 4 ஆவது மற்றும் n ஆவது மணிநேர முடிவில் எத்தனை நுண்ணுயிர்கள் இருக்கும்.

11. ஒரு வங்கியில் செலுத்தப்பட்ட ₹500 ஆனது, 10% தொடர் வட்டி வீதத்தில், 10 ஆண்டுகளில் எவ்வளவாக மாறும்.

12. ஒரு நகரத்தில், வைரஸ் நோயினால் ஏற்பட்ட சுகாதார கேட்டினால் மக்களின் இயல்பு வாழ்க்கை பாதிக்கப்பட்டிருந்தது. ஒவ்வொரு நாளும் அந்த நோய் தாக்கும் வைரஸ் கிருமிகள் ஒரு பெருக்குத் தொடர் முறையில் பரவி வருகிறது. இந்த தொற்று கிருமிகள் ஒவ்வொரு நாளும் அதன் முந்தைய நாளைப் போல் இருமடங்காக பெருகுகிறது. முதல் நாளில் அதன் எண்ணிக்கை 5 எனில், அந்த கிருமிகளின் எண்ணிக்கை எந்த நாளில் 1,50,000–க்கு அதிகமாக இருக்கும் எனக் காண்க.

5.5.3 சில சிறப்பு முடிவுறு தொடர்கள் (Some Special Finite Series)

இப்பகுதியில் நாம் AP, GP மற்றும் ஏதேனும் குறிப்பிட்ட தொடர்களின் முடிவுறு உறுப்புகளின் கூடுதல் காண சில முக்கிய சூத்திரங்களைக் காணலாம்.

1. முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(இதை AP இல் இருப்பதாகக் கொண்டு கூடுதலைக் காணலாம்.)

2. முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

[$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி நிரூபிக்கலாம்.]

3. முதல் n இயல் எண்களின் கணங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

[$k^4-(k-1)^4=(4k^3-6k^2+4k-1)$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி, மேற்கண்ட முடிவை நிரூபிக்க.]

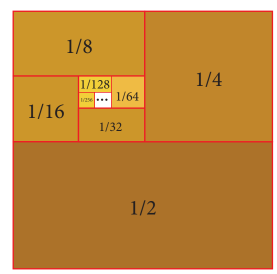
இந்த முடிவுகள் முந்தைய வகுப்புகளில் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளன என்பதை நினைவில் கொள்க.

5.6 முடிவுறா தொடர் முறைகள் மற்றும் தொடர்கள் (Infinite Sequences and Series)

குறிப்பிட்ட மெய்யெண்களின் கூடுதலானது மெய்யெண்களின் பண்புகளின் அடிப்படையில் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால் முடிவுறா தொடர்களைப் பற்றி அறிய நாம் ஒருங்குத் தன்மையைப் பற்றிய கருத்தை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டியுள்ளது. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ என்ற முடிவிலாத் தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மிகை, இதற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட எண் மதிப்பு அளிக்க இயலுமா? முதல் பார்வையில் அது கடினமாக அல்லது முடியாததாக இருக்கும். இந்தத் தொடரின் கூடுதல் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை நோக்கி சிறிது சிறிதாக நகருவதைக் காணலாம்.

இத் தலைப்பை ஆர்வமுள்ள ஒரு கணக்குடன் தொடங்குவோம். A, B என்ற இரு தட்டுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். A தட்டில் ஒரு முழு அப்பத்தையும் B தட்டினை காலியாகவும் வைக்கவும். A தட்டில் உள்ள அப்பத்தை இருசமபாகமாக வெட்டி ஒரு பாகத்தை B தட்டில் வைக்கவும். மறுபடியும் A இல் உள்ள பாதி அப்பத்தை பாதியாக வெட்டி ஒரு பகுதியை B இல் வைக்கவும். இந்த முறையை தொடர்ந்து செய்து கொண்டிருந்தால் இறுதியில் A மற்றும் B தட்டுகளில் எவ்வளவு அப்பம் இருக்கும். இதை நாம் கீழே ஒவ்வொரு நிலையாக தருவோம்.

நிலை	தட்டு A	தட்டு B
0	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$
...	...	...
n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}\ldots+\frac{1}{2^n}$
...	...	...



படம் 5.3

இதனைப் பார்க்கும்போது **"முடிவில்"** (*finally*) தட்டு A இல் ஒன்றுமிருக்காது, B இல் ஒரு முழு அப்பமும் இருக்கும் எனத் தோன்றும். அதாவது A தட்டில் இருப்பது 0, B தட்டில் இருப்பது 1 எனத் தோன்றும்.

அதாவது $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\ldots$ என்பது பூஜ்ஜியத்தை நோக்கி **"செல்கிறது"** (*goes*) என உணரலாம்.

மற்றும் $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, \ldots$ என்பது 1 ஐ நோக்கி "செல்கிறது" என உணரலாம்

அதாவது, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ –ன் மதிப்பு 1.

இப்பிரிவில் **'முடிவில்'** மற்றும் **'செல்கிறது'** என்ற சொற்கள் எந்த முறையில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன என்பதையும், இதுபோல் முடிவற்ற உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்பது பற்றியும் அறிவோம்.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots$ பூஜ்ஜியத்தை "நோக்கிச் செல்கிறது" என உணரலாம்.

இதே போல் $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \ldots$ பூஜ்ஜியத்தை நோக்கிச் செல்கிறது. என உணரலாம்.

(a_n) ஒரு தொடர்முறை மற்றும் a ஒரு எண் என்க.

கொடுக்கப்பட்ட எந்த ஒரு மிகச் சிறிய மிகை எண்ணுக்கும், ஏதோ ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் a_n –க்கும் a–க்கும் இடையில் உள்ள தூரம் அந்த எண்ணைவிட குறைவாக இருப்பின், n ஆனது ∞–ஐ நெருங்கும் போது, a_n ஆனது a–ஐ நெருங்குகிறது எனலாம். நுட்பமாக கூற வேண்டுமாயின் $n \to \infty$ எனில் $a_n \to a$ எனலாம்.

வேறுவகையில் கூறுவதாயின் a_n –ஆனது எல்லைவழியாக a–ஐ அடைகிறது எனலாம். அல்லது $n \to \infty$ எனும் போது a_n –ன் எல்லை a ஆகும். இதனை, தொடர்முறை (a_n) என்பது a க்கு ஒருங்குகிறது எனவும் கூறலாம். இதனையே குறியீட்டில் $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ என எழுதலாம்,

அதே சமயம் 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 ... என்ற தொடர்முறை ஏதோ ஒரு எண்ணுக்கு செல்கிறது எனக் கூற இயலாது. இது எந்த ஒரு எல்லை மதிப்பிற்கும் ஒருங்காக செல்லவில்லை. எனவே, இந்த தொடர் முறைக்கு எல்லை மதிப்பும் இல்லை. அப்படி ஒரு எல்லையை நோக்கி நகரும் தொடர் முறையின் மதிப்பு ஒருமைத் தன்மை உடையதாகும். .

5.6.1 பிபுனாக்கி தொடர் முறை (Fibonacci Sequence)

பிபுனாக்கி தொடர்முறை என்பது முதல் இரண்டு எண்கள் 1, 1 ஆகவும் அடுத்த எண்கள் அதற்கு முன்னர் உள்ள இரு எண்களை கூட்டி கிடைக்கின்ற ஒரு எண்களின் தொடர் ஆகும். இது, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... என்று செல்கிறது.

இதன் விதி $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, n \geq 3,$ மற்றும் $x_1 = 1,\ x_2 = 1$ ஆகும். பிபுனாக்கி என்ற கணிதமேதையின் பெயரால் இத்தொடர் **பிபுனாக்கி தொடர்முறை** (*Fibonacci Sequence*) என அழைக்கப்படுகிறது. இது லியனர்டோ பிசா அல்லது லியனர்டோ பிசானோ எனவும் அழைக்கப்படும். பிபுனாக்கி தொடர் 1202 இல் முதன் முதலில் லிபர் அபாசி என்ற புத்தகத்தில் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. பிசன் நகர வணிகரின் மகனான பிபுனாக்கி, பல இடங்களுக்கு பயணம் செய்து விரிவாக வணிகம் செய்தவர். வர்த்தக தொழிலில் இருப்பவர்களுக்கு கணிதம் மிக முக்கியமானது என்பதால் பிபுனாக்கி தனது சிறு வயது முதற்கொண்டே எண்களின் மீதான பேரார்வத்தை வளர்த்துக் கொண்டார்.

இந்து – அராபிக் எண்கணித முறையில் தான் முதன் முதலில் எண்களைப் பற்றிய கருத்துக்கள் உருவானது என்பர். பிபுனாக்கி வட ஆப்பிரிக்காவில் இருந்த போது இவற்றை கற்றறிந்தார். லிபர் அபாசி புத்தகம் வெளிவருவதற்கு முன்பு லத்தீன் பேசும் உலகிற்கு தசம எண் முறை அறிமுகப்படுத்தப்படாமல் இருந்தது. இவர் வடிவியல், வணிக எண்கணிதம் மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் பற்றி பல புத்தகங்கள் எழுதியுள்ளார். இவர் பூஜ்ஜியம் பற்றிய கருத்து உருவாவதிலும் பங்களித்துள்ளார்.

n	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 . . .
x_n	=	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377 . . .

எடுத்துக்காட்டாக, 6 ஆவது மற்றும் 7 ஆவது இடத்து மதிப்புகளைக் கூட்ட 8 ஆவது இடத்தின் மதிப்பு கிடைக்கிறது அதாவது $x_8 = 8 + 13 = 21$

குறிப்பு: பிபுனாக்கி தொடர்முறையின் ஆர்வமுள்ள முறைகளைக் காணலாம்.

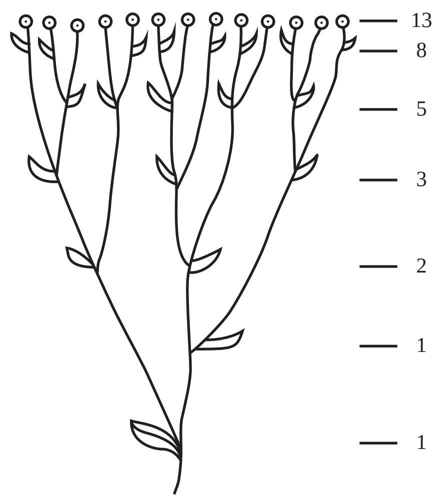
பின்வருவனவற்றை கவனியுங்கள்

(i) ஒவ்வொரு மூன்றாவது எண்ணும் 3 ஆவது உறுப்பின் மடங்காக இருக்கும். $(t_3 = 2)$

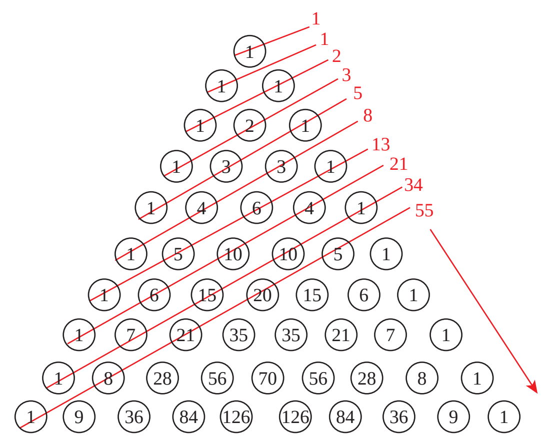
(ii) ஒவ்வொரு நான்காவது எண்ணும் 4 ஆவது உறுப்பின் மடங்காக இருக்கும். $(t_4 = 3)$

(iii) ஒவ்வொரு ஐந்தாவது எண்ணும் 5 ஆவது உறுப்பின் மடங்காக இருக்கும். $(t_5 = 5)$

(iv) ஒவ்வொரு n ஆவது எண்ணும் n ஆவது உறுப்பின் மடங்காக இருக்கும்.



படம் 5.4



படம் 5.5

முடிவுறா தொடர் (Infinite Series)

(a_n) என்பது ஒரு முடிவற்ற தொடர்முறை எனில், $a_1 + a_2 + \ldots$ என்பது முடிவற்ற தொடர் எனப்படும். இதனை, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ எனக் குறிக்கலாம்.

இப்பகுதியின் தொடக்கத்தில் $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ என்ற ஒரு முடிவுறா தொடரைப் பார்த்தோம். இதன் கூடுதல் 1 என உணரப்பட்டது அப்பம் கணக்கில் B தட்டில் உள்ள அப்பம் ஒவ்வொரு நிலையிலும் பின்வருமாறு இருந்தது.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, \ldots$$

இதன் n ஆவது உறுப்பு, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ மற்றும் அதன் மதிப்பு $\frac{2^n-1}{2^n}$ ஆகும்.

இந்த கூடுதல் s_n எனில், $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$ ஆகும்.

ஆதலால், $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ என்பது 1 என உணரப்பட்டது.

இதுபோல் (a_n) என்பது மெய் எண் தொடர் முறை மற்றும், $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ எனில் தொடர் ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லை s-க்கு ஒருங்குமானால் தொடர்முறை (a_n) கூட்டத்தக்கது என்றும் அதன் கூடுதல் s என்றும் கொள்ளலாம்.

இதை, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = s$ என எழுதலாம். எனவே, இந்நிலையில் இத்தொடர் s–க்கு ஒருங்குகின்றது என கூறுவது வழக்கம்.

வரையறை 5.6 : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ஒரு மெய்யெண்களின் தொடர் என்க.
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, n \in \mathbb{N}$ என்க.

(s_n) என்ற தொடர் முறை, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்ற **தொடரின் பகுதிக் கூட்டல்** $(Partial\ Sum)$ எனப்படும். (s_n) ஆனது ஒருங்கமைவு உடையதாகவும், $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ எனில், $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்ற தொடர் **ஒருங்குத்தொடர்** $(Convergent\ Series)$ எனவும் அதன் மதிப்பு s எனவும் அழைக்கப்படும்.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ என எழுதலாம். சில எடுத்துக் காட்டுகளைக் காண்போம். $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ என்ற தொடர் ஒருங்கு தொடராக இருக்காது, ஏன் எனில் $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ என்பதன் பகுதிக் கூட்டல் ஒருங்கு தன்மையற்றது.

குறிப்பு: முடிவுறு கூட்டுத் தொடர்களுக்கான இயற்கணித விதிகளை நாம் அப்படியே முடிவுறா தொடர்களுக்கும் பயன்படுத்த முடியாது.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ என்ற தொடரை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ எனில், ஒருவர் S–ன் மதிப்புகள் முறையே 0 அல்லது 1 அல்லது $\frac{1}{2}$ என பின்வரும் வகையில் எடுத்துக்கொண்டு தர்க்கம் செய்யலாம்.

அதாவது, $S = (1-1) + (1-1) + \ldots$, $S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots$ அல்லது

$$1 - S = 1 - (+1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = S)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ என்ற தொடர் $x = \frac{1}{2}$ –க்கு ஒருங்குகிறது. ஆனால், $x = 2$ எனில், இந்த தொடர் ஒருங்கவில்லை. இதிலிருந்து, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற தொடர் x–ன் சில மதிப்புகளுக்கு ஒருங்குகின்றது எனவும் x–ன் சில மதிப்புகளுக்கு ஒருங்கவில்லை என்பதும் தெரிகிறது. x–ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு இது போன்ற தொடர்கள் ஒருங்குகின்றது என்பது இந்தப் புத்தகத்திற்கு அப்பாற்பட்டது. எனினும், இந்த அலகின் பின்வரும் பகுதியில் சில தொடர்கள் x–ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு ஒருங்குகின்றது என்பதையும் அப்படி ஒருங்குமானால் அதன் மதிப்பும் தரப்பட்டுள்ளன.

5.6.2 முடிவுறா பெருக்குத் தொடர் (Infinite Geometric Series)

$\sum x^n$ என்ற தொடர் பெருக்குத் தொடர் எனப்படும். $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \neq 1$ என்ற தொடரை எடுத்துக்கொள்வோம். $s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ எனில், $s_n = \frac{1-x^n}{1-x}, |x| < 1$ என இருக்கும்போது, x^n பூஜ்ஜியத்தை நோக்கிச் செல்வதால் s_n என்பது $\frac{1}{1-x}$ என்பதை நோக்கி செல்கிறது எனலாம்.

- $|x| < 1$ என்பதை நிறைவு செய்யும் எல்லா மெய்யெண் x–க்கும் $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மையுடையதாகவும். அதன் கூடுதலை $\frac{1}{1-x}$ எனவும், எழுதலாம் அதாவது,

  $|x| < 1$ எனவுள்ள எல்லா மெய்யெண் x–க்கும் $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ ஆகும்.

- $|x|<1$ எனவுள்ள எல்லா மெய்யெண் x–க்கும் $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மையுடைதாகவும் அதன் கூடுதலை $\frac{1}{1+x}$ எனவும் எழுதலாம்.

  அதாவது, $|x|<1$ எனவுள்ள எல்லா மெய்யெண் x–க்கும்

  $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \text{ ஆகும்.}$$

- $|x|<\frac{1}{2}$ எனவுள்ள எல்லா மெய்யெண் x–க்கும் $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$ என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மையுடையதாகவும் அதன் கூடுதலை $\frac{1}{1-2x}$ எனவும் எழுதலாம்.

  அதாவது $|x|<\frac{1}{2}$ எனவுள்ள எல்லா மெய்யெண் x–க்கும்

  $$\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+\ldots \text{ ஆகும்.}$$

- எல்லா மெய்யெண் x–க்கும் $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ என்ற தொடர் ஒருங்கும் தன்மையுடையதாகவும் அதனை e^x எனவும் எழுதலாம்.

  அதாவது எல்லா மெய்யெண் x–க்கும் $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ ஆகும்.

- $x=0$–க்கு மட்டும் $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x$ ஒருங்கு தன்மையுடையது.

சில சிறப்புத் தொடர்களைக் காண்போம். அந்த தொடர்கள் ஒருங்குகின்றது என்ற அடிப்படையில் சில கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணலாம்.

5.6.3 முடிவுறா கூட்டு – பெருக்குத் தொடர். (Infinite Arithmetico- Geometric Series)

- $\Sigma((a+(n-1)d))r^{n-1}$ என்ற கூட்டு – பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல்

  $$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}\,;-1<r<1 \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.19 $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{25}+\frac{10}{125}+\ldots$–ன் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு, $a=1$, $d=3$ மற்றும் $r=\frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned}
S_\infty &= \frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}\\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{5}}+\frac{3\times\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}\\
&= \frac{5}{4}+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{25}{16}\right)\\
&= \frac{35}{16}
\end{aligned}$$

5.6.4 முடிவுறா தொடருக்கான தொலைநோக்கி கூடுதல் (Telescopic Summation for Infinite Series)

இதற்கு முன்னர் 5.5.2 இல், ஒரு முடிவுறு தொடரின் கூடுதலை தொலைநோக்கி கூடுதல் முறையில் பார்த்துள்ளோம். எனவே, இதே முறையில் முடிவுறா தொடரின் கூடுதலும் காண இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$ –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் n ஆவது உறுப்பு a_n என்க. அதனால், $a_n = \frac{1}{n^2+5n+6}$ பகுதி பின்னத்தை பயன்படுத்தி $a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$ என அறியலாம்.

இந்த தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் s_n என்க.

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

n ஆனது முடிவிலியை நோக்கி செல்லும்போது $\frac{1}{n+3}$ ஆனது பூஜ்ஜியத்தை நோக்கிச் செல்லும். எனவே, $\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3} \to \frac{1}{3}$ அல்லது $s_n \to \frac{1}{3}$ எனலாம். அதாவது $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{3}$

5.6.5 ஈருறுப்புத் தொடர் (Binomial Series)

பெருக்குத் தொடரில் நாம் பார்த்த சில தொடர்கள் x–ன் பொருத்தமான மதிப்புகளுக்கு

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots ,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots \text{ மற்றும்}$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + \ldots ,$$

அதனால் $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ மற்றும் $\frac{1}{1-2x}$ போன்றவைகளை $(1-x)^{-1}$, $(1+x)^{-1}$ மற்றும் $(1-2x)^{-1}$ எனவும் எழுதலாம். இதன் மூலம் $(1+x), (1-x)\ldots$ போன்றவற்றிற்கு அடுக்குகள் குறை எண்ணாக வாய்ப்புள்ளது எனத் தெரிகிறது. அதாவது அடுக்கானது குறை, மிகை முழு எண்களாகவோ அல்லது விகிதமுறு எண்ணாகவோ இருக்கலாம், மேலும் $(1+x)$–ன் அடுக்கு ஒரு விகிதமுறா எண்ணாக கூட இருக்கலாம், ஏற்கனவே நாம் தேற்றம் 5.1 மூலம், அடுக்கு, மிகை எண்ணாக இருக்கும் போது ஈருறுப்புத் தேற்றத்தினை நிரூபித்துள்ளோம். இப்போது விகிதமுறு அடுக்குகளுக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை காண்போம்.

விகிதமுறு அடுக்கிற்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial Theorem for Rational Exponent)

தேற்றம் 5.4

ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண் n–க்கு, $|x| < 1$ ஐ நிறைவு செய்யும் எல்லா மெய்யெண் x–க்கும் $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$ ஆகும். இதற்கான நிரூபணமானது உயர் கணித கோட்பாடுகளை உள்ளடக்கியது என்பதால் தேற்றத்தை நிரூபணம் இல்லாமல் எடுத்துக்கொண்டு சில குறிப்பிட்ட நிலைகளைக் காணலாம் மேலும் அவற்றின் மூலம் சில கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்போம். இந்த தேற்றத்தில்

1. x ஐ $-x$ ஆக பிரதியிட,

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

2. n–க்குப் பதிலாக $-n$ ஐப் பிரதியிட,

$$(1+x)^{-n} = 1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 - \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3+...$$

அதாவது,

$$(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+... \qquad (|x|<1)$$

3. x–க்கும் n–க்கும் பதிலாக முறையே $-x$ மற்றும் $-n$ எனப் பிரதியிட,

$$(1-x)^{-n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+... \qquad (|x|<1)$$

தேற்றத்தில், n ஒரு விகிதமுறு எண் என வெளிப்படையாக குறிப்பிடப்பட்டிருந்தாலும், பொதுவான விகிதமுறு எண் வடிவம் $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ஆகும். எனவே, $n=\frac{p}{q}$ என எடுத்து விரிவாக்கத்தினை எழுதலாம்.

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{p}{q}} &= 1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{3!}x^3+...\\ &= 1+\frac{p}{q}x+\frac{p(p-q)}{q^2 2!}x^2+\frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 3!}x^3+... \qquad (|x|<1)\\ (1-x)^{\frac{p}{q}} &= 1-\frac{p}{q}x+\frac{p(p-q)}{q^2 2!}x^2-\frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 3!}x^3+... \qquad (|x|<1)\end{aligned}$$

$(1+x)^n$ ஐ கணக்கிட ஏதுவான சூத்திரங்கள் மேலே கொடுக்கப்பட்டிருந்தாலும், சில எண்ணியல் கணக்குகளுக்கு எளிமையாக தீர்வு காண நேரடியான சில விரிவாக்கங்கள் தேவைப்படும்.

இவ்வாறான ஒவ்வொரு விரிவிலும் கெழுக்களை உற்று நோக்குதல், கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்கு மிகவும் எளிதாக இருக்கும். சிலவற்றை நாம் பட்டியலிடுவோம்.

1. $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+...$
2. $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+...$
3. $(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+...$
4. $(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+...$

இவை அனைத்து விரிவாக்கங்களும் $|x|<1$ எனும்போது மட்டுமே பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.21 $|x|<1$ என்ற மதிப்பிற்கு, $(1+x)^{\frac{2}{3}}$ ஐ முதல் நான்கு உறுப்புகள் வரை விரிவுபடுத்தி எழுதுக.

தீர்வு:

இங்கு, $n=\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{2!} &= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}\\ &= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{9}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-4}{3}\right)}{6}$$

$$= \frac{4}{81}$$

இதனால், $(1+x)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 + \ldots$

எடுத்துக்காட்டு 5.22 $\frac{1}{(1+3x)^2}$ ஐ x–ன் அடுக்குகளாக விரிவாக்கம் செய்க. அந்த விரிவாக்கம் சரியாக இருப்பதற்கான x–ன் நிபந்தனையைக் காண்க.

தீர்வு:

$3x = y$ எனில், $\frac{1}{(1+3x)^2} = \frac{1}{(1+y)^2}$

இப்போது, $\frac{1}{(1+y)^2}$ ஐ ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம் y–ன் அடுக்குகளாக எழுதலாம் $|y| < 1$ எனவுள்ள எல்லா y மதிப்புகளுக்கும் இது பொருந்தும். பின்பு y–க்கு $3x$ எனப் பிரதியிட, $|3x| < 1$ எனவுள்ள எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் $\frac{1}{(1+3x)^2}$ –ன் விரிவு ஏற்புடையதாகும். $|x| < \frac{1}{3}$ ஐ நிறைவு செய்யும் x–ன் மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே இந்த விரிவு பொருந்தும்.

$$\frac{1}{(1+3x)^2} = (1+3x)^{-2}$$

$$= 1 - 2(3x) + \frac{2(2+1)}{2!}(3x)^2 - \frac{2(2+1)(2+2)}{3!}(3x)^3$$

$$+ \frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{4!}(3x)^4 - \ldots$$

எனவே, $\frac{1}{(1+3x)^2} = 1 - 6x + 27x^2 - 108x^3 + 405x^4 - \ldots, \ |x| < \frac{1}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 5.23 $\frac{1}{(3+2x)^2}$ ஐ x–ன் அடுக்குகளாக விரிவாக்கம் செய்க. அந்த விரிவு ஏற்புடையதாக இருப்பதற்கான x–ன் நிபந்தனையைக் காண்க.

தீர்வு:

இங்கு நாம் $(1+x)^{-2}$ –ன் விரிவாக்கத்தினைப் பயன்படுத்துவோம்.

அதற்கு $(3+2x)$ ஐ $3\left(1+\frac{2x}{3}\right)$ என எழுதுவோம்.

எனவே $$\frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{3^2\left(1+\frac{2x}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-2}$$

$$= \frac{1}{9}(1+y)^{-2} \qquad \left(\frac{2x}{3}=y \text{ என்க}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(1-2y+3y^2-4y^3+5y^4-...\right), |y|<1$$

$$= \frac{1}{9}\left(1-2\left(\frac{2x}{3}\right)+3\left(\frac{2x}{3}\right)^2-4\left(\frac{2x}{3}\right)^3+5\left(\frac{2x}{3}\right)^4-...\right), \left|\frac{2x}{3}\right|<1$$

$$= \frac{1}{9}\left(1-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}x^2-\frac{32}{27}x^3+\frac{80}{81}x^4-...\right), |x|<\frac{3}{2}$$

எனவே, $$\frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{9}-\frac{4}{27}x+\frac{4}{27}x^2-\frac{32}{243}x^3+\frac{80}{729}x^4-..., |x|<\frac{3}{2}$$

இந்த விரிவு ஏற்புடையதாக இருக்க $|x|<\frac{3}{2}$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

மிகை எண்களுக்கான வர்க்க மூலம், மூன்றாம்படி மூலம் போன்றவைகளை ஈருறுப்புத்தேற்றம் மூலம் காணலாம். அது போன்ற கணக்கினைக் கீழே காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.24 $\sqrt[3]{65}$ –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

$|x|<1$ எனில், $$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...$$

$$\sqrt[3]{65} = 65^{\frac{1}{3}}$$

$$= (64+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 64^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{64}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\times\left(\frac{1}{64}\right)^2+...\right)$$

$$= 4+\frac{1}{48}-4\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{64}\times\frac{1}{64}+...$$

$$= 4+\frac{1}{48}-\frac{1}{9216}+...$$

$$\approx 4+0.02 \quad \text{(ஏனெனில், } \frac{1}{9216}+... \text{ மிகச்சிறிய எண்)}$$

எனவே, $\sqrt[3]{65} = 4.02$ (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 5.25 x ஒரு பெரிய எண் எனில், $\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}$ –ன் மதிப்பு தோராயமாக $\frac{1}{x^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\sqrt[3]{x^3+7} = (x^3+7)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[x^3\left(1+\frac{7}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \qquad \left(x \text{ பெரிய எண் என்பதால் } \left|\frac{7}{x^3}\right|<1\right)$$

$$= x\left(1+\frac{7}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{7}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{x^3}\right)^2+\ldots\right)$$

$$= x\left(1+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots\right)$$

$$= x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^5}+\ldots$$

$$\sqrt[3]{x^3+4} = (x^3+4)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \quad (x \text{ பெரிய எண் என்பதால் } \left|\frac{4}{x^3}\right|<1)$$

$$= x\left(1+\frac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{4}{x^3}\right)^2+\ldots\right)$$

$$= x\left(1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots\right)$$

$$= x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^5}+\ldots$$

x ஒரு பெரிய எண் என்பதால் $\frac{1}{x}$ மிகச் சிறிய எண்ணாக இருக்கும். எனவே, $\frac{1}{x}$–ன் உயர் அடுக்குகள் நீக்கப்படலாம்.

எனவே, $\sqrt[3]{x^3+7} = x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}$ மற்றும் $\sqrt[3]{x^3+4} = x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}$.

அதனால், $\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4} = \left(x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$

குறிப்பு: எல்லா மெய்யெண் n க்கும் ஈருறுப்புத் தேற்றம் உண்மை. எடுத்துக்காட்டாக, $n=\sqrt{2}$ எனில், $(1+x)^{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!}x^3+\ldots|x|<1.$

5.6.6 அடுக்குக்குறித் தொடர் (Exponential Series)

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ என்ற தொடர் **அடுக்குக்குறித் தொடர்** (*Exponential Series*) எனப்படும். இந்த தொடர் x–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒருங்கும் என நிறுவலாம்.

எல்லா மெய்யெண் மதிப்பு x–க்கும் $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ இங்கு,

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \text{ ஆகும்.} \quad (5.1)$$

எல்லா x–ன் மதிப்பிற்கும் (5.1) இல் x ஐ $-x$ என பிரதியிட,

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \quad \text{என கிடைக்கிறது.} \quad (5.2)$$

குறிப்பாக, $\frac{1}{e}=e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots$

5.1 மற்றும் 5.2 ஆகியவைகளிலிருந்து

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots \text{ மற்றும் } \frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

என கிடைக்கும். குறிப்பாக,

$$\frac{e+e^{-1}}{2}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\ldots \text{ மற்றும் } \frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots \text{ ஆகும்.}$$

(5.1) இல் x–க்கு பதிலாக $2x$ ஐ பிரதியிட,

$$e^{2x}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\ldots$$

சுருக்கும்பொழுது நமக்கு கிடைப்பது,

$$e^{2x}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\ldots$$

5.6.7 மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ என்ற தொடர் **மடக்கைத் தொடர்** *(Logarithmic Series)* எனப்படும். இந்த தொடர் $|x|<1$ எனவுள்ள x–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒருங்குகின்றது. $x=1$–க்கும் இந்த தொடர் ஒருங்குகின்றது.

$|x|<1$ எனவுள்ள எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் இந்த தொடரின் கூடுதல் log($1+x$) ஆகும். இதனால் $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

$|x|<1$ எனவுள்ள எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் x –க்கு பதிலாக $-x$ என பிரதியிட,

$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots$ எனக் கிடைக்கின்றது.

$|x|<1$ எனவுள்ள எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log(1+x)-\log(1-x)$ இதனைப் பயன்படுத்த, நமக்கு கிடைப்பது, $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right]$.

உதாரணமாக, $\log(1+2x)$ ஐ ஒரு தொடராக எழுதவேண்டுமானால், $2x$–க்கு பதிலாக y –ஐப் பிரதியிட, $|y|<1$ என்ற எல்லா y க்கும் $\log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots$ எனக் கிடைக்கும். ஆனால், $|y|<1$ என்பது $|2x|<1$ ஆகும். எனவே, $|x|<\frac{1}{2}$ க்கு,

$\log(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+\ldots$ ஆகும்.

எனவே, $\log(1+2x)=2x-\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}-\frac{16x^4}{4}+\ldots$ $|x|<\frac{1}{2}$ எனவுள்ள x–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

பயிற்சி 5.4

1. பின்வருவனவற்றை x–ன் ஏறுவரிசை அடுக்குகளாக விரிவாக்கம் செய்க. அந்த விரிவு ஏற்புடையதாக இருப்பதற்கான x –ன் நிபந்தனையைக் காண்க.

(i) $\frac{1}{5+x}$ (ii) $\frac{2}{(3+4x)^2}$

(iii) $(5+x^2)^{\frac{2}{3}}$ (iv) $(x+2)^{-\frac{2}{3}}$

2. $\sqrt[3]{1001}$ –ன் மதிப்பைத் தோராயமாக காண்க. (இரு தசமத்திருத்தமாக)

3. x ஒரு தேவையான அளவிலான பெரிய எண் எனில், $\sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}$ –ன் மதிப்பைத் தோராயமாக $\frac{1}{x^2}$ என நிறுவுக.

4. x மிகச் சிறியது எனில், $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ என்பது தோராயமாக $1-x+\frac{x^2}{2}$ என நிறுவுக.

5. பின்வரும் அடுக்குக்குறித் தொடரில் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) e^{5x} (ii) e^{-2x} (iii) $e^{\frac{1}{2}x}$

6. பின்வரும் மடக்கைத் தொடர்களின் முதல் 4 உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $\log(1+4x)$ (ii) $\log(1-2x)$ (iii) $\log\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)$ (iv) $\log\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

   இந்த விரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் எந்த இடைவெளியில் ஏற்புடையது எனவும் காண்க.

7. $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$ எனில், $x=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+\ldots$ என நிறுவுக.

8. p மற்றும் q ஐ ஒப்பிடும்போது $p-q$ சிறியது எனில், $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}\simeq\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$ என நிறுவுக. இதன் மூலம் $\sqrt[8]{\frac{15}{16}}$ –ன் மதிப்பினைக் காண்க.

9. $\frac{3-4x+x^2}{e^{2x}}$ –ன் விரிவில் x^4 –ன் கெழுவைக் காண்க.

10. மதிப்புக் காண்க: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}\right)$

பயிற்சி 5.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையைத் தேர்தெடுக்கவும்.

1. $2+4+6+\ldots+2n$ –ன் மதிப்பு

   (1) $\frac{n(n-1)}{2}$ (2) $\frac{n(n+1)}{2}$ (3) $\frac{2n(2n+1)}{2}$ (4) $n(n+1)$

2. $(2+2x)^{10}$ இல் x^6 –ன் கெழு.

   (1) ${}^{10}C_6$ (2) 2^6 (3) ${}^{10}C_6 2^6$ (4) ${}^{10}C_6 2^{10}$

3. $(2x+3y)^{20}$ என்ற விரிவில் x^8y^{12} –ன் கெழு

   (1) 0 (2) $2^8 3^{12}$ (3) $2^8 3^{12}+2^{12}3^8$ (4) ${}^{20}C_8 2^8 3^{12}$

4. r-ன் எல்லா மதிப்புக்கும் ${}^nC_{10}>{}^nC_r$ எனில், n–ன் மதிப்பு

   (1) 10 (2) 21 (3) 19 (4) 20

5. இரு எண்களின் கூட்டுச்சராசரி a மற்றும் பெருக்குச் சராசரி g எனில்,

   (1) $a\le g$ (2) $a\ge g$ (3) $a=g$ (4) $a>g$

6. $(1+x^2)^2(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+x^{n+4}$ மற்றும் a_0, a_1, a_2 ஆகியவை கூட்டுத் தொடர் முறை எனில், n–ன் மதிப்பு

   (1) 1 (2) 5 (3) 2 (4) 4

7. $a, 8, b$ என்பன கூட்டுத் தொடர் முறை, $a, 4, b$ என்பன பெருக்குத் தொடர் முறை மற்றும் a, x, b என்பன இசைத் தொடர் முறை எனில், x–ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 1 (3) 4 (4) 16

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}, \ldots$ என்ற தொடர்முறை

(1) கூட்டுத் தொடர் முறை (2) பெருக்குத் தொடர் முறை

(3) இசைச் தொடர் முறை (4) கூட்டு பெருக்குத் தொடர் முறை

9. இரு மிகை எண்களின் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் பெருக்குச் சராசரி முறையே 16 மற்றும் 8 எனில், அவற்றின் இசைச்சராசரி

(1) 10 (2) 6 (3) 5 (4) 4

10. பொது வித்தியாசம் d ஆக உள்ள ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் S_n எனில், $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$ –ன் மதிப்பு

(1) d (2) 2d (3) 4d (4) d^2

11. 38^{15} ஐ 13 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி

(1) 12 (2) 1 (3) 11 (4) 5

12. 1, 2, 4, 7, 11, . . . என்ற தொடர் முறையின் n ஆவது உறுப்பு

(1) n^3+3n^2+2n (2) n^3-3n^2+3n (3) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (4) $\frac{n^2-n+2}{2}$

13. $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

(1) $\sqrt{2n+1}$ (2) $\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$ (3) $\sqrt{2n+1}-1$ (4) $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

14. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$ என்ற தொடர் முறையின் n ஆவது உறுப்பு

(1) 2^n-n-1 (2) $1-2^{-n}$ (3) $2^{-n}+n-1$ (4) 2^{n-1}

15. $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல்.

(1) $\frac{n(n+1)}{2}$ (2) $2n(n+1)$ (3) $\frac{n(n+1)}{\sqrt{2}}$ (4) 1

16. $\frac{1}{2}+\frac{7}{4}+\frac{13}{8}+\frac{19}{16}+\ldots$ என்ற தொடரின் மதிப்பு

(1) 14 (2) 7 (3) 4 (4) 6

17. ஒரு முடிவுறா பெருக்குத் தொடரின் மதிப்பு 18 மற்றும் அதன் முதல் உறுப்பு 6 எனில் பொது விகிதம்

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{3}{4}$

18. e^{-2x} என்ற தொடரில் x^5 –ன் கெழு

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{-4}{15}$ (4) $\frac{4}{15}$

19. $\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\ldots$ –ன் மதிப்பு

(1) $\frac{e^2+1}{2e}$ (2) $\frac{(e+1)^2}{2e}$ (3) $\frac{(e-1)^2}{2e}$ (4) $\frac{e^2-1}{2e}$

20. $1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots$ –ன் மதிப்பு

(1) $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (2) $\frac{3}{2}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (3) $\frac{5}{3}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (4) $\frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right)$

பாடத்தொகுப்பு (Summary)

இந்த தலைப்பில் நாம் தெரிந்து கொண்டவைகள்.

- $n \in \mathbb{N}$ இக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம்

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n$$

- ${}^nC_0 + {}^nC_1 + \ldots + {}^nC_n = 2^n$
- ${}^nC_1 + {}^nC_3 + +{}^nC_5 \ldots += {}^nC_0 + {}^nC_2 + +{}^nC_4 \ldots += 2^{n-1}$
- $\text{AM} \geq \text{GM} \geq \text{HM}$
- கூட்டுத் தொடர் முறையின் n வது உறுப்பு $T_n = a+(n-1)d$
- பெருக்குத் தொடர் முறையின் n வது உறுப்பு $T_n = ar^{n-1}$
- கூட்டு – பெருக்குத் தொடர் முறையின் n வது உறுப்பு $T_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$
- a மற்றும் b ஏதேனும் இரு மிகை எண்கள் எனில் $AM = \frac{a+b}{2}, GM = \sqrt{ab}, HM = \frac{2ab}{a+b}$
- கூட்டுத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$
- பெருக்குத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$
- கூட்டுப் பெருக்குத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right), r \neq 1$$

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- பிபுனாக்கி தொடர் $1,1,2,3,5,\ldots$
- விகிதமுறு அடுக்குக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம்

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots \quad |x|<1$$ எனவுள்ள

அனைத்து x–ன் மெய்யெண் மதிப்புக்கும் இது பொருந்தும்.

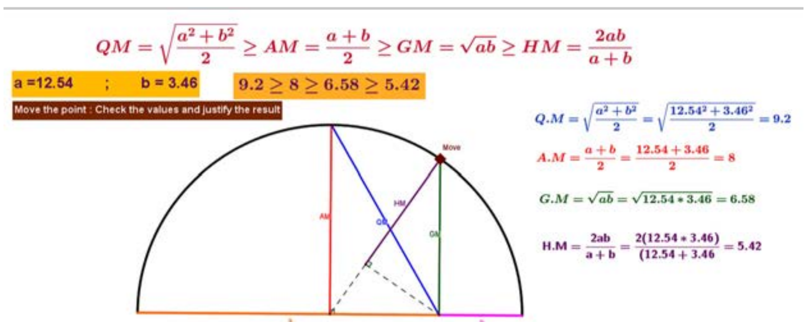
- $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
- $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
- $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots$
- $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \ldots$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
- $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$
- $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$ மற்றும் $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$
- $|x| < 1$ எனவுள்ள அனைத்து x–ன் மதிப்புகளுக்கும்

  $log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ ஆகும்.
- $|x| < 1$ எனவுள்ள அனைத்து x–ன் மதிப்புகளுக்கும்

  $log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$ ஆகும்.
- $|x| < 1$ எனவுள்ள அனைத்து x–ன் மதிப்புகளுக்கும்

  $log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right]$ ஆகும்.

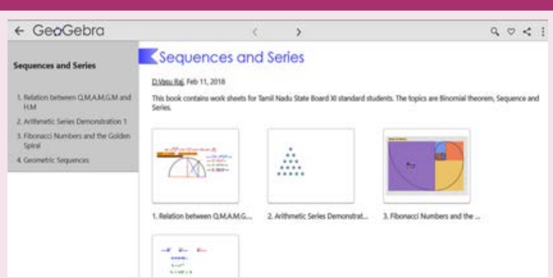
இணையச் செயல்பாடு – 5 (அ)



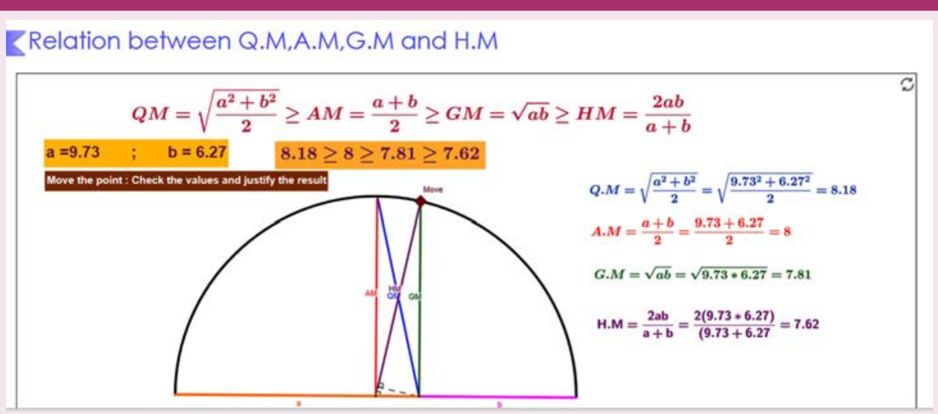
படி – 1 : இணைய உலாவியில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலியை தட்டச்சு செய்யவும் அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தவும்.

படி – 2 : தொடர் மற்றும் வரிசைக்கான பயிற்சித்தாள் திறக்கும். அதில் "Relation between Q.M, A.M, G.M and H.M" என்ற பயிற்சியை தேர்ந்தெடுத்துச் செய்யவும்.

படி – 3 : சராசரி சூத்திரத்தைக் கொண்டு a மற்றும் b மாறிகளை மாற்றி கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும். "Move" என்ற குறியை நகர்த்தி மாறிகளின் மதிப்பை மாற்றுவதன் மூலம் சராசரிகள் மதிப்பு மாறுவதைக் கவனிக்கவும்.

படி–1	படி–2
	

படி–3



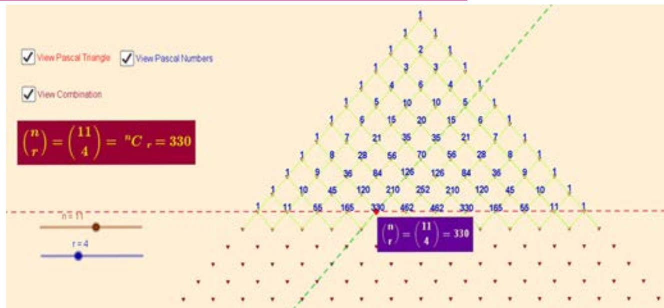
கோடுகளின் பெயர்கள் ஏன் AM, QM, GM மற்றும் HM என்று வைக்கப்பட்டுள்ளது என்று அறியவும். மற்ற பயிற்சித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

***படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.**

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/Pmz2QfWD

விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தவும்

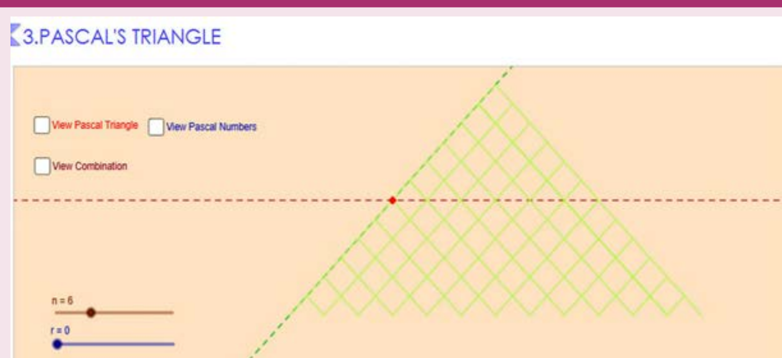
இணையச் செயல்பாடு – 5 (ஆ)



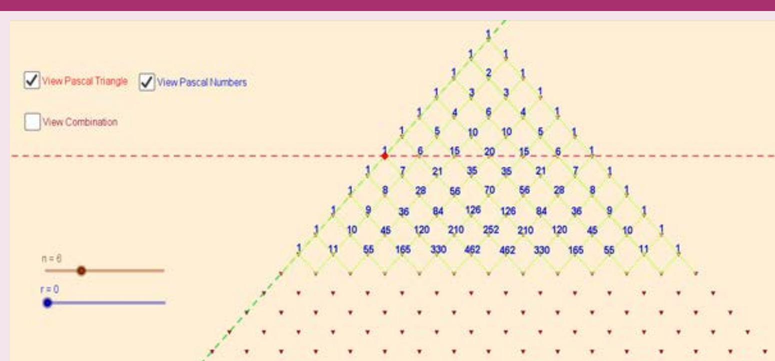
படி – 1 : இணைய உலாவியில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலியைத் தட்டச்சு செய்யவும் அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துக. "PASCAL'S TRIANGLE" என்ற பக்கம் திறக்கும்.அதில் மூன்று தெரிவு பெட்டிகள் முறையே "View Pascal Triangle", "View Pascal's Numbers" மற்றும் "View Combination" காணப்படும். பாஸ்கல் முக்கோணம் புள்ளிகளால் காட்டப்படும்.

படி – 2 : முதல் இரண்டு பெட்டிகளைத் தெரிவு செய்து பிறகு "n" மற்றும் "r" என்னும் நழுவுக்கோட்டை நகர்த்தினால் சிவப்பு நிறப் புள்ளி நகரும். ஏதாவது ஒரு எண்ணில் நிறுத்தி "View Combination" பெட்டியைத் தெரிவு செய்தால் அந்த எண்ணின் சேர்க்கை தோன்றும்– மீளாய்வு செய்க.

படி–1



படி–2



*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/QNga4HQd

விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தவும்

XI_Maths_Ch5_V-1_TM.indd 285 15-12-2021 14:41:40

அத்தியாயம் 6

இருபரிமாண பகுமுறை வடிவியல்

"எனது ஆற்றல்கள் சாதாரணமானவைதாம்,
என் செயல்களே வெற்றியைத் தேடி தருகின்றன.'

– சர் ஐசக் நியூட்டன்

6.1 அறிமுகம்


ரெனி டெகார்டே
1596-1650 CE

பிரான்காஸ்வைட் ($Francois$ $Viete$-1540-1603) என்பவர் முதன்முதலில் முறையான இயற்கணிதக் குறியீடுகளைக் கண்டறிந்து அவற்றைச் சமன்பாடுகளின் கருத்தாக்கத்தில்($Theory$ of $Equation$) அறிமுகப்படுத்தினார். 1630-களில் பிரெஞ்சு நாட்டின் கணித மேதைகளும்-தத்துவ அறிஞர்களுமான **ரெனி டெகார்டே** மற்றும் **பியரி டி ஃபெர்மர்ட்** இருவரும் பிரான்காஸ் வைட்டின் இயற் கணிதத்தைத் தழுவிய பகுமுறை வடிவியலை தனித்தனியாக கண்டறிந்தார்கள். டெகார்டே அவர்கள் பகுமுறை வடிவியலானது "இயற்கணித சூத்திரங்களை படமாக சித்தரிப்பதற்கான வழிமுறையாகவும்" மற்றும் ஆயத்தொலை அமைப்பானது "புள்ளிகளை ஒரு தளத்தில் குறிப்பதற்கான வழிமுறையாகவும்" மேம்படுத்தினார். இயற்கணிதத்தை வடிவியலுடன் தொடர்புபடுத்தியதே அவருடைய அரிய சாதனையாகும். இயற்கணித சமன்பாடுகளை வடிவியலில் உள்ள வடிவங்களைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு எழுதி விவரிக்கலாம் என்பதை விரிவாக விளக்கினார். 'பகுமுறை வடிவியல்' என்பது டெகார்டே பெயரில் "கார்டீசியன் வடிவியல்" ($Cartesian$ $Geometry$) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

17ஆம் நூற்றாண்டிலிருந்து கணிதவியலானது அடிப்படை அல்லது தூய கணிதம் ($pure$ $mathematics$) மற்றும் பயன்பாட்டு கணிதம் ($applied$ $mathematics$) என இருவேறு திசைகளில் வளர்ச்சியடைந்து வருகிறது. 17 ஆம் நூற்றாண்டில், ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு பொருளின் இயக்கம் பற்றி பயன்பாட்டுக் கணிதத்தில் முதன்முதலில் கண்டறியப்பட்ட பகுதியாகும். வணிகம், பொருளாதாரம், சமூக அறிவியல், இயற்பியல் மற்றும் மருத்துவம் ஆகிய துறைகளில் நேர்க்கோட்டின் வரைபடங்கள் பெரிதும் பயன்படுகின்றன. அடிப்படை வடிவியலில் மிகக் குறைந்த நீளம் சார்ந்த கோடுகள் மிகமுக்கியப் பங்காற்றுவது மட்டுமல்லாமல் வரலாற்று முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகவும் கருதப்படுகிறது.

அன்றாட வாழ்வில் நடைபெறும் ஒவ்வொரு செயல்பாட்டினையும் கணிதவியல் மொழிக்கு மாற்றி அமைப்பதே நமது முதல் பணியாகும். கணித மாதிரிகளை உருவாக்கப் பல உத்திகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களின் தொகுப்பைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை உருவாக்குவது மற்றும் அவற்றைப் பொருத்தமான கணிதவியல் உத்திகளைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதையும் காண்போம். கீழே விளக்கப்பட்டுள்ள சில நடைமுறை கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

நடைமுறை எடுத்துக்காட்டு 6.1 ஒரு மாணவன், அவனுடைய வீட்டிலிருந்து பள்ளிக்குச் சராசரியாக மணிக்கு 6 கி.மீ. வேகத்தில் நடந்து சென்றால் பள்ளி தொடங்குவதற்கு 10 நிமிடம் முன்னதாகப் பள்ளியைச் சென்றடைகிறான். அதே வேளையில், சராசரியாக மணிக்கு 4 கி.மீ வேகத்தில் நடந்து

செல்லும்போது 5 நிமிடம் தாமதமாகப் பள்ளியைச் சென்றடைகிறான். அம்மாணவன் தினமும் காலை 8.00 மணிக்கு வீட்டிலிருந்து பள்ளிக்குப் புறப்பட்டுச் சென்றால் பின்வரும் வினாக்களுக்கு எவ்வாறு விடைகாணலாம்.

(i) அவனுடைய வீட்டிற்கும் பள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு

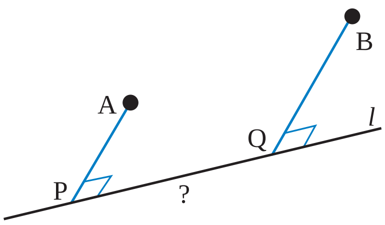
(ii) சரியான நேரத்திற்கு அவன் பள்ளிக்குச் செல்ல ஆகும் குறைந்தபட்சச் சராசரி வேகம் மற்றும் மாணவன் பள்ளியைச் சென்றடைய ஆகும் நேரம்

(iii) பள்ளி தொடங்கும் நேரம்

(iv) மாணவன் நடந்து செல்லும் பாதையின் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு.

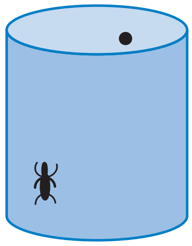
(இரு நேர்க்கோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு)

நடைமுறை எடுத்துக்காட்டு 6.2 A மற்றும் B ஆகிய இரு கிராமங்களுக்குச் சிறப்பான மின்சாரம் அளிக்க ஒரு துணை மின் நிலையத்தை l என்ற சாலையில் அமைப்பதற்காக அரசு திட்டமிட்டுள்ளது. A மற்றும் B ஆகிய கிராமங்களுக்கும் l என்ற சாலையிலுள்ள முறையே P மற்றும் Q என்ற செங்குத்து அடி புள்ளிகளுக்கும் இடையே உள்ள தொலைவுகள் முறையே 3 கிமீ மற்றும் 5 கிமீ ஆகும். P மற்றும் Q இவற்றுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 6 கிமீ எனில், (i) இரு கிராமங்களை துணை மின்நிலையத்துடன் இணைக்கும் கம்பியின் மிகக் குறைந்த நீளம் (கிராமங்களையும் துணை மின்நிலையத்தையும் இணைக்கும் சாலைகள்) மற்றும் (ii) மின் கம்பி செல்லும் பாதையின் சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்.



படம் 6.1

நடைமுறை எடுத்துக்காட்டு 6.3 அடிச்சுற்றளவு 24 செமீ மற்றும் உயரம் 10 செமீ கொண்ட ஒரு உள்ளீடற்ற உருளை வடிவக் கலனின் வெளிப்புறத்தின் அடிப்பகுதியில் இருந்து 4 செமீ உயரத்தில் ஒரு எறும்பு உள்ளது. அதற்கு நேர் எதிரே கலனின் உட்புறத்தில் மேல்பகுதியிலிருந்து 3 செமீ கீழே தேன் துளி ஒன்று உள்ளது. எறும்பு தேன் துளியை அடைய நகர்ந்து செல்லும் மிகக் குறைந்த தூரம் என்னவாக இருக்கும்? எறும்பு நகர்ந்து செல்லும் பாதையின் சமன்பாடு என்னவாக இருக்கும்? (படம் 6.2 -ல் எறும்பு மற்றும் தேன் துளி உள்ள இடங்களில் காட்டப்பட்டுள்ளன.)


படம் 6.2

நடைமுறை எடுத்துக்காட்டு 6.4 ஒரு குறிப்பிட்ட வகை குறுந்தகடு ஒன்றின் விலை ₹8 ஆக இருக்கும் போது $22,000$ குறுந்தகடுகளை வாடிக்கையாளர்கள் வாங்குவார்கள். ஒரு குறுந்தகட்டினை₹30 அல்லது அதற்கு மேல் விலை கொடுத்து வாங்க மாட்டார்கள். அதே சமயத்தில் ஒரு குறுந்தகட்டின் விலை ₹6 அல்லது அதற்குக் குறைவாக இருக்கும் போது உற்பத்தியாளர் விற்பனை செய்ய மாட்டார். இருப்பினும், குறுந்தகடு ஒன்றின் விலை ₹14 ஆக இருக்கும் போது உற்பத்தியாளரால் $24,000$ குறுந்தகடுகளை வழங்க இயலும். தேவை மற்றும் வழங்கல் அளவுகள், விலைக்கு நேர்விகித சமமாக

எடுத்துக்கொண்டால் பின்வருவனவற்றை எவ்வாறு காணலாம்.

(i) தேவைச் சமன்பாடு (Demand Equation)

(ii) வழங்கல் சமன்பாடு (Supply Equation)

(iii) சந்தை சமநிலையில் குறுந்தகடுகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் விலை

(iv) ஒரு குறுந்தகட்டின் விலை ₹10 எனில் தேவை மற்றும் வழங்கல் அளவு.

மேலே விளக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோட்டு கணக்குகளின் சமன்பாடுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட வகை தீர்வுகளை மட்டும் அளிக்காமல், அவற்றிலிருந்து மேலும் பல தகவல்களை நாம் தெரிந்து கொள்வதற்கும் உதவுகிறது. நேர்க்கோடுகள் பற்றிய கருத்தாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி மேற்குறிப்பிட்ட வகை கணக்குகளின் தீர்வுகளை பின்னர் இப்பாடப்பகுதியில் காணலாம். நேர்க்கோட்டைப் பற்றி புரிந்துகொள்ள, நேர்க்கோட்டுடன் தொடர்புடைய சில அடிப்படை கருத்துக்களை நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டியது அவசியமாகிறது. அவை பற்றி இனி விரிவாக விவாதிக்கலாம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள் (Learning objectives)

இந்த இயலைப் படித்தபின் மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகள்

- வெவ்வேறு வடிவங்களில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டினை எழுதுதல்
- கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்க்கோடுகள் இணையானவையா அல்லது செங்குத்தானவையா எனக் கண்டறிதல்
- கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிலிருந்து குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கு உள்ள தூரத்தைக் காணல் மற்றும் இருஇணை கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காணல்.
- கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளின்படி நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாட்டு தொகுதிகளை $(Family\ of\ Straight\ Lines)$ காணல்
- இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள், அவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம், மற்றும் அவற்றின் கோண இரு சமவெட்டி ஆகியவற்றைக் கண்டறிதல்

6.2 ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதை (Locus of a point)

வரையறை 6.1

ஒரு புள்ளி (point) என்பது ஒரு தளத்தின் மேற்பரப்பில் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தை (location) குறிப்பதாகும். புள்ளியானது ஒரு பொருளையோ அல்லது வடிவத்தையோ குறிப்பதல்ல.

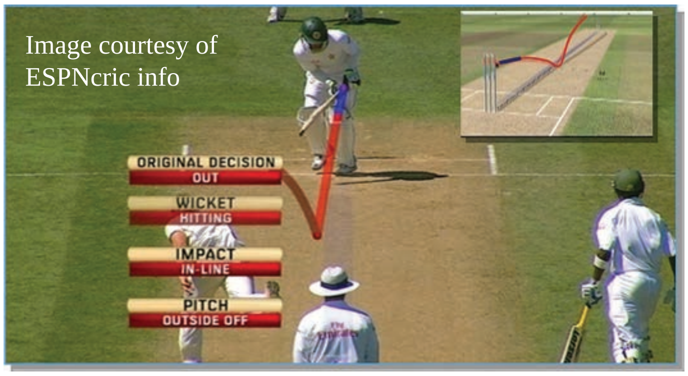
இருபரிமாணபகுமுறை வடிவியலில் புள்ளிகளை ஆயத்தொலை அமைப்பு முறையில் மெய்யெண்களின் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடிகளாக அதாவது $(x,\ y)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். பொதுவாக, கிடைமட்டக் கோட்டை x -அச்சு எனவும் x -அச்சுக்கு செங்குத்தான கோட்டை y-அச்சு எனவும் அழைக்கிறோம். இவ்விரு அச்சுகளின் வெட்டும் புள்ளியை ஆதிப்புள்ளி அல்லது ஆதி என அழைக்கிறோம். ஒரு தளத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P-யை ஒரு தனித்த வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சோடி $(x,\ y)$ எனக் குறிப்பிடலாம். இங்கு x என்பது புள்ளி P -க்கும் y -அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு மற்றும் y என்பது புள்ளி P -க்கும் x -அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு ஆகும். y -அச்சின் இடப்புறத்தில் x குறை மதிப்பு கொண்டதாகவும் இதேபோன்று, x -அச்சிற்குக் கீழ்புறம் y குறை மதிப்பாக இருக்கும். பயன்பாட்டின்போது x மற்றும் y -க்குப் பதிலாக வேறு எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தலாம். மேலும், அச்சுகளுக்கு வெவ்வேறு அளவுத்திட்டங்களையும் பயன்படுத்தலாம்.

வரையறை 6.2

ஒரு புள்ளியானது சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு இயங்கும்போது, அப்புள்ளி நகர்ந்து செல்லும் பாதை அதன் நியமப்பாதை (Locus) எனப்படும்.

கீழ்காணும் விளக்க எடுத்துக்காட்டுகளில் நியமப்பாதை மற்றும் அதன் பயன்களை பற்றியும் அறியலாம்.

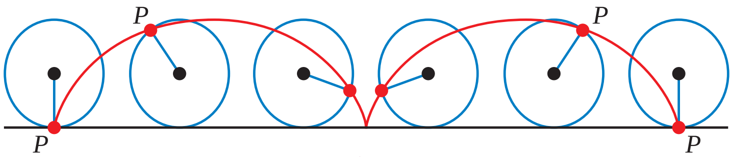
விளக்க எடுத்துக்காட்டு 6.1 கிரிக்கெட் விளையாட்டில் பந்து வீசுபவர், ஒரு பந்தை வீசும்போது அப்பந்து செல்லும் பாதை அதன் நியமப்பாதையாகும். பந்து வீசுபவர் மூலம் வீசியபந்தை மட்டையாளர் காலில் தடுத்தாடும்போது, பந்து வீசும் அணியினருக்கும் மட்டையாளருக்கும், இடையே ஏற்படும் பிரச்சனைக்கு (LBW) தீர்வுகாண மூன்றாவது நடுவரின் முடிவுக்கு விடப்படும். அவர் பந்து செல்லும் பாதையைத் திரையில் மெதுவாக இயக்கச் செய்து அப்பந்து மட்டையாளர் காலில் பட்டு பின்னர் ஸ்டம்பில் பட வாய்ப்பு உள்ளதா எனச் சரிபார்த்து பின்னர் சரியான முடிவினை அறிவிப்பார். இங்கு பந்து புள்ளியாகவும் அப்பந்து செல்லும் பாதை நியமப்பாதையாகவும் கருதப்படுகிறது. இம்முறையானது அகில உலகக் கிரிக்கெட் போட்டிகளில் தற்போது அனுமதிக்கப்படுகிறது.



படம் 6.3

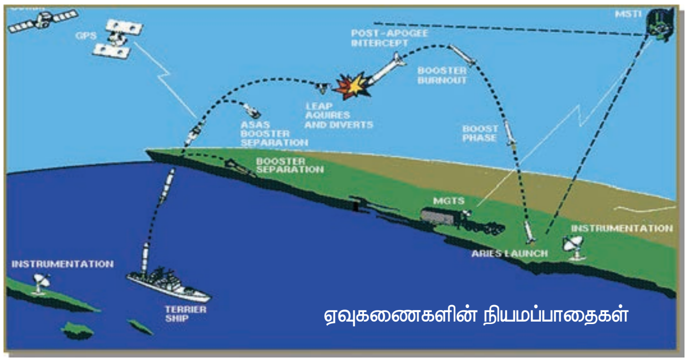
$https://www.hawkeyeinnovations.com/sports$ என்ற இணையதளத்தில் காணலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 6.2 P என்ற ஒரு புள்ளியானது ஒரு வட்டத்தின் விளிம்பில் உள்ளது என்க. அந்த வட்டமானது ஒரு நேர்க்கோட்டின் மீது சறுக்கி (நழுவி) செல்லாமல் உருண்டு செல்கிறது. அவ்வாறு உருண்டு செல்லும்போது வட்டத்தின் விளிம்பில் உள்ள P என்ற புள்ளி உருவாக்கும் நியமப்பாதையை உருள்வளை $(cycloid)$ என அழைக்கலாம். இவ்வளைவரையை $www.mathworld.wolfram.com/cyloid$ மற்றும் $www.gogebra.org/b/bd2ADu2I$ வளைதளத்தில் காணலாம்.



படம் 6.4

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 6.3 ஒரு இலக்கைத் தாக்குவதற்கு இராணுவக்கப்பலில் இருந்து ஒரு ஏவுகணை ஏவப்படுகிறது. எதிர்வரும் ஏவுகணையை இடைமறித்து அழிக்கத் தரையில் இருந்து மற்றொரு ஏவுகணை ஏவப்படுகிறது. ஏவுகணைகளின் நியமப்பாதைகள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இது போன்ற நிகழ்வுகள் பல போர்களில் முன் கூட்டியே துல்லியமாக நடைமுறைப்படுத்த நியமப்பாதையின் கருத்தாக்கம் மிக முக்கியப் பங்கு வகிக்கிறது. வளைகுடா போரின் (2 ஆகஸ்ட் 1990 முதல் 28 பிப்ரவரி 1991 முடிய) போது இஸ்ரேலின் நகரங்களை ஈராக் ஸ்கட் $(Scud)$ ரக ஏவுகணைகளை கொண்டு தாக்கியது. அவற்றை இடைமறித்து அழிக்க இஸ்ரேல் பேட்ரியாட் $(Patriot)$ ரக ஏவுகணைகளைப் பயன்படுத்தியது.

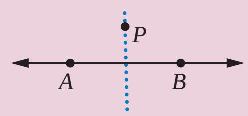
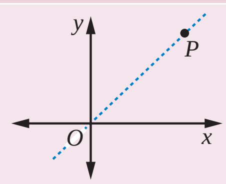
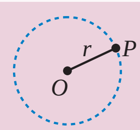


படம் 6.5

உலக அரங்கில் விண்வெளி ஆராய்ச்சியாளர்கள் செயற்கைக் கோளை வெற்றிகரமாக விண்ணில் செலுத்துவதற்கும் அதன் சுற்று வட்டப் பாதையில் நிலை நிறுத்துவதற்கும் நியமப்பாதையின் கருத்தாக்கம் முக்கியப் பங்கு வகிக்கிறது.

x மற்றும் y என்ற இரு மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைச் சாதாரணமாக x மற்றும் y ஆகிய மெய்மதிப்புக்களை கொண்ட எண்ணற்ற ஜோடிகள் நிறைவு செய்கின்றன. நிறைவு செய்யும் ஒவ்வொரு ஜோடியும் அச்சமன்பாட்டின் மெய்யெண் தீர்வு எனப்படும். சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு மெய்யெண் தீர்வும் அதனுடைய வரைபடத்தைப் பெற்றிருக்கும். இவ்வரைபடங்களின் தொகுப்பு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் நியமப்பாதை எனப்படும்.

கணிதத்தில் உள்ள சில முக்கிய நியமப்பாதைகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு நகரும் புள்ளி P	வரைபடம்	பாதையின் பெயர்
P என்ற ஒரு புள்ளி ஆனது இரு நிலையான புள்ளிகள் A மற்றும் B ஆகியவற்றிற்கு சமதூரத்தில் இருக்கும்படி நகர்கிறது.	 படம் 6.6	AB என்ற கோட்டுத் துண்டின் செங்குத்து இரு சமவெட்டி ஆகும்.
P என்ற ஒரு புள்ளி ஆனது இரண்டு நிலையான கோடுகள் Ox மற்றும் Oy ஆகியவற்றுக்குச் சமதூரத்தில் இருக்கும்படி நகர்கிறது.	 படம் 6.7	$\angle xOy$ என்ற கோணத்தின் இரு சம வெட்டி ஆகும்.
P என்ற ஒரு புள்ளி ஆனது நிலையான புள்ளி O -விலிருந்து சமதூரத்தில் நகர்கிறது.	 படம் 6.8	வட்டம்

ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதையை காணும் வழிமுறைகளைப்பற்றி இங்கு விவாதிக்கலாம். நியமப்பாதையின் சமன்பாடு என்பது அப்பாதையில் அமைந்துள்ள அனைத்து புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு ஆகும்.

ஒரு புள்ளியின் நியமப் பாதையின் சமன்பாடு காணும் செயல்முறைகள்

(i) P என்ற புள்ளியின் நியமப் பாதையைக் காண வேண்டும் எனில் புள்ளி P-ன் ஆயக்கூறுகளை (h, k) என எடுத்துக் கொள்க.

(ii) தெரிந்த அளவுகளையும் மற்றும் தெரியாத துணையலகுகளையும் $(Parameter)$ பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளை சமன்பாடுகளாக எழுதுக.

(iii) தெரியாத துணையலகுகளை நீக்கி h, k மற்றும் தெரிந்த அளவுகள் மட்டும் இருக்குமாறு சமன்பாட்டைக் காண்க.

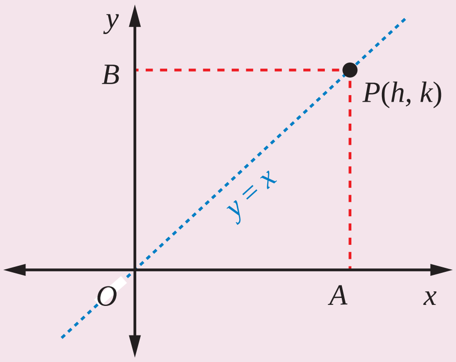
(iv) கிடைக்கும் சமன்பாட்டில் h-க்கு பதிலாக x மற்றும் k-க்கு பதிலாக y எனப் பிரதியிடக் கிடைக்கும் சமன்பாடு புள்ளி p-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.1 x -அச்சிலிருந்து உள்ள தொலைவானது y -அச்சுலிருந்து உள்ள தொலைவுக்கு சமமாக இருக்குமாறு நகரும் ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

தீர்வு

$P(h,k)$ என்பது நியமப்பாதையின் மீது அமைந்துள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

புள்ளி P-லிருந்து x மற்றும் y-அச்சுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் முறையே A, B என்க.



படம் 6.9

புள்ளி P என்பது $(OA,OB)=(BP,AP)=(h,k)$

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையின்படி,

$$AP = BP \Rightarrow k = h$$

$h = x$ மற்றும் $k = y$ ஐப் பிரதியிட

P-ன் நியமப்பாதை $y = x$ என்ற ஆதி வழியே செல்லும் கோடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.2 $\left(ct,\frac{c}{t}\right)$ என்ற புள்ளி நகர்வதால் உண்டாகும் பாதையைக் காண்க. இங்கு $t \neq 0$ என்பது துணையலகு மற்றும் c என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

தீர்வு

தேவையான நியமப்பாதையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(h,k)$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, $h = ct$ மற்றும் $k = \frac{c}{t}$ ஆகும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளைப் பெருக்கி t-ஐ நீக்கலாம்.

$$(h)(k)=(ct)\left(\frac{c}{t}\right) \Rightarrow hk = c^2 \;,\; h = x \text{ மற்றும் } k = y \text{ எனப் பிரதியிட}$$

$\therefore$ தேவையான நியமப்பாதையின் சமன்பாடு $xy = c^2$

எடுத்துக்காட்டு 6.3 $A(1,0)$ மற்றும் $B(5,0)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்திலிருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் $A(1,0)$ மற்றும் $B(5,0)$ ஆகும்.

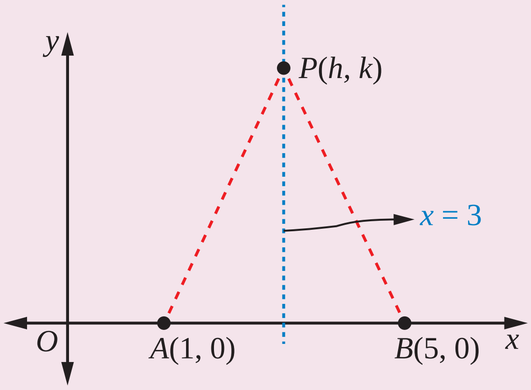
$P(h,k)$ என்பது தேவையான பாதையின்மீது அமைந்துள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையின்படி, $AP = BP$

அதாவது

$$\sqrt{(h-1)^2+(k-0)^2}=\sqrt{(h-5)^2+(k-0)^2}$$

$$\Rightarrow \quad h = 3$$



படம் 6.10

எனவே, புள்ளி $P(h,k)$ -ன் நியமப்பாதை, $x = 3$

இது y-அச்சிற்கு இணையாக உள்ள நேர்க்கோடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.4 $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ என்ற நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு θ என்பது துணையலகு ஆகும்.

தீர்வு

$P(h,k)$ என்பது தேவையான பாதையின் மீது அமைந்துள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையின்படி

$$h = a\sec\theta \text{ மற்றும் } k = b\tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{a} = \sec\theta\,, \qquad \frac{k}{b} = \tan\theta$$

முக்கோணவியல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, துணையலகு θ -ஐ நீக்கலாம்.

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$$

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 = 1\,. \qquad \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1$$

$P(h,k)$ என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

https://www.geogebra.org/geometry

குறிப்பு: துணையலகானது முக்கோணவியல் அமைப்பில் இருப்பின் கீழ்க்காணும் முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி துணையலகுகளை நீக்கலாம்.

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1, \quad \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.5 நீளம் 6 அலகுகள் கொண்ட ஒரு நேரான கம்பியின் முனைகள் A மற்றும் B ஆனது முறையே எப்போதும் x மற்றும் y-அச்சுகளைத் தொடுமாறு நகர்கிறது. O-ஐ ஆதியாகக் கொண்ட ΔOAB என்ற முக்கோணத்தின் நடுப்புள்ளியின் $(centroid)$ நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க

தீர்வு

$P(h,k)$ என்பது தேவையான பாதையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$O,\ A$ மற்றும் B ஆகிய புள்ளிகளின் ஆயக் கூறுகள் முறையே $(0, 0), (a,0)$ மற்றும் $(0, b)$ என்க.

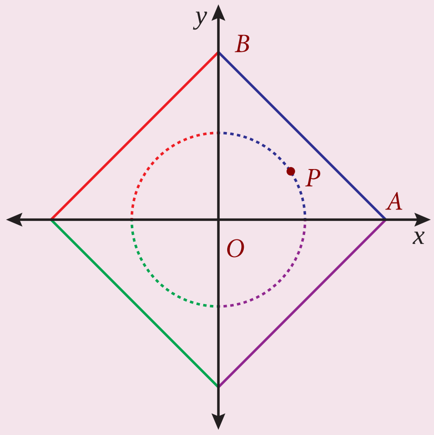
ΔOAB -ன் நடுப்புள்ளி $\left(\dfrac{0+a+0}{3}, \dfrac{0+0+b}{3}\right) = (h,k)$.

$$\frac{a}{3} = h \Rightarrow a = 3h, \quad \frac{b}{3} = k \Rightarrow b = 3k$$

செங்கோணம் ΔBOA -விருந்து

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$(3h)^2 + (3k)^2 = (6)^2 \quad \Rightarrow h^2 + k^2 = 4$$



படம் 6.11

எனவே, $P(h,k)$ என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை, $x^2+y^2=4$.

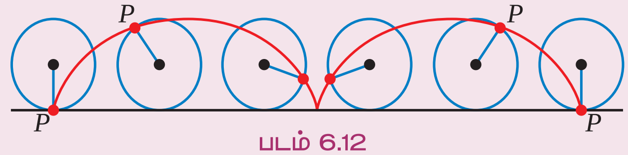
எடுத்துக்காட்டு 6.6 நகரும் புள்ளியின் ஆயக்கூறு $(a(\theta-\sin\theta),\ a(1-\cos\theta))$ இங்கு θ என்பது துணையலகு எனில், இப்புள்ளி நகரும் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

$P(h,k)$ என்பது தேவையான நியமப்பாதையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$$h = a(\theta-\sin\theta) \qquad (6.1)$$

$$k = a(1-\cos\theta) \qquad (6.2)$$



படம் 6.12

மேற்கண்ட சமன்பாடு (6.2) இலிருந்து θ மற்றும் $\sin\theta$ மதிப்புகளைக் காணலாம்.

$$k = a(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{a-k}{a} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a-k}{a}\right) \text{ மற்றும் } \sin\theta = \frac{\sqrt{2ak-k^2}}{a}$$

θ மற்றும் $\sin\theta$ மதிப்புகளை சமன்பாடு (6.1) இல் பிரதியிட,

$$h = a\cos^{-1}\left(\frac{a-k}{a}\right)-\sqrt{2ak-k^2}$$

எனவே, என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை,

$$x = a\cos^{-1}\left(\frac{a-y}{a}\right)-\sqrt{2ay-y^2} \qquad (6.3)$$

https://www.geogebra.org/b/bd2ADu2I#material/zCKMj8kE

குறிப்பு: மேற்கூறிய சமன்பாடானது துணையலகு வடிவத்திலிருந்து கார்டீசியன் வடிவத்திற்கு மாற்றப்பட்டுள்ளது. ஆனால் சில நேரங்களில் கார்டீசியன் வடிவத்தைவிடத் துணையலகு வடிவமே கையாள்வதற்கு எளிதாக பயன்படுகிறது.

பயிற்சி 6.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆயத்தொலைகளை உடைய நகரும் புள்ளி P -ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு α ஒரு துணையலகு ஆகும்.

   (i) $(9\cos\alpha,\ 9\sin\alpha)$ (ii) $(9\cos\alpha,\ 6\sin\alpha)$

2. (i) x-அச்சிலிருந்து இரண்டு அலகுகள் மற்றும் (ii) y -அச்சிலிருந்து மூன்று அலகுகள் என்ற மாறாத தொலைவில் நகரும் புள்ளி P -ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. θ ஒரு துணையலகு எனில், $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ ஆகிய ஆயத்தொலைகளை உடைய நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $x^2-5x+ky=0$ என்ற நியமப்பாதையின் மீது புள்ளிகள் $P(-3,1)$ மற்றும் $Q(2,b)$ அமையும் எனில் k மற்றும் b -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

5. 8 அலகுகள் நீளமுள்ள ஒரு நேரான கம்பியின் முனைகள் A மற்றும் B ஆகியவை முறையே எப்போதும் x மற்றும் y-அச்சுகளைத் தொடுமாறு நகர்ந்து கொண்டு இருக்கிறது, எனில் வெட்டுத்துண்டு AB -ன் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. $(3,\ 5)$ மற்றும் $(1,-1)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு நகரும் புள்ளிக்கு இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 20-க்கு சமம் எனில் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. $A(1,-6)$ மற்றும் $B(4,-2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் AB கோட்டுத் துண்டானது புள்ளி P-ல் தாங்கும் கோணம் செங்கோணம் எனில், புள்ளி P-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. ஆதிப்புள்ளி O என்க. $y^2 = 4x$ என்ற வளைவரையின் மீது மாறிப்புள்ளி R அமைந்துள்ளது எனில் கோட்டுத்துண்டு OR -ன் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. நகரும் புள்ளி P-ன் ஆயக் கூறுகள் $\left(\frac{a}{2}(\operatorname{cosec}\theta + \sin\theta), \frac{b}{2}(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\right)$ எனில், P-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாடு $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ எனக் காட்டுக. இங்கு θ என்பது ஒரு துணையலகு மாறி ஆகும்.

10. Q என்ற புள்ளி $2x^2 + 9y^2 = 18$ என்ற வளைவரையின் மீது அமைந்துள்ளது. $P(2,-7)$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி எனில் கோட்டுத்துண்டு PQ-ன் நடுப்புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. R மற்றும் Q என்பன முறையே x மற்றும் y -அச்சுகளின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள், P என்ற நகரும் புள்ளி RQ-ன் மேல் உள்ளது. மேலும் $RP = b$, $PQ = a$ என்றவாறு RQ-ன் மீது அமைந்துள்ள நகரும் P-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. $P(6\ ,\ 2)$, $Q(-2\ ,\ 1)$ மற்றும் R என்பன ΔPQR-ன் முனைப் புள்ளிகள் மற்றும் நியமப்பாதை $y = x^2 - 3x + 4$ -ன் மீது R என்ற புள்ளி அமைந்துள்ளது எனில், ΔPQR -ன் மையக்கோட்டுச் சந்தியின் $(Centroid)$ நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 7 = 0$ என்ற நியமப்பாதையின் மீது Q என்ற புள்ளி அமைந்துள்ளது. P என்ற புள்ளி கோட்டுத் துண்டு OQ-ஐ வெளிப்புறமாக $3:4$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனில் புள்ளி P-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு O என்பது ஆதிப்புள்ளியாகும்.

14. கொடுக்கப்பட்ட $P(5,1)$ புள்ளிக்கு 5 அலகுகள் மற்றும் x-அச்சிலிருந்து 3 அலகுகள் தூரம் கொண்ட ஒரு நியமப்பாதையின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் எத்தனை? மேலும் அப்புள்ளிகளைக் காண்க.

15. $(-4,\ 0)$ மற்றும் $(4,0)$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு நகரும் புள்ளிக்கு இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் கூடுதல் எப்போதும் 10 அலகுகள் எனில், நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க

6.3 நேர்க்கோடுகள் (Straight Lines)

நேரிய சமன்பாடுகளை இயற்கணித அடிப்படை விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பல்வேறு வடிவங்களில் எழுதலாம். இதுபோன்ற நேரிய சமன்பாடுகளைப் பெரும்பாலும் "நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்" எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றன. நேரிய சமன்பாடுகளின் பொது வடிவத்தை

$$ax + by + c = 0 \qquad (6.4)$$

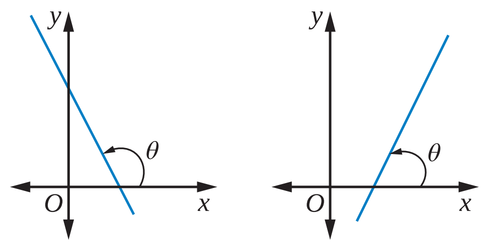
என எழுதலாம். இங்கு a மற்றும் b இவற்றில் குறைந்தது ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாக இருக்கவேண்டும். ஓர் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் அனைத்தும் ஒரு தளத்தின் ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைந்தால் அந்தச் சமன்பாட்டை "நேரிய $(Linear)$" சமன்பாடு எனக் குறிப்பிடலாம்.

ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பல வடிவங்களில் இயற்கணித அடிப்படை விதிகளைக் கொண்டு மாற்றி எழுத முடியும். இவ்வடிவங்களின் பெயர்கள், அதை எழுதுவதற்குத் தேவையான தகவல்களின் அடிப்படையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் **புள்ளிகள் (Points), சாய்வு (Slope)** மற்றும் **வெட்டுத்துண்டுகள் (Intercepts)** ஆகியவை முக்கியத் தகவல்களாகும்.

6.3.1 ஒரு நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணத்திற்கும் சாய்வுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு (The relationship between the angle of inclination and slope)

வரையறை 6.3

ஒரு நேர்க்கோட்டின் **சாய்வுக் கோணம் (Angle of Inclination)** என்பது அக்கோடானது கடிகார எதிர் திசையில் (மிகை) x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் ஆகும். இதனை θ என குறிப்பிடலாம்.



படம் 6.13

வரையறை 6.4

ஒரு நேர்க்கோட்டின் **சாய்வு (slope)** என்பது திசை மற்றும் சரிவு ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் ஒரு எண் ஆகும்.

x மற்றும் y -அச்சுகளைக் கொண்ட தளத்தில் ஒரு கோட்டின் சாய்வு பொதுவாக $`m'$ என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுகிறோம். இந்தச் சாய்வு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு காணலாம்.

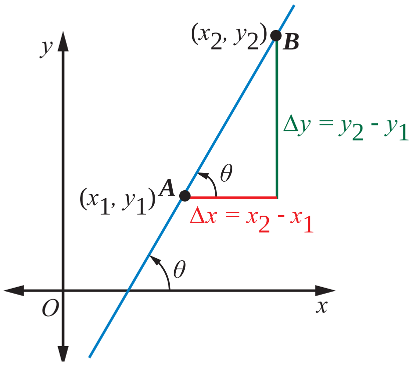
(i) ஒரு கோடு கடிகார எதிர் திசையில் x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் θ எனில் கோட்டின் **சாய்வு** $(slope)$

$$m = \tan\theta$$

இங்கு θ -ன் மதிப்பு $\frac{\pi}{2}$ எனும்போது $m = \tan\frac{\pi}{2}$ என்பது வரையறுக்கப்படாதவை.

(ii) (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளது எனில், இக்கோட்டின் சாய்வு y -ஆயத்தின் மாறுபாட்டை x -ஆயத்தின் மாறுபாட்டால் வகுக்கக் கிடைக்கும் எண் ஆகும். இங்கு $x_2 \neq x_1$ இதனைக் கீழ்க்கண்டவாறு விவரிக்கலாம்.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{செங்குத்து நிலைமாற்றம்}}{\text{கிடைமட்ட நிலைமாற்றம்}}$$



படம் 6.14

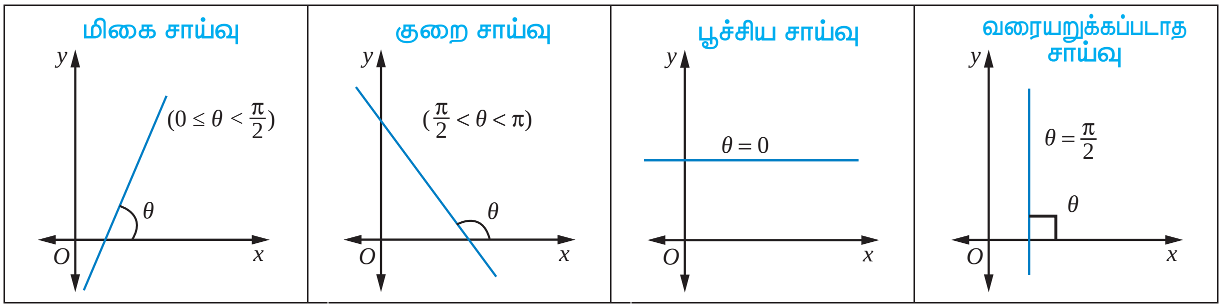
(iii) நேர்க்கோடு $ax + by + c = 0$ என்ற பொது வடிவில் கொடுக்கப்பட்டால்,

இக்கோட்டின் சாய்வு

$$m = -\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

இங்கு $b = 0$ எனில், m வரையறுக்கப்படாதவை.

ஒரு கோட்டின் மிகை, குறை, பூச்சியம் மற்றும் வரையறுக்கப்படாத சாய்வுகள்



x-அதிகரிக்கும்போது y-அதிகரிக்கின்றது	x-அதிகரிக்கும்போது y-குறைகின்றது	x-அதிகரிக்கும்போது y- மாறாது	x-மாறாதபோது y -மாறுகிறது

படம் 6.15

வரையறை 6.5

ஒரு தளத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்தால், அப்புள்ளிகளை **ஒரே கோடமைப் புள்ளிகள் (Collinear)** எனக் கூறலாம்.

A, B மற்றும் C என்பன ஒரு தளத்தின் மீது அமைந்துள்ள ஏதேனும் மூன்றுப் புள்ளிகள் என்க. AB -ன் சாய்வு BC (அல்லது AC) -ன் சாய்வுக்குச் சமம் எனில், A, B மற்றும் C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோடமைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

6.3.2 நேர்க்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டுகள் அல்லது இடைமறி (Intercepts of a Line)

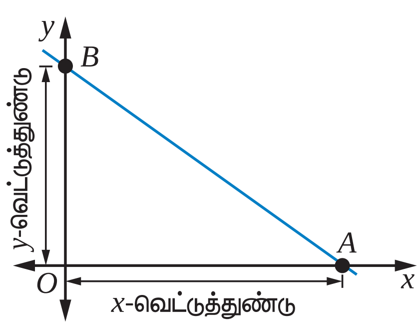
வரையறை 6.6

ஒரு நேர்க்கோட்டின் **வெட்டுத்துண்டுகள் அல்லது இடைமறி (intercepts)** என்பது x -அச்சு அல்லது y -அச்சினை வெட்டும் புள்ளி ஆகும்.

y - மதிப்பு பூஜ்ஜியம் எனில் கிடைக்கும் புள்ளி x -ன் வெட்டு ஆகும். மேலும், x-ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியம் எனில், கிடைக்கும் புள்ளி y -ன் வெட்டு ஆகும். கிடைமட்டம் மற்றும் நேர்குத்து அச்சுகளை வெட்டும் புள்ளிகள் ஒரு கோட்டின் வெட்டுகள் எனப்படும். இவற்றிலிருந்து,

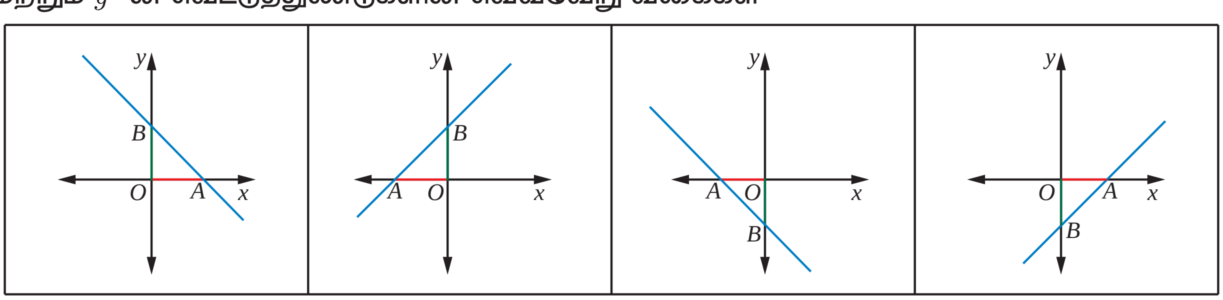
(i) x -அச்சின் சமன்பாடு $y = 0$ எனவும்

(ii) y -அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ எனவும் தெளிவாகிறது. படத்திலிருந்து OA என்பது x -ன் வெட்டுத்துண்டு மற்றும் OB என்பது y -ன் வெட்டுத்துண்டு ஆகும்.



படம் 6.16

x மற்றும் y -ன் வெட்டுத்துண்டுகளின் வெவ்வேறு வகைகள்



x -வெட்டுத்துண்டு–மிகை y -வெட்டுத்துண்டு –மிகை	x -வெட்டுத்துண்டு–குறை y -வெட்டுத்துண்டு –மிகை	x -வெட்டுத்துண்டு–குறை y -வெட்டுத்துண்டு –குறை	x -வெட்டுத்துண்டு–மிகை y -வெட்டுத்துண்டு –குறை

படம் 6.17

புள்ளிகள், சாய்வு மற்றும் **வெட்டுத் துண்டுகள்** ஆகியவற்றின் வரையறை மற்றும் விரிவான தகவல்களை அறிந்துள்ளோம். இத்தகவல்களைப் பயன்படுத்தி வெவ்வேறான வடிவமுடைய நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை நினைவு கூறுவோம்.

6.3.3 நேர்க்கோட்டின் வெவ்வேறு வடிவங்கள் (Different forms of a straight line)

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டை அமைப்பதற்கு இரண்டு தகவல்கள் போதுமானதாகும். **சாய்வு, வெட்டுத்துண்டுகள்** மற்றும் **புள்ளிகள்** இவைகளில் ஏதேனும் இரண்டு தகவல்களைக் கொண்டு பலவகையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகளின் வகைகளை உருவாக்க முடியும்.

(i) சாய்வு மற்றும் வெட்டுத்துண்டு வடிவம்
(ii) புள்ளி மற்றும் சாய்வு வடிவம்
(iii) இரு புள்ளிகள் வடிவம்
(iv) வெட்டுத்துண்டு வடிவம்

மேலும் கீழ்க்கண்ட இரண்டு சிறப்பு வகைச் சமன்பாடுகள்.

(v) செங்குத்து வடிவம்
(vi) துணையலகு வடிவம், மேலும்
(vii) பொது வடிவம்

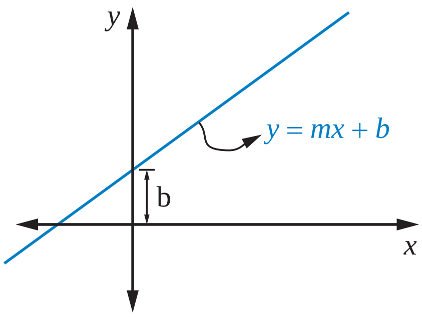
ஆகிய நேர்க்கோடுகளின் வடிவங்களை இரண்டு தகவல்களைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

(i) சாய்வு மற்றும் வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (Slope–Intercept form)

விகிதச் சமமான நேரிய சார்புகளை $y = mx$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். இங்கு m என்பது கோட்டின் சாய்வு. விகிதச் சமமற்ற நேரிய சார்புகளை

$$y = mx + b,\ b \neq 0 \qquad (6.5)$$

என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். இந்த வடிவம் கொண்ட சமன்பாடு ஒரு நேர்க்கோட்டின் சாய்வு– வெட்டுத்துண்டு வடிவம் ஆகும். ஏனெனில், இங்குச் சாய்வு m மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு b ஆகும்.



படம் 6.18

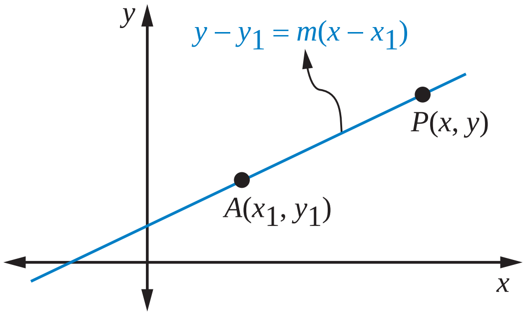
குறிப்பு: (i) $b = 0$ மற்றும் $m \neq 0$ எனும்போது நேர்க்கோடு ஆதிப்புள்ளி வழியே செல்கிறது. மேலும் அதன் சமன்பாடு $y = mx$

(ii) $b = 0$ மற்றும் $m = 0$ எனில் இந்த வகை நேர்க்கோடுகள் x -அச்சுடன் ஒன்றியிருக்கும். மேலும் அதன் சமன்பாடு $y = 0$

(iii) $b \neq 0$ மற்றும் $m = 0$ எனில் இந்த வகையான நேர்க்கோடு x -அச்சிக்கு இணையாக இருக்கும். அதன் சமன்பாடு $y = b$ ஆகும்.

(ii) புள்ளி மற்றும் சாய்வு வடிவம் (Point and Slope form)

m என்பது நேர்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் $A(x_1, y_1)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளி என்க. இக்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள A -ஐ தவிர ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ எனில், $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $P(x, y)$ ஆகியவற்றை



படம் 6.19

இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow \qquad y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (6.6)$$

இவ்வடிவத்தை புள்ளி - சாய்வு வடிவம் எனக் கூறலாம்.

குறிப்பு: y -அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சாய்வு (m) வரையறுக்கப்படவில்லை என்பதால், $A(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லும் y -அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாட்டைப் புள்ளி - சாய்வு அமைப்பின் மூலம் பெற இயலாது. இருப்பினும் அக்கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளில் x ஆயத் தொலைவுகள் x_1 என்பதால் அக்கோட்டின் சமன்பாடு $x = x_1$ ஆகும்.

(iii) இரு புள்ளிகள் வடிவம் (Two–points form)

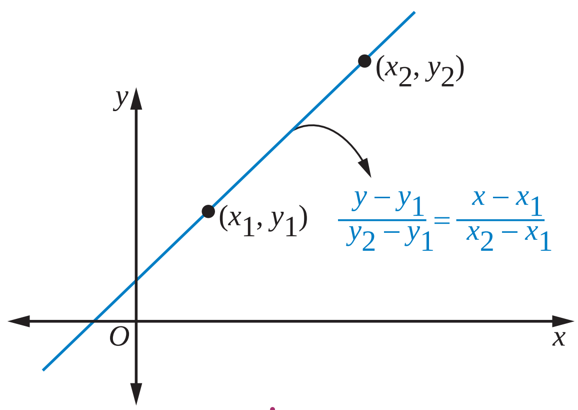
(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) இவ்விரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டின்

$$\text{சாய்வு } m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \text{ ஆகும்}$$

புள்ளி- சாய்வு வடிவம் பயன்படுத்தி

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

என எழுதலாம். இங்கு $x_2 \neq x_1$ மற்றும் மேற்கண்ட சமன்பாட்டை



படம் 6.20

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (6.7)$$

எனவும் எழுதலாம். இது இரு புள்ளிகள் வடிவ நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும். இரு புள்ளிகள் வடிவ நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டை கீழ்க்காணுமாறு அணிக்கோவை வடிவத்திலும் குறிப்பிடலாம்.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

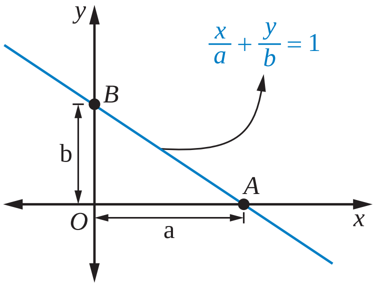
(iv) வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (Intercept Form)

ஒரு கோடு x மற்றும் y -அச்சுகளில் ஏற்படுத்தும் வெட்டு துண்டுகள் தெரியும் எனில், அதன் சமன்பாட்டை இங்குக் காணலாம். x -ன் வெட்டுத் துண்டு $OA = a$ மற்றும் y -ன் வெட்டுத்துண்டு $OB = b$ என்க. இங்கு, a, b என்பன பூச்சியமற்ற மதிப்புகள் ஆகும். $A(a, 0)$ மற்றும் $B(0, b)$ என்ற இவ்விரு புள்ளிகள் வழியே செல்லக்கூடிய நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (6.8)$$

மேற்கண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு வெட்டுத்துண்டு வடிவம் ஆகும்.



படம் 6.21

ஒரு நேர்க்கோடு ஆதிப்புள்ளி வழியாகவோ, கிடைமட்டக் கோடாகவோ, நிலைக்குத்துக் கோடாகவோ அல்லது a, b இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூஜ்ஜியமாக இருப்பின் இந்த வடிவத்தில் $(Intercept\ form)$ எழுத முடியாது. வரைபடமாக வரைவதற்கு இந்த வடிவத்தில் சமன்பாடுகளை அமைத்தால் மிக எளிதாக இருக்கும்.

(v) செங்குத்து வடிவம் (Normal Form)

ஒரு நேர்க்கோடு ஆயஅச்சுகளை வெட்டும் புள்ளிகள் A மற்றும் B என்க. p என்பது ஆதிப் புள்ளியிலிருந்து AB என்ற கோட்டிற்கு வரையப்படுள்ள OP என்ற செங்குத்துத்கோட்டின் நீளம் என்க. OP என்ற கோடு மிகை திசையில் அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் α என்க.

செங்கோண ΔOPA -ல், $\dfrac{OP}{OA} = \cos\alpha$ மற்றும்

செங்கோண ΔOPB -ல், $\dfrac{OP}{OB} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

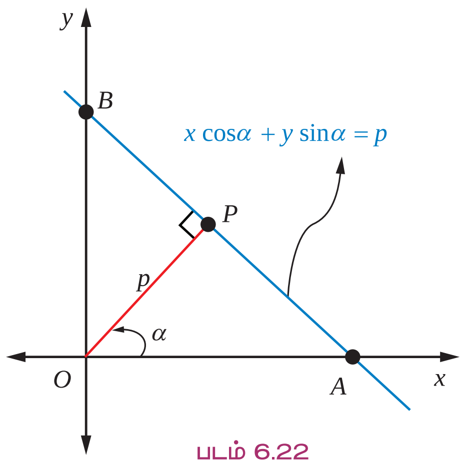
$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{OA} = \dfrac{\cos\alpha}{p}$ மற்றும் $\dfrac{1}{OB} = \dfrac{\sin\alpha}{p}$

மேற்கண்ட மதிப்புகளை வெட்டுத்துண்டு வடிவத்தில், பயன்படுத்த

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

$$\frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\sin\alpha}{p} = 1$$

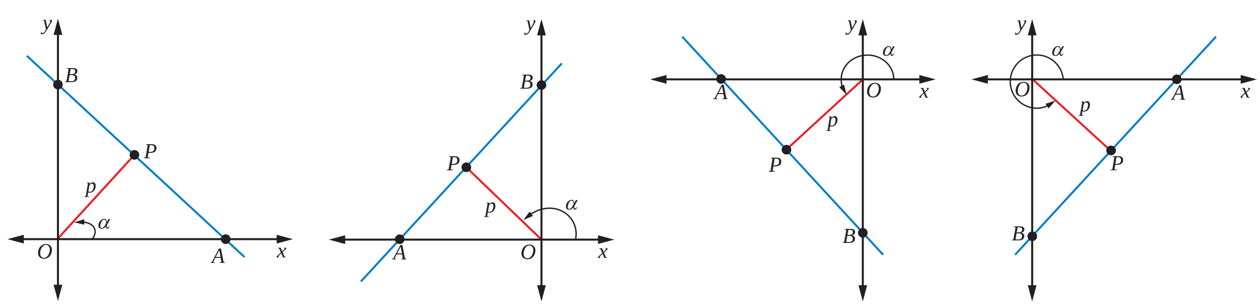
$$\Rightarrow \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (6.9)$$



படம் 6.22

என்பது நேர்கோட்டின் செங்குத்து வடிவமாகும்.

ஒரு நேர்கோட்டின் எல்லா நிலையிலும் p ஆனது மிகை ஆகும். மற்றும் α என்பது x -அச்சுக்கு மிகை திசையில் $(Anti\ clockwise$-கடிகார எதிர் திசை$)$ மதிப்பிடப்படுகிறது எனில் எல்லா வகைகளிலும் உள்ள கோடுகள் செங்குத்து வடிவத்தில் அமைக்கலாம். இவற்றை கீழ்க்கண்ட படத்தில் காணலாம்.


படம் 6.23

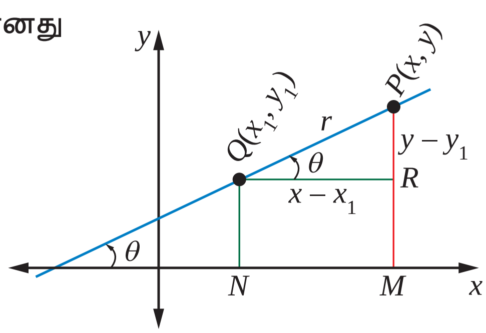
(vi) துணையலகு வடிவம் (Parametric Form)

நேர்க்கோட்டின் துணையலகு சமன்பாட்டின் வடிவமானது

$x = ar + x_1$ மற்றும் $y = br + y_1$. இங்கு a மற்றும் b என்பன மாறிலிகள் மற்றும் r என்பது துணையலகு ஆகும்.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = r\,, \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

ஒரு நேர்க்கோடு $Q(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்வதாக எடுத்துக்கோள்வோம். இக்கோடானது x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ என்க.



படம் 6.24

புள்ளி Q -ல் இருந்து r தொலைவில் இக்கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளி $P(x, y)$ என்க.

P மற்றும் Q என்ற புள்ளிகளிலிருந்து x -அச்சுக்கு வரையப்படும் நிலைக்குத்துக் கோடுகள் முறையே QN மற்றும் PM ஆகும் மற்றும் $QR \perp PM$.

செங்கோண ΔQRP -ல்,

$$x - x_1 = QR = PQ\cos\theta = r\cos\theta$$

எனவே, $$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = r \qquad (6.10)$$

இதைப்போன்று, $y - y_1 = RP = QP\sin\theta = r\sin\theta$

$\Rightarrow$ $$\frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad (6.11)$$

சமன்பாடுகள் (6.10) மற்றும் (6.11) -லிருந்து

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad (6.12)$$

இங்கு, துணையலகு r என்பது ஒரு கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள (x_1, y_1) மற்றும் (x, y) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் ஆகும். மேற்கண்ட வடிவத்தினைக் கோட்டின் சமச்சீர் வடிவம் அல்லது துணையலகு வடிவம் என அழைக்கலாம்.

குறிப்பு: ஒரு நேர்க்கோட்டின் மீது உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் $(x_1 + r\cos\theta\ ,\ y_1 + r\sin\theta)$ என எழுதலாம், இப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகள் துணையலகு r -ஐ சார்ந்து இருக்கும் என்பதால் $x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta$ என்ற சமன்பாடுகள் நேர்க்கோட்டின் துணையலகு சமன்பாடு எனப்படும். r -ஐ மிகையாகக் கொண்ட புள்ளிகள் மற்றும் r -ஐ குறையாகக் கொண்ட புள்ளிகள் முறையே கோட்டின் மீது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிக்கு வெவ்வேறு பக்கங்களில் நேர்க்கோட்டின்மேல் அமையும்.

(vii) பொது வடிவம் (General form)

a, b மற்றும் c ஆகியவை பூஜ்ஜியமற்றவை எனில், ஒரு நேர்க்கோட்டின் பொது வடிவச் சமன்பாடு

$ax + by + c = 0$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்கள் அடிப்படையில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு வகைகள்

வ. எண்	கொடுக்கப்பட்ட தகவல்கள்	நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு
(i)	சாய்வு (m) மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு (b)	$y = mx + b$
(ii)	சாய்வு (m) மற்றும் புள்ளி $(x_1,\ y_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
(iii)	இரண்டு புள்ளிகள் $(x_1,\ y_1)$ மற்றும் (x_2, y_2)	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
(iv)	x -வெட்டுத்துண்டு (a) y -வெட்டுத்துண்டு (b)	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
(v)	செங்குத்து நீளம் (p) கோணம் (α)	$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$
(vi)	துணையலகு வடிவம் : துணையலகு (r)	$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$
(vii)	பொது வடிவம்	$ax + by + c = 0$

இரண்டு மாறக்கூடிய கணியங்கள் (quantities), ஒவ்வொன்றையும் மாறிகளாகக் (variable) குறிப்பிடலாம். ஒரு மாறியைப் பொறுத்து மற்றொரு மாறி மாறும் வீதமானது, ஒரு மாறிலி எனில் அத்தொடர்பு ஒரு நேரிய தொடர்பாகும்.

நேரிய (Linear) சமன்பாட்டில் ஒரு மாறி சார்பற்ற மாறியாகவும், மற்றொரு மாறிச் சார்பு மாறியாகவும் இருக்கும். பொதுவாக சார்பற்ற மாறி (Independent Variable) கிடை அச்சிலும் (x-அச்சு) மற்றும் சார்பு மாறிகளை செங்குத்து அச்சிலும் (y-அச்சு) குறிக்கப்படும். அதாவது x-ன் மதிப்பு எப்போதும் சார்பற்றதாகவும், y -ன் மதிப்பு x -ன் மதிப்பைச் சார்ந்ததாகவும் இருக்கும்.

இரு அச்சுகளின் அளவுத் திட்டங்கள் (Scale) ஒன்றாக இருக்கத் தேவையில்லை. பல நடைமுறை கணக்குகளில் வெவ்வேறு அளவுகள் x மற்றும் y என்ற மாறிகளால் குறிப்பிடப் படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக, x என்பது விற்பனை செய்யப்பட்ட கைப்பேசிகளின் எண்ணிக்கை (Mobile phones) மற்றும் y என்பது விற்பனையால் கிடைக்கும் மொத்த வருமானம் எனக் கொள்ளலாம். வெவ்வேறு கணியங்கள் வெவ்வேறு அளவு திட்டங்களில் குறிப்பிடப்படுகின்றன. எனினும் இருபரிமாண ஆய அச்சுகளின் அமைப்பில் இரு அளவு திட்டமும் பூச்சியமாகும்போது ஆதியில் சந்திக்கின்றன.

நேர்க்கோடுகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணும்போது கொடுக்கப்பட்ட தகவல்கள் அடிப்படையில் பொருத்தமான வடிவத்தை மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து சமன்பாடுகளை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.7 $(5, 7)$ மற்றும் $(7, 5)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லக்கூடிய நேர்க்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க. மேலும் x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்பன முறையே $(5, 7)$ மற்றும் $(7, 5)$ என்க.

θ என்பது x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் என்க.

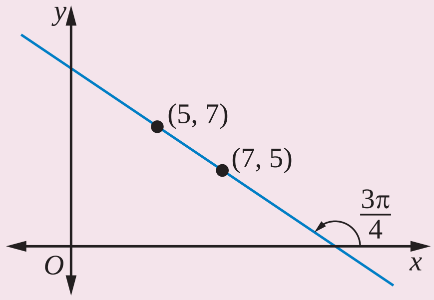
கோட்டின் சாய்வு $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-7}{7-5} = -1$

மேலும், $\quad m = \tan\theta$

$\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$ அல்லது 135°

சாய்வு மற்றும் சாய்வு கோணம் முறையே,

$m = -1$ மற்றும் $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$



படம் 6.25

எடுத்துக்காட்டு 6.8 ஒரு நேர்க்கோடு x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் 150° மற்றும் y -அச்சைக் குறை திசையில் 5 அலகு தொலைவில் வெட்டுகிறது எனில், நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

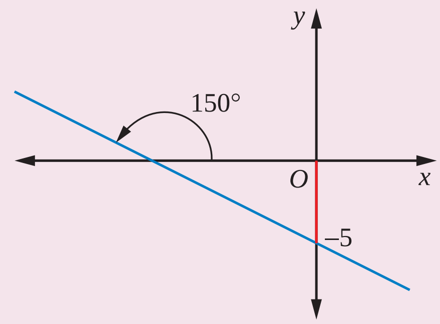
கொடுக்கப்பட்ட y -ன் குறை வெட்டுத்துண்டு $= 5$,

அதாவது $\quad b = -5$

கோணம் $\theta = 150^\circ$

சாய்வு $\quad m = tan\ 150^\circ = tan\ (180\text{-}30)$

$$= -tan\ 30 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



படம் 6.26

நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் வெட்டுத்துண்டு வடிவம்:

$$y = mx + b$$

அதாவது, $\quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - 5$

$$x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 6.9 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $(1, -1)$ மற்றும் $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என காட்டுக.

தீர்வு

A, B மற்றும் C என்ற புள்ளிகள் முறையே $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $(1, -1)$ மற்றும் $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ என்க.

கோட்டின் சாய்வு $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$AB \text{ -ன் சாய்வு } = \frac{-1 + \frac{3}{2}}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$BC \text{ -ன் சாய்வு } = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}$$

AB -ன் சாய்வும், BC -ன் சாய்வும் சமம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A, B, C ஒரு நேர்க் கோட்டில் அமைகிறது.

குறிப்பு: ஒரு மாறி மற்றொரு மாறியைப் பொறுத்து மாறும் வீதம் ஒரு மாறிலி எனில், அதனைச் சாய்வு எனக் கொள்ளலாம். (எடுத்துக்காட்டு, வேகம், சீராக அதிகரித்தல் அல்லது குறைதல்...) வரையறுக்கப்படும் ஆய அச்சுகளைப் பொறுத்து நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு அமைகிறது. உண்மை நிகழ்வுகளில் கோட்டின் சமன்பாடுகள் ஒன்றுபோல் இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை. ஆனால், அதன் பாதை மற்றும் தூரம் ஆகியவை ஒத்தவையாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.10 பாக் நீரிணைப்பின் மீது அமைக்கப்பட்டுள்ள தொடர்வண்டிக்கான பாம்பன் கடல் பாலம் சுமார் 2065 மீட்டர் நீளத்தில் கட்டப்பட்டுள்ளது. இப்பாலம் தீவு நகரமான இராமேஸ்வரத்தையும் இந்திய நிலப்பகுதியில் உள்ள மண்டபத்தையும் இணைக்கிறது. இப்பாலத்தின் மீது தொடர்வண்டி செல்வதற்குச் சில கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன. அதன் சீரான வேகம் 12.5 மீ/வி எனத் தீர்மானிக்கப்பட்டுள்ளது. மண்டபத்தில் உள்ள பாலத்தின் துவக்கப் பகுதியிலிருந்து, 560 மீட்டர் நீளம் கொண்ட தொடர்வண்டி நகரத் தொடங்குகிறது எனில்,

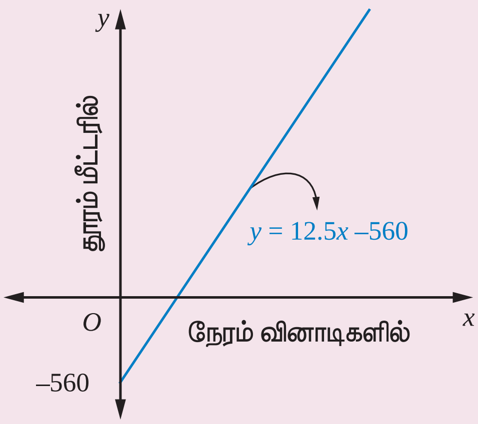
(i) தொடர்வண்டி செல்லும் இயக்கச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) எப்போது இராமேஸ்வரத் தீவில் தொடர்வண்டி இயந்திரமானது நுழையும்?

(iii) எப்போது தொடர்வண்டியின் கடைசி பெட்டி பாலத்தின் தொடக்கப் பகுதியைக் கடக்கும்?

(iv) பாம்பன் கடல் பாலத்தைத் தொடர்வண்டி கடந்து செல்வதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் என்ன?

தீர்வு



படம் 6.27

x -அச்சில் நேரத்தை வினாடியிலும்,

y -அச்சில் தொலைவை மீட்டரிலும் குறிக்கின்றது என்க.

தொடர்வண்டி இயந்திரம் ஆதிப்புள்ளி O-ல் உள்ளது என்க. எனவே தொடர் வண்டியின் நீளம் 560 மீ. y -அச்சின் குறை வெட்டுத்துண்டாகும்.

எனவே, $b = -560$

தொடர்வண்டியின் இயக்கத்தின் சீரான வேகம் 12.5 மீ$/$வி என்பதைச் சாய்வாகக் கருதலாம்.

$$m = 12.5 \qquad (\text{வேகம்} = \frac{\text{தொலைவு}}{\text{நேரம்}})$$

சாய்வு மற்றும் வெட்டுத்துண்டு கொடுக்கப்பட்டால் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = mx + b \qquad (6.13)$$

(i) $m = 12.5$ மற்றும் $b = -560$ என்பதால்

தொடர்வண்டியின் இயக்கச் சமன்பாடு

$$y = 12.5x - 560$$

(ii) பாலத்தின் எதிர்ப்புற முனையைத் தொடர்வண்டியின் இயந்திரம் தொடும் நேரம்

$y = 2065$ மற்றும் $b = 0$

$$2065 = 12.5x$$

$x = 165.2$ வினாடிகள்

(iii) தொடர்வண்டியின் கடைசி பெட்டியானது பாலத்தின் தொடக்க முனையை அடையும்போது

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 12.5x - 560$$

எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம், $x = 44.8$ வினாடிகள்

(iv) தொடர்வண்டி பாம்பன் பாலத்தைக் கடந்து செல்வதற்காக எடுத்துக்கொண்ட நேரம்

$$y = 2065 \Rightarrow 2065 = 12.5x - 560$$

$x = 210$ வினாடிகள்

குறிப்பு: தொடர்வண்டியின் முடிவுப் புள்ளி ஆதியில் இருப்பதாகவும் கொண்டு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. அது மேலே உள்ள சமன்பாடாக இருக்காது. ஆனால், தொடர்வண்டி செல்லும் பாதை, தூரம், நேரம் போன்றவை ஒன்றாக இருக்கும். (முயற்சி செய்க)

எடுத்துக்காட்டு 6.11 y -அச்சின் வெட்டுத்துண்டு 7 மற்றும் நேர்கோட்டிற்கும் y -அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் 30° எனில், நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

y -அச்சுடன் கோணம் 30° ஏற்படுத்தும் கோடுகள் இரண்டு உள்ளன.

படத்திலிருந்து அக்கோடுகள் x -அச்சுடன் 60° மற்றும் 120° ஆகிய கோணங்களை ஏற்படுத்துகின்றன எனத் தெளிவாகிறது.

$m_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ மற்றும்

$m_2 = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ)$

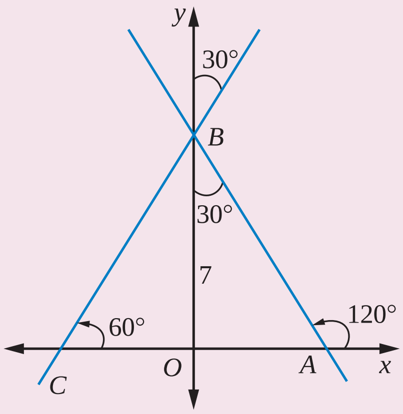
$= -\tan\ 60^\circ = -\sqrt{3}$

$m_1 = \sqrt{3}\ ,\quad m_2 = -\sqrt{3}$ மற்றும் $b = 7$

தேவையான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$y = m_1 x + b$ மற்றும் $y = m_2 x + b$

$y = \sqrt{3}\,x + 7$ மற்றும் $y = -\sqrt{3}\,x + 7$



படம் 6.28

குறிப்பு: இரண்டு புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால், இருபுள்ளி வடிவம் அல்லது புள்ளி–சாய்வு வடிவ சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். இரண்டு வெட்டுத்துண்டுகள் கொடுக்கப்பட்டால் வெட்டுத்துண்டு வடிவத்தையோ அல்லது இருபுள்ளி வடிவத்தையோ பயன்படுத்தி நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை அமைக்கலாம்.

கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டு இயல் 5-ல்,தொடர்முறையும் தொடரும் கருத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்வு காணப்பட்டுள்ளது. இருப்பினும் இதே எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கை நேர்க்கோடுகளின் கருத்தைப் பயன்படுத்தி இங்கு தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.12 ஒரு கூட்டுத்தொடர் முறையில் $(A.P.)$ 7 ஆவது உறுப்பு 30 மற்றும் 10 ஆவது உறுப்பு 21 எனில்,

(i) $A.P.$-ல் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

(ii) எப்போது கூட்டுத்தொடரின் உறுப்பு பூச்சியமாகும்.

(iii) நேர்கோட்டின் சாய்வுக்கும் கூட்டுத்தொடரின் பொது வித்தியாசத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு ஆகியவற்றைக் கண்க.

தீர்வு

ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையானது ஒரு நேரிய சார்பு ஆகும். x என்பது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் y என்பது அந்த உறுப்பின் மதிப்பு என்க.

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) முறையே $(7, 30)$ மற்றும் $(10, 21)$ என்க.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$y - 30 = \left(\frac{21 - 30}{10 - 7}\right)(x - 7)$$

$$y = -3x + 51 \qquad (6.14)$$

(i) $x = 1, 2$ மற்றும் 3 எனச் சமன்பாடு (6.14) -ல் பிரதியிட A.P. -ன் முதல் மூன்று உறுப்புகள் முறையே $48, 45$ மற்றும் 42 ஆகும்.

(ii) $y = 0$ எனச் சமன்பாடு (6.14) -ல் பிரதியிட

$$0 = -3x + 51 \quad \Rightarrow \quad x = 17$$

அதாவது, கூட்டுத்தொடர் முறையில் பதினேழாவது உறுப்பு பூச்சியமாகும்.

(iii) இந்நேர்கோட்டின் சாய்வு -3, கூட்டுத் தொடரின் பொது வித்தியாசத்திற்குச் சமம் என்பது தெளிவாகியது.(கூட்டுத்தொடரின் பொது வித்தியாசமும், அதன் கோட்டின் சாய்வும் ஒன்றே என நிரூபிக்க முயற்சிக்கவும்).

எடுத்துக்காட்டு 6.13 ஒரு குறிப்பிட்ட வகை குறுந்தகடு ஒன்றின் விலை ₹8 ஆக இருக்கும் போது $22,000$ குறுந்தகடுகளை வாடிக்கையாளர்கள் வாங்குவார்கள். ஒரு குறுந்தகட்டின் விலை ₹30 அல்லது அதற்கு மேல் விலை கொடுத்து வாங்க மாட்டார்கள். அதே சமயத்தில் ஒரு குறுந்தகட்டின் விலை ₹6 அல்லது அதற்கு குறைவாக இருக்கும் போது உற்பத்தியாளர் விற்பனை செய்ய மாட்டார். இருப்பினும், குறுந்தகடு ஒன்றின் விலை ₹14 ஆக இருக்கும் போது உற்பத்தியாளரால் $24,000$ குறுந்தகடுகளை வழங்க இயலும். தேவை மற்றும் வழங்கல் அளவுகள், விலைக்கு நேர்விகித சமமாக எடுத்துக்கொண்டால் பின்வருவனவற்றை எவ்வாறு காணலாம்.

(i) தேவைச் சமன்பாடு (Demand Equation)

(ii) வழங்கல் சமன்பாடு (Supply Equation)

(iii) சந்தையின் சமநிலையில் குறுந்தகடுகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் விலை

(iv) ஒரு குறுந்தகட்டின் விலை ₹10 எனில் தேவை மற்றும் வழங்கல் அளவு.

தீர்வு

x -அச்சானது ஓர் அலகு ஆயிரம் அலகுகள் கொண்ட குறுந்தகடுகளின் எண்ணிக்கையையும், y -அச்சு ஓர் அலகு ஒரு ரூபாயையும் குறிக்கிறது என்க.

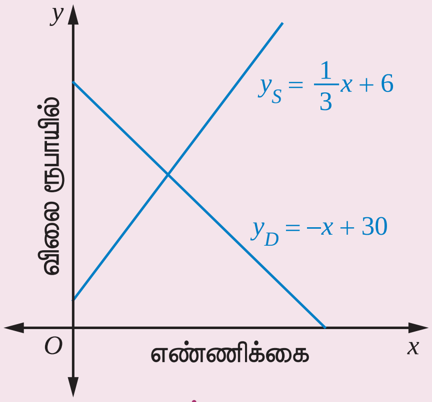
(i) தேவைச் சமன்பாடு (*Demand equation*)

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகள் முறையே $(22, 8)$ மற்றும் $(0, 30)$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

இரு புள்ளி வடிவ நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{y-8}{30-8} = \frac{x-22}{0-22}$$

$$\Rightarrow \quad y_D = -x + 30$$



படம் 6.29

(ii) வழங்கல் சமன்பாடு (*Supply function*)

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகள் முறையே $(0, 6)$ மற்றும் $(24,14)$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

இரு புள்ளி வடிவ நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{y-6}{14-6} = \frac{x-0}{24-0}$$

$$\Rightarrow \quad y_S = \frac{1}{3}x + 6$$

(iii) சந்தை சமநிலையில் தேவை மற்றும் வழங்கல் சமநிலையை அடையும்.

அதாவது, $y_D = y_S$

$$-x+30 = \frac{1}{3}x+6$$

$$\Rightarrow \quad x = 18 \text{ மற்றும் } y = 12$$

சந்தை சமநிலையில் ஒரு குறுந்தகட்டின் விலை ₹12 மற்றும் குறுந்தகடுகளின் எண்ணிக்கை $18,000$ ஆக இருக்கும்.

(iv) ஒரு குறுந்தகட்டின் விலை ₹10 இருக்கும்போது

தேவை சமன்பாட்டில்,

$$y = 10 \Rightarrow y_D = -x+30$$

$$\Rightarrow \quad x = 20$$

அதாவது, தேவையான குறுந்தகடுகளின் எண்ணிக்கை $20,000$ ஆகும்.

இதைப்போல், வழங்கல் சமன்பாட்டில்,

$$y = 10 \Rightarrow y_S = \frac{1}{3}x+6,$$

$$\Rightarrow \quad x = 12$$

இங்கு, வழங்கப்படும் குறுந்தகடுகளின் எண்ணிக்கை $12,000$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.14 ஒரு நேர்க்கோட்டின் ஆய அச்சுகள் சமமாகவும், எதிர்மறை குறிகளையும் கொண்ட வெட்டுத் துண்டுகளை உடைய மற்றும் $(-1, 1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லக்கூடிய கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

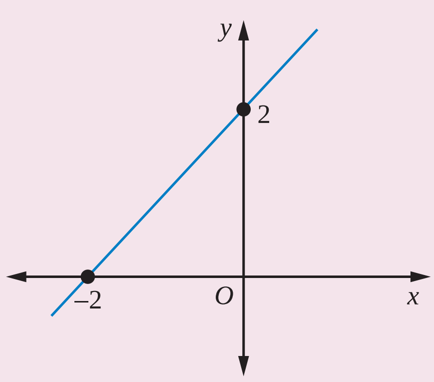
x -அச்சின் வெட்டுத்துண்டு $= a$ மற்றும்

y -அச்சின் வெட்டுத்துண்டு $= -a$ என்க.

எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x - y = a$$



படம் 6.30

மேற்கண்ட சமன்பாடானது $(-1, 1)$ வழியே செல்வதால்,

$$(-1) - (1) = a \Rightarrow a = -2$$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$x - y + 2 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 6.15 $(9, 4)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் குறை சாய்வைக் கொண்ட L என்ற ஒரு நேர்க்கோடு P மற்றும் Q என்ற புள்ளியில் மிகை ஆய அச்சுகளை வெட்டுகிறது. L ஆனது மாறக்கூடியதாயின் $|OP|+|OQ|$ -ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க. இங்கு O என்பது ஆதிப்புள்ளி ஆகும்.

தீர்வு

L என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு m என்க. மேலும் இக்கோடானது $(9,\ 4)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது எனில் L -ன் சமன்பாடு

$$y - 4 = m(x-9). \quad (m<0)$$

P மற்றும் Q என்ற புள்ளிகள் முறையே $\left(9-\frac{4}{m},0\right)$ மற்றும் $(0,\ 4-9m)$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} |OP|+|OQ| &= \left|9-\frac{4}{m}\right|+|4-9m| \\ &= \left|9+\frac{4}{k}\right|+|4+9k| \quad (\because m<0 \text{ எனில் } m=-k, k>0 \text{ என்க}) \\ &= \left(9+\frac{4}{k}\right)+(4+9k) \quad (\because \text{எல்லா உறுப்புகளும் மிகை ஆகும்}) \\ &= (4+9)+\left(\frac{4}{k}+9k\right) \\ &\geq 13+2\sqrt{\frac{4}{k}\times 9k} \qquad (\text{A.M.} \geq \text{G.M.}) \\ |OP|+|OQ| &\geq 25 \end{aligned}$$

எனவே, $|OP|+|OQ|$ -ன் மீச்சிறு மதிப்பு 25 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.16 ஒரு நேர்க்கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் 12 மற்றும் x -அச்சுடன் மிகை திசையில் ஏற்படுத்தும் கோணம் 150° எனில், கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு $p=12$ மற்றும் கோணம் $\alpha=150^\circ$

எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

அதாவது, $$x\cos 150^\circ + y\sin 150^\circ = 12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x - y + 24 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 6.17 ஒரு கோடு ஆய அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 36 சதுர அடி மற்றும் ஆதியிலிருந்து அக்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து கோடு மிகை x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் 45° எனில், நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

P என்பது ஆதியிலிருந்து கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து தொலைவு என்க.

x -அச்சுடன் செங்குத்துக் கோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் $=45^\circ$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

$$\Rightarrow \quad x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ = p$$

$$x+y = \sqrt{2}p$$

இந்தச் சமன்பாடு ஆய அச்சுகளுடன் வெட்டும் புள்ளிகள் $A(\sqrt{2}p, 0)$ மற்றும் $B(0, \sqrt{2}p)$

ΔOAB -ன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times \sqrt{2}p \times \sqrt{2}p = 36$

$\Rightarrow \quad p = 6$ (இங்கு p ஒரு மிகை எண்)

அதாவது, தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + y = 6\sqrt{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.18 ஒரு நேர்க்கோடானது மிகை x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் 60° மற்றும் $(4,7)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $5\sqrt{2}$ அலகுகள் தொலைவைக் கொண்ட $x - y + 3 = 0$ என்ற கோட்டின் வழியே செல்லும் நேர்க்கோட்டுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

$x - y + 3 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் 45° மற்றும் புள்ளி $(4,7)$ கோட்டின் மீது உள்ளது.

துணையலகு வடிவத்திலிருந்து,

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை இவ்வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$$\frac{x - 4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y - 7}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm 5\sqrt{2}$$

(கோட்டின்மீது $(4,7)$ - க்கு வெவ்வேறு பக்கங்களிலிருந்து தூரம் $r = \pm 5\sqrt{2}$)

அதாவது, $\quad x - 4 = y - 7 = \pm 5$

இதன் மூலம், கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள $(4,7)$ என்ற புள்ளிக்கு ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திலிருந்து $5\sqrt{2}$ அலகுகள் தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகள் $(4+5, 7+5)$ மற்றும் $(4-5, 7-5)$.

தேவையான புள்ளிகள் $(9, 12)$, $(-1, 2)$ மற்றும் சாய்வு

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

மேற்கண்ட மதிப்புகளை பயன்படுத்தி சாய்வு-புள்ளி வடிவத்தில் எழுத,

$\sqrt{3}x - y + (12 - 9\sqrt{3}) = 0$ மற்றும்

$\sqrt{3}x - y + (2 + \sqrt{3}) = 0$

6.3.4 ஒரு நேர்க்கோட்டின் பொது வடிவத்தை மற்ற வடிவங்களுக்கு மாற்றுதல் (General form to other forms)

ஒரு நேர்க்கோட்டின் பொது வடிவம் $Ax + By + C = 0$

இங்கு A, B மற்றும் C என்பன மெய் எண்கள் மேலும் இரண்டும் ஒரே நேரத்தில் பூச்சியம் ஆகாது. மேற்கண்ட பொது வடிவத்தை மற்ற வடிவங்களில் மாற்றலாம்.

(i) சாய்வு மற்றும் வெட்டுத்துண்டு வடிவம் $(B \neq 0)$ (Slope–intercept form)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்.

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Rightarrow$ சாய்வு $m = \frac{-A}{B}$ மற்றும் y-ன் வெட்டுத்துண்டு $= -\frac{C}{B}$

(ii) வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (Intercept form)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)}=1$$

$(A, B$ மற்றும் C இவை அனைத்தும் பூஜ்ஜியமற்ற மெய்யெண்கள்$)$

வெட்டுத்துண்டு வடிவத்துடன் ஒப்பிடும் போது,

x -ன் வெட்டுத்துண்டு $(a) = \frac{-C}{A}$, y -ன் வெட்டுத்துண்டு $(b) = \frac{-C}{B}$

(iii) செங்குத்து வடிவம் (Normal form)

$Ax + By + C = 0$ இங்கு A , B என்பன பூஜ்ஜியமற்ற மதிப்புகள்.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும்போது

$$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}y=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ இவ்வாறு பெறலாம்.

இங்கு $\cos\alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ மற்றும் $p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

எடுத்துக்காட்டு 6.19 $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ என்ற கோட்டை கீழ்க்காணும் சமான வடிவத்திற்கு மாற்றுக.

(i) சாய்வு மற்றும் வெட்டுத்துண்டு வடிவம்

(ii) வெட்டுத்துண்டு வடிவம்

(iii) செங்குத்து வடிவம்

தீர்வு

(i) சாய்வு மற்றும் வெட்டுத்துண்டு வடிவம்

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x + 4 \qquad (6.15)\text{ -ஐ}$$

$y = mx + b$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும்போது

சாய்வு $=\sqrt{3}$ மற்றும் y -ன் வெட்டுத்துண்டு $= 4$

(ii) வெட்டுத்துண்டு வடிவம்

$$\sqrt{3}x - y + 4 = 0$$

$$\sqrt{3}x - y = -4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\sqrt{3}}{4}x + \frac{y}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)} + \frac{y}{4} = 1 \qquad (6.16)\text{ -ஐ}$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும் போது

x -ன் வெட்டுத்துண்டு $=-\frac{4}{\sqrt{3}}$, மற்றும் y -ன் வெட்டுத்துண்டு $= 4$

(iii) செங்குத்து வடிவம்

$$\sqrt{3}x - y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-\sqrt{3})x + y = 4 \qquad (6.17) \text{ -ஐ}$$

$Ax + By + C = 0$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும் போது

$$A = -\sqrt{3} \text{ மற்றும் } B = 1 \quad \therefore \sqrt{A^2 + B^2} = 2$$

சமன்பாடு (6.17) -ஐ இருபுறமும் 2 ஆல் வகுக்க

$$\Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 2 \qquad (6.18) \text{ -ஐ}$$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ இச்சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும் போது

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \ \sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ மற்றும் } p = 2 \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ மற்றும் } p = 2$$

செங்குத்து வடிவத்தின் சமன்பாடு

$$x\cos\frac{5\pi}{6} + y\sin\frac{5\pi}{6} = 2 \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் தேவையான வடிவத்திற்கு மாற்ற ஒத்த கெழுக்களின் சமவிகித விதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.20 $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$ என்ற கோட்டைச் செங்குத்து வடிவத்திற்கு மாற்றுக.

தீர்வு

தேவையான வடிவம் $\quad x\cos\alpha + y\,sin\,\alpha = p$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு, $\quad (-\sqrt{3})x - y = 4 \quad (\because p$ என்பது எப்போதும் மிகை எண்$)$

இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கின்றன. எனவே ஒத்த குணகங்கள் சமவிகிதத்தில் இருக்கும்.

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{3}} = \frac{\sin\alpha}{-1} = \frac{p}{4}$$

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{3}} = \frac{\sin\alpha}{-1} = \frac{p}{4} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \frac{-1}{2} \text{ மற்றும் } p = \frac{4}{2}$$

$$\alpha = 210^\circ = \frac{7\pi}{6} \text{ மற்றும் } p = 2$$

செங்குத்து வடிவத்தின் சமன்பாடு

$$x\cos\frac{7\pi}{6} + y\sin\frac{7\pi}{6} = 2 \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு: ஒரு வளைந்த தளத்தின் மீது இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே மிகச்சிறு பாதையைக் காணுதல் கடினமானது. இருப்பினும், உருளையின் வளைந்த தளத்தின் மேற்பரப்பில் உள்ள பாதையின் வளைதளத்தை சமதளமாக உருமாற்றும்போது நீளம் மாறாது.

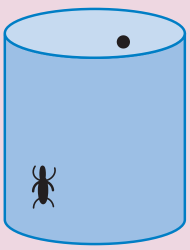
உள்ளீடற்ற உருளையின் வளைந்த தளத்தின் மேற்பரப்பை வெட்டிச் செவ்வக வடிவில் தட்டையாக்குவதன் மூலம் கீழே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கில் எறும்பு செல்லும் பாதையை எளிதாகத் தீர்மானிக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.21 10 செமீ உயரம் மற்றும் 24 செமீ வட்டச் சுற்றளவு கொண்ட உள்ளீடற்ற உருளை வடிவ கலனின் அடிப்பாகத்திலிருந்து வெளிப்புறமாக 4 செமீ உயரத்தில் ஒரு எறும்பு உள்ளது. அதற்கு நேர் எதிர்ப்புறம் மேல் பகுதியிலிருந்து 3செமீ கீழே கலனின் உட்புறமாகத் தேன் துளி ஒன்று உள்ளது எனில்,

(i) எறும்பு தேன் துளியை அடைய நகர்ந்து செல்லும் மிகக் குறைந்த தொலைவு எவ்வளவு?

(ii) எறும்பு செல்லும் பாதையின் சமன்பாடு என்ன?

(iii) எறும்பு உருளைக்குள் எந்த இடத்தில் நுழைகிறது?

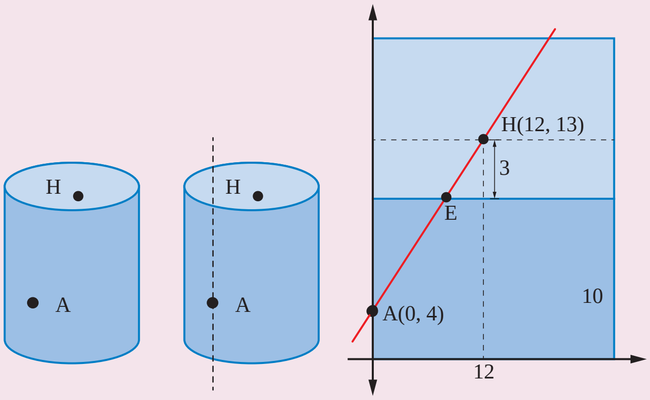


படம் 6.31

தீர்வு

உள்ளீடற்ற உருளையை வெட்டிச் செவ்வக வடிவில் தட்டையாக்கப்பட்டு மேலும் ஒரு பிரதிபலிப்பு செய்யும்போது எறும்பு செல்லும் பாதையை எளிதாக காண முடியும். படத்தில் கண்டவாறு, உருளையின் அடிப்பக்கத்தை x -அச்சாகவும், எறும்பு உள்ள தொடக்கப்புள்ளி A வழியே செல்லும் குத்துக்கோட்டை y -அச்சாகவும் கொள்க. இங்கு H என்பது தேன்துளி இருக்கும் இடம் ஆகும். E என்பது எறும்பு உருளையின் உள்ளே நுழையும் தொடக்க இடம். கொடுக்கப்பட்ட கணக்கின்படி,

$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $H(x_2, y_2)$ முறையே $(0, 4)$ மற்றும் $(12, 13)$ என்க.



படம் 6.32

(i) A -க்கும், H -க்கும் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தொலைவு

$$AH = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

எறும்பானது தேன் துளியைச் சென்றடைய எடுத்துக் கொள்ளும் மீச்சிறு தூரம் 15 செமீ ஆகும்.

(ii) AH பாதையின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-4}{13-4} = \frac{x-0}{12-0}$$

$$\Rightarrow \qquad y = 0.75x + 4 \qquad (6.19)$$

(iii) நுழைவுப் புள்ளி E -ல் $y = 10 \Rightarrow x = 8$

$$\Rightarrow \qquad \text{E} = (8, 10) \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு: ஆதிப்புள்ளியை வெவ்வேறு இடங்களில் அமைப்பதால் வெவ்வேறு சமன்பாடுகளை உருவாக்க முடியும். ஆனால், பாதை மற்றும் தொலைவு ஒன்றாக இருக்கும்.

பயிற்சி 6.2

1. கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு, $(1, 1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லக்கூடிய நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) y -ன் வெட்டுத்துண்டு (-4)

   (ii) சாய்வு 3

   (iii) $(-2, 3)$ என்ற புள்ளி

   (iv) ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து கோடு x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் 60°.

2. ஆய அச்சுகளுக்கு இடையே ஒரு கோட்டுத் துண்டின் மையப் புள்ளி $p(r, c)$ எனில் அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{r}+\frac{y}{c}=2$ எனக் காட்டுக.

3. $(1, 5)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும், ஆய அச்சுகளை $3{:}10$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கக்கூடிய கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. ஆதியிலிருந்து கோட்டிற்கு இடையே உள்ள செங்குத்து தொலைவு p ஆகும். a மற்றும் b என்பன ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத்துண்டின் நீளங்கள் எனில்,

   $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ என நிறுவுக.

5. நீரின் இயல்பான கொதிநிலை $100^\circ C$ அல்லது $212^\circ F$ மற்றும் அதன் உறைநிலை $0^\circ C$ அல்லது $32^\circ F$ ஆகும்.

   (i) வெப்பநிலை C -கும் F-கும் இடையேஉள்ள நேரிய தொடர்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும்,

   (ii) வெப்பநிலை $98.6^\circ F$ எனில் C-இன் மதிப்பு என்ன?

   (iii) வெப்பநிலை $38^\circ C$ எனில் F-இன் மதிப்பு என்ன?

6. ஒரு பொருள் P என்ற இடத்திலிருந்து ஒரு இலக்கைத் தாக்கச் சீரான வேகத்தில் ஏவப்படுகிறது. அது இலக்கைத் தாக்குவதற்கு 15 வினாடிக்கு முன் 1400 மீட்டர் தூரத்திலும் மற்றும் 18 ஆவது வினாடியில் 800 மீட்டர் தூரத்திலும் இருக்கிறது எனில்,

   (i) இலக்கிற்கும் அந்த இடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு என்ன?

   (ii) 15ஆவது வினாடியில் எவ்வளவு தொலைவு கடந்திருக்கும்?

   (iii) இலக்கைத் தாக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் எவ்வளவு?

7. ஒரு நகரத்தில் மக்கள் தொகை 2005 மற்றும் 2010 ஆம் ஆண்டுகளில் முறையே $1{,}35{,}000$ மற்றும் $1{,}45{,}000$ எனில், 2015 ஆம் ஆண்டு மக்கள் தொகையை தோராயமாகக் காண்க. (மக்கள் தொகையின் வளர்ச்சி ஒரு மாறிலி)

8. ஒரு நேர்க்கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் 12 அலகுகள், அச்செங்குத்துக்கோடு x -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் 30° எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. $(8, 3)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லக்கூடியதும் ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 1 எனில், நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $(1,3),\ (2,1)$ மற்றும் $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகள் என
   (i) சாய்வு முறையில் (ii) நேர்க்கோட்டு முறை மற்றும்
   (iii) வேறு ஏதேனும் முறையில் காண்பி.

11. $A(1,\ 2)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் $\frac{5}{12}$ சாய்வைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் மீது, A என்ற புள்ளியிலிருந்து 13 அலகுகள் தூரத்தில் நேர்க்கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகளைக் காண்க.

12. 150 மீட்டர் நீளமுள்ள தொடர் வண்டி வினாடிக்கு 12.5மீ நிலையான திசைவேகத்தில் செல்கிறது.
   (i) தொடர் வண்டி இயக்கத்தின் சமன்பாடு என்ன?
   (ii) ஒரு கம்பத்தைக் கடந்து செல்ல எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் என்ன?
   (iii) 850 மீட்டர் நீளம் கொண்ட பாலத்தைக் கடந்து செல்ல எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் என்ன?

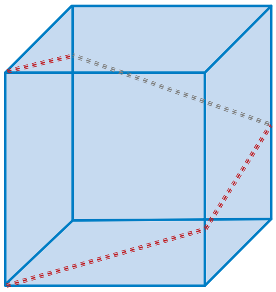
13. ஒரு அறிவியல் சோதனைக்காக, ஒரு சுருள் வளை கம்பி $(Spring)$, ஒரு கொக்கியில் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சுருள் வளை கம்பியில் வெவ்வேறு எடைகள் இணைக்க சுருள் வளை கம்பியின் நீளம் அட்டவணையில் உள்ளவாறு நீளுகிறது எனில்,

எடை (கிகி)	2	4	5	8
நீளம் (செமீ)	3	4	4.5	6

   (i) விளைவுகளை காட்டும் வரைபடம் வரைக.
   (ii) சுருள் வளை கம்பியின் நீளம் மற்றும் எடைக்கு உள்ள தொடர்புடைய சமன்பாட்டைக் காண்க.
   (iii) சுருள் வளை கம்பியின் உண்மையான நீளத்தைக் காண்க.
   (iv) சுருள் வளை கம்பி 9 செமீ நீளம் அடைய வேண்டும் எனில் எவ்வளவு எடை இணைக்க வேண்டும்?
   (v) 6 கி.கி. எடையை இணைக்க சுருள்வளைக் கம்பியின் நீளம் என்ன?

14. ஒரு குடும்பம் 14.2 கிகி எடை கொண்ட சமையல் எரிவாயுவினை (LPG) (உருளையின் எடையுடன் 29.5 கிகி) சீரான முறையில் பயன்படுத்தும்போது 24 –வது நாளில் சமையல் எரிவாயு தீர்ந்துவிடுகிறது. உடனடியாக புதிய எரிவாயு உருளை இணைக்கப்படுகிறது. (i) உருளையிலுள்ள சமையல் எரிவாயுவின் அளவிற்கும் மற்றும் பயன்படுத்தப்பட்ட நாட்களுக்கும் உள்ள தொடர்புடைய சமன்பாட்டைக் காண்க. (ii) சமையல் எரிவாயுவினை முதல் 96 நாட்கள் பயன்படுத்துவதற்கான வரைபடம் வரைக.

15. $800\times800\times720$ அலகுகள் பரிமாணம் கொண்ட கனசெவ்வக வடிவம் கொண்ட ஒரு பேரங்காடியில், படத்தில் கண்டவாறு புள்ளியிட்ட பாதையில் நகரும் படிக்கட்டு $(escalator)$ அமைக்க உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,
   (i) நகரும் படிக்கட்டின் மொத்த மீச்சிறு நீளத்தினைக் காண்க.
   (ii) எந்தெந்த உயரத்தில் நகரும் படிக்கட்டானது திரும்புகின்றது எனக் காண்க.
   (iii) நகரும் படிக்கட்டுகள் திரும்பும் இடங்களில் அதன் சாய்வுகளைக் காண்க.



படம் 6.33

6.4 இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between two straight lines)

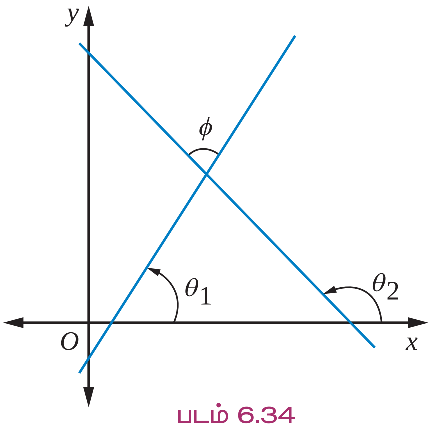
ஒரு தளத்தில் இரண்டு கோடுகள் இணையாகவோ அல்லது ஒன்றியோ அல்லது ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும்படியோ அமையலாம். இவ்விரு கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியில் இரு கோணங்கள் உருவாகுகிறது. அதில் ஒன்று குறுங்கோணம் $(acute\ angle)$ மற்றொன்று விரிகோணம் $(obtuse\ angle)$ அல்லது இரண்டும் சமகோணங்களாக இருக்கலாம்.

இவ்விரு கோணங்களும் மிகை நிரப்புக் கோணங்களாக (கோணங்களின் கூடுதல் 180°) இருக்கும். மேலும், வரையறையின்படி இரண்டு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்பது குறுங்கோணத்தை மட்டுமே குறிக்கும்.

$y = m_1 x + c_1$ மற்றும் $y = m_2 x + c_2$ என்பன இரு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் என்க.

θ_1 மற்றும் θ_2 என்பன x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் எனில், $m_1 = \tan\theta_1$ மற்றும் $m_2 = \tan\theta_2$.

ϕ என்பது இரு நேர் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்,



படம் 6.34

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow \quad \tan\phi = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

குறிப்பு: (i) $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$ -ன் மதிப்பு மிகை $(positive)$ எனில், ϕ என்பது ஒரு குறுங்கோணம் ஆகும்.

(ii) $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$ -ன் மதிப்பு குறை $(negative)$ எனில், ϕ என்பது ஒரு விரிகோணம் ஆகும்.

ஆகவே, குறுங்கோணம் $\phi = \tan^{-1}\left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$

6.4.1 இணை கோடுகளுக்கான நிபந்தனை (Condition for parallel lines)

ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமல், ஒரே தளத்தில் அமையும் இரு நேர்கோடுகள் இணைகோடுகளாகும்.

$$y = m_1 x + c_1 \text{ மற்றும் } y = m_2 x + c_2$$

என்ற கோடுகள் இணை எனில், இக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் பூஜ்ஜியம் அல்லது π.

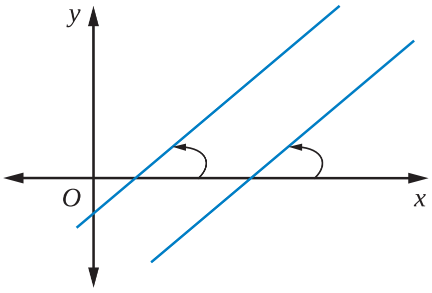
இரண்டு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\phi = 0$ எனில்

$$\Rightarrow \quad \tan\phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = m_1$$

இணை கோடுகளின் சாய்வுகள் சமம் ஆகும்.



படம் 6.35

செங்குத்து அல்லாத $(non\text{-}vertical)$ கோடுகளின் சாய்வுகள் சமம் எனில் அக்கோடுகள் இணையாகும். எல்லா செங்குத்து கோடுகளும் இணைகோடுகள் ஆகும்.

$a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்ற கோடுகளின் பொது வடிவம் எனில், இவ்விரு கோடுகள் இணையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை

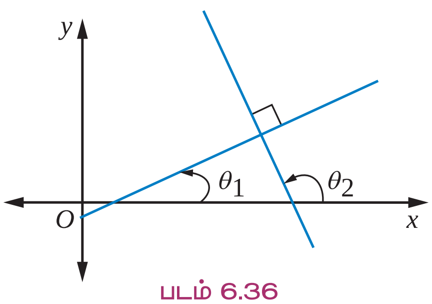
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \text{ அல்லது } a_1b_2=a_2b_1$$

குறிப்பு: (i) $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள கோடுகளின் வடிவம் $ax+by=k$

(ii) (x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழியாக, $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $ax+by=ax_1+by_1$ ஆகும்.

6.4.2 செங்குத்துக் கோடுகளுக்கான நிபந்தனை (Condition for perpendicular lines)

$y=m_1x+c_1$ மற்றும் $y=m_2x+c_2$ என்ற கோடுகள் செங்குத்து எனில், இவ்விரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 90° அல்லது $\frac{\pi}{2}$.



படம் 6.36

ϕ என்பது இரண்டு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்,

$$\tan\phi = \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

$$\Rightarrow \cot\phi = \frac{1+m_2m_1}{m_2-m_1}$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{1+m_2m_1}{m_2-m_1} \Rightarrow 1+m_1m_2=0$$

$$\Rightarrow \quad m_1m_2 = -1$$

மேலும், $a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ கோடுகளின் பொது வடிவம் எனில், இவ்விரு கோடுகள் செங்குத்தாக அமைவதற்கான நிபந்தனை

$$a_1a_2+b_1b_2=0$$

குறிப்பு: (i) $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோட்டின் வடிவம் $bx-ay=k$

(ii) (x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழியாகவும் $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் உடைய நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு, $bx-ay=bx_1-ay_1$ ஆகும்.

கோட்டின் வடிவம்	இணையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை	செங்குத்தாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை
$y=m_1x+c_1$ மற்றும் $y=m_2x+c_2$	$m_2=m_1$	$m_1m_2=-1$
$a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ (அ) $a_1b_2=a_2b_1$	$a_1a_2+b_1b_2=0$

முக்கியக் குறிப்பு

$m_1 m_2 = -1$ எனில், இரு கோடுகள் செங்குத்தாகும். ஆனால் இதன் மறுதலை மெய்யாகாது. ஏனெனில், ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை, எனினும் $m_1 m_2 = -1$ -ஐ பயன்படுத்த இயலாது.

6.4.3 ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொறுத்து ஒரு புள்ளியின் நிலை (Position of a point with respect to a straight line)

$ax + by + c = 0$ $(c \neq 0)$ என்ற எந்த ஒரு கோடும் ஒரு தளத்தை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.

(i) ஒரு பகுதி ஆதியை உள்ளடக்கியதாக இருப்பின் அதனை ஒரு கோட்டின் ஆதிப்பக்கம் என்றும்

(ii) மற்றவை ஆதியை உள்ளடக்கியது அல்ல எனில் அப்பகுதியை ஆதி அல்லாத பக்கம் என்றும் அழைக்கலாம்.

ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ ஆனது $ax + by + c = 0,\ (c \neq 0)$, என்ற கோட்டிற்கு ஆதிப்பக்கமாகவோ அல்லது ஆதி அல்லாத பக்கத்திலோ இருந்தால் $ax_1 + by_1 + c$ மற்றும் c முறையே ஒரே குறி அல்லது எதிர்க்குறிக்கு இணங்க அமையும்.

$c > 0$ எனில், $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு ஆதிப்பக்கத்தின் மீது அல்லது ஆதி அல்லாத பக்கத்தில் அமையும் எனில், $ax_1 + by_1 + c$ என்பன முறையே ஒரு மிகை அல்லது குறை ஆக அமையும்.

குறிப்பு: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளில் $c_1 > 0$ மற்றும் $c_2 > 0$ என மாற்றி அமைத்தபின்,

(i) $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ எனில், இக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் குறுங்கோணம் ஆகும்.

(ii) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ எனில் இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ஒரு விரிகோணம் ஆகும்.

6.4.4 தொலைவு வாய்ப்பாடுகள் (Distance Formulae)

கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள

(i) இரண்டு புள்ளிகளுக்கு

(ii) ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு நேர்க்கோட்டிற்கு

(iii) இரு இணை கோடுகளுக்கு

இடைப்பட்ட தொலைவுகளைக் காணச் சூத்திரத்தை (வாய்ப்பாடுகளை) உருவாக்கலாம்.

(i) (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) இவ்விரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

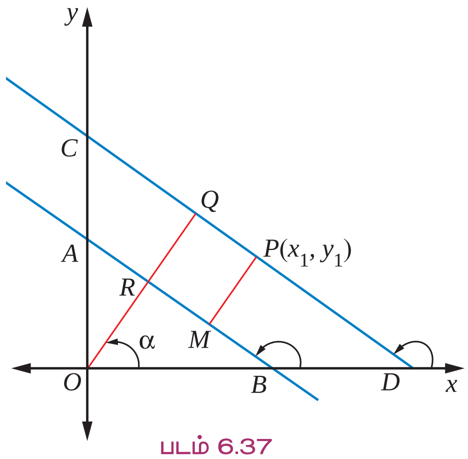
$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (முந்தைய வகுப்புகளில் நிரூபிக்கப்பட்டது)

(ii) $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இடையேயான தொலைவு $\left| \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$.

நிரூபணம்

AB என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோடு $ax + by + c = 0$ என்க. (6.20)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $P(x_1,y_1)$ வழியாக AB என்ற கோட்டிற்கு இணையாக CD என்ற கோட்டை வரைக. புள்ளி $P(x_1,y_1)$ -லிருந்து AB-க்கு செங்குத்துக் கோடு வரைக. அக்கோடு AB -ஐ M -ல் சந்திக்கிறது. மேலும் ஆதியிலிருந்து AB-க்குச் செங்குத்துக் கோடு வரைக. அது AB -ஐ R-லும் , CD -ஐ Q -லும் சந்திக்கிறது.



படம் 6.37

$\angle BOR = \alpha$ என்க.

இதன் செங்குத்து வடிவம்

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p, \ (p = OR) \qquad (6.21)$$

சமன்பாடுகள் (6.20) மற்றும் (6.21), ஒரே நேர்கோட்டை குறிக்கின்றன. எனவே, ஒத்த குணகங்கள் சமவிகிதத்தில் இருக்கும்.

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{p}{-c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{p}{-c} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{மற்றும்} \quad p = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

கோடு CD -ன் செங்குத்து வடிவம்.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p', \quad (p' = OQ)$$

புள்ளி $P(x_1,y_1)$ வழியே செல்வதால்

$$\Rightarrow \qquad p' = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha \qquad (6.22)$$

P என்ற புள்ளி, நேர்க்கோடு AB –க்கு ஆதியை உள்ளடக்கிய பகுதியிலோ அல்லது ஆதியை உள்ளடக்காத பகுதியிலோ அமையலாம். ஆதலால்,

$$\text{தேவையான தொலைவு} = |PM| = |QR| = |OQ - OR|$$
$$= |p' - p|$$
$$= |(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha) - p|$$
$$= \left|\pm\frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{by_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$\text{தேவையான தொலைவு} = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_1x + b_1y + c_2 = 0$ என்ற இரு இணை கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு,

$$D = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

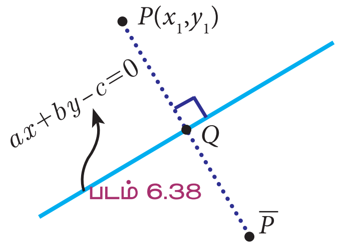
(புள்ளி (x_1,y_1) பதிலாக ஆதியைப் பயன்படுத்தி முன்பு நிரூபணம் செய்யப்பட்ட முடிவைப் போல் இந்தச் சூத்திரத்தையும் நிரூபிக்க இயலும்)

குறிப்பு:

பயன்பாட்டிற்கான சில முடிவுகள்

- $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டின் மீது அமையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி Q -ன் ஆயத் தொலைவுகளை, (துணையலகு வடிவத்தைப் பயன்படுத்த)

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$ எனக் காணலாம் (6.23)



படம் 6.38

- $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்துப் பிம்பப் புள்ளி $\overline{P}$ -ன் ஆயத் தொலைவுகளை,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$ -ன் மூலமாகவும் காணலாம் (6.24).

எடுத்துக்காட்டு 6.22 $3x + 4y = 7$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லக் கூடிய இணை கோடு மற்றும் செங்குத்து கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

$3x + 4y = 7$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு

$$3x + 4y = 3x_1 + 4y_1$$

இங்கு (x_1, y_1) என்பது $(1, 2)$ என்க.

$$\Rightarrow \quad 3x + 4y = 3(1) + 4(2)$$

$$3x + 4y = 11$$

மேலும், $3x + 4y = 7$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்து கோட்டின் சமன்பாடு

$$4x - 3y = 4x_1 - 3y_1$$

மேற்கண்ட சமன்பாடு $(x_1, y_1) = (1, 2)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது எனில்

$$\Rightarrow \quad 4x - 3y = 4(1) - 3(2)$$

$$4x - 3y = -2$$

எனவே தேவையான இணைகோடு மற்றும் செங்குத்து கோடுகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$3x + 4y = 11$$

$$4x - 3y = -2$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.23 கீழ்க்காண்பவற்றிற்கு தீர்வு காண்க.

(i) $(5,4)$ மற்றும் $(2,0)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

(ii) $5x + 12y - 3 = 0$ என்ற கோட்டிற்கும் $(1,2)$ புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம்.

(iii) $3x + 4y = 12$ மற்றும் $6x + 8y + 1 = 0$ இடையே உள்ள தூரம்.

தீர்வு

(i) (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்பதை $(5, 4)$ மற்றும் $(2, 0)$ என்க.

புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

(ii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கும் (x_1, y_1) என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம்

$$D = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

அதாவது, $5x + 12y - 3 = 0$ என்ற கோட்டிற்கும் $(1 , 2)$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம்

$$D = \left| \frac{5(1) + 12(2) - 3}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| = 2$$

(iii) $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_1 x + b_1 y + c_2 = 0$ இவ்விரு கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை $3x + 4y - 12 = 0$ மற்றும் $3x + 4y + \frac{1}{2} = 0$ என எழுதலாம்.

இங்கு, $a_1 = 3,\ b_1 = 4,\ c_1 = -12,\ c_2 = \frac{1}{2}$

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \left| \frac{-12 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{25}{2 \times 5} = 2.5 \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.24 ஆதியிலிருந்து $2x + y = 5$ என்ற கோட்டின் மீது மிக அண்மையில் அமைந்துள்ள புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

ஆதியிலிருந்து $2x + y = 5$ என்ற கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிபுள்ளியே தேவையான புள்ளியாகும். ஆதிப்புள்ளி வழியே செல்லும் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு செங்குத்துக்கோடு $x - 2y = 0$.

$2x + y = 5$, $x - 2y = 0$ இக்கோடுகளின் தீர்வுகள் $x = 2,\ y = 1$ தேவையான கோட்டின் மீது, ஆதிக்கு அருகமைப்புள்ளி $(2, 1)$ ஆகும்.

மாற்று முறை

கொடுக்கப்பட்ட (6.23) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{x - 0}{2} = \frac{y - 0}{1} = -\frac{(2(0) + 1(0) - 5)}{2^2 + 1^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad (2, 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 6.25 $3x + 4y + 2 = 0$ மற்றும் $5x + 12y - 5 = 0$ என்ற இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணத்தின் இருசமவெட்டியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $3x + 4y + 2 = 0$ மற்றும் $5x + 12y - 5 = 0$

முதலில், இரு சமன்பாடுகளின் மாறிலியை மிகையாக மாற்ற,

$3x + 4y + 2 = 0$ மற்றும் $-5x - 12y + 5 = 0$ ஆகும்.

இரு கோடுகளின் இரு சமவெட்டியின் சமன்பாடு,

$$\frac{3x+4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{-5x-12y+5}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

(நகரும் புள்ளி கோட்டிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்)

$a_1 a_2 + b_1 b_2 = -15 - 48 < 0$, என்பதால்

இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{3x+4y+2}{5} = +\frac{(-5x-12y+5)}{13}$$

$$\Rightarrow \quad 64x + 112y + 1 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 6.26 $x+y=5$ என்ற கோட்டின் மீது அமையும் $4x+3y-12=0$ என்ற கோட்டிலிருந்து 2 அலகுகள் தொலைவில் உள்ள புள்ளிகளை காண்க.

தீர்வு

$x + y = 5$ -ன் மீது அமைந்துள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் $x = t$, $y = 5 - t$ ஆகும்.

$(t, 5-t)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $4x+3y-12=0$ என்ற கோட்டுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 2 அலகுகள் எனில்,

எனவே $$\frac{4(t)+3(5-t)-12}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|t+3|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \quad t+3 = \pm 10 \quad \Rightarrow \quad t=-13,\ t=7$$

எனவே தேவையான புள்ளிகள் $(-13, 18)$ மற்றும் $(7, -2)$

எடுத்துக்காட்டு 6.27 ஒரு நிலையான புள்ளி $A(6, 8)$ வழியே செல்லுகின்ற நேர்க்கோட்டின் மேல், ஆதியிலிருந்து அக்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் காண்க.

தீர்வு

$(x_1, y_1) = (6,\ 8)$ மற்றும் ஆதியிலிருந்து (O-லிருந்து) அக்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் நியமப்பாதையிலுள்ள புள்ளி $P(h,k)$ என்க.

நிலையான புள்ளி $A(6,\ 8)$ -ன் வழியே, m என்ற சாய்வைக் கொண்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = m(x - 6) \qquad (6.25)$$

செங்குத்துக் கோடு OP-ன் சாய்வு $\left(\frac{k-0}{h-0}\right) = \frac{k}{h}$

இங்கு OP என்பது சமன்பாடு (6.25) -க்கு செங்குத்தாக உள்ளது.

$$m \times \left(\frac{k}{h}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{h}{k}$$

மேலும், $P(h,k)$ ஆனது சமன்பாடு (6.25) -ல் அமைந்துள்ளதால், $m = -\frac{h}{k}$ -ஐ பிரதியிட

$$k - 8 = -\frac{h}{k}(h - 6)$$

$$\Rightarrow \qquad k(k-8) = -h(h-6) \Rightarrow h^2 + k^2 - 6h - 8k = 0$$

$P(h,k)$ -ன் நியமப்பாதை

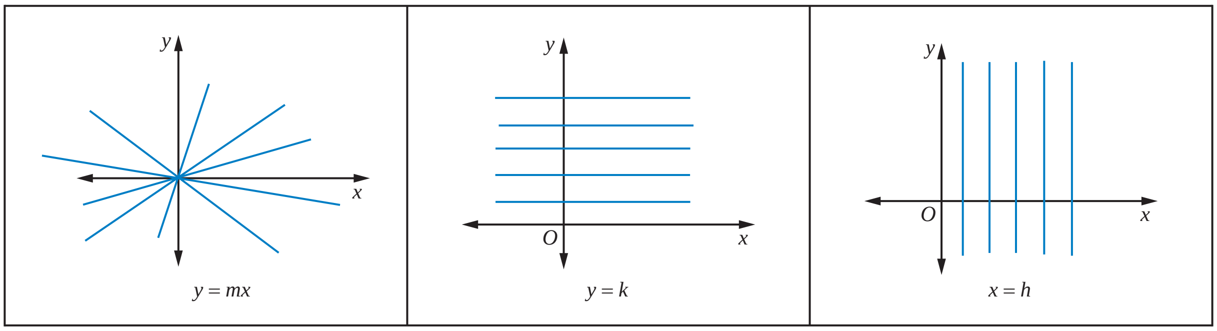
$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

ஒரு அரை வட்டத்தின் உள்ளமைக் கோணம், ஒரு செங்கோணம் என்ற உண்மை இதன் மூலம் அறியலாம்.

6.4.5 நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு (Family of Lines)

ஒரு குறிப்பிட்ட நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் அல்லது பின்பற்றும் எல்லா நேர்க்கோடுகளும், ஒரு நேர்க்கோட்டின் தொகுப்பு எனப்படும். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் சில கோடுகளின் தொகுப்பைக் காணலாம்.

இங்கு m, k மற்றும் h என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்



படம் 6.39

$ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் பொது வடிவச் சமன்பாட்டில் a, b மற்றும் c என மூன்று மாறத்தக்க மாறிலிகள் இருப்பதாகத் தோன்றுகிறது. ஆனால் உண்மை அதுவல்ல. சமன்பாட்டை b ஆல் வகுக்க (அல்லது a, இவற்றில் எது பூச்சியமற்றதாக உள்ளதோ அதை எடுத்துக்கொள்க),

$$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$$ இதனை $Ax + y + C = 0$ எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு $A = \frac{a}{b}$, $C = \frac{c}{b}$.

மேலே கண்ட சமன்பாட்டைச் சாய்வு மற்றும் வெட்டுத்துண்டு வடிவில் எழுத இயலும். இதிலிருந்து நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு இரண்டு மாறத்தக்க மாறிலிகளை கொண்டிருக்கும் எனவும், அந்த மாறத்தக்க மாறிலியின் எண்ணிக்கையை மேலும் குறைக்க இயலாது எனவும், தெளிவாகிறது. ஆகையால், எல்லா நேர்க்கோடுகளும் இரண்டு மாறத்தக்க மாறிலிகளை கொண்டிருக்கும். இதன் விளைவாக ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டை தீர்மானிக்க இரண்டு நிபந்தனைகள் தேவைப்படுகிறது.

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டில் ஒரு நிபந்தனையைப் பிரதியிடும்போது இரண்டு மாறத்தக்க மாறிலிகளுக்கு இடையே ஒரு தொடர்பு கிடைக்கும். இப்போது ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி மற்ற மாறத்தக்க மாறிலியைத் தீர்மானிக்கும். எனவே, ஒரு நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் கோடுகள் ஒரு மாறத்தக்க மாறிலியை பெற்றிருக்கும். அத்தகைய கோடுகளின் தொகுப்பு **ஒற்றைத் துணையலகு நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பு (one parameter family of lines)** எனப்படும். மேலும், அந்த தெரியாத மாறத்தக்க மாறிலியானது துணையலகு $(Parameter)$ என அழைக்கப்படுகிறது.

$y = mx + b$ என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோட்டு தொகுப்பின் மூன்று வகைகளை நாம் இங்கு விவாதிக்கலாம். முதல் இரண்டு வகைகள் ஒற்றைத் துணையலகு தொகுப்புகளாகும் $(one\ parameter\ family\ of\ lines)$ மற்றும் மூன்றாவது வகை இரண்டு துணையலகுகள் கொண்ட தொகுப்புகளாகும் $(two\ parameters\ family\ of\ lines)$.

(i) m என்பது மாறத்தக்க மாறிலி மற்றும் b என்பது ஒரு நிலையான மாறிலி.

(ii) b என்பது ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி மற்றும் m என்பது ஒரு நிலையான மாறிலி.

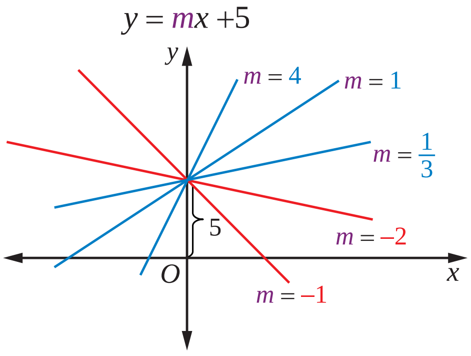
(iii) m மற்றும் b இவ்விரண்டும் மாறத்தக்க மாறிலிகள்.

6.4.6 ஒரு துணையலகுத் தொகுப்புகள் (One Parameter families)

(i) m என்பது மாறத்தக்க மாறிலி மற்றும் b என்பது நிலையான மாறிலி என்க.

$y = mx + b$ என்ற நேர்க்கோடு சமன்பாடுகளின் தொகுப்பில் $b = 5$ என்க. இங்கு m வெவ்வேறு மெய் மதிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டால், 5 அலகுகள் உடைய y -அச்சு வெட்டுத் துண்டைக் கொண்ட கோடுகளின் தொகுப்பு கிடைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டாக m -ன் மதிப்புகள் $-1, -2, \frac{1}{3}, 1$ மற்றும் 4 என இருக்கும் போது, நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பின் சில உறுப்புகளைப் (கோடுகளை) படத்தில் காணலாம்.



படம் 6.40

எடுத்துக்காட்டு 6.28 $y = mx + 2$ என்ற நேர்க்கோட்டுத் தொகுப்பிலுள்ள கோடுகளும், $2x + 3y = 0$ என்ற நேர்க்கோடும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியின் x -ன் ஆயத்தொலை மற்றும் சாய்வு m ஆகியன முழு எண்கள் எனில், அந்நேர்க்கோட்டுத் தொகுப்பில் உள்ள கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

$y = mx + 2$ என்ற நேர்க்கோட்டுத் தொகுப்பில் உள்ள தேவையான கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண, துணையலகு m -ன் மதிப்புகளைக் காண வேண்டும்.

$y = mx + 2$ மற்றும் $2x + 3y = 10$ ஆகிய இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{4}{3m+2}, \frac{10m+4}{3m+2}\right)$ ஆகும்.

இங்கு, சாய்வு m மதிப்பு மற்றும் x -ன் ஆயக்கூறுகள் முழு எண்கள் என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எனவே x -ன் மதிப்பு $\frac{4}{3m+2}$ என்பது ஒரு முழு எண் ஆகும்.

$\Rightarrow$ $3m + 2$ என்பது 4 -ஐ வகுக்கும் முழு எண்களாக இருக்கவேண்டும்.

(அதாவது, $\pm 1, \pm 2$ மற்றும் ± 4)

எனவே $3m+2 = \pm 1,\ 3m+2 = \pm 2,\ 3m+2 = \pm 4$

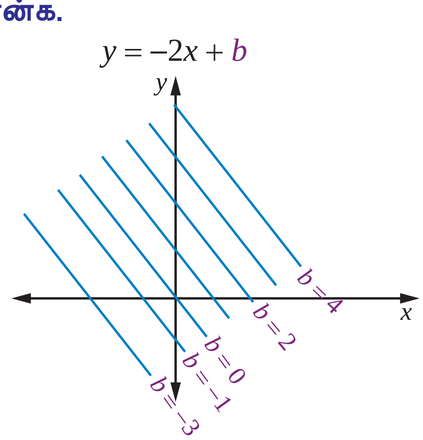
இங்கு m என்பது ஒரு முழு எண், மேலுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதால்,

$m = \{-2, -1, 0\}$ எனக் கிடைக்கும்.

தேவையான சமன்பாடுகள் $y = -2x + 2, y = -x + 2$ மற்றும் $y = 2$ ஆகும்.

(ii) b ஒரு மாறத்தக்க மாறிலி மற்றும் m ஒரு நிலையான மாறிலி என்க.

m என்ற நிலையான மாறிலியை $m = -2$ எனக் கொண்டால் $y = mx + b$ என்பது $y = -2x + b$ என மாற்றமடையும். b -ன் பல்வேறு மெய் மதிப்புகளுக்குச் சாய்வு -2 உள்ள நேர்கோட்டு தொகுப்பினைப் பெறலாம். அவற்றில் சிலவற்றின் தொகுப்பைப் படத்தில் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, b -ன் மதிப்பு $-3, -1, 0, 1, 2, 3$ மற்றும் 4 என இருக்கும் போது, நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பின் சில உறுப்புகளை (கோடுகளை) படத்தில் காணலாம்.



படம் 6.41

இணை கோடுகளின் தொகுப்பு மற்றும் செங்குத்துக் கோடுகளின் தொகுப்பு ஆகிய சிறப்பு வகைகளைக் காண்போம்.

இணைகோடுகளின் தொகுப்பு : $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் இணையாக உள்ள கோடுகளின் தொகுப்பு $ax + by + \lambda = 0$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

$\lambda\,(lambda)$-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு $ax + by + c = 0$ -க்கு இணையான வெவ்வேறு கோடுகளைப் பெறலாம்.

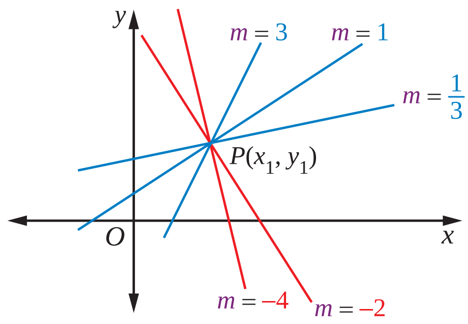
செங்குத்துக் கோடுகளின் தொகுப்பு : $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள கோடுகளின் தொகுப்பு $bx - ay + \lambda = 0$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

λ -ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோடுகளைப் பெறலாம்.

6.4.7 இரண்டு துணையலகுகள் கொண்ட தொகுப்பு (Two parameters families)

(iii) m மற்றும் b ஆகியவை மாறத்தக்க மாறிலிகள் என்க.

$y = mx+b$ -ல் m மற்றும் b ஆகியவை மாறத்தக்க மாறிகளாகும். இத்தொகுப்பின் வரைபடத்தை எளிதில் வரைய இயலாது. ஆனால், m -ன் வெவ்வேறு மெய் மதிப்புகளுக்கு $y-y_1=m(x-x_1)$ என்ற தொகுப்பின் வரைபடத்தை வரைய இயலும். எடுத்துக்காட்டாக, $x = x_1$ என்ற செங்குத்துக் கோட்டைத் தவிர (x_1, y_1) என்ற நிலையான புள்ளி வழிச்செல்லும் $-2, -4, \frac{1}{3}, 1$ மற்றும் 3 ஆகிய m-ன் மதிப்புகளையுடைய கோடுகளைப் படத்தில் காணலாம்.



படம் 6.42

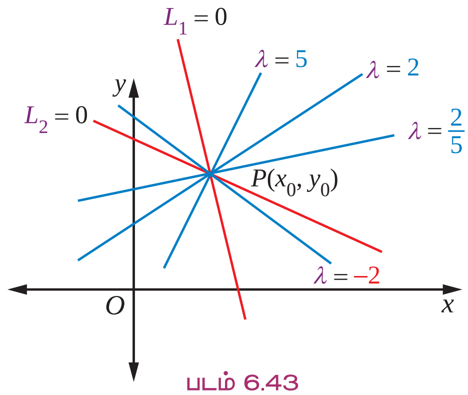
6.4.8 இரண்டு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகளின் தொகுப்பின் சமன்பாடு

$L_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $L_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகளின் தொகுப்பின் சமன்பாடு

$$L_1 + \lambda L_2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

இங்கு $\lambda\,(lambda)$ என்பது துணையலகு ஆகும். வெவ்வேறு λ-ன் மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.



படம் 6.43

எடுத்துக்காட்டு 6.29 $3x + 2y + 5 = 0$ மற்றும் $3x - 4y + 6 = 0$ ஆகிய கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகவும் $(1, 1)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

இரண்டு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகளின் தொகுப்பின் சமன்பாடு

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \text{ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.}$$

எனவே, $(3x + 2y + 5) + \lambda(3x - 4y + 6) = 0$

தேவையானகோடு $(1, 1)$ வழி செல்வதால், மேலே உள்ள சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும்.

எனவே, $\{3 + 2(1) + 5\} + \lambda\{3(1) - 4(1) + 6\} = 0 \;\; \Rightarrow \lambda = -2$

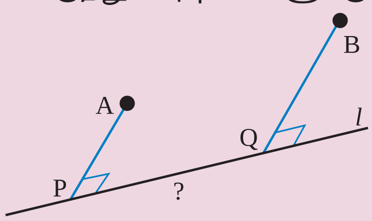
$\Rightarrow \lambda = -2$ -ஐ மேலுள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடக் கிடைக்கும் சமன்பாடு,

$$3x - 10y + 7 = 0$$

(இரு புள்ளி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி இக்கணக்கைச் சரிபார்க்க)

எடுத்துக்காட்டு 6.30 A மற்றும் B ஆகிய இரு கிராமங்களுக்குச் சிறப்பான மின்சாரம் அளிக்க ஒரு துணை மின்நிலையத்தை l என்ற சாலையில் அமைப்பதற்காக அரசு திட்டமிட்டுள்ளது. A மற்றும் B -க்கு முறையே l என்ற சாலையில் P மற்றும் Q என்ற செங்குத்து அடிபுள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவுகள் முறையே 3 கிமீ மற்றும் 5 கிமீ ஆகும். P மற்றும் Q -க்கு இடையேயுள்ள தூரம் 6 கிமீ எனில்,

(i) இரு கிராமங்களைத் துணை மின்நிலையத்துடன் இணைக்கும் கம்பியின் மிகக் குறைந்த நீளம் காண்க. (கிராமங்களையும் துணை மின்நிலையங்களையும் இணைக்கும் சாலைகள்) மற்றும்



படம் 6.44

(ii) மின் கம்பி செல்லும் பாதையின் சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றை காண்க.

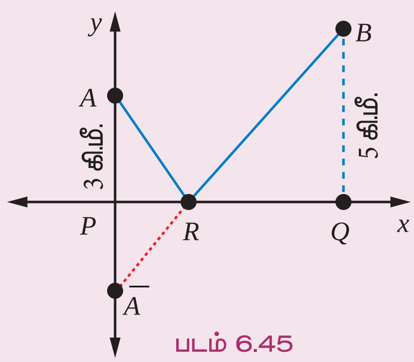
தீர்வு

பிரதிபலிப்புத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்வு காணல்:

PQ-ஐ இணைக்கும் நேர்கோட்டை x -அச்சாகவும்,

PA -ஐ இணைக்கும் நேர்கோட்டை y -அச்சாகவும்,

P -ஐ ஆதிப்புள்ளியாகவும் கொள்க.



படம் 6.45

எனவே, $P(0, 0)$, $A(0, 3)$ மற்றும் $B(6, 5)$ ஆகியவை கிடைக்கும்.

x -அச்சைப் பொருத்து A -ன் பிம்பம் $\overline{A}$ எனில், $\overline{A}$ என்பது $(0, -3)$ ஆகும்.

$\overline{A}B$ மற்றும் x -அச்சு ஆகியவை வெட்டும் புள்ளியே தேவையான R ஆகும்.

AR மற்றும் BR ஆகியவை கம்பி செல்லும் பாதையாகும்.

மிகக் குறைந்த கம்பியின் நீளம்

$$= AR + BR = \overline{A}R + RB = \overline{A}B$$

$$= \sqrt{(6-0)^2 + (5+3)^2} = 10 \text{ கிலோமீட்டர்}$$

$\overline{A}B$ -ன் சமன்பாடு $y - (-3) = \left(\dfrac{5-(-3)}{6-0}\right)(x-0)$

$$4x - 3y = 9$$

$$y = 0 \text{ எனில் } R\left(\frac{9}{4}, 0\right) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, துணை மின் நிலையம் P -லிருந்து 2.25 கிமீ தூரத்தில் இருக்கும்.

$R\left(\dfrac{9}{4}, 0\right)$ மற்றும் $A(0, 3)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளை இணைக்கும்

RA -ன் சமன்பாடு $4x + 3y = 9$

RA மற்றும் RB (அல்லது $\overline{A}B$) ஆகிய இரு கம்பிகள் செல்லும் சமன்பாடுகள் முறையே

$4x + 3y = 9$ மற்றும் $4x - 3y = 9$

எடுத்துக்காட்டு 6.31 ஒரு மகிழுந்தில், முதல் 1.8 கிமீ வரை பயணம் செய்ய வாடகை ₹25 மற்றும் அதற்கு மேல் பயணத்திற்கு ஒவ்வொரு கிலோமீட்டருக்கும் ₹12 வாடகை வசூலிக்கப்படுகிறது. பயண தூரம் x கிலோ மீட்டருக்கும் அதன் வாடகை ₹y -க்கும் உள்ள தொடர்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும் 15 கிலோமீட்டர் பயணத்திற்கான வாடகை காண்க.

தீர்வு

1.8 கிலோமீட்டர் வரை மாறாத வாடகை ₹25. எனவே, அதன் சமன்பாடு

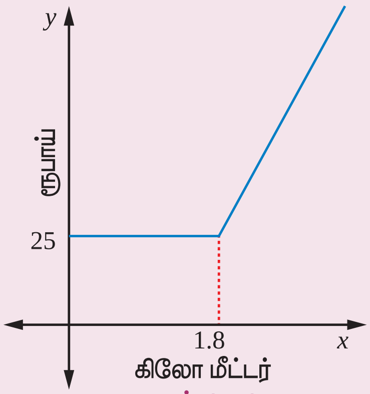
$$y = 25, \quad 0 \le x \le 1.8 \qquad (6.26)$$

கிலோமீட்டர் 1.8-க்கு மேல் ஒவ்வொரு கிலோமீட்டருக்கும் வாடகை ₹12. இதன் சமன்பாடு,

$$y = 25 + 12(x - 1.8), \; x > 1.8 \qquad (6.27)$$

சமன்பாடுகள் (6.26) மற்றும் (6.27) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$y = \begin{cases} 25, & 0 \le x \le 1.8 \\ 25 + 12(x - 1.8) & x > 1.8 \end{cases} \qquad (6.28)$$



படம் 6.46

$x = 15$ எனில், சமன்பாடு (6.27) -லிருந்து

$$y = 25 + 12(15 - 1.8) = 183.40.$$

$\therefore$ 15 கிமீ பயணம் செய்ய வாடகை ₹183.40.

நீங்கள் இருக்கும் பகுதியில் வாடகை மகிழுந்து சேவை (call taxi) இருக்குமானால், உங்கள் கைபேசி மூலம் வாடகை மகிழுந்து ஒன்றினை அழைக்கும்போது, உங்கள் அழைப்பு தானாகவே உங்களுக்கு அருகாமையிலுள்ள மகிழுந்துடன் தொடர்புகொள்கிறது. பிறகு தங்கள் விருப்பத்திற்கேற்ப நீங்கள் அழைக்கும் இடத்திற்கு வந்து நீங்கள் செல்லவேண்டிய இடத்திற்கு தானாகவே வழிகாட்டிச் செல்லும். இவ்வாறு நீங்கள் அழைத்த இடம், செல்லவேண்டிய இடம், பாதை, தூரம்... அனைத்தும் அறிந்துகொள்ள எவ்வகையான ஆயத்தொலை அமைப்பு இங்கு பயன்படுகிறது?

இதனை அறிந்துகொள்ள : www.mapbox.com என்ற வலைதளத்தை பயன்படுத்துக.

எடுத்துக்காட்டு 6.32 $(3, 0)$ மற்றும் $(5, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை $(3, 0)$-ஐ மையமாகக் கொண்டு 15° கடிகார எதிர்சுற்றில் சுழற்றும்போது புதிய நிலையில் நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

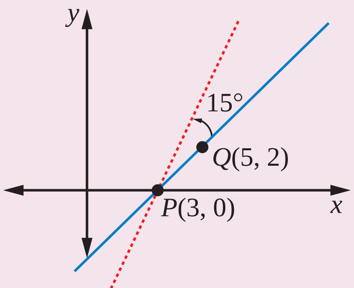
$P(3, 0)$ மற்றும் $Q(5, 2)$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் என்க.

$$PQ \text{ -ன் சாய்வு } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2-0}{5-3} = 1$$

$$PQ \text{ -ன் கோணம் } = \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ அல்லது } 45^\circ$$



படம் 6.47

புதிய நிலையில் உள்ள கோட்டின் சாய்வு $= m = tan(45^\circ + 15^\circ)$

$$= tan\, 60^\circ = \sqrt{3}$$

புள்ளி $(3, 0)$ வழியாகவும் சாய்வு $\sqrt{3}$ -ஐக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 0 = \sqrt{3}(x - 3)$$

$$\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$$

பயிற்சி 6.3

1. $3x + 2y + 9 = 0$ மற்றும் $12x + 8y - 15 = 0$ ஆகியவை இணைகோடுகள் எனக் காட்டுக.
2. $5x - 4y + 3 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக, x -அச்சின் வெட்டுத்துண்டு 3 எனக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
3. $4x+3y+4=0$ என்ற கோட்டிற்கும் மற்றும் (i) $(-2, 4)$ (ii) $(7, -3)$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க.
4. $(1, -1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும்
   (i) $x + 3y - 4 = 0$-க்கு இணையான
   (ii) $3x + 4y = 6$-க்கு செங்குத்தான,
   நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டை காண்க.
5. சாய்சதுரத்தின் ஒரு முனை புள்ளி $(-4, 7)$, மேலும் $5x - y + 7 = 0$ என்ற கோடு ஒரு மூலை விட்டத்தின் சமன்பாடு எனில், மற்றொரு மூலைவிட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
6. $4x - y + 3 = 0$ மற்றும் $5x + 2y + 7 = 0$ என்ற இவ்விரு கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி வழியே செல்லக்கூடியதும் மற்றும்
   (i) $(-1, 2)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும்
   (ii) $x - y + 5 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான
   (iii) $x - 2y + 1 = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தான
   நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
7. $12x + 5y + 2 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக, $(1, -1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து ஒரு அலகு தொலைவில் உள்ள இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
8. $3x + 4y - 6 = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக, $(2, 1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து 4 அலகுகள் தொலைவில் உள்ள நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
9. $2x + 3y = 10$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான கோட்டின் ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 15 எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
10. $(-10, -2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x + y - 2 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும் அதன் அடிப்புள்ளியையும் காண்க.
11. $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = 2a$ மற்றும் $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ என்ற கோடுகளுக்கு ஆதியிலிருந்து செங்குத்துத் தூரங்கள் முறையே p_1 மற்றும் p_2 எனில் $p_1^2 + p_2^2 = a^2$ என நிறுவுக.

12. கீழ்க்காணும் இணைக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

   (i) $12x+5y=7$ மற்றும் $12x+5y+7=0$

   (ii) $3x-4y+5=0$ மற்றும் $6x-8y-15=0$

13. $3x+4y-12=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு
(i) செங்குத்தான (ii) இணையான நேர்க்கோடுகளின் தொகுப்பினைக் காண்க.

14. $A(2, 0)$ மற்றும் $B(3, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை, புள்ளி A -ஐ பொறுத்துக் கடிகார எதிர்திசையில் 15° கோணத்தில் சுழற்றுவதால் கிடைக்கும் புதிய நிலையில் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

15. $(1, 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரும் ஒரு ஒளிக் கதிர் x -அச்சின் மீதுள்ள புள்ளி A-ல் பிரதிபலித்து, $(5,3)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது எனில் புள்ளி A-ன் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

16. $5x = y + 7$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு ஆய அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 10 ச. அலகுகள் எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. $x+2y-9=0$ என்ற கோட்டைப் பொருத்து $(-2 , 3)$ என்ற புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளியை காண்க.

18. ஒரு புகைப்பட நகலகத்தில் முதல் 10 பிரதிகளுக்கு ஒரு பிரதிக்கு ₹1.50 வீதம் வசூலிக்கப்படுகிறது. 10 பிரதிகளுக்கு மேல் அடுத்தடுத்த பிரதிகளுக்கு ₹1 வீதம் கட்டணம் வசூலிக்கப்படுகிறது. x என்பது பிரதிகளின் எண்ணிக்கையையும், y என்பது நகல்களின் கட்டணத்தையும் குறிக்கிறது என்க.

   (i) x -ன் மதிப்பு 0 முதல் 50 நகல்கள் வரை உள்ள கட்டணத்தைக் குறிக்கும் வரைபடம் வரைக.

   (ii) 40 பிரதிகள் எடுப்பதற்கு ஆகும் கட்டணம் எவ்வளவு?

19. $y = 5x + b$ இங்கு b மாற்றத்தக்க மாறிலி மற்றும் $3x - 4y = 6$ என்ற கோட்டுடன் வெட்டும் புள்ளியின் x -ஆயத்தொலை மற்றும் b ஆகியவை முழுக்கள் எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் தொகுப்பில் குறைந்தபட்சம் இரண்டு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

20. $y=mx-3$ என்ற நேர்க்கோட்டு தொகுப்பிலுள்ள கோடுகளும் $x-y=6$ என்ற நேர்க்கோடும், வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியின் x -ன் ஆயத்தொலை மற்றும் சாய்வு m ஆகியன முழுக்களாகும் எனில், $y = mx - 3$ -ன் நேர்க்கோட்டு தொகுப்பில் உள்ள கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6.5 இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of Straight lines)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சமன்பாடுகளை ஒன்றாக இணைத்து உயர்படி உடைய சமன்பாடுகளாக விவரிக்க முடியும். x மற்றும் y -ல் உள்ள நேரிய சமன்பாடு ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும் என்பதை நாம் அறிவோம். இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகளின் பெருக்கற்பலன் ஒரு இரட்டை நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கிறது. இரட்டை நேர்க்கோட்டை x மற்றும் y -ல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகக் காணலாம்.

$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்பன இரு தனித்தனி நேர்க்கோடுகள் என்க. $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி L_1 -ன் மீது அமைந்துள்ளது எனில் $L_1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

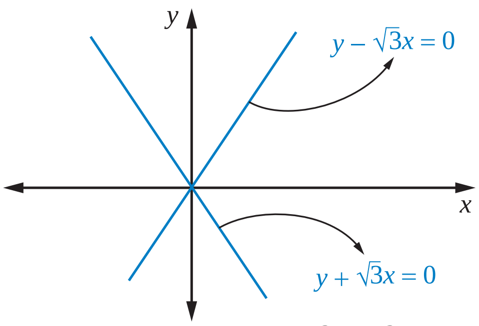
இதேபோல், $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி L_2 -ன் மீது அமைந்துள்ளது எனில், $L_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியானது $L_1 = 0$ அல்லது $L_2 = 0$ இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றில் அமைந்திருக்கிறது எனில், $(L_1)(L_2) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது. மேலும், வேறு எந்த புள்ளியும் $L_1 \,.\, L_2 = 0$ -ஐ நிறைவு செய்யாது. எனவே, $L_1 \,.\, L_2 = 0$ என்பது $L_1 = 0$ மற்றும் $L_2 = 0$ என்ற கோடுகளின் இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$y + \sqrt{3}x = 0$ மற்றும் $y - \sqrt{3}x = 0$.

மேற்கண்ட இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஆதி வழியே செல்லக்கூடியதாகும். இரண்டு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் முறையே $-\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ எனக் குறிக்கிறது.



இரட்டை நேர்கோடுகள் $y^2 - 3x^2 = 0$

படம் 6.48

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு

$$(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 3x^2 = 0$$ என்பது ஒரு இரட்டை நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கிறது.

6.5.1 ஆதிவழியே செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் (Pair of lines passing through the origin)

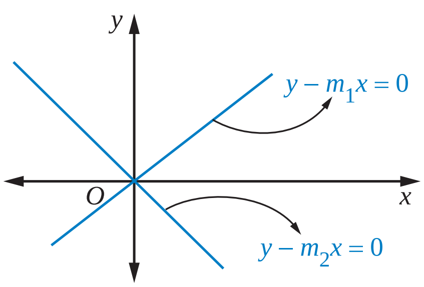
நாம் முதலில் ஒரு எளிய வகை சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்ளலாம். இரு கோடுகள் ஆதி வழியே செல்லக்கூடியவை எனில், அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$y - m_1x = 0$ மற்றும் $y - m_2x = 0$ என்க

இவற்றின் ஒருங்கிணைந்த (சேர்ப்பு) சமன்பாடு

$$(y - m_1x)(y - m_2x) = 0 \qquad (6.29)$$

$$y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2 = 0$$



இரட்டை நேர்கோடுகள்

படம் 6.49

மேலே உள்ள சமன்பாட்டை $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரண்டாம் படி சமபடித்தான சமன்பாடாக எழுதலாம். இங்கு ஒவ்வொரு உறுப்பின் படியும் இரண்டாகும்.

மேலும் $m_1 + m_2 = \dfrac{-2h}{b}$ மற்றும் $m_1m_2 = \dfrac{a}{b}$ ஆகும்.

குறிப்பு: சமபடித்தான சமன்பாட்டின் கோடுகள் ஆதி வழிச் செல்லும்

எடுத்துக்காட்டு 6.33 $5x^2 + 6xy + y^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோட்டின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $5x^2 + 6xy + y^2 = 0$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை காரணிபடுத்த,

$$5x^2 + 5xy + xy + y^2 = 0$$

$$5x(x+y)+y(x+y) = 0$$

$$(5x+y)(x+y) = 0$$

எனவே, தேவையான கோடுகள், $5x+y=0$, $x+y=0$

மாற்றுமுறை

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு சம படித்தான சமன்பாடு

$$5x^2+6xy+y^2 = 0$$

இருபுறமும் x^2 ஆல் வகுக்க,

$$5+6\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{x} = m \text{ (சமப்படித்தான சமன்பாட்டின் சாய்வு)}$$

மேற்கண்ட சமன்பாடானது

$$m^2+6m+5 = 0$$

காரணிபடுத்த கிடைப்பது,

$$(m+1)(m+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m=-1, m=-5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}=-1, \frac{y}{x}=-5$$

தேவையான சமன்பாடுகள் $x+y=0$, $5x+y=0$

எடுத்துக்காட்டு 6.34 $2x^2+2xy+y^2=0$ என்ற சமன்பாட்டை இயலுமானால் இரட்டை நேர்க்கோட்டின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரிக்கவும்.

தீர்வு

$2x^2+2xy+y^2=0$ என்பது சமப்படித்தான சமன்பாடு எனவே, x^2 ஆல் வகுத்து

$\frac{y}{x}=m$ என பிரதியிட, $m^2+2m+2=0$ எனக் கிடைக்கும்.

இங்கு m -ன் (சாய்வு) மதிப்பானது மெய்யெண் அல்ல $(\because \Delta = B^2-4AC = 4-8=-4<0)$ (கலப்பெண்) எனவே,

$2x^2+2xy+y^2=0$ என்ற சமன்பாடுடைய எந்த நேர்க்கோடுகளும் அமையவில்லை. சில நேரங்களில் இந்த சமன்பாட்டை கற்பனைக் கோடுகள் எனக் கூறலாம். குறிப்பாக முழு தளத்திலும் $(0, 0)$ மட்டுமே சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

6.5.2 இரட்டை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between pair of straight lines)

ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \qquad (6.30)$$

m_1 மற்றும் m_2 என்பன இவ்விரு கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

சமன்பாடு (6.30) -ஐ x^2 -ஆல் வகுத்து $\frac{y}{x}=m$ என பிரதியிட,

$$bm^2 + 2hm + a = 0$$ எனக் கிடைக்கும்.

இச்சமன்பாடு m -ல் இருபடி சமன்பாடாகும்.

இதன் மூலங்கள் m_1 மற்றும் m_2 எனில்

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b} \text{ மற்றும் } m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

θ என்பது இவ்விரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்,

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_2 m_1}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{\left(\frac{-2h}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b}}}{1 + \frac{a}{b}}\right| \\
\tan\theta &= \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|
\end{aligned}$$

தேவையான கோணம் $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$

சூத்திரத்திலிருந்து முடிவு செய்யக் கூடியவை

1. m_1 மற்றும் m_2 ஆகியவை மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை எனில் கோடுகள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவைகளாகும், மேலும், $h^2 - ab > 0$.
2. m_1 மற்றும் m_2 ஆகியவை மெய் மற்றும் சமம் எனில் கோடுகள் மெய் மற்றும் ஒன்றியிருக்கும் $(coincide)$, மேலும், $h^2 - ab = 0$
3. m_1 மற்றும் m_2 ஆகியவை மெய் அல்ல எனில் கோடுகள் மெய்யல்ல (கற்பனை), மேலும், $h^2 - ab < 0$.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ -ஐ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் ஆதி வழியே செல்கிறது. இக்கோடுகள் இரண்டும் இணை அல்லது ஒன்றியிருக்கும் எனில்,

$\tan\theta = 0$. அதாவது, $h^2 - ab = 0$. மேலும்,

இக்கோடுகள் செங்குத்து எனில், $\cot\theta = 0$.

$\therefore\ a+b = 0$.

இரட்டை நேர்க்கோடுகள்	இணையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை	செங்குத்தாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$	$h^2 - ab = 0$	$a + b = 0$

எடுத்துக்காட்டு 6.35 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவும், ஆதி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

m_1 மற்றும் m_2 என்பன $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

$$y - m_1x = 0 \text{ மற்றும் } y - m_2x = 0 \qquad (6.31)$$

என்பன மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் என்க. இவ்விரு சமன்பாடுகளின் சேர்ப்பு (ஒருங்கிணைந்த) சமன்பாடு

$$(y-m_1x)(y-m_2x) = 0$$

$$y^2-(m_1+m_2)xy+m_1m_2x^2 = 0 \qquad (6.32)$$

கொடுக்கப்பட்டவை, $ax^2+2hxy+by^2 = 0 \qquad (6.33)$

எனவே, $m_1+m_2 = \dfrac{-2h}{b}$ மற்றும் $m_1m_2 = \dfrac{a}{b} \qquad (6.34)$

சமன்பாடு (6.31) -க்கு செங்குத்து கோடுகள்

$$y+\frac{1}{m_1}x=0 \text{ மற்றும் } y+\frac{1}{m_2}x=0$$

இச்சமன்பாடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு,

$$(m_1y+x)(m_2y+x) = 0$$

$$m_1m_2y^2+(m_1+m_2)xy+x^2 = 0$$

சமன்பாடு (6.34) –ஐ பயன்படுத்த,

$$\frac{a}{b}y^2-\frac{2h}{b}xy+x^2 = 0$$

தேவையான சமன்பாடு $ay^2-2hxy+bx^2=0 \qquad (6.35)$

6.5.3 $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் இருசமவெட்டியின் சமன்பாடு காணுதல். (Equation of the angle bisectors of pair of straight lines)

$$y-m_1x=0 \text{ மற்றும் } y-m_2x=0$$

என்பன இரண்டு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு என்க.

எனவே $m_1+m_2=\dfrac{-2h}{b}$ மற்றும் $m_1m_2=\dfrac{a}{b}$

ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு கோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளம் சமம் எனில், அப்புள்ளியின் நியமப் பாதை அக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் கோண இருசம வெட்டி ஆகும்.

$P(p,q)$ என்பது இரு சமவெட்டியின் நியமப்பாதையின் மீது அமைந்துள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$y-m_1x = 0$ என்ற கோட்டிற்கு $P(p, q)$ இருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமானது $y-m_2x=0$ என்ற கோட்டிற்கு அப்புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்திற்கு சமம்.

$$\pm\frac{q-m_1p}{\sqrt{1+m_1^2}} = \pm\frac{q-m_2p}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

அதாவது, $$(q-m_1p)^2(1+m_2^2) = (q-m_2p)^2(1+m_1^2)$$

எளிதாக்குவதால்,

$$p^2 - q^2 = 2pq\left(\frac{1 - m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow p^2 - q^2 = 2pq\left(\frac{1 - \frac{a}{b}}{-\frac{2h}{b}}\right)$$

அதாவது $\dfrac{p^2 - q^2}{a - b} = \dfrac{pq}{h}$

$\therefore$ $P(p, q)$ -ன் நியமப்பாதை, $\dfrac{x^2 - y^2}{a - b} = \dfrac{xy}{h}$ $\quad (6.36)$

எடுத்துக்காட்டு 6.36 $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ மற்றும் $x+y = 3$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

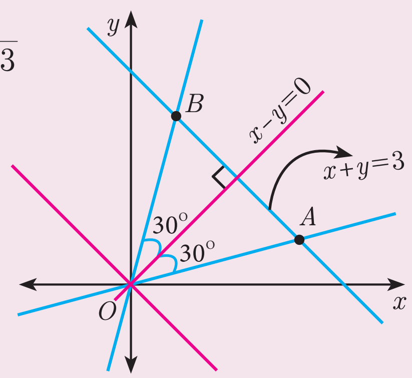
தீர்வு

$x+y = 3$ என்ற கோடு $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ என்ற இரட்டைக் கோட்டை A மற்றும் B-ல் வெட்டுகிறது என்க. மேலும் $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ ஆதிபுள்ளியில் O வெட்டிக்கொள்ளும்

$x^2 - 4xy + y^2 = 0$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்.

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right| = \frac{2\sqrt{4-1}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \angle AOB = \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ$$



படம் 6.50

ΔAOB இன் கோண இருசமவெட்டியின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 0 \text{ மற்றும் } x - y = 0$$

$x - y = 0$ -ன் கோண இருசமவெட்டி கொடுக்கப்பட்ட கோடு AB, அதாவது $x+y = 3$ -க்கு செங்குத்தாக உள்ளது.

எனவே ΔAOB என்பது இரு சமப்பக்க முக்கோணம் ஆகும்.

$$\Rightarrow \quad \angle ABO = \angle BAO = 60^\circ, \text{ மேலும் } \angle AOB = 60^\circ$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 6.37 $x^2 - 2cxy - y^2 = 0$ மற்றும் $x^2 - 2dxy - y^2 = 0$ ஆகியவை இரட்டைக் கோடுகளை குறிக்கின்றன. ஒவ்வொரு இரட்டைக்கோடுகள் மற்ற இரட்டைக்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தை சமமாகப் பிரிக்கிறது எனில், $cd = -1$ என நிறுவுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு

$$x^2 - 2cxy - y^2 = 0 \quad (6.37)$$

$$x^2 - 2dxy - y^2 = 0 \quad (6.38)$$

சமன்பாடு (6.37) -ன் கோண இரு சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{xy}{-c}$$

$$cx^2 + 2xy - cy^2 = 0 \qquad (6.39)$$

சமன்பாடு (6.38) சமன்பாடு (6.37)-ன் கோண இருசமவெட்டி என்பதால் சமன்பாடு (6.38) மற்றும் (6.39)

$$x^2 - 2dxy - y^2 = 0$$

$$cx^2 + 2xy - cy^2 = 0$$

ஒரே சமன்பாடாக அமைகிறது.

எனவே, மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை ஒப்பிட,

$$\frac{1}{c} = \frac{-2d}{2} = \frac{-1}{-c}$$

$$\Rightarrow \quad cd = -1$$

6.5.4 இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் பொது வடிவம் (General form of pair of straight lines)

$l_1x + m_1y + n_1 = 0$ மற்றும் $l_2x + m_2y + n_2 = 0$

என்பன ஏதேனும் இரு நேர்க்கோடுகள் எனக் கருதுவோம். இக்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு,

$$(l_1x + m_1y + n_1)(l_2x + m_2y + n_2) = 0$$

இவ்விரு காரணிகளை பெருக்குவதால், கிடைக்கும் இரட்டை நேர்க்கோட்டின் பொது வடிவமானது

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (6.40)$$

மேற்கண்ட சமன்பாடு, அசமபடித்தான இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

இங்கு,

$$a = l_1l_2 \qquad 2g = l_1n_2 + l_2n_1$$

$$b = m_1m_2 \qquad 2f = m_1n_2 + m_2n_1$$

$$c = n_1n_2 \qquad 2h = l_1m_2 + l_2m_1$$

மேற்கண்ட சமன்பாடு (6.40) -ஐ $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ மற்றும் $l_2x + m_2y + n_2 = 0$

என இரு நேரிய காரணிகளாகப் பிரிக்க முடியுமானால் சமன்பாடு (6.40)-ஐ எப்பொழுதும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் எனக் குறிப்பிடலாம்.

பொதுவான ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிப்பதற்கான கட்டுப்பாட்டைக் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட இரட்டை நேர்க்கோடுகளை

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பதைக் கீழ்க்காணுமாறு x -ன் இருபடிச் சமன்பாடாக மாற்றி எழுதலாம்.

$$ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)=0$$

இதன் தீர்வு, $$x = \frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a\left(by^2+2fy+c\right)}}{a}$$

$$ax+hy+g = \pm\sqrt{(hy+g)^2-a\left(by^2+2fy+c\right)}$$

அதாவது, $$ax+hy+g = \pm\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+g^2-ac}$$

மேற்கண்ட இருசமன்பாடுகள் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கிறது. எனவே, இச்சமன்பாடுகள் x மற்றும் y -ல் ஒருபடித்தான சமன்பாடுகளாகும். ஆகையால் மேற்கண்ட விரிவாக்கத்தில் படி மூலக்குறியில் உள்ள y -ன் சார்பை வர்க்கமாக $(perfect\ square)$ மாற்ற இயலும். அதற்கான நிபந்தனையை பயன்படுத்த

$$4(gh-af)^2-4(h^2-ab)\left(g^2-ac\right)=0 \qquad (\because \Delta = B^2-4AC=0)$$

இதனை விரிவுபடுத்திப் பின்னர் ஒழுங்குபடுத்தி, a -யினால் வகுத்தால்,

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$ எனக் கிடைக்கும்.

மேலும் இதனை $$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$$ என எழுதலாம்.

(இந்த அணிக் கோவையின் விரிவை அடுத்த இயலில் காண்போம்)

நிருபணமின்றிப் பயன்பாட்டிற்கான சில முடிவுகள்

(i) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற இரட்டைக்கோடுகளில் உள்ள இரண்டு கோடுகளும் இணையாக உள்ளது எனில்,

$\frac{a}{h}=\frac{h}{b}=\frac{g}{f}$ அல்லது $bg^2=af^2$

(ii) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற இரட்டை இணை நேர்கோடுகளை குறித்தால், அவ்விரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு,

$2\sqrt{\frac{(g^2-ac)}{a(a+b)}}$ அல்லது $2\sqrt{\frac{(f^2-bc)}{b(a+b)}}$ ஆகும்.

பொது மற்றும் திட்ட இரட்டை நேர்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு (The relation between the equations of pair of straight lines)

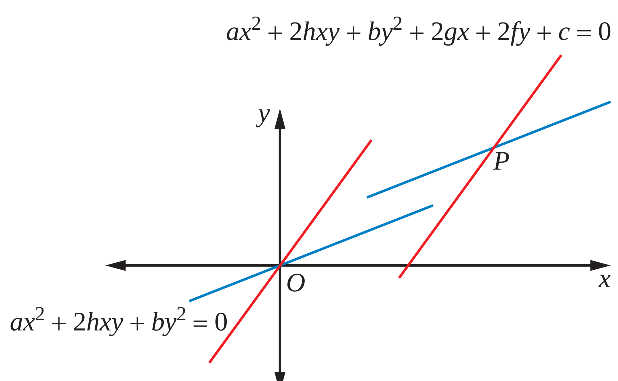
$$ax^2+2hxy+by^2=0 \qquad (6.41)$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (6.42)$$

இவ்விரு இரட்டை நேர்க் கோடுகளின் சாய்வுகள் x^2, xy மற்றும் y^2 -ன் குணகங்களை மட்டுமே சார்ந்திருக்கும்.

(iii) சமன்பாடு (6.41)-ன் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $(0,\ 0)$ மற்றும் சமன்பாடு (6.42)-ன் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி

$P\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2},\frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$ ஆகும்.



படம் 6.51

(iv) கோணம் θ என்பது $ax^2+2hxy+by^2=0$ மற்றும்

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ஆகிய இரு இரட்டை நேர்கோடுகளின் கோணம் சமமாகும். ஆகவே,

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|$$

(v) $ax^2+2hxy+by^2=0$ மற்றும் $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற இரண்டு இரட்டை நேர்கோடுகள், செங்குத்துகோடுகள் எனில், $a+b=0$

எடுத்துக்காட்டு 6.38 $\lambda x^2-10xy+12y^2+5x-16y-3=0$ என்பது ஒரு இரட்டை நேர்க்கோட்டை குறிக்கும் எனில்,

(i) λ -ன் மதிப்பு மற்றும் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(ii) இவ்விரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(iii) இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு

(i) பொதுச் சமன்பாடு $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு, $\lambda x^2-10xy+12y^2+5x-16y-3=0$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை ஒப்பிட,

$$a=\lambda,\ b=12,\ c=-3,\ h=-5,\ g=\frac{5}{2},\ f=-8$$

இம்மதிப்புகளை இரட்டைக் கோட்டிற்கான கட்டுப்பாட்டில் பிரதியிட,

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

அதாவது, $\lambda(12)(-3)+2(-8)\left(\frac{5}{2}\right)(-5)-\lambda(-8)^2-12\left(\frac{5}{2}\right)^2-(-3)(-5)^2=0$

$\Rightarrow \quad -36\lambda+200-64\lambda-75+75=0$

$\Rightarrow \quad \lambda=2$

எனவே, தேவையான சமன்பாடு, $2x^2-10xy+12y^2+5x-16y-3=0.$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் இருபடி உறுப்புகள் $2x^2-10xy+12y^2$ -ஐ எடுத்துக்கொண்டு காரணிப்படுத்த,

$$2x^2-10xy+12y^2 \equiv (x-2y)(2x-6y)$$

எனவே $2x^2-10xy+12y^2+5x-16y-3 \equiv (x-2y+c_1)(2x-6y+c_2)$

ஒரே மாதிரியான கெழுக்களைச் சமப்படுத்த,

$$2c_1+c_2=5,\quad 3c_1+c_2=8,\quad c_1c_2=-3$$

முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காண்பதன் மூலம்

$c_1=3,\ c_2=-1$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$$x-2y+3=0,\ 2x-6y-1=0$$

(ii) இரட்டைக் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியைக் காண,

தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் $(x,\ y) = \left(-10, -\frac{7}{2}\right)$

அல்லது $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$ என்ற சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

(iii) கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{25-24}}{2+12}\right| = \frac{1}{7}$$

எனவே, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

எடுத்துக்காட்டு 6.39 ஒரு மாணவன், அவனுடைய வீட்டிலிருந்து பள்ளிக்குச் சராசரியாக மணிக்கு 6 கி.மீ. வேகத்தில் நடந்து சென்றால் பள்ளி தொடங்குவதற்கு 10 நிமிடம் முன்னதாகப் பள்ளியைச் சென்றடைகிறான். அதே வேளையில், சராசரியாக மணிக்கு 4 கி.மீ வேகத்தில் நடந்து செல்லும்போது 5 நிமிடம் தாமதமாகப் பள்ளியைச் சென்றடைகிறான். அம்மாணவன் தினமும் காலை 8.00 மணிக்கு வீட்டிலிருந்து பள்ளிக்குப் புறப்பட்டுச் சென்றால் பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை காண்க.

(i) அவனுடைய வீட்டிற்கும் பள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு

(ii) சரியான நேரத்திற்கு அவன் பள்ளிக்குச் செல்ல ஆகும் குறைந்தபட்சச் சராசரி வேகம் மற்றும் மாணவன் பள்ளியைச் சென்றடைய ஆகும் நேரம்

(iii) பள்ளி தொடங்கும் நேரம்

(iv) மாணவன் நடந்து செல்லும் பாதையின் இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு.

தீர்வு

x -அச்சானது நேரத்தை மணியிலும், y -அச்சானது தூரத்தை கிலோமீட்டரிலும் குறிப்பிடுகிறது என்க.கொடுக்கப்பட்ட தகவலின்படி,

$$y = 6\left(x - \frac{10}{60}\right) \Rightarrow y = 6x - 1 \qquad (6.43)$$

$$y = 4\left(x + \frac{5}{60}\right) \Rightarrow y = 4x + \frac{1}{3} \qquad (6.44)$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் (6.43) மற்றும் (6.44) தீர்க்க $(x,y) = \left(\frac{2}{3}, 3\right)$

$x = \frac{2}{3}$ மணிகள் $= 40$ நிமிடங்கள், $y = 3$ கிமீ

(i) அவனது பள்ளிக்கும் வீட்டிற்கும் உள்ள தொலைவு 3 கிமீ

(ii) பள்ளிக்கு நேரத்திற்குச் செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் குறைந்தபட்ச சராசரி

வேகம் $= \frac{60}{40} \times 3 = 4.5$ கிமீ / மணி

மற்றும் பள்ளியை அடைய ஆகும் நேரம் $= \frac{2}{3}$ மணி அல்லது 40 நிமிடம்

(iii) பள்ளி தொடங்கும் நேரம் காலை 8.40 ஆகும்.

(iv) நடைபாதையின் இரட்டை நேர்கோடுகளின் சமன்பாடு

$$(6x-y-1)\left(4x-y+\frac{1}{3}\right)=0$$

$$72x^2-30xy+3y^2-6x+2y-1=0 \qquad (6.45)$$

கீழே கொடுக்கப்பட்ட வலைதளத்தின் மூலம் வளைவரையை வரையலாம்.

https://www.geogebra.org/graphing, *https://www.geogebra.org/m/fhS6HUtP*

எடுத்துக்காட்டு 6.40 $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டைக்கோடுகளில் ஒரு கோடு $px+qy=0$ -க்கு செங்குத்தாக உள்ளது எனில் $ap^2+2hpq+bq^2=0$ என நிறுவுக.

தீர்வு

m_1 மற்றும் m_2 என்பன $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோட்டின் சாய்வுகள் மற்றும் m என்பது $px+qy=0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு என்க.

எனவே, $m_1+m_2=\frac{-2h}{b}$, $m_1m_2=\frac{a}{b}$ மற்றும் $m=-\frac{p}{q}$

$ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளில் ஒரு கோடு, $px+qy=0$ -க்கு செங்குத்தாக உள்ளதால், செங்குத்துக் கோடுகளின் நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்த,

$$mm_1=-1 \text{ அல்லது } mm_2=-1$$

$$\Rightarrow \quad (mm_1+1)=0 \text{ அல்லது } (mm_2+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (mm_1+1)(mm_2+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (m_1m_2)m^2+(m_1+m_2)m+1=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{p}{q}\right)^2+\left(-\frac{2h}{b}\right)\left(-\frac{p}{q}\right)+1=0$$

$$\Rightarrow \quad ap^2+2hpq+bq^2=0$$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 6.41 $3x-2y+2=0$ என்ற கோடு, $3x^2+5xy-2y^2+4x+5y=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளை வெட்டும் இரு புள்ளிகளை ஆதியுடன் இணைக்கும் கோடுகள் செங்குத்தானவை எனக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியுடன் இணைக்கக் கிடைக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு ஒரு இரண்டாம் படி சமபடித்தான சமன்பாடாகும்.

$3x^2+5xy-2y^2+4x+5y=0$ மற்றும் $3x-2y+2=0$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சமன்பாடுகளையும் பயன்படுத்தி சமபடித்தான சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

$$3x^2+5xy-2y^2+(4x+5y)(1)=0 \text{ மற்றும் } \frac{(3x-2y)}{-2}=1$$

$$3x^2+5xy-2y^2+(4x+5y)\left(\frac{3x-2y}{-2}\right)=0$$

அதாவது, $(-2)(3x^2+5xy-2y^2)+(4x+5y)(3x-2y)=0$

இதனைச் சுருக்குவதால் $2x^2-xy-2y^2=0$ எனப் பெறலாம்.

இங்கு x^2 மற்றும் y^2 -ன் கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

அதாவது, $a+b=0$, $(\because\ a=2, b=-2)$

எனவே, கோடுகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக அமைகிறது.

பயிற்சி 6.4

1. $x-2y-3=0$ மற்றும் $x+y+5=0$ என்ற தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. $4x^2+4xy+y^2-6x-3y-4=0$ என்பது ஒரு இணை இரட்டை நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக.

3. $2x^2+3xy-2y^2+3x+y+1=0$ என்ற கோடு ஒரு செங்குத்து இரட்டை நேர்க்கோடு எனக் காட்டுக.

4. $2x^2-xy-3y^2-6x+19y-20=0$ என்பது ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் கோடுகள் எனவும், அதற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\tan^{-1}(5)$ என நிறுவுக.

5. $y=x$ என்ற கோட்டுடன் α கோணத்தை உடைய, ஆதி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு $x^2-2xy\sec 2\alpha+y^2=0$ என காண்பி.

6. $2x-3y+1=0$ மற்றும் $5x+y-3=0$ என்ற கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாகவும், $(1,3)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லக்கூடிய இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரட்டை நேர்க்கோடுகளின் தனித்தனி நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
   (i) $3x^2+2xy-y^2=0$ (ii) $6(x-1)^2+5(x-1)(y-2)-4(y-2)^2=0$
   (iii) $2x^2-xy-3y^2-6x+19y-20=0$

8. $ax^2+2hxy+by^2=0$ எனும் இரட்டை நேர்க்கோடுகளில் ஒன்றின் சாய்வு மற்றதின் சாய்வைப்போல் இரண்டு மடங்கு எனில் $8h^2=9ab$ என நிறுவுக.

9. $ax^2+2hxy+by^2=0$ எனும் இரட்டை நேர்கோடுகளில் ஒன்றின் சாய்வு மற்றதின் சாய்வைப் போல் மூன்று மடங்கு எனில் $3h^2=4ab$ எனக் காட்டுக.

10. $x^2-4xy+y^2=0$ என்ற இரட்டைக் கோடும் $x+y-2=0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்ட PQ கோடும், ΔOPQ -ஐ உருவாக்குகிறது எனில், O -லிருந்து வரையப்படும் ΔOPQ -ன் நடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. $6x^2+5xy-py^2+7x+qy-5=0$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் இரட்டை நேர்க்கோடுகள் எனில், p மற்றும் q -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

12. $12x^2+7xy-12y^2-x+7y+k=0$ என்ற சமன்பாடு இரட்டை நேர்கோட்டுகளின் சமன்பாட்டைக் குறித்தால் k -ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் அவை இணையா? அல்லது வெட்டிக் கொள்பவையா? எனக் காண்க.

13. $12x^2+2kxy+2y^2+11x-5y+2=0$ என்ற சமன்பாடு இரட்டை நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் குறித்தால் k -ன் மதிப்பைக் காண்க.

14. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 12x + 16y - 12 = 0$ என்பது இணையான இரட்டை நேர்க்கோடுகள் என நிறுவுக. மேலும் இவ்விரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

15. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் இணையானவை எனக் காட்டுக. மேலும், இவ்விரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

16. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ இவற்றில் ஒரு கோடு ஆய அச்சுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் இருசமவெட்டி எனில் $(a+b)^2 = 4h^2$ என நிறுவுக.

17. $x^2 - 2kxy - y^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடு $x^2 - 2lxy - y^2 = 0$ -ன் கோணங்களின் இருசமவெட்டி எனில், இரண்டாவதாகக் குறிப்பிட்ட கோடுகளும் முதலாவதாகக் குறிப்பிட்ட கோடுகளின் கோணங்களின் இருசமவெட்டி எனக் காண்பி.

18. $3x - 2y - 1 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $3x^2 + 5xy - 3y^2 + 2x + 3y = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளை வெட்டும் இருபுள்ளிகளை ஆதியுடன் இணைக்கும் கோடுகள் செங்குத்தானவை எனக் காண்க.

பயிற்சி 6.5

GH4CR

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

1. ஒரு புள்ளிக்கும் y அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட தூரமானது, அப்புள்ளிக்கும் ஆதிக்கும் இடைப்பட்ட தூரத்தில் பாதி எனில் அப்புள்ளியின் நியமப்பாதை

   (1) $x^2 + 3y^2 = 0$ (2) $x^2 - 3y^2 = 0$ (3) $3x^2 + y^2 = 0$ (4) $3x^2 - y^2 = 0$

2. $(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதை

   (1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3) $x^2 + y^2 = a^2$ (4) $y^2 = 4ax$

3. $3x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 17 = 0$ என்ற நியமப்பாதையின் மீது அமைந்திருக்கும் புள்ளி

   (1) (0,0) (2) $(-2, 3)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(0, -1)$

4. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = k$ என்ற நியமப்பாதையின் மீது $(8, -5)$ என்ற புள்ளி உள்ளது எனில், k -ன் மதிப்பு

   (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

5. $(2, 3)$ மற்றும் $(-1, 4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் மீது (α, β) என்ற புள்ளி இருந்தால்

   (1) $\alpha + 2\beta = 7$ (2) $3\alpha + \beta = 9$ (3) $\alpha + 3\beta = 11$ (4) $3\alpha + \beta = 11$

6. $3x - y = -5$ என்ற கோட்டுடன் 45° கோணம் ஏற்படுத்தும் கோட்டின் சாய்வுகள்

   (1) $1, -1$ (2) $\frac{1}{2}, -2$ (3) $1, \frac{1}{2}$ (4) $2, -\frac{1}{2}$

7. $4 + 2\sqrt{2}$ என்ற சுற்றளவு கொண்ட முதல் கால் பகுதியில் ஆய அச்சுகளுடன் அமையும் இருசமபக்க முக்கோணத்தை உருவாக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

   (1) $x + y + 2 = 0$ (2) $x + y - 2 = 0$ (3) $x + y - \sqrt{2} = 0$ (4) $x + y + \sqrt{2} = 0$

8. $(-2,4), (-1,2), (1,2)$ மற்றும் $(2,4)$ என்ற வரிசையில் நாற்கரத்தின் நான்கு முனைப்புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க. ஒரு கோடு $(-1, 2)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது. மேலும் அது நாற்கரத்தை சமபரப்பாக பிரிக்கிறது எனில், அதன் சமன்பாடு,

(1) $x + 1 = 0$ (2) $x + y = 1$ (3) $x + y + 3 = 0$ (4) $x - y + 3 = 0$

9. $(1, 2)$ மற்றும் $(3, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் செங்குத்து இருசமவெட்டியானது ஆய அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகள்

(1) $5, -5$ (2) $5, 5$ (3) $5, 3$ (4) $5, -4$

10. சாய்வு 2 உடைய கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $\sqrt{5}$ எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $x-2y=\sqrt{5}$ (2) $2x-y=\sqrt{5}$ (3) $2x-y=5$ (4) $x-2y-5=0$

11. $5x - y = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோடு ஆய அச்சுகளுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 5 ச. அலகுகள் எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $x + 5y \pm 5\sqrt{2} = 0$ (2) $x - 5y \pm 5\sqrt{2} = 0$

(3) $5x + y \pm 5\sqrt{2} = 0$ (4) $5x - y \pm 5\sqrt{2} = 0$

12. $x-y+5=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் y அச்சை வெட்டும் புள்ளி வழியே செல்லக்கூடியதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $x-y-5=0$ (2) $x+y-5=0$ (3) $x+y+5=0$ (4) $x+y+10=0$

13. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு முனை $(2, 3)$ மற்றும் இப்புள்ளிக்கு எதிர்ப்புறம் அமையும் பக்கத்தின் சமன்பாடு $x + y = 2$ எனில் பக்கத்தின் நீளம்

(1) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (2) 6 (3) $\sqrt{6}$ (4) $3\sqrt{2}$

14. p மற்றும் q ஆகியவற்றின் எந்த மதிப்புகளுக்கும் $(p+2q)x+(p-3q)y = p-q$ என்ற கோட்டின் மீது அமையும் புள்ளி

(1) $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$ (3) $\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$ (4) $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$

15. $(1, 2)$ மற்றும் $(3, 4)$ ஆகிய இரு புள்ளியிலிருந்து சமத் தொலைவிலும், $2x-3y=5$ என்ற கோட்டின் மீதும் அமைந்துள்ள புள்ளி

(1) $(7, 3)$ (2) $(4, 1)$ (3) $(1, -1)$ (4) $(-2, 3)$

16. $y = -x$ என்ற கோட்டிற்கு $(2, 3)$ என்ற புள்ளியின் பிம்பப்புள்ளி

(1) $(-3, -2)$ (2) $(-3, 2)$ (3) $(-2, -3)$ (4) $(3, 2)$

17. $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ என்ற கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து செங்குத்துத் தொலைவு

(1) $\frac{11}{5}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{12}{5}$ (4) $\frac{5}{7}$

18. $2x-3y+1=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் $(1, 3)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் நேர்க்கோட்டின் y வெட்டுத்துண்டு

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{2}{9}$

19. $x+(2k-7)y+3=0$ மற்றும் $3kx+9y-5=0$ இவ்விரு கோடுகள் செங்குத்தானவை எனில் k -ன் மதிப்பு

(1) $k=3$ (2) $k=\frac{1}{3}$ (3) $k=\frac{2}{3}$ (4) $k=\frac{3}{2}$

20. ஒரு சதுரத்தின் ஒரு முனை ஆதியாகவும் மற்றும் அதன் ஒரு பக்கம் $4x+3y-20=0$ என்ற கோட்டின் மீதும் அமைந்திருந்தால், அந்தச் சதுரத்தின் பரப்பு

(1) 20 சஅ (2) 16 சஅ (3) 25 சஅ (4) 4 சஅ

21. $6x^2+41xy-7y^2=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் x –அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் α மற்றும் β எனில், $\tan\alpha\tan\beta=?$

(1) $-\frac{6}{7}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $-\frac{7}{6}$ (4) $\frac{7}{6}$

22. $x^2-4y^2=0$ மற்றும் $x=a$ என்ற கோடுகளால் உருவாக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) $2a^2$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (3) $\frac{1}{2}a^2$ (4) $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2$

23. $6x^2-xy+4cy^2=0$ என்ற கோடுகளில் ஒரு கோடானது $3x+4y=0$ எனில் c -ன் மதிப்பு

(1) –3 (2) –1 (3) 3 (4) 1

24. $x^2-xy-6y^2=0$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில் $\frac{2\cos\theta+3\sin\theta}{4\sin\theta+5\cos\theta}$ -ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{5}{9}$ (4) $\frac{1}{9}$

25. $x^2+2xy\cot\theta-y^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகளில் ஒரு சமன்பாடு

(1) $x-y\cot\theta=0$ (2) $x+y\tan\theta=0$

(3) $x\cos\theta+y(\sin\theta+1)=0$ (4) $x\sin\theta+y(\cos\theta+1)=0$

பாடத் தொகுப்பு (Summary)

- கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களின் அடிப்படையில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு வகைகள்

வ. எண்	கொடுக்கப்பட்ட தகவல்	நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு
(i)	சாய்வு (m) மற்றும் y -வெட்டுத்துண்டு (b)	$y=mx+b$
(ii)	சாய்வு (m) மற்றும் புள்ளி (x_1,y_1)	$y-y_1=m(x-x_1)$
(iii)	இரண்டு புள்ளிகள் (x_1,y_1) மற்றும் (x_2,y_2)	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
(iv)	x-வெட்டுத்துண்டு(a)மற்றும் y -வெட்டுத்துண்டு(b)	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
(v)	செங்குத்து நீளம் (p) மற்றும் கோணம் (α)	$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$
(vi)	துணையலகு வடிவம் : துணையலகு (r)	$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$
(vii)	பொது வடிவம்	$ax+by+c=0$

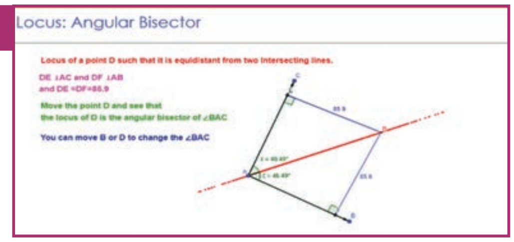
நேர்க்கோட்டின் வடிவம்	இணைக்கான நிபந்தனை	செங்குத்துக்கான நிபந்தனை
$y = m_1 x + c_1$ மற்றும் $y = m_2 x + c_2$	$m_2 = m_1$	$m_1 m_2 = -1$
$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$	$a_1 b_2 = a_2 b_1$	$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

- ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ ஆனது $ax + by + c = 0,\ (c \neq 0)$ என்ற கோட்டிற்கு ஆதிப்பக்கமாகவோ அல்லது ஆதி அல்லாத பக்கத்திலோ இருந்தால் $ax_1 + by_1 + c$ மற்றும் c முறையே ஒரே குறி அல்லது எதிர்க்குறிக்கு இணங்க அமையும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) இவ்விரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு,
  $$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax + by + c = 0$ -க்கு உள்ள தொலைவு $\left| \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$
- $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_1 x + b_1 y + c_2 = 0$ என்ற இணை கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $\dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு
  (i) இணையான கோடுகள் $ax + by = k$
  (ii) செங்குத்தான கோடுகள் $bx - ay = k$
- ஒரு புள்ளி (x_1, y_1) வழியே $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு
  (i) இணையாக உள்ளது எனில், $ax + by = ax_1 + by_1$ மற்றும்
  (ii) செங்குத்தாக உள்ளது எனில், $bx - ay = bx_1 - ay_1$ ஆகும்.
- $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொருத்து (x_1, y_1) புள்ளியின் பிம்பப்புள்ளியின் (image of point) ஆயத்தொலைகள் $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = -\dfrac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$

இரட்டை நேர்க்கோடுகள்	இணைக்கான நிபந்தனை	செங்குத்துக்கான நிபந்தனை
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$	$h^2 - ab = 0$	$a + b = 0$

- $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோட்டின் கோணத்தின் இருசமவெட்டியின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2 - y^2}{a - b} = \dfrac{xy}{h}$
- இரண்டாம் படி பொது சமன்பாடு $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
  (i) மேற்கண்ட சமன்பாடு ஓர் இரட்டை நேர்க்கோடாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை (கட்டுப்பாடு) $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$
  (ii) இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\theta = \tan^{-1}\left| \dfrac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \right|$. இங்கு $a + b = 0$ எனில், கோடுகள் செங்குத்துக் கோடுகள் ஆகும்.
  (iii) வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் $P = \left(\dfrac{hf - bg}{ab - h^2}, \dfrac{gh - af}{ab - h^2} \right)$
- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோடுகள் இணையாக அமையும் எனில், $\dfrac{a}{h} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{g}{f}$ அல்லது $bg^2 = af^2$
- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இணையாகச் செல்லும் இரு நேர்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு $2\sqrt{\dfrac{(g^2 - ac)}{a(a + b)}}$ அல்லது $2\sqrt{\dfrac{(f^2 - bc)}{b(a + b)}}$.

இணையச் செயல்பாடு – 6 (அ)



படி–1

இணைய உலாவியில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலியைத் தட்டச்சு செய்யவும் அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

படி–2

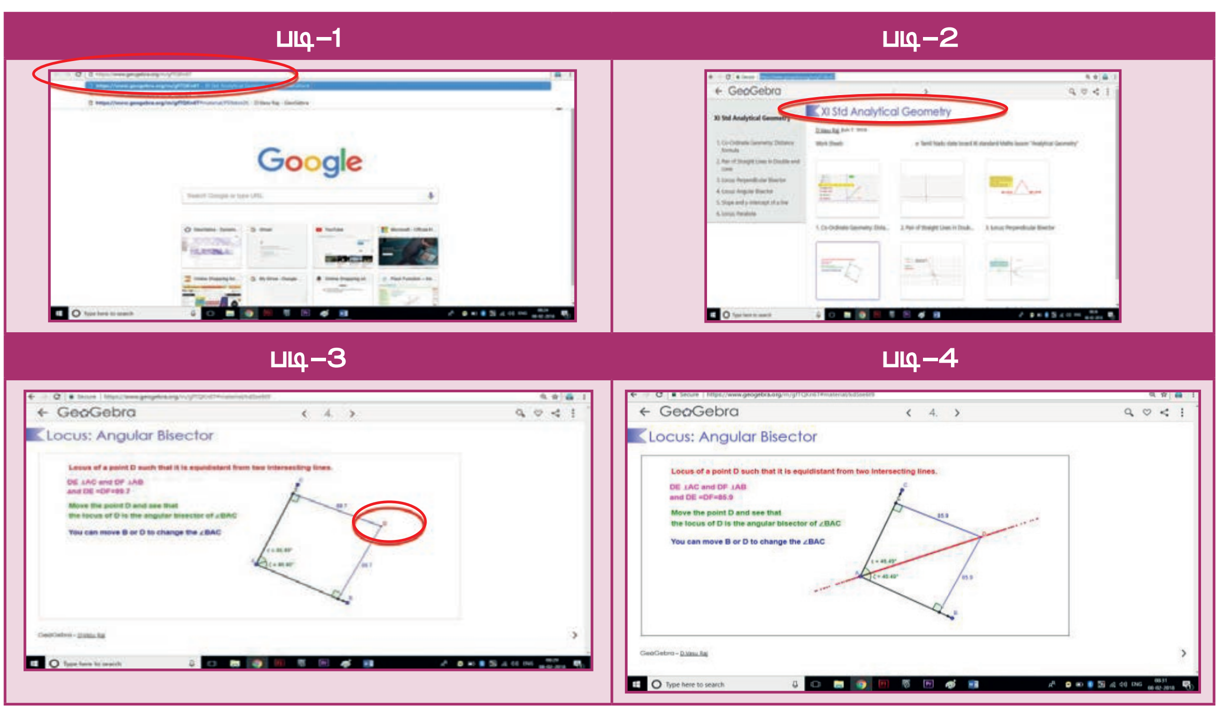
"XI STD Analytical Geometry" என்ற Geogebra பக்கம் தோன்றும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 5 செயல்களில் ஏதேனும் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுத்து செய்து பார்க்கவும். எ.கா: "Locus: Angular Bisector"

படி–3

"Locus: Angular Bisector" என்ற பயிற்சித்தாளில் "D" என்ற புள்ளியை அதன் நியமப்பாதையில் நகர்த்தவும்.

படி–4

"D" என்ற புள்ளி இரண்டு கோடுகளுக்கும் சமமான செங்குத்து தூரத்தில் நகர்ந்து கோண வெட்டியாகச் செல்வதை அறியவும்.

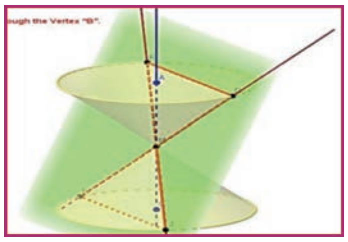


இதே போன்று செங்குத்து இருசமவெட்டி, பரவளையம், நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடான $y = mx + c$ போன்ற செயல்பாடுகளைச் செய்து பார்க்கவும்.

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/QNaNghJZ

இணையச் செயல்பாடு – 6 (ஆ)



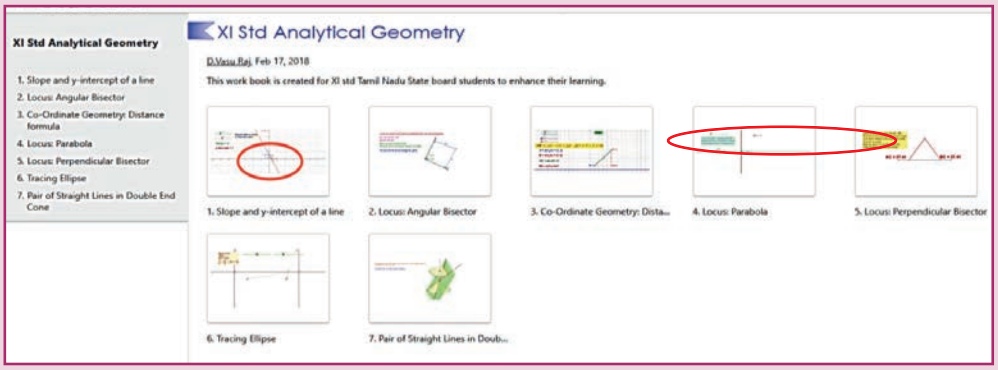
படி–1

இணைய உலாவியில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலியைத் தட்டச்சு செய்யவும் அல்லது விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தவும். "XI STD Analytical Geometry" என்ற Geogebra பணிப் புத்தகம் திறக்கும். அதில் உங்களுக்குத் தேவையான பயிற்சியை தெரிவு செய்து பார்க்கலாம். இப்பொழுது "Pair of Straight Line in Double End Cone" என்னும் பயிற்சியைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்..

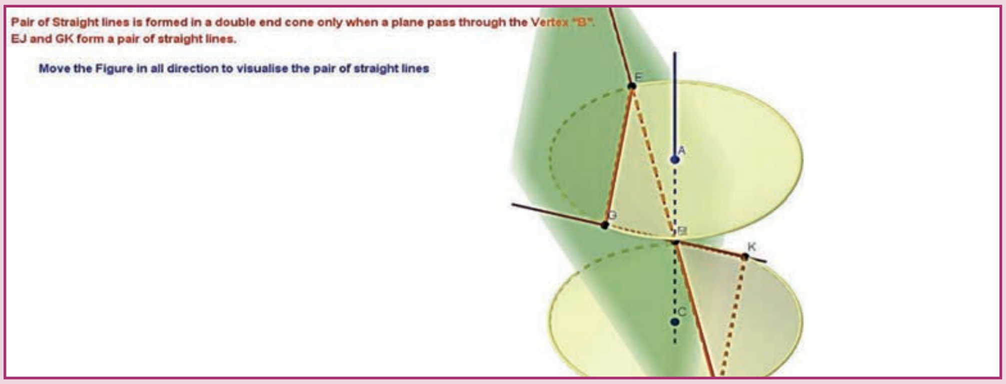
படி–2

முப்பரிமாணத்தில் உள்ள ஒரு சமதளத்தை இரண்டு முனை கொண்ட கூம்பு அதன் உச்சி வழியே வெட்டிச் செல்லும் போது ஓர் இணை நேர்கோடு அமைவதைக் காணலாம். மேலும் E மற்றும் D ஆகிய புள்ளிகளை நகர்த்தியும் மீளாய்வு செய்யலாம்.

படி–1



படி–2



*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டுமே.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : https://ggbm.at/QNaNghJZ

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

(1) (i) $\{2, 3, 5, 7\}$ (ii) $\{1\}$ (iii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(iv) $\{-5\}$ (2) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$ (3) (i) முடிவுறு கணம்

(ii) முடிவுறாக் கணம் (iii) முடிவுறாக் கணம் (iv) முடிவுறாக் கணம்

(v) முடிவுறாக் கணம் (5) உண்மை அல்ல (6) 0

(7) 128 (8) $\{0, 1, 2, 3\}$ (9) $A = \{x, y, z\}$ மற்றும் $B = \{1,2\}$

(10) $\{(-1, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 2)\}$

பயிற்சி 1.2

(1)(i) தற்சுட்டு ; சமச்சீர் அல்ல ; கடப்பு (ii) தற்சுட்டு அல்ல ; சமச்சீர் ; கடப்பு அல்ல

(iii) தற்சுட்டு ; சமச்சீர் அல்ல ; கடப்பு அல்ல (iv) தற்சுட்டு ; சமச்சீர்

(v) $\mathbb{R}$ ஒரு வெற்றுக் கணம் ; தற்சுட்டு அல்ல ; சமச்சீர் ; கடப்பு

(2) (i) (c, c) மற்றும் (d, d) (ii) (c, a)

(iii) சேர்க்க வேண்டியதில்லை (iv) $(c, c), (d, d), (c, a)$ சேர்க்கப்படவேண்டும்

(3) (i) (c, c) (ii) (c, a) (iii) ஏதுமில்லை (iv) (c, c) மற்றும் (c, a)

(5) $\{(3, 8), (6, 6), (9, 4), (12, 2)\}$ தற்சுட்டு அல்ல ; சமச்சீர் அல்ல ; கடப்பு ; சமானத் தொடர்பு அல்ல

(7) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$ தற்சுட்டு அல்ல ; சமச்சீர் ; கடப்பு அல்ல ; சமானத் தொடர்பு அல்ல

(8) மீச்சிறு கணம் $= \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. மீப்பெரு கணம் $= A \times A$

பயிற்சி 1.3

(1) ஆம்; நேர்மாறு சார்பு அல்ல

(2) $f(-4) = 8,\ f(1) = 0,\ f(-2) = 6,\ f(7) = 0,\ f(0) = 0$

(3) $f(-3) = 1,\ f(5) = 38,\ f(2) = 1,\ f(-1) = -5,\ f(0) = -3$

(4) (i) சார்பு; ஒன்றுக்கொன்று அல்ல, மேற்கோர்த்தல் அல்ல (ii) சார்பு அல்ல .

(5) (i) $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$ (ii) இயலாது

(iii) இயலாது (iv) $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

(6) $\mathbb{R} - \{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\}, n \in \mathbb{Z}$ (7) $\emptyset$ (8) $(-\infty, \frac{-1}{3}] \cup [1, \infty)$

(9) $\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R} - \{0\}$ (10) எல்லா x -க்கும் $(f \circ g) = 0, (g \circ f) = 0$

(12) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$ (13) $x > 0$

(15) மொத்த கட்டணம் $= 0.43$ மீ $+ 50$, பயண கட்டணம் $=$ ₹ 738

(16) $(A + S)(x) = 55,000 + 0.09x$, மொத்த வருமானம் $=$ ₹14, 05, 000

(17) $(g \circ f)(x) = 62.115x$

(18) வருமானம் = ₹$(200 - x)x$; மொத்த செலவு = ₹$100(200 - x)$;

இலாபம் = ₹$(200 - x)x - 100(200 - x)$

(19) $f^{-1}(x) = \frac{9x}{5} + 32$ (20) $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

பயிற்சி 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(3)	(2)	(4)	(1)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(2)	(4)	(3)	(4)	(3)	(2)	(4)	(4)	(1)	(4)	(2)	(3)	

பயிற்சி 2.1

(1) $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $3.14 \in \mathbb{Q}$, $4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$

(3) ஆமாம், $4+\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$ (4) ஆமாம், $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$

(5) $\frac{1}{2^{1001}}$

பயிற்சி 2.2

(1) (i) $-4 < x < 10$ (ii) $\mathbb{R}$ (iii) $\frac{11}{3} \le x \le \frac{13}{3}$ (iv) $-7 < x < 7$

(2) $\left(-\infty, \frac{5}{12}\right) \cup \left(\frac{7}{12}, \infty\right)$ (3) $\left(-\infty, \frac{-7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$

(4) $\frac{-15}{2} \le x \le \frac{11}{2}$ (5) $\frac{-3}{10} < x < \frac{7}{10}$ (6) தீர்வு இல்லை

பயிற்சி 2.3

(1) (i) $[-1, 4)$ (ii) $[-3, 5]$ (iii) $(-\infty, 3)$ (iv) $(-\infty, 5)$

(2) (i) 1, 2, 3, 4 (ii) . . . , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4

(3)(i) $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right]$ (ii) . . . , −7, −6, −5 (iii) தீர்வு இல்லை

(4)(i) $(-\infty, 2]$ (ii) $\left(\frac{34}{5}, \infty\right)$ (5) 93

(6) 120 லிட்டர், 300 லிட்டருக்கும் இடையே

(7) (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19) (8) t = 9 வினாடிகள், 11 வினாடிகள்

(9) 10 மணிக்கு குறைவாக (10) < ₹ 21,000 அல்லது > ₹ 33,000.

பயிற்சி 2.4

(1) $x^2 - 4x - 21 = 0$ (2) $-\frac{2}{5}\left(x^2 - 2x - 4\right)$ (3) $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

(6) (i) $b = 0$ (ii) $3b^2 = 16ac$ (iii) $c = a$

(8) (i) மெய் மற்றும் சமமற்றது (ii)மெய் மற்றும் சமமற்றது (iii) மெய் மற்றும் சமமற்றது

(9) (i) சந்திக்காது (ii)2 புள்ளிகளில் சந்திக்கும் (iii) ஒரு புள்ளியில் தொடும்

(10) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

பயிற்சி 2.5

(1) $\left[-3, \frac{5}{2}\right]$ (2) $[1, 2]$

பயிற்சி 2.6

(1) $-\frac{5}{2}$ மற்றும் $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{3+\sqrt{53}}{2}$ மற்றும் $\frac{3-\sqrt{53}}{2}$

(3) $x=\pm 2$ (4) $x=-\frac{3}{5}$ அல்லது -1

பயிற்சி 2.7

(1) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$ (2) $a = 5$

பயிற்சி 2.8

(1) $(0, 1) \cup (2, \infty)$ (2) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)\cup(2, 4)$ (3) $(-3, -2]\cup[2, 5)$

பயிற்சி 2.9

(1) $\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$ (2) $\frac{7}{3(x-2)}+\frac{2}{3(x+1)}$

(3) $\frac{1}{6(x-1)}+\frac{2}{15(x+2)}+\frac{-3x+1}{10(x^2+1)}$ (4) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$

(5) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}$ (6) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+1}$

(7) $1+\frac{13}{x-3}-\frac{7}{x-2}$ (8) $(x-5)+\frac{32}{(x+3)}-\frac{11}{(x+2)}$

(9) $-\frac{14}{9(x+1)}-\frac{11}{3(x+1)^2}+\frac{14}{9(x-2)}$ (10) $\frac{4}{x+1}+\frac{2x-3}{x^2+1}$

(11) $2+\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)$ (12) $\frac{3}{x+1}+\frac{4-3x}{x^2+1}$

பயிற்சி 2.11

(1) (i) 25 (ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{1}{100}$ (iv) $\frac{1}{9}$ (v) $\frac{1}{3}$

(2) 8 (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) 2

(6) $\frac{21+7\sqrt{2}+3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{7}$ (7) 5 (8) $\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$

பயிற்சி 2.12

(1) $\log_b y = x$, $(0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ (2) $\frac{5}{6}$

(3) 64 (4) 2 (11) $2\sqrt{2}$ (12) -10

பயிற்சி 2.13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(3)	(3)	(2)	(3)	(1)	(3)	(1)	(1)	(4)

பயிற்சி 3.1

(1) (i) முதல் காற்பகுதி (ii) இரண்டாம் காற்பகுதி

(iii) நான்காம் காற்பகுதி (iv) நான்காம் காற்பகுதி

(v) இரண்டாம் காற்பகுதி

(2) (i) 35 (ii) 165 (iii) 70 (iv) 90 (v) 270

(8) $k \in [-1, 1]$ (9) $\sec\theta = \frac{p^2+1}{2p}$; $\tan\theta = \frac{p^2-1}{2p}$; $\sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$

(10) $\left(c^2+bd\right)^2 = (ad+cb)^2 + (ac-b^2)^2$

பயிற்சி 3.2

(1) (i) $\frac{\pi}{6}$ ரேடியன்கள் (ii) $\frac{3\pi}{4}$ ரேடியன்கள் (iii) $-\frac{41\pi}{36}$ ரேடியன்கள்

(iv) $\frac{5\pi}{6}$ ரேடியன்கள் (v) $\frac{11\pi}{6}$ ரேடியன்கள்

(2) (i) 60° (ii) 20° (iii) 72° (iv) 420° (v) 200°

(3) $r \approx 31.82$ மீட்டர்கள் (4) $s = \frac{20\pi}{3} = 20.95$ செ.மீ

(5) $\theta = 12^\circ 36'$ (6) $s = 7.16$ அடி (7) $r_1 : r_2 = 5:4$

(8) வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணம் $\approx 65^\circ 27' 16''$

(9) 6000° (10) 14° (11) $\frac{3\pi}{4}$

பயிற்சி 3.3

(1) (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(v) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{3}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\cos\theta = \frac{5}{7}$; $\tan\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{7}{2\sqrt{6}}$; $\sec\theta = \frac{7}{5}$; $\cot\theta = \frac{5}{2\sqrt{6}}$

(3) (i) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sec\theta = -2$; $\tan\theta = \sqrt{3}$; $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$; $\sec\theta = \frac{3}{2}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(iii) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{3}{2}$; $\sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$; $\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cot\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

(iv) $\sec\theta = -\sqrt{5}$; $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cot\theta = -\frac{1}{2}$; $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(v) $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{13}{12}$; $\tan\theta = -\frac{12}{5}$; $\cot\theta = -\frac{5}{12}$

(5) $\theta = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$

பயிற்சி 3.4

(1) (i) $\sin(x+y) = \frac{220}{221}$ (ii) $\cos(x-y) = \frac{171}{221}$ (iii) $\tan(x+y) = \frac{220}{21}$

(2) (i) $\sin(A+B) = \frac{187}{205}$ (ii) $\cos(A-B) = \frac{156}{205}$

(3) $\cos(x-y) = \frac{4}{5}$ (4) $\sin(x-y) = -\frac{87}{425}$

(5) $\cos 105^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -(2+\sqrt{3})$

(7) $4x^2 - 2\sqrt{6}x + 1 = 0$ (16) 0 (22) 1 (24) $\frac{2}{11}$

பயிற்சி 3.5

(1) (i) $\frac{161}{289}$ (ii) $-\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{3713}{4225}$ (2)(i) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (ii) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

பயிற்சி 3.6

(1) (i) $\frac{1}{2}[\sin 63^\circ + \sin 7^\circ]$ (ii) $\frac{1}{2}[\sin 6x + \sin 2x]$ (iii) $\frac{1}{2}[\sin 12\theta + \sin 8\theta]$

(iv) $\frac{1}{2}[\cos 7\theta + \cos 3\theta]$ (v) $\frac{1}{2}[\cos\theta - \cos 9\theta]$

(2) (i) $2\cos 55^\circ \sin 20^\circ$ (ii) $2\cos 40^\circ \cos 25^\circ$

(iii) $2\sin 45^\circ \cos 5^\circ$ (iv) $2\sin 55^\circ \sin 20^\circ$

பயிற்சி 3.8

(1) (i) $\pi = -\frac{\pi}{4}$; $\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right), n \in \mathbb{Z}$ (ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$; $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\theta = -\frac{\pi}{6}$; $\theta = n\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right), n \in \mathbb{Z}$

(2)(i) $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ (ii) $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$ (iii) $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (iv) $x = 0, \pi$

(3)(i) $x = (2n+1)\frac{\pi}{6}$ அல்லது $x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}, \; n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ அல்லது $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, \; n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ அல்லது $\theta = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

(iv) $\theta = \frac{n\pi}{3}$ அல்லது $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \; n \in \mathbb{Z}$ (v) $\theta = 2n\pi$ அல்லது $\theta = \frac{2n\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{6}\right), \; n \in \mathbb{Z}$

(vi) $\theta = (8n+1)\frac{\pi}{4}, \; n \in \mathbb{Z}$ (vii) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

(viii) $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3}, \; n \in \mathbb{Z}$ (ix) $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, \; n \in \mathbb{Z}$

(x) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{10}, \; n \in \mathbb{Z}$ (xi) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

பயிற்சி 3.9

(2) $\angle A = 75^\circ$ (9) 40 மீ, 40 மீ, 4 மீ (10) 4 மீ, 4 மீ, 4 மீ மற்றும் $4\sqrt{3}$ ச.மீ

பயிற்சி 3.10

(1) முக்கோணம் கிடைக்காது (3) $\angle A = 15^\circ, \angle B = 105^\circ, C = \sqrt{6}$

(7) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ கி.மீ (8) $2\sqrt{13}$ கி.மீ (9) $3+\sqrt{73}$ கி.மீ (10) 7 கி.மீ

(11) மொத்த செலவு : ₹155800 மற்றும் சுற்றளவு $180 + 20\sqrt{27}$ அடி

(12) $x = 100$ கி.மீ (13) $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ கி.மீ (14) $2\sqrt{6} + 2(\sqrt{3}+3)$ கி.மீ

(15) $10\sqrt{13}$ கி.மீ

பயிற்சி 3.11

(1) (i) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (iii) $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (iv) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (v) $\theta = \frac{\pi}{3}$

பயிற்சி 3.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(1)	(1)	(1)	(4)	(4)	(1)	(2)	(4)	(2)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(2)	(3)	(3)	(2)	(4)	(1)	(1)	(1)	(1)

பயிற்சி 4.1

(1) (i) 17 (ii) 6 (iii) 20 (iv) 720 (v) 120

(2) (i) 151200 (ii) 24 (3) (i) 12 (ii) 24
(4) (i) 64 (ii) 24 (5) (i) 90 (ii) 64
(6) (i) 144 (ii) 80 (7) (i) 48 (ii) 90
(8) (i) 9000 (ii) 4536 (iii) 4464 (9) (i) 36 (ii) 60
(10) 13 (11) 400 (12) (i) 42 (ii) 78
(13) (i) 4^6 (ii) 3^{10} (iii) 10^{12} (14) (i) 720 (ii) 144
(iii) 4 (iv) 144 (v) 220 (vi) $(n+3)(n+2)$
(15) (i) 15 (ii) 120 (iii) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (16) (i) 4 (ii) 100

பயிற்சி 4.2

(1) 10 (2) 4 (3) (i) 336 (ii) 172800 (4) 720
(5) (i) 4^{10} (ii) $3^4 \times 5^6$ (iii) 11! (6) (i) 4^5 (ii) 15^5
(7) 144 (8) (i) 14! (ii) 9! × 6! (iii) $8! \times {}^9P_6$
(9) 34650 (10) 1260 (11) 6912 (12) 60
(13) (i) 2^8 (ii) 28 (14) (i) 43200 (ii) 151200
(iii) 19807200 (iv) 151200 (15) (i) 180 (ii) 60 (iii) 30
(16) (i) 379 (ii) 135 (17) 120, NIGHT (18) 7
(19) 399960 (20) 571956

பயிற்சி 4.3

(1) 1 (2) 3 (3) 10, 3 (6) 20
(9) (i) ${}^{14}C_7 = 3432$ (ii) ${}^{15}C_2 = 105$ (iii) ${}^{20}C_2 = 190$ (iv) ${}^{100}C_5$
(v) ${}^5C_3 \times {}^4C_2 \times {}^2C_1 = 120$ (10) (i) $2^4 = 16$ (ii) $2^5 = 32$ (iii) 2^n

(11) (i) ${}^{25}C_3$ (ii) ${}^{25}P_3$ (12) ${}^{10}P_2 \times {}^8C_4 = 6300$
(13) (i) ${}^{10}C_3 = 120$ (ii) ${}^{10}C_5 = 252$ (14) ${}^5C_2 \times {}^{20}C_3 = 11400$
(i) ${}^4C_1 \times {}^{20}C_3 = 4560$ (ii) ${}^5C_2 \times {}^{19}C_3 = 9690$ (15) ${}^7C_3 = 35$
(16) 4512 (17) 546 (18) (i) 280 (ii) 336 (iii) 736
(19) 485 (20) 64 (21) 2454 (22) ${}^{15}C_3 = 455$
(23) 364 (24) (i) 50 (ii) 161 (25) 15

பயிற்சி 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(2)	(2)	(1)	(2)	(4)	(2)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(2)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(3)	(1)	(4)	(2)	(3)	(4)	(3)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)	

பயிற்சி 5.1

(1) (i) $8x^6 - 36x^3 + 54 - \frac{27}{x^3}$ (ii) $2[16x^8 + 216x^4(1-x^2) + 81(1-x^2)^2]$

(2) (i) 108243216 (ii) 96059601 (iii) 4782969

(3) $(1.01)^{10^6} > 10000$ (4) 10

(5) $15, x^6$ என்ற உறுப்பு சாத்தியமில்லை. (6) 26235 (7) $-\frac{40}{27}$

(8) 01 (13) $n = 15$ (14) $n = 55$ (15) $n = 7$ அல்லது 14

பயிற்சி 5.2

(1) (i) $(G.P.)$ இசைத்தொடர்முறை (ii) ஏதுமில்லை

(iii) $(G.P.)$ பெருக்குத் தொடர்முறை (iv) ஏதுமில்லை (v) ஏதுமில்லை

(vi) ஏதுமில்லை (vii) $(A.G.P)$ கூட்டு-பெருக்குத் தொடர்முறை

(2) (i) 2, 2, 4, 4, 6, 6, . . . (ii) 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

(iii) 1, 2, 3, 6, 11, 20 , . . .

(3)(i) $a_n = \begin{cases} n+1 & ; \ n \text{ ஒற்றைப்படை எனில்} \\ n & ; \ n \text{ இரட்டைப்படை எனில்} \end{cases}$ (ii) $a_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n = \frac{2n-1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$ (iv) $a_n = \begin{cases} 7-n & ; \ n \text{ ஒற்றைப்படை எனில்} \\ 8+n & ; \ n \text{ இரட்டைப்படை எனில்} \end{cases}$

(4) 12,18,27 (5) $t_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ (8) 5, 45

பயிற்சி 5.3

(1) $a = \frac{133}{25}, \ d = -\frac{2}{75}, \ S_{20} = \frac{304}{3}$ (2) $S_{17} = 527$

(3)(i) $S_n = \frac{8}{81}\left[10\left(10^n - 1\right) - 9n\right]$ (ii) $S_n = \frac{6}{81}[10(10^n - 1) - 9n]$

(4) $S_n = \frac{4}{9}(4^n - 1) - \frac{n}{3}$ (5) $\frac{3n-2}{3^{n-1}}, \frac{3^n - (3n-2)}{2 \cdot 3^{n-1}} + \frac{3^{n-1} - 1}{4 \cdot 3^{n-3}}$

(6) $n = 15$ (8) 20 மாதங்கள் (9) 2480 மீட்டர்கள் (10) $120, 480, 30(2)^n$

(11) $500\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 1296.87$ (12) 15 ஆவது நாள்

பயிற்சி 5.4

(1) (i) $\frac{1}{5}\left[1 - \frac{x}{5} + \frac{x^2}{25} - \frac{x^3}{125} + \ldots\right]; \ |x| < 5$

(ii) $\frac{2}{9}\left[1 - 2\left(\frac{4x}{3}\right) + 3\left(\frac{4x}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{4x}{3}\right)^3 + \ldots\right]; \ |x| < \frac{3}{4}$

(iii) $5^{\left(\frac{2}{3}\right)}\left[1 + \frac{2}{15}(x)^2 - \frac{1}{225}x^4 + \frac{4}{81 \times 125}x^6 + \ldots\right]; \ x^2 < 5$

(iv) $2^{\left(-\frac{2}{3}\right)}\left[1-\frac{x}{3}+\frac{5}{36}x^2-\frac{5}{81}x^3+\ldots\right]$; $|x|<2$ (2) $(1001)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 10.00333$

(5) (i) $1+5x+\frac{25x^2}{2}+\frac{125x^3}{6}+\frac{625x^4}{24}+\frac{625x^5}{24}+\ldots$

(ii) $1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^5}{15}+\ldots$ (iii) $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{384}x^4+\ldots$

(6)(i) $4x-8x^2+\frac{64x^3}{3}-\frac{64x^4}{3}+\ldots$; $|x|<\frac{1}{4}$

(ii) $-2x-\frac{4x^2}{2}-\frac{8x^3}{3}-\frac{16x^4}{4}-\ldots$; $|x|<\frac{1}{2}$

(iii) $2[3x+\frac{27x^3}{3}+\frac{243x^5}{5}+\frac{2187x^7}{7}+\ldots]$; $|x|<\frac{1}{3}$

(iv) $-2[2x+\frac{8x^3}{3}+\frac{32x^5}{5}+\frac{128x^7}{7}+\ldots]$; $|x|<\frac{1}{2}$

(8) $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{1}{8}} \simeq 0.99196$ (9) $\frac{28}{3}$ (10) $\frac{1}{2}log_e 10$

பயிற்சி 5.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(4)	(4)	(4)	(2)	(3)	(1)	(3)	(4)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(1)	(4)	(4)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)

பயிற்சி 6.1

(1) (i) $x^2+y^2=81$ (ii) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$ (2) (i) $y=\pm 2$ (ii) $x=\pm 3$

(3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (4) $k=-24,\ b=-\frac{1}{4}$ (5) $x^2+y^2=16$

(6) $x^2+y^2-4x-4y+8=0$ (7) $x^2+y^2-5x+8y+16=0$

(8) $y^2=2x$ (10) $8x^2+36y^2-16x+252y+431=0$

(11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (12) $9x^2-33x-3y+35=0$

(13) $x^2+y^2-12x+9y+63=0$ (14) $(5-\sqrt{21},3),(5+\sqrt{21},3),(8,-3),(2,-3)$

(15) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

பயிற்சி 6.2

(1)(i) $y=5x-4$ (ii) $3x-y=2$ (iii) $2x+3y=5$ (iv) $x+\sqrt{3}y=(1+\sqrt{3})$

(3) $10x+3y=25$ (5) (i) $C=\frac{5}{9}(F-32)$ அல்லது $F=\frac{9}{5}C+32$

(ii) $C=37^{\circ}$ (iii) $F=100.4^{\circ}$ (6) (i) 4400 மீ (ii) $D=3000$ மீ

(iii) $T=22$ வினாடிகள் (7) $P=1,55,000$

(8) $\sqrt{(3)}x+y=24$ (9) $3x-4y=12, x-2y=2$

(11) $(13,7),(-11,-3)$ (12) (i) $y=12.5x-150$ (ii) 12 வினாடிகள்

(iii) 80 வினாடிகள் (13) (ii) $x-2y+4=0$ (iii) 2 செ.மீ

(iv) 14 கி.கி (v) 5 செ.மீ (14) (i) $y=-\frac{71}{120}x+14.2, 0\le x\le 24$

(ii) $y=f(x)$ காலமுறைச் சார்பு, காலமுறை 24, $f(x)=f(x+24)$

(15)(i) குறைந்தபட்ச நீளம் $=3280$ அலகுகள்

(ii) 180, 360 மற்றும் 540 அலகுகள் (iii) சாய்வு $=\frac{9}{40}$

பயிற்சி 6.3

(2) $5x-4y-15=0$ (3) (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{23}{5}$

(4) (i) $x+3y+2=0$ (ii) $4x-3y-7=0$ (5) $x+5y-31=0$

(6)(i) $x+1=0$ (ii) $x-y=0$ (iii) $2x+y+3=0$

(7) $12x+5y+6=0$ மற்றும் $12x+5y-20=0$

(8) $4x-3y+15=0$ மற்றும் $4x-3y-25=0$

(9) $2x+3y-18=0$ (10) $7\sqrt{2}$ மற்றும் $(-3,5)$ (12) (i) $\frac{14}{13}$ (ii) $\frac{5}{2}$

(13) (i) $4x-3y+k=0,\ k\in\mathbb{R}$ (ii) $3x+4y+k_1=0, k_1\in\mathbb{R}$

(14) $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ (15) $A\left(\frac{13}{5},0\right)$ (16) $x+5y\pm 10=0$

(17) $(0,7)$ (18) (i) $y=\begin{cases}1.50x, & 0\le x\le 10\\ x+5, & x>10\end{cases}$ (ii) ₹45

(19) $y=5x-7, y=5x+10$ (20) $y+3=0$, $2x+y+3=0$ மற்றும் $2x-y-3=0$

பயிற்சி 6.4

(1) $x^2-xy-2y^2+2x-13y-15=0$

(6) $3x^2-13xy-10y^2+33x+73y-126=0$

(7) (i) $x+y=0$, $3x-y=0$ (ii) $3x+4y-11=0$, $2x-y=0$

(iii) $x+y-5=0$, $2x-3y+4=0$ (10) $y=x$ (11) $p=6, q=17$ அல்லது $-\frac{67}{6}$

(12) $k=-1$ (13) $k=-5$ அல்லது $-\frac{35}{4}$ (14) $\frac{8}{5}$ (15) $\sqrt{5}$

பயிற்சி 6.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(4)	(4)	(3)	(4)	(3)	(2)	(2)	(4)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(4)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(3)	(4)	

கலைச்சொற்கள்

அத்தியாயம் 1 – கணங்கள், தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகள்	
மட்டு சார்பு அல்லது எண்ணளவுச் சார்பு	absolute value function or modulus function
அடிப்படைத் தொடர்புகள்	basic relations
இருபுறச் சார்பு	bijective function
செவ்வெண்மை	cardinality
மூடிய இடைவெளி	closed interval
துணைச் சார்பகம்	co–domain
சார்புகளின் சேர்ப்பு	composition of functions
மாறிலி	constant
மாறிலிச் சார்பு	constant function
சார்ந்த மாறி	dependent variable
விரிதல்	dilation
வெட்டாக் கணம்	disjoint set
சார்பகம்	domain
வெற்றுத் தொடர்பு	empty relation
வெற்றுகணம்	empty set
சமானத் தொடர்பு	equivalence relation
இரட்டைப் படைச் சார்பு	even function
அடுக்குக் குறிச் சார்பு	exponential function
உச்சத் தொடர்புகள்	extreme relations
முடிவுறு கணம்	finite set
மீப்பெரு முழுஎண் சார்பு	greatest integer function
கிடை மட்டக் கோட்டுச் சோதனை	horizontal line test
சமனிச் சார்பு	identity function
பிம்பம்	image
தகா உட்கணம்	improper subset
சாரா மாறி	independent variable
முடிவுறா கணம்	infinite set
நேர்மாறு	inverse
நேர்மாற்றுத்தன்மை	invertible
நேரியச் சார்பு	linear function
மடக்கைச் சார்பு	logarithmic function
ஒற்றைப் படைச் சார்பு	odd function
ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு	one–to–one function
மேற்கோர்த்தல் சார்பு	onto function
திறந்த இடைவெளி	open interval
அடுக்கு கணம்	power set
முன் பிம்பம்	pre–image
தகு உட்கணம்	proper subset
வீச்சகம்	range
விகிதமுறுச் சார்பு	rational function
மெய்யெண் கோடு	real line
மெய் மதிப்புச் சார்பு	real–valued function
தலைகீழ் சார்பு	reciprocal function
பிரதிபலிப்பு	reflection
தற்சுட்டுத் தொடர்பு	reflexive relation
கண வேறுபாடு	set difference
குறியீட்டுச் சார்பு	signum function
ஒருறுப்பு கணம்	singleton set

மீச்சிறு முழு எண் சார்பு	smallest integer function
படி நிலைச் சார்புகள்	step functions
உட்கணம்	subset
சமச்சீர் வேறுபாடு	symmetric difference
கடப்புச் சார்பு	transitive relation
இடப்பெயர்ச்சி	translation
வெள்ளிடை உட்கணம்	trivial subset
சேர்ப்புக் கணம்	union of sets
அனைத்துத் தொடர்பு	universal relation
மாறி	variable
நிலைக் குத்துக் கோட்டுச் சோதனை	vertical line test
பூஜ்ஜியச் சார்பு	zero function
கணம்	set
மேற்கணம் அல்லது மிகை கணம்	super set

அத்தியாயம் 2 – அடிப்படை இயற்கணிதம்	
இணை	conjugate
தன்மை காட்டி	discriminant
வகுத்தல் கோட்பாடு	division algorithm
அடுக்குக் குறி	exponents
அசமன்பாடு	inequality
பகுதி பின்னம்	partial fraction
பல்லுறுப்புக் கோவை	polynomial expression
நான்காம் படி	quartic
ஐந்தாம் படி	quintic
படிமூலம்	radicals
விகிதமுறு அசமன்பாடு	rational inequality
மீதித் தேற்றம்	remainder theorem

அத்தியாயம் 3 – முக்கோணவியல்	
தொடர்புடைக் கோணங்கள்	allied angles
திட்டநிலையில்கோணங்கள்	angles in standard position
முக்கோணத்தின் உயரம்	altitude of a triangle
நூற்றின் கூறுமுறை	centesimal system
நாண்	chord
வட்ட முறை அமைப்பு	circular system
சுற்றுவட்ட மையம்	circum centre
சுற்றுவட்டம்	circum circle
சுற்றுவட்டத்தின் ஆரம்	circum radius
நிரப்புக் கோணங்கள்	complementary angles
கூட்டுக் கோணங்கள்	compound angles
இணையிய கோணங்கள்	conjugate angles
பொதுத் தீர்வு	general solution
இடைவெளி	interval
நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள்	inverse trigonometric functions
காலமுறைப் பண்பு	periodicity
அடுக்குக் குறைப்பு முற்றொருமைகள்	power reducing identities
முதன்மை தீர்வு	principal solution
வீழல்	projection
காற்பகுதி	quadrant

ஆரையன் (ரேடியன்)	radian
வட்டக்கோணப்பகுதி	sector
உட்மடங்குக் கோணங்கள்	sub–multiple angles
மிகை நிரப்புக்கோணங்கள்	supplementary angles
முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள்	trigonometric identities
முக்கோணவியல் விகிதங்கள்	trigonometric ratios

அத்தியாயம் 4 – சேர்ப்பியல் மற்றும் கணித தொகுத்தறிதல்	
குறியாக்கவியல்	cryptography
காரணியப் பெருக்கம்	factorial
எழுகோணம்	heptagon
சேர்த்தல் – நீக்கல்	inclusion–exclusion
தொகுக்கும் நிலை	inductive step
கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறை	mathematical induction
ஐங்கோணம்	pentagon
வரிசைமாற்றம்	permutation
பலகோணம்	polygon
பெருக்கல்விதி	product rule
கட்டுதல் முறை	string method
கூட்டல் விதி	sum rule

அத்தியாயம் 5 – ஈருறுப்புத் தேற்றம், தொடர்முறைகள் மற்றும் தொடர்கள்	
கூட்டுச் சராசரி	arithmetic mean
கூட்டுத் தொடர்முறை	arithmetic progression
கூட்டுத் தொடர்	arithmetic series
கூட்டுப் பெருக்குத் தொடர்முறை	arithmetico–geometric progression
கூட்டுப் பெருக்குத்தொடர்	arithmetico–geometric series
ஈருறுப்புக் கெழுக்கள்	binomial coefficients
ஈருறுப்பு விரிவு	binomial expansion
ஈருறுப்புத் தொடர்	binomial series
ஈருறுப்புத் தேற்றம்	binomial theorem
பொது வித்தியாசம்	common difference
பொது விகிதம்	common ratio
ஒருங்குத் தொடர்	convergent series
அடுக்குக்குறித் தொடர்	exponential series
முடிவுறுத் தொடர்முறை	finite sequence
முடிவுறு தொடர்	finite series
பெருக்குச் சராசரி	geometric mean
பெருக்குத் தொடர்முறை	geometric progression
பெருக்குத் தொடர்	geometric series
இசைச் சராசரி	harmonic mean
இசைத் தொடர்முறை	harmonic progression
முடிவுறாத் தொடர்முறை	infinite sequence
முடிவுறாத் தொடர்	infinite series
முதல் உறுப்பு	initial term
மடக்கைத்தொடர்	logarithmic series
பகுதிக் கூடுதல்	partial sum
விகிதமுறு அடுக்கு	rational exponent
தொலைநோக்கிக் கூடுதல்	telescopic summation

அத்தியாயம் 6 – இருபரிமாண பகுமுறை வடிவியல்	
சாய்வுக் கோணம்	angle of inclination
மாறத்தக்க மாறிலி	arbitrary constant
இருசமவெட்டி	bisector
சமநிலை	equilibrium
நிலையான மாறிலி	fixed constant
நிலைப்புள்ளி	fixed point
பொது வடிவம்	general form
சமப்படித்தான சமன்பாடு	homogenous equation
வெட்டுத்துண்டு	intercept
நியமப் பாதை (அ) இயங்குவரை	locus
குறை வெட்டுத்துண்டு	negative intercept
குறை சாய்வு	negative slope
அசமப்படித்தான சமன்பாடு	non–homogenous equation
செங்குத்து வடிவம்	normal form
துணையலகு	parameter
துணையலகு வடிவம்	parametric form
மிகை வெட்டுத்துண்டு	positive intercept
மிகை சாய்வு	positive slope
சமச்சீர்	symmetry
இருபுள்ளிகள் வடிவம்	two point form

மேற்கோள் நூல்கள்

- Advanced Mathematics - Merilyn Ryan S.S.J, Marvin E. Doublet, Mona Fabricant Theoran D.Rockhill, Prentice Hall
- Higher Algebra - Bernard and Child.
- Higher algebra - Hall and Knight.
- Algebra and Trigonometry - Marshall D. Hestenes, Richard O. Hill, Jr.
- A semester course in Trigonometry - Marcel B Finan, Ar Kansas Tech University, U.S.A.,
- Trigonometry - S.L.Loney
- Discrete and Combinatorial Mathematics, by Ralph P. Grimaldi, Pearson Education Asia,
- Discrete Mathematics with Applications, by Thomas Koshy, Elsevier
- Discrete Mathematics and its Applications with Combinatorics and Graph theory, by Kenneth, H, Rosen, Tata McGraw Hill Education Private Limited, 6th Edition
- Calculus - James Stewart.
- Calculus - Robert T.Smith, Roland B. Minton, McGraw Hill
- Calculus and Analytical Geometry, George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.
- Differential and Integral Calculus, N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.
- Analytical Geometry for beginners, The straight line and circle Vol-I by Thomas Grenfele Vyvyan Classic Reprint Series.
- Analytical Geometry (The straight line and circle) Arthur Le Sueur – Google books.

கணிதவியல் – மேல்நிலை முதலாமாண்டு
பாடநூல் உருவாக்கக் குழு

பாட வல்லுநர்கள்

முனைவர் கோ. ஸ்ரீனிவாசன், பேராசிரியர் மற்றும் துறைத்தலைவர் (ஓய்வு),
கணிதத் துறை, மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை – 600 005.

முனைவர் இரா. மூர்த்தி, முதல்வர் (ஓய்வு),
அரசுக் கலை மற்றும் அறிவியல் கல்லூரி, உத்திரமேரூர்.

முனைவர் ஏ. சந்திரசேகரன், கணிதத் துறை பேராசிரியர்,
வேல் டெக் இரங்கராஜன் முனைவர் சகுந்தலா
அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப ஆராய்ச்சி மற்றும்
மேம்பாட்டு நிறுவனம், சென்னை – 600 062.

முனைவர் G.P. யுவராஜ், இயக்குநர்,
இராமானுஜம் கணித உயர்கல்வி நிறுவனம்,
சென்னை பல்கலைக்கழகம், சென்னை– 600 005.

முனைவர் தி.நெ. சண்முகம், கணிதப் பேராசிரியர் (ஓய்வு),
அண்ணா பல்கலைக் கழகம், செயலர், செ.தெ. நாயகம் தியாகராய நகர்,
மேனிலைப்பள்ளி, சென்னை – 600 017.

முனைவர் இரா. சிவராமன், இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
து.கோ. வைணவக் கல்லூரி, சென்னை – 600 106.

பாட துணை வல்லுநர்கள்

முனைவர் இரா. வேம்பு, இணைப் பேராசிரியர்,
SBK கல்லூரி, அருப்புக்கோட்டை – 626101.

முனைவர் கோ. பழனி, உதவிப் பேராசிரியர்,
டாக்டர் அம்பேத்கார் அரசு கலைக் கல்லூரி, சென்னை–39.

முனைவர் ஸ்ரீ. சிவசுப்பிரமணியன், இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழக பொறியியல் கல்லூரி, திண்டிவனம்

முனைவர் K. வாசுதேவன், இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை – 600 005.

ஆலோசகர்கள்

முனைவர் P. வீரமணி, பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
இந்திய தொழில்நுட்ப நிறுவனம், சென்னை – 600 036.

முனைவர் அரிந்தமா சிங், பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
இந்திய தொழில்நுட்ப நிறுவனம், சென்னை – 600 036.

முனைவர் ஜோனகி B. கோஷ், பேராசிரியர், கல்வியியல் துறை,
லேடி ஸ்ரீராம் காலேஜ், புதுதில்லி.

முனைவர் சைலேஷ் விராலி, இயக்குநர்,
சகாயாத்ரி பள்ளி – உயர்கல்வி, KFI (Krishnamurthi Foundation India),

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக் குழு

வடிவமைப்பு
ஜாய் கிராபிக்ஸ், சென்னை – 600 002.
ராஜ் கிராபிக்ஸ், சென்னை – 600 002.
Asknet services, சென்னை – 600 017

கலை / ஓவியம்
G. அச்சுதன், ஓவிய ஆசிரியர்,
JG இந்து வித்யாலயா மெட்ரிக் மே.நி. பள்ளி, சென்னை – 600 033.

தட்டச்சர்
P. ஜெயந்தி, தட்டச்சர், DIET, மன்னார்குடி.

Qc
மனோகர் இராதாகிருஷ்ணன்
ஜெரால்டு வில்சன். C

அட்டை வடிவமைப்பு
கதிர் ஆறுமுகம்

ஒருங்கிணைப்பு
ரமேஷ் முனிசாமி

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

பா. தமிழ்செல்வி, துணை இயக்குநர்,
மாநிலக் கல்வியியல் மற்றும் ஆராய்ச்சி நிறுவனம், சென்னை–6.

பாடநூலாசிரியர்கள்

நா. கலைச்செல்வம், முதுகலை ஆசிரியர்,
சென்னைப் பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி, ன்னை–600 034.

அ. பாலமுருகன், முதுகலை ஆசிரியர்,
அதியமான் அரசு ஆண்கள் மே.நி.பள்ளி, தர்மபுரி – 636 701.

இரா. வில்லவன்கோதை, முதுகலையாசிரியர்,
அரசு பெண்கள் மே.நி. பள்ளி, திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

கோ. சு. வீரராகவன், முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
ஸ்ரீகிருஷ்ணா மெட்ரிக் மே.நி.பள்ளி, கோயம்புத்தூர் – 641 025.

முனைவர் கி. வெங்கடேஸ்வரன், கல்வி இயக்குநர்,
AVB மெட்ரிக் மே.நி. பள்ளி, கோயம்புத்தூர் – 641 020.

பி. ஹேமலதா, துறைத் தலைவர் (கணிதம்), முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
வேலம்மாள் மெட்ரிக் மே.நி.பள்ளி, சென்னை – 600 037.

முனைவர் ப. ரேவதி, துணை முதல்வர்,
பெ. சு. சீனியர் உ.நி. பள்ளி, சென்னை – 600 004.

ர. மகேஸ்வரி, முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
சீதாதேவி கரோடியா இந்து வித்யாலயா மே.நி.பள்ளி, சென்னை – 600 059.

ச. சந்தியா, முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
வயவர் மு. வெங்கடசுப்பா ராவ், மெட்ரிக் மே.நி. பள்ளி, சென்னை – 600 017.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

K.P. சுஜாதா, பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு பெண்கள் மே.நி. பள்ளி, கீ.வ.குப்பம், வேலூர் மாவட்டம்.

V. ரமாபிரபா, முதுநிலை விரிவுரையாளர்,
மாநிலக் கல்வியியல் மற்றும் ஆராய்ச்சி நிறுவனம், சென்னை – 6.

பாட ஆய்வாளர்கள்

முனைவர் மு.ப. ஜெயராமன், கணிதத் துணைப் பேராசிரியர்,
L.N. அரசு கலைக் கல்லூரி, பொன்னேரி – 601 204.

ப. திவ்ய பிரபா, முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
அரசு மே.நி. பள்ளி, அரும்பாக்கம், சென்னை – 600 106.

முனைவர் கி. கவிதா , கணிதத் துணைப் பேராசிரியர்,
பாரதி மகளிர் கல்லூரி, சென்னை – 600 108.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

S. விஜயலட்சுமி, பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு மே.நி. பள்ளி, கூவத்தூர், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

இணையச் செயல்பாடு ஒருங்கிணைப்பாளர்

வாசுராஜ். தா, பட்டதாரி ஆசிரியர் (கணிதம்),
கொசபுர், புழல் பிளாக், திருவள்ளூர்.

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்: