தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை முதலாம் ஆண்டு

கணிதவியல்

தொகுதி - II

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

00_Content.indd 1 30-05-2022 16:03:36

தமிழ்நாடு அரசு

முதல்பதிப்பு – *2018*

திருத்திய பதிப்பு – *2019, 2020, 2022*

(புதிய பாடத்திட்டத்தின் கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

பொருளடக்கம்

கணிதவியல் தொகுதி-II

அத்தியாயம் 12 – நிகழ்தகவு கோட்பாடு-ஓர் அறிமுகம்

மின்னூல் மதிப்பீடு

அத்தியாயம் 7

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும் (Matrices and Determinants)

"காரணங்களின் இசையே கணிதமாகும்"

– சில்வஸ்டர்

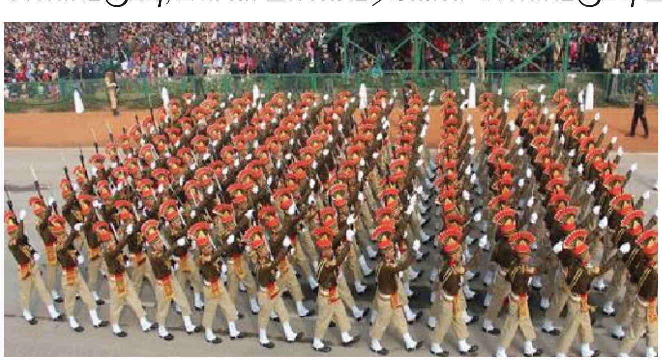
Z4KM9

7.1 அறிமுகம் (Introduction)

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கம் கி.மு(பொ.ஆ.மு) நான்காம் நூற்றாண்டில் தோன்றியதாகப் பதிவுகள் இருப்பினும் கி.மு(பொ.ஆ.மு) இரண்டாம் நூற்றாண்டில்தான் அதன் பயன்பாடு தொடங்கியதாகக் கருதப்படுகிறது. பின்னர் பதினேழாம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கம் மீண்டும் பயன்பாட்டுக்கு வந்து வளர்ச்சியடைந்தது எனலாம். பாபிலோனியர்கள் நேரியல் சமன்பாடுகள் தொடர்பான கணக்குகளை ஆராய்ந்து அவற்றைக் களிமண் தட்டுகளில் (claytablet) பதிந்துள்ளனர். நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் தீர்வுகளைச் சுருக்கமாகக் காண முற்பட்டபோது அணிகளின் கோட்பாடு மேலும் வளர்ச்சியடைந்தது என்பது ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய ஒன்றாகும். வடிவியல் உருமாற்றங்கள் பற்றிய ஆய்விற்கும் அணிகளின் கருத்தாக்கம் அடிப்படையாக அமைகிறது.

'அணி' (இலத்தீன் மொழியில் M$\bar{a}$ter என்பது 'தாய்' எனப் பொருள்படும்) என்ற சொல் வழக்கறிஞரும், கணிதவியலாளருமான ஜேம்ஸ் ஜோசப் சில்வஸ்டர் என்பவரால் முதன்முதலில் 1850–ல் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. அணிகள் கணிதவியலில் ஒரு முக்கியமான கருவியாகப் பார்க்கப்படுகிறது.

அணி என்பது செவ்வக வடிவில் உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்தும் ஓர் அமைப்பு ஆகும். இராணுவ அணிவகுப்பு, பள்ளி மாணவர்களின் அணிவகுப்பு மற்றும் பயிரிடுதல் போன்ற நடைமுறை வாழ்க்கை நிகழ்வுகளில் அணிகள் பயன்படுவதைக் காண்கிறோம்.



Disquisitiones arithmeticae (1801) என்ற நூலில் கார்ல் எஃப் காஸ் என்ற கணிதவியலாளர் இருபடி வடிவங்களை ஆய்வு செய்யும்போது அணிக்கோவை என்ற சொல்லை முதன்முதலில் பயன்படுத்தினார். ஆனால், இவருடைய கருத்தாக்கம் தற்போது பயன்படுத்தப்படும் அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கத்திலிருந்து மாறுபட்டது, இருபடி வடிவங்களின் கெழுக்களைச் செவ்வக வடிவில் வரிசைப்படுத்துதலில் அணிகளின் பெருக்கல் குறித்து விவரித்துள்ளார்,

சில்வஸ்டர்
(1814 - 1897)

1812–ல் கோஷி என்ற கணிதவியலாளர் அணிக்கோவையினை புதிய கோணத்தில் அணுகியது மட்டுமல்லாமல் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும்

சேர்ப்பு அணி பற்றி ஏற்கனவே பயன்பாட்டில் இருந்த முடிவுகளை மறுநிரூபணம் செய்து புதிய முடிவுகளைக் கொடுத்தார். ஆர்தர் கெய்லி என்பார் அணிகளின் இயற்கணிதம் என்ற கருத்தாக்கத்தை மேம்படுத்தியதில் முக்கிய பங்காற்றியுள்ளார். அணிக்கோவைகளின் கோட்பாடுகளை 1841–ல் இவர் வெளியிட்டார். அணிக்கோவையைக் குறிப்பிடத் தற்போது பயன்படுத்தப்படும் விதமாக வரிசைப்படுத்தலின் இருபுறமும் இரு செங்குத்தான கோடுகளைப் பயன்படுத்தினார். 1858–ல் இவரால் வெளியிடப்பட்ட **"Memoir on the theory of matrices"** என்ற புத்தகத்தில் அணிகளுக்கான முதல் வரையறை சுருக்கமாக கொடுக்கப்பட்டிருந்தது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். மேலும் ஏற்கனவே நடைமுறையில் இருந்த இருபடி வடிவங்கள் மற்றும் நேரியல் உருமாற்றங்களில் படிக்கப்பட்ட கெழுக்களின் வரிசைப்படுத்தலானது இவரால் கூறப்பட்ட பொதுக் கருத்தாக்கத்தின் சிறப்பு நிலைகளே எனவும் நிரூபித்துக் காட்டினார். கடினமான கணக்கீடுகளைக் கொண்ட மற்ற நேரிடையான முறைகளை விடக் கணக்கீடுகளை எளிமையாக்கியது இவருடைய பணியாகும். ஜேம்ஸ் ஜோசப் சில்வஸ்டர் (1814-1897), **வில்லியம் ரோவன் ஹாமில்டன்** (*1805–1865*) மற்றும் **ஆர்தர் கெய்லி** (1821-1895) போன்ற கணிதவியலாளர்கள் அணிகளின் கருத்தாக்கத்தை மேம்படுத்துவதில் முக்கிய பங்காற்றியவர்கள் ஆவர். அணிகளை அடைப்புக்குறிக்குள் எழுதும் குறியீட்டு முறையை ஆங்கிலேயே கணிதவியலார் **கல்லிஸ்** (Cullis) என்பார் 1913–ல் முதன்முதலில் பயன்படுத்தினார். அணிகள் கணிதவியலில் உள்ள பிரிவுகளில் மட்டுமல்லாமல், அறிவியல், மரபியல், பொருளியல், சமூகவியல், நவீன உளவியல் மற்றும் தொழில்துறை மேலாண்மை போன்ற துறைகளிலும் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் கெழுக்களைக் குறிப்பிட அணிகள் பயன்படுகின்றன. வியாபாரத் தொடர்பான பட்ஜெட் தயாரித்தல், விற்பனைத்திட்டம் விலை நிர்ணயம் மற்றும் அறிவியலில் ஒரு சோதனையின் முடிவுகளை ஆராய்தல் போன்ற பல்வேறு பிரிவுகளில் கணினி மின்னணுப் பரவல்தாள் தயாரிக்க அணிக்குறியீடுகளும் அதன் செயல்பாடுகளும் பயன்படுகின்றன.

வடிவியல் உருமாற்றங்களான உருப்பெருக்கம், சுழற்சி மற்றும் ஒரு தளத்தின் மீது பிரதிபலிப்பு போன்ற செயல்பாடுகளை கணிதமுறையில் குறிப்பிடவும், பொருளாதார நிபுணர்களால் சமூகக் கணக்கீடு, உள்ளீடு–வெளியீடு அட்டவணை தயாரித்தல் மற்றும் தொழில் பொருளாதார ஆய்வு போன்றவற்றிலும், மின் பொறியியலில் தகவல் தொடர்புக் கோட்பாடு மற்றும் பிணையப் பகுப்பாய்விலும், சங்கேத மொழியிலும் அணிகள் பயன்படுகின்றன.

இப்பாடப்பகுதியில் அணிகள் மற்றும் அவற்றின் பல்வேறு பண்புகளைப் பற்றி முதலில் படிப்போம். பின்னர், 3 ஆம் வரிசை அணிக்கோவைகள், அவற்றின் அடிப்படைப் பண்புகள், சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக் காரணிகளைப் பற்றி படிப்போம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- கடினமான கணக்குகளை அணிமுறையில் எளிமையாகக் காணல்
- அணிகளின் பல்வேறு வகைகளை அறிதல் மற்றும் அணிகளின் இயற்கணிதத்தை புரிந்து கொள்ளல்
- அணிக்கோவைகளின் விரிவுபடுத்தலை நேரிடையாகவும், பல்வேறு பண்புகளைப் பயன்படுத்தியும் காணல்
- அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காணல் மற்றும் மூன்று புள்ளிகளின் ஒரு கோடமைத் தன்மையை ஆராய்தல்

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

7.2 அணிகள் (Matrices)

உறுப்புகள் அல்லது மூலகங்களை செவ்வக வடிவில் நிரைகள் மற்றும் நிரல்களாக [ ] என்ற அடைப்புக்குறியினுள் குறிப்பிடுவது அணியாகும்.

ஓர் அணியின் உறுப்புகள் பொதுவாக மெய்யெண்கள், கலப்பெண்கள், ஒருமாறிச் சார்புகள், (அதாவது பல்லுறுப்புக் கோவைகள், முக்கோணவியல் சார்புகள் மற்றும் இவற்றின் கலப்பாக)

பலமாறிச் சார்புகள் உறுப்பாக இருக்கலாம். அணிகளை $A, B, C, \ldots$ என்ற எழுத்துக்களால் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இப்பாடப்பகுதியில் மெய்யெண்கள் அல்லது மெய் மதிப்புடையச் சார்புகளை மட்டுமே அணியின் உறுப்புகளாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

அணியின் பொது வடிவம் (General form of a matrix)

m நிரைகள் (rows) மற்றும் n நிரல்கள் (columns) கொண்ட ஓர் அணி A-யினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$ அதாவது,

$$\xrightarrow{\qquad n \text{ columns} \qquad}$$

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{Column } 1 & \text{Column } 2 & & \text{Column } j & & \text{Column } n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Row } 1 \\ \leftarrow \text{Row } 2 \\ \\ \leftarrow \text{Row } i \\ \\ \leftarrow \text{Row } m \end{array} \Bigg\downarrow m \text{ rows}$$

இங்கு m, n என்பன மிகை முழு எண்களாகும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 9 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -9 & 1.2 & 0 \\ \sin\dfrac{x}{4} & 2 & x^2 & 4 \\ \cos\dfrac{x}{2} & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 3.4 & \dfrac{1}{2} & \sqrt{2} \\ e^2 & -3 & 4 \\ \sqrt{5} & 2 & a \end{bmatrix}$$

ஆகியவை அணிகளுக்கான சில உதாரணங்கள் ஆகும்.

ஓர் அணியில், உறுப்புகளின் கிடைமட்ட வரிசைகள் நிரைகள் எனவும், செங்குத்து வரிசைகள் நிரல்கள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே, அணி A ஆனது 3 நிரைகள் மற்றும் 3 நிரல்களையும், B என்பது 3 நிரைகள் மற்றும் 4 நிரல்களையும், C என்பது 4 நிரைகள் மற்றும் 3 நிரல்களையும் கொண்டுள்ளன.

வரையறை 7.1

ஓர் அணி A ஆனது m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்களைப் பெற்றிருந்தால் $m\times n$ (m by n எனப்படிக்கவும்) என்பது அந்த அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணம் எனப்படும்.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ என்பன $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்ற அணியின் உறுப்புகள் அல்லது மூலகங்கள் எனப்படும். i-ஆவது நிரை மற்றும் j-ஆவது நிரலில் உள்ள பொது உறுப்பு a_{ij} ஆகும். இவ்வுறுப்பு அணி A–ன் (i, j)-ஆவது உறுப்பு எனப்படும். அணி A–ன் i-ஆவது நிரை மற்றும் j-ஆவது நிரல் ஆகியவை முறையே $1\times n$ மற்றும் $m\times 1$ வரிசை உடைய $[a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}]$ மற்றும் $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளாகும்.

நடைமுறை வாழ்க்கைக் கணக்குகளை அணி அமைப்பில் எழுதி அவற்றின் தீர்வுகளை எவ்வாறு காண்பது எனக் காண்போம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 7.1

எடுத்துக்காட்டாக பல்வேறு தேர்வுகளில் பல்வேறு பாடப்பிரிவுகளில் ஒரு மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்களைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

	தமிழ்	ஆங்கிலம்	கணிதம்	அறிவியல்	சமூக அறிவியல்
தேர்வு 1	48	71	80	62	55
தேர்வு 2	70	68	91	73	60
தேர்வு 3	77	84	95	82	62

இந்த அட்டவணையில் உள்ள விவரங்களை அணி வடிவத்திற்கு மாற்றலாம். அட்டவணையில் உள்ள மதிப்பெண்களை 3×5 வரிசை கொண்ட அணி அமைப்பில் பின்வருமாறு எழுதலாம். இதில் மூன்றாவது நிரை மற்றும் இரண்டாவது நிரலில் உள்ள உறுப்பு எதனைக் குறிக்கின்றது?

$$A = \begin{bmatrix} 48 & 71 & 80 & 62 & 55 \\ 70 & 68 & 91 & 73 & 60 \\ 77 & \mathbf{84} & 95 & 82 & 62 \end{bmatrix}$$

மேற்கண்ட அணியில் மூன்றாவது நிரை மற்றும் இரண்டாவது நிரலில் அமைந்துள்ள 84 என்ற உறுப்பு, ஆங்கிலப் பாடப்பிரிவில் தேர்வு 3–ல் அம்மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்ணைக் குறிப்பிடுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7.1

ஓர் அணியில் 12 உறுப்புகள் உள்ளது. அவ்வணியின் வாய்ப்புள்ள வரிசைகளைக் காண்க. மேலும், அந்த அணியில் 7 உறுப்புகள் இருந்தால் வரிசைகள் என்னவாகும்?

தீர்வு

ஓர் அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைப் பெருக்கினால் அவ்வணியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கிடைக்கும். எனவே, இரு இயல் எண்களின் பெருக்கற் பலன் 12 தரக்கூடிய எல்லா வரிசை ஜோடிகளையும் காணலாம். ஆகவே, பெருக்கற்பலன் 12 தரக்கூடிய 12–ன் இரண்டு வகு எண்களைக் கொண்டு பெறக்கூடிய பெருக்கல்களான $1 \times 12,\ 12 \times 1,\ 2 \times 6,\ 6 \times 2,\ 3 \times 4$ மற்றும் 4×3 ஆகியவை வரிசைகளாக அமையலாம்.

மேலும் ஓர் அணியில் 7 உறுப்புகள் இருந்தால், 7 என்பது பகா எண் என்பதால் 1×7 மற்றும் 7×1 என்பவை மட்டுமே அணியின் வரிசைகளாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.2

$a_{ij} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|2i - 3j|,\ (1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3)$ என இருக்குமாறு (i, j)–ஆவது உறுப்புகளைக் கொண்ட 2×3 அணியை எழுதுக.

தீர்வு

2×3 அணியின் பொது வடிவம் $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

a_{ij} –ன் வரையறையின்படி, $a_{11} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|2-3| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ இதே போன்று A என்ற அணியின் மற்ற உறுப்புகளையும் காணலாம். எனவே தேவையான அணி $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} & \frac{7\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

7.2.1 அணிகளின் வகைகள் (Types of matrices)

நிரை, நிரல், பூஜ்ஜிய அணிகள் (Row, Column, Zero matrices)

வரையறை 7.2
ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே உடைய அணி **நிரை அணி** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = [A]_{1\times 4} = [1 \quad 0 \quad -1.1 \quad \sqrt{2}]$ என்பது $1\times n$ வரிசை உடைய நிரை அணியாகும்.

$A = [a_{ij}]_{1\times n} = [a_{1j}]_{1\times n}$ என்பது $1\times n$ வரிசை உடைய நிரை அணியின் பொது அமைப்பாகும்.

வரையறை 7.3
ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே உடைய அணி **நிரல் அணி** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $[A]_{4\times 1} = \begin{bmatrix} x+1 \\ x^2 \\ 3x \\ 4 \end{bmatrix}$ என்பது $m\times 1$ வரிசை உடைய நிரல் அணியாகும். இதன் உறுப்புகள் மெய்யெண் சார்புகள் ஆகும். $A = [a_{ij}]_{m\times 1} = [a_{i1}]_{m\times 1}$ என்பது $m\times 1$ வரிசை உடைய நிரல் அணியின் பொது வடிவமாகும்.

வரையறை 7.4
ஓர் அணி $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ -இல் அனைத்து $1 \le i \le m$ மற்றும் $1 \le j \le n$ மதிப்புகளுக்கும் $a_{ij} = 0$ எனில், இவ்வணி **பூஜ்ஜிய அணி** எனப்படும். இது O எனக்குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்பன முறையே $1\times 1,\ 3\times 3,$ மற்றும் 2×4 வரிசை உடைய பூஜ்ஜிய அணிகளாகும்.

ஓர் அணி A-ல் குறைந்தபட்சம் ஓர் உறுப்பு பூஜ்ஜியமற்றது எனில், அவ்வணி **பூஜ்ஜியமற்ற அணி** எனப்படும்.

சதுர, மூலைவிட்ட, அலகு மற்றும் முக்கோண வடிவ அணிகள் (Square, Diagonal, Unit, Triangular matrices)

வரையறை 7.5
ஓர் அணியின் நிரை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவ்வணி **சதுர அணி** எனப்படும். அதாவது, $n\times n$ வரிசை உடைய ஒரு சதுர அணி n வரிசை உடைய சதுர அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & c & f \\ g & h & l \end{bmatrix}$ என்பது 3 வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணியாகும்.

வரையறை 7.6
n வரிசை உடைய ஒரு சதுர அணி $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ -ன் உறுப்புகள் $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ என்பன *முதன்மை மூலைவிட்ட அல்லது பிரதான மூலைவிட்ட உறுப்புகள்* எனப்படும்.

வரையறை 7.7

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அணியில் அனைத்து $a_{ij}=0,\ i\neq j$ எனில், அவ்வணி ஒரு ***மூலைவிட்ட அணி*** எனப்படும்.

எனவே, ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் பிரதான மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியமாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A=\begin{bmatrix}2.5 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & s\end{bmatrix},\ C=[6]\quad \text{மற்றும்}\quad D=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

என்பன முறையே 3, 2, 1 மற்றும் n வரிசை உடைய மூலைவிட்ட அணிகளாகும். ஒரு பூஜ்ஜிய சதுர அணி ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகுமா?

வரையறை 7.8

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் சமம் எனில், அவ்வணி ஒரு ***திசையிலி அணி*** எனப்படும்.

$$A=[a_{ij}]_{n\times n}\ \text{என்ற சதுர அணியில்}\ a_{ij}=\begin{cases}c\ ;\ i=j\\ 0\ ;\ i\neq j\end{cases}\text{எனில்,}$$

A என்ற அணி திசையிலி அணியாகும். இங்கு c என்பது ஒரு நிலை எண்ணாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix},\ C=\left[\sqrt{3}\right]\quad \text{மற்றும்}\quad D=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}c & 0 & \cdots & 0\\ 0 & c & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & c\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{array}$$

என்பன முறையே வரிசை 3, 2, 1 மற்றும் n உடைய திசையிலி அணிகளாகும்.

மேலும், ஒரு பூஜ்ஜிய சதுர அணி, திசையிலி 0 உடைய திசையிலி அணியாகும் என்பதை கவனத்தில் கொள்க.

வரையறை 7.9

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் 1 ஆகவும் மற்ற உறுப்புகள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமாகவும் இருந்தால், அவ்வணி ***அலகு அணி அல்லது சமனி அணி*** எனப்படும். எனவே,

$$A=[a_{ij}]_{n\times n}\ \text{என்ற சதுர அணியில்}\ a_{ij}=\begin{cases}1\ ;\ i=j\\ 0\ ;\ i\neq j\end{cases}$$ எனில், A என்பது ஓர் அலகு அணியாகும்.

மேலும், n வரிசை உடைய அலகு அணியை I_n எனக் குறிக்கிறோம்.

$$I_1=[1],\ I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \text{மற்றும்}\quad I_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{array}$$

என்பன முறையே வரிசை 1, 2, 3 மற்றும் n உடைய அலகு அணிகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

குறிப்பு 7.1

அலகு அணியானது ஒரு திசையிலி அணிக்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

முக்கோண வடிவ அணிகளில், மேல் முக்கோண வடிவ அணி மற்றும் கீழ் முக்கோண வடிவ அணி என இரண்டு வகைகள் உள்ளன.

வரையறை 7.10

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில் அவ்வணி ***மேல் முக்கோண வடிவ அணி*** எனப்படும்.

எனவே $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij}=0,\ i>j$ எனில், அவ்வணி மேல் முக்கோண வடிவ அணியாகும்.

$$\begin{bmatrix}4&3&0\\0&7&8\\0&0&2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-5&2\\0&1\end{bmatrix} \text{ மற்றும் } \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$ என்பன மேல் முக்கோண வடிவ அணிகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

வரையறை 7.11

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில், அவ்வணி ***கீழ் முக்கோண வடிவ அணி*** எனப்படும்.

எனவே, $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij}=0,\ i<j$ எனில், அவ்வணி கீழ் முக்கோண வடிவ அணியாகும்.

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\4&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2&0&0\\4&1&0\\8&-5&7\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-2&0\\9&-3\end{bmatrix} \text{ மற்றும் } \begin{bmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$ என்பன கீழ் முக்கோண வடிவ அணிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

வரையறை 7.12

மேல் முக்கோண வடிவில் அல்லது கீழ் முக்கோண வடிவில் உள்ள ஒரு சதுர அணியை ***முக்கோண வடிவ அணி*** என்கிறோம்.

மேலும், ஒரே நேரத்தில் மேல் மற்றும் கீழ் முக்கோண வடிவில் உள்ள ஒரு சதுர அணியானது ஒரு மூலைவிட்ட அணியாக அமைவதைக் காணலாம்.

7.2.2 அணிகளின் சமத்தன்மை (Equality of Matrices)

வரையறை 7.13

$A=[a_{ij}]$ மற்றும் $B=[b_{ij}]$ என்ற இரு அணிகள் ***சம அணிகள்*** ($A = B$ எனக் குறிப்பிடுவோம்) எனில்

(i) A, B என்ற அணிகள் ஒரே வரிசை அல்லது பரிமாணம் உடையவையாகும்.

(ii) $A,\ B$ ஆகிய அணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாக இருக்கும். அதாவது, அனைத்து i, j-க்கு $a_{ij}=b_{ij}$ ஆக இருக்கும். இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$ எனில், $x = 2.5, y = -1, u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ மற்றும் $v = \frac{3}{5}$ எனப்பெறுகிறோம்.

வரையறை 7.14

A, B என்ற இரு அணிகளுக்கு வரையறை 7.13-ல் உள்ள நிபந்தனைகள் (i) அல்லது (ii) இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூர்த்தி செய்யப்படவில்லை என்றால், அவ்விரு அணிகளும் **சமமற்றவை** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. ஏனெனில் இவ்வணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமற்றவை.

மேலும் $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$. ஏனெனில் இவ்வணிகளின் வரிசைகள் சமமல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 7.3

$$\begin{bmatrix} 3x+4y & 6 & x-2y \\ a+b & 2a-b & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$ எனில், x, y, a, b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

இரண்டு அணிகளும் சம அணிகள் என்பதால், அவற்றின் ஒத்த உறுப்புகளும் சமம்.

எனவே, $3x+4y = 2$, $x-2y = 4$, $a+b = 5$, $2a-b = -5$

இச்சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண, $x = 2$, $y = -1$, $a = 0$, $b = 5$ எனக் கிடைக்கும்.

7.2.3 அணிகளின் மீதான இயற்கணிதச் செயல்முறைகள் (Algebraic Operations on Matrices)

இப்பகுதியில் அணிகளின் அடிப்படைச் செயல்களான

(1) ஓர் அணியை திசையிலியால் பெருக்குதல்

(2) அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்

(3) அணிகளின் பெருக்கல்

ஆகியவற்றைப் பார்ப்போம்.

ஓர் அணியை மற்றோர் அணியால் வகுத்தல் பற்றிய கருத்தாக்கம் வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, A, B என்ற ஏதேனும் இரண்டு அணிகளுக்கு $\frac{A}{B}$ என்ற செயல்பாடு வரையறுக்கப்படவில்லை.

(1) ஓர் அணியைத் திசையிலியால் பெருக்குதல்

ஓர் அணி $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் k என்பது மெய் திசையிலி என்க. இப்போது, $kA = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்ற புதிய அணியை வரையறுப்போம். இங்கு, அனைத்து i, j-க்கு $b_{ij} = ka_{ij}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $kA=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$ ஆகும்.

குறிப்பாக, $k=-1$ எனில், $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ எனப்பெறுகிறோம். இந்த $-A$ என்பது A என்ற அணியின் எதிர்மறை அணி எனப்படும்.

(2) இரண்டு அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்

A, B என்பவை ஒரே வரிசையுடைய இரு அணிகள் எனில் இவற்றின் கூடுதல் அதே வரிசையுள்ள அணியாகும். இவ்வணி A + B எனக் குறிக்கப்பட்டு A, B-ன் ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ என்ற இரு அணிகளின் கூடுதல் $A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$ என்ற அணியாகும். இங்கு அனைத்து i, j-க்கு $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ஆகும்.

இதேபோல், கழித்தல் A – B ஆனது $A-B=A+(-1)B$ என வரையறுக்கப்படுகிறது

அதாவது, $A-B=[d_{ij}]_{m\times n}$, இங்கு $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, $\forall$ i மற்றும் j.

($\forall$ என்ற குறியீடு ஒவ்வொரு அல்லது அனைத்து எனப் பொருள்படும்).

குறிப்பு 7.2

A, B என்ற அணிகளின் வரிசைகள் சமமற்றவை எனில், A + B மற்றும் A – B என்பவற்றை வரையறுக்க இயலாது.

அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் செயல்களை எந்த ஒரு முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள அணிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.4

$A=\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{5} & 7 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{5} & 7.3 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ எனில், A + B மற்றும் A – B ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் வரையறைகளின்படி,

$$A+B=\begin{bmatrix} 4+\sqrt{3} & 2\sqrt{5} & 14.3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } A-B=\begin{bmatrix} 4-\sqrt{3} & 0 & -0.3 \\ -2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.5

$A=\begin{bmatrix} \sin^2\theta & 1 \\ \cot^2\theta & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ -\operatorname{cosec}^2\theta & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $C=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில்,

A + B + C -ஐக் காண்க.

தீர்வு

வரையறைப்படி, மூன்று அணிகளின் கூடுதல்

$$A+B+C=\begin{bmatrix} \sin^2\theta+\cos^2\theta+0 & 1+0-1 \\ \cot^2\theta-\operatorname{cosec}^2\theta-1 & 0+1+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.6

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 4 & -1\\ 5 & 6 & -5\end{bmatrix}$$ எனில், 3B + 4C – D-ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$3B+4C-D=\begin{bmatrix}6 & 9 & 0\\ 3 & -3 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -8 & 12\\ -4 & 0 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -4 & 1\\ -5 & -6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 13\\ -6 & -9 & 28\end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.7

சுருக்குக : $\sec\theta\begin{bmatrix}\sec\theta & \tan\theta\\ \tan\theta & \sec\theta\end{bmatrix}-\tan\theta\begin{bmatrix}\tan\theta & \sec\theta\\ \sec\theta & \tan\theta\end{bmatrix}$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கோவையினை A எனக்கொள்க.

அணிகளின் திசையிலிப் பெருக்கலுக்கான வரையைறையைப் பயன்படுத்த,

$$A=\begin{bmatrix}\sec^2\theta & \sec\theta\tan\theta\\ \sec\theta\tan\theta & \sec^2\theta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tan^2\theta & \tan\theta\sec\theta\\ \sec\theta\tan\theta & \tan^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3) அணிகளின் பெருக்கல்

வரையறை 7.15

A என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் A என்ற அணி B என்ற அணியுடன் பெருக்கலுக்கு உகந்தது எனப்படும்.

அதாவது, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ என்பன இரு அணிகள் எனில், இவ்வணிகளின் பெருக்கல் AB எனக்குறிப்பிடப்படும். மேலும் இதன் வரிசை $m\times p$ ஆகும்.

AB–ன் வரிசை $m\times p=\begin{pmatrix}A\text{ல் உள்ள நிரைகளின்}\\ \text{எண்ணிக்கை}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}B\text{ல் உள்ள நிரல்களின்}\\ \text{எண்ணிக்கை}\end{pmatrix}$

சமமாக இருக்க வேண்டும்

$\underset{m\times n}{A}$ $\underset{n\times p}{B}$

பெருக்கலின் வரிசை $m\times p$

$A=[a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n]_{1\times n}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}_{n\times 1}$, எனும்போது AB-யின் வரிசை 1×1 ஆகவும், ஒரே ஒரு உறுப்பு உடையதாகவும் இருக்கும். $AB=[a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n]\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=[a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right]$.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$[1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix}-2\\3\\5\end{bmatrix}=[1(-2)+2(3)+3(5)]=[-2+6+15]=[19].$$

பொதுவாக,

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B=[b_{ij}]_{n\times p}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix} \text{ எனில்,}$$

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}$$

மேலும் பெருக்கல் $AB=[c_{ij}]_{m\times p}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp}\end{bmatrix}$

இங்கு c_{ij} என்ற உறுப்பினை $c_{ij} = [a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \ldots\ \ a_{in}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.8

$A=\begin{bmatrix}0 & c & b\\ c & 0 & a\\ b & a & 0\end{bmatrix}$ எனில், A^2 –ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}0 & c & b\\ c & 0 & a\\ b & a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c & b\\ c & 0 & a\\ b & a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}$$

இங்கு, $c_{11} = [0\ \ c\ \ b]\begin{bmatrix}0\\c\\b\end{bmatrix}=0\cdot 0+c\cdot c+b\cdot b=c^2+b^2$. இதேபோல் மற்ற உறுப்புகளின் c_{ij} –க்கைளை கணக்கிடலாம்.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.9

$[x \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ எனில், x-ஐ காண்க.

தீர்வு

$$[x \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \quad [x-2+1 \quad x-8+1 \quad 2x+2+2]\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \quad [x-1 \quad x-7 \quad 2x+4]\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \quad x(x-1)+2(x-7)+1(2x+4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+3x-10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -5, 2.$$

குறிப்பு 7.3

(1) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, மற்றும் $m \neq p$, எனில், AB என்ற பெருக்கல் அணியை வரையறுக்க முடியும். ஆனால் BA–ஐ காண முடியாது.

(2) மெய்யெண்களின் பின்வரும் அடிப்படைப் பண்புகள் அணிகளிலும் விவாதிக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$ab = ba \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

$ab = ac \Rightarrow b = c \ \forall \ a,b,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ அல்லது $b = 0 \ \forall \ a,b \in \mathbb{R}$

இதேப்போன்று அணிகளிலும் விவாதிக்கலாம். அதாவது,

(i) AB மற்றும் BA என்பவை வரையறுக்கப்பட்டிருந்தாலும், $AB = BA$ ஆக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ என்பதால்}$$

$AB \neq BA$, எனக் காண்கிறோம்.

இந்நிலையில், A, B என்ற அணிகள் பெருக்கலைப் பொறுத்து பரிமாற்றுப் பண்பை பெறவில்லை என்கிறோம்.

மேலும் $AB = BA$ என்பதும் சில நேரங்களில் உண்மையாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு $AB = BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ எனக் காண்கிறோம்.

(ii) அணிப்பெருக்கலில் நீக்கல் பண்பு உண்மையாகாது. அதாவது, $n \times n$, $n > 1$ என்ற வரிசை உடைய $A \neq 0$, B, C என்ற மூன்று சதுர அணிகளுக்கு, $AB = AC$ எனில், $B = C$, மற்றும் $BA = CA$ எனில், $B = C$ என்பவை உண்மையாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

இவ்வுண்மைகளை, பின்வரும் எளிய எடுத்துக்காட்டின் மூலம் காணலாம்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆனால் $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(iii) $A \neq O$ மற்றும் $B \neq O$ ஆக இருந்து $AB = O$ ஆக வாய்ப்புள்ளது. அதாவது, $AB = O$ எனில், $A = O$ அல்லது $B = O$ ஆக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகளின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் செயல்களுக்கு உகந்த ஏதேனும் இரு அணிகள் A மற்றும் B–க்குப் பொதுவாக

- $(A \pm B)^2$ என்பது $A^2 \pm 2AB + B^2$ –க்கு சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை
- $A^2 - B^2$ என்பது $(A+B)(A-B)$ –க்கு சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை

எடுத்துக்காட்டு 7.10

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் AB மற்றும் BA ஆகியவற்றை இயலுமெனில் காண்க.

தீர்வு

A–ன் வரிசை 3×3 மற்றும் B–இன் வரிசை 3×2. எனவே AB–இன் வரிசை 3×2 ஆகும். A, B என்ற அணிகள் பெருக்கல் AB காண $C = AB$ என்க.

c_{11} = (A-இன் முதல் நிரை) (B–ன் முதல் நிரல்)

$$\Rightarrow \quad c_{11} = [1 \quad -1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 + 2 = 4$$ (c_{11} ஓர் உறுப்பு என்பதாகும்)

இதேபோல், $c_{12} = 0, c_{21} = 0, c_{22} = 13, c_{31} = 7, c_{32} = 5.$

எனவே, $AB = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 13 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

B என்ற அணியில் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை, *A* அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமல்ல என்பதால் *BA*–ஐக் காண முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 7.11

ஒரு பழவியாபாரி 3 வெவ்வேறு வகையான பரிசுத் தொகுப்புகளைத் தயார் செய்கிறார். தொகுப்பு I-ல், 6 ஆப்பிள், 3 ஆரஞ்சு மற்றும் 3 மாதுளை உள்ளன. தொகுப்பு II–ல், 5 ஆப்பிள், 4 ஆரஞ்சு மற்றும் 4 மாதுளை உள்ளன. தொகுப்பு III-ல் 6 ஆப்பிள், 6 ஆரஞ்சு மற்றும் 6 மாதுளை உள்ளன. ஓர் ஆப்பிள், ஓர் ஆரஞ்சு மற்றும் ஒரு மாதுளை ஆகியவற்றின் விலை முறையே ₹ 30, ₹ 15 மற்றும் ₹ 45 எனில், ஒவ்வொரு பழத் தொகுப்பையும் தயார் செய்ய ஆகும் செலவு எவ்வளவு?

தீர்வு

விலை அணி $A = [30 \;\; 15 \;\; 45]$,

$$\text{பழ அணி } B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{P-I} & \text{P-II} & \text{P-III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ஆப்பிள்} \\ \text{ஆரஞ்சு} \\ \text{மாதுளை} \end{array}$$

AB என்ற அணியை காண்பதன் மூலம் பழத் தொகுப்புகளின் விலைகளைக் காணலாம்.

அதாவது, *A*–இல் உள்ள ஒவ்வொரு உருப்படியின் விலையுடன் (விலை அணி *A*) *B*–இல் உள்ள உருப்படிகளின் எண்ணிக்கையைப் (பழ அணி *B*) பெருக்குவதால் பழத்தொகுப்புகளின் விலைகளைப் பெறலாம்.

$$AB = [30 \;\; 15 \;\; 45] \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = [360 \;\; 390 \;\; 540]$$

எனவே தொகுப்பு I–ன் விலை ₹ 360, தொகுப்பு II–ன் விலை ₹ 390, தொகுப்பு III–ன் விலை ₹ 540.

7.2.4. அணிக்கூட்டல், அணியை திசையிலியால் பெருக்குதல் மற்றும் அணிப்பெருக்கல் ஆகியவற்றின் பண்புகள் (Properties of matrix addition, scalar multiplication and Product of Matrices)

A, B, C என்பன சமவரிசையுடைய கூட்டலுக்கு உகந்த மூன்று அணிகள் மற்றும் *a, b* என்பன திசையிலிகள் என்க. இப்போது,

(1) $A+B$ என்பது அதே வரிசையுடைய அணியைக் கொடுக்கும்.

(2) $A + B = B + A$ (அணிக்கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்புடையது)

(3) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (அணிக்கூட்டல் சேர்ப்புத் தன்மையுடையது)

(4) $A + O = O + A = A$ (*O* என்பது கூட்டல் சமனி)

(5) $A + (-A) = O = (-A) + A$ (– *A* என்பது கூட்டலைப் பொறுத்து *A*-ன் எதிர்மறை அணியாகும்).

(6) $(a + b)A = aA + bA$ மற்றும் $a(A + B) = aA + aB$

(7) $a(bA) = (ab)A$, $1A = A$ மற்றும் $0A = O$.

அணிகளின் பெருக்கல் பண்புகள் (Properties of matrix multiplication)

அணிகளின் இயற்கணிதப் பண்புகளில் இருந்து பின்வருவனவற்றைப் பெறலாம்.

- A, B, C என்பன முறையே $m \times n$, $n \times p$ மற்றும் $p \times q$ வரிசைகள் உடைய மூன்று அணிகள் எனில், $A(BC)$ மற்றும் $(AB)C$ என்பன $m \times q$ என்ற ஒரே வரிசை உடைய அணிகளாகும். மேலும்

  $A(BC) = (AB)C$ (அணிகளின் பெருக்கல் சேர்ப்புத் தன்மையுடையது).

- A, B, C என்பன முறையே $m \times n$, $n \times p$ மற்றும் $n \times p$ வரிசைகள் உடைய மூன்று அணிகள் எனில், $A(B + C)$ மற்றும் $AB + AC$ என்பன $m \times p$ என்ற ஒரே வரிசை உடைய அணிகளாகும். மேலும் $A(B + C) = AB + AC$. (அணிகளின் பெருக்கல் கூட்டலைப் பொறுத்து இடது பங்கீட்டுத் தன்மையுடையது)

- A, B, C என்பன முறையே $m \times n$, $m \times n$ மற்றும் $n \times p$ வரிசைகள் உடைய மூன்று அணிகள் எனில், $(A + B)C$ மற்றும் $AC + BC$ என்பன $m \times p$ என்ற சமவரிசை உடைய அணிகளாகும். மேலும் $(A + B)C = AC + BC$. (அணிகளின் பெருக்கல் கூட்டலைப் பொறுத்து வலது பங்கீட்டுத் தன்மையுடையது).

- A, B என்பன முறையே $m \times n$, $n \times p$ வரிசைகள் உடைய இரண்டு அணிகள் மற்றும் α ஒரு திசையிலி எனில், $\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$ என்பது $m \times p$ வரிசை உடைய ஓர் அணியாகும்.

- I என்பது ஓர் அலகு அணி எனில், $AI = IA = A$ (I என்பது பெருக்கல் சமனி).

7.2.5 நிரை நிரல் அணியின் மீதான செயல்முறைகள் மற்றும் அதன் பண்புகள் (Operation of transpose of a matrix and its properties)

வரையறை 7.16

ஓர் அணி A–ன் நிரை மற்றும் நிரல்களை இடமாற்றம் செய்வதன் மூலம் பெறப்படும் அணி A–ன் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். இது A^T எனக் குறிக்கப்படும்.

அதாவது, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ எனில், $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, இங்கு $b_{ij} = a_{ji}$ ஆகும். மேலும் A^T –ன் (i, j) –ஆவது உறுப்பு a_{ji} ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 4 \\ -8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ எனில் } A^T = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது நாம், வெளிப்படையான நிரூபணங்களைக் கொண்ட நிரை நிரல் மாற்று அணிக்கான சில அடிப்படை முடிவுகளைக் காண்போம்.

A , B என்பன உகந்த வரிசைகள் உடைய இரு அணிகள் எனில்,

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(kA)^T = kA^T$ (இங்கு k ஒரு திசையிலி)

(iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$ (நிரை நிரல் மாற்று அணியின் பின் திருப்புகை விதி)

எடுத்துக்காட்டு 7.12

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ எனில், பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $(AB)^T = B^T A^T$ (ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$ (iv) $(3A)^T = 3A^T$

தீர்வு

(i) $AB = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 22 \\ -2 & 9 & 9 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{... (1)}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{... (2)}$$

(1) மற்றும் (2)–லிருந்து, $(AB)^T = B^T A^T$.

(ii) $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{...(3)}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{... (4)}$$

(3) மற்றும் (4)–லிருந்து, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(iii) $A-B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$(A-B)^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{... (5)}$$

$$A^T - B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots (6)$$

(5) மற்றும் (6)–லிருந்து, $(A-B)^T = A^T - B^T$

(iv) $3A = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

$$(3A)^T = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = 3(A^T)\ .$$

7.2.6 சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகள் (Symmetric and skew-symmetric matrices)

வரையறை 7.17

A என்பது ஒரு சதுர அணி என்க. $A^T = A$ எனில், A என்பது **சமச்சீர்** அணியாகும்.

அதாவது, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி எனில், அனைத்து i, j-க்கு $a_{ij} = a_{ji}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு $A^T = A$ என்பதால், இவ்வணி ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

A^T என்ற அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி A என்ற அணியேயாகும் என்பதை கவனிக்கவும். அதாவது $\left(A^T\right)^T = A$.

வரையறை 7.18

A என்ற சதுர அணிக்கு $A^T = -A$ எனில், அவ்வணி **எதிர் சமச்சீர்அணி** எனப்படும்.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ என்பது எதிர் சமச்சீர்அணி எனில், அனைத்து i, j-க்கு $a_{ij} = -a_{ji}$ ஆகும்.

$i = j$ எனப்பிரதியிட்டால், $2a_{ii} = 0$ அல்லது $a_{ii} = 0\ \forall\ i$.

அதாவது, ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியில் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமாகும் என்பதே இதன் பொருளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு $A^T = -A$ என்பதால், இவ்வணி ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

மேலும் எந்தவொரு சதுர அணியையும் சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

தேற்றம் 7.1

A என்பது மெய்யெண் மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு சதுர அணி எனில், $A + A^T$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணியாகும். மற்றும் $A - A^T$ என்பது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

நிரூபணம்

$B = A + A^T$ என்க.

$$B^T = (A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B$$

எனவே, $A + A^T$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

$C = A - A^T$ என்க.

$$C^T = (A + (-A^T))^T = A^T + (-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -C$$

எனவே $A - A^T$ என்பது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியாகும். ■

தேற்றம் 7.2

ஒரு சதுர அணியை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

நிரூபணம்

A என்பது ஒரு சதுர அணி என்க.

$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ என எழுதலாம்.

தேற்றம் 7.1லிருந்து, $(A + A^T)$ மற்றும் $(A - A^T)$ என்பன முறையே சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளாகும். $(kA)^T = kA^T$ என்பதிலிருந்து $\frac{1}{2}(A + A^T)$ மற்றும் $\frac{1}{2}(A - A^T)$ ஆகியவை முறையே சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகள் ஆகும். இதிலிருந்து தேவையான முடிவினைப் பெறலாம். இதன் மூலம் தேற்றம் நிரூபிக்கப்படுகிறது. ■

குறிப்பு 7.4

சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணியாக உள்ள அணி பூஜ்ஜிய அணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.13

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதுக.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$ என்க.

இப்பொழுது $$P^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix} = P$$

ஆகையால், $P = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்

$Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$ என்க.

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 9 & 0 & 3 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ஆகையால் $Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$ எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

$$A = P + Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகவே A என்பதை ஒரு சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளில் கூடுதலாக எழுதலாம்.

பயிற்சி 7.1

(1) (i) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}, m = 2, n = 3$ (ii) $a_{ij} = \frac{|3i-4j|}{4}, m = 3, n = 4$ என இருக்குமாறு உறுப்புகளைக் கொண்ட $m \times n$ வரிசை உடைய $A = [a_{ij}]$ அணிகளை உருவாக்குக.

(2) $\begin{bmatrix} p^2-1 & 0 & -31-q^3 \\ 7 & r+1 & 9 \\ -2 & 8 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & \frac{3}{2} & 9 \\ -2 & 8 & -\pi \end{bmatrix}$ எனில், p, q, r, s ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(3) $\begin{bmatrix} 2x+y & 4x \\ 5x-7 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7y-13 \\ y & x+6 \end{bmatrix}$ எனில், $x + y$ -ஐ காண்க.

(4) $2A - B + \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$ மற்றும் $A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ என்ற அணிச்சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் A, B என்ற அணிகளைக் காண்க.

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், A^4–ஐ காண்க.

(6) $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ எனில்.

(i) $A_\alpha\ A_\beta = A_{(\alpha+\beta)}$ என நிறுவுக.

(ii) $A_\alpha + A_\alpha^T = I$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் α -ன் அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் காண்க.

(7) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$ மற்றும் $(A-2I)(A-3I) = O$ எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$ எனில், A^2 என்பது அலகு அணியாகும் என நிறுவுக.

(9) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^3 - 6A^2 + 7A + kI = O$, எனில். k–ஐ காண்க.

(10) பின்வரும் நிபந்தனைகள் ஒவ்வொன்றையும் நிறைவுசெய்யும் அணிகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக.

(i) $AB \neq BA$ எனுமாறுள்ள A மற்றும் B அணிகள்

(ii) $AB = O = BA, A \neq O$ மற்றும் $B \neq O$ எனுமாறுள்ள A, B அணிகள்

(iii) $AB = O$ மற்றும் $BA \neq O$ எனுமாறுள்ள A, B அணிகள்

(11) $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $f(x)f(y) = f(x+y)$ என நிறுவுக.

(12) A என்பது $A^2 = A$ என்றவாறுள்ள ஒரு சதுர அணி எனில், $7A - (I + A)^3$–ன் மதிப்புக் காண்க.

(13) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ எனில், $A(B + C) = AB + AC$ எனும் பண்பினைச் சரிபார்க்க.

(14) $A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற அணிச்சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யும் A என்ற அணியைக் காண்க.

(15) If $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T = B^T + A^T$ (ii) $(A-B)^T = A^T - B^T$ (iii) $(B^T)^T = B$

(16) 3×4 வரிசை உடைய ஒரு அணி A மற்றும் B என்ற இரண்டு அணிகளும் $A^T B$ மற்றும் BA^T ஆகிய இரண்டையும் வரையறை செய்யுமாறுள்ள அணிகள் எனில், B அணியின் வரிசையைக் காண்க.

(17) பின்வரும் அணிகளை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதுக.

(i) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

(18) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ எனுமாறுள்ள A என்ற அணியைக் காண்க.

(19) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ x & 2 & y \end{bmatrix}$ மற்றும் $AA^T = 9I$ எனில், x, y–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(20) (i) x–ன் எம்மதிப்புக்கு, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & x^3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்?

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & p & 3 \\ 2 & q^2 & -1 \\ r & 1 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணி எனில், p, q, r–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(21) $a_{ij} = i - j$ எனில், $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ என்ற அணியை உருவாக்குக. மேலும், A என்பது சமச்சீர் அணியா அல்லது எதிர் சமச்சீர் அணியா எனக் கூறுக.

(22) A, B என்பன இரு சமச்சீர் அணிகள் என்க. $AB = BA$ எனில், AB என்பது சமச்சீர் அணியாகும் என நிறுவுக. மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மை என நிறுவுக.

(23) A, B என்பன சமவரிசையுள்ள இரு சமச்சீர் அணிகள் எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $AB + BA$ என்பது சமச்சீர் அணியாகும்

(ii) $AB - BA$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்

(24) ஓர் அங்காடியில் முந்திரி, உலர் திராட்சை மற்றும் பாதாம் பருப்பு ஆகியவற்றைக் கொண்டு மூன்று விதமான பரிசுப் பைகள் தயார் செய்யப்படுகின்றன.

பை I–ல் 100 கிராம் முந்திரி, 100 கிராம் உலர் திராட்சை மற்றும் 50 கிராம் பாதாம் பருப்பும்,

பை II–ல் 200 கிராம் முந்திரி, 100 கிராம் உலர் திராட்சை மற்றும் 100 கிராம் பாதாம் பருப்பும்,

பை III–ல் 250 கிராம் முந்திரி, 250 கிராம் உலர் திராட்சை மற்றும் 150 கிராம் பாதாம் பருப்பும் உள்ளன.

50 கிராம் முந்திரியின் விலை ₹ 50, 50 கிராம் உலர் திராட்சையின் விலை ₹ 10 மற்றும் 50 கிராம் பாதாம் பருப்பின் விலை ₹ 60 எனில், ஒவ்வொரு பரிசுப் பையின் விலையைக் காண்க.

7.3 அணிக்கோவைகள் (Determinants)

n வரிசையுள்ள ஒவ்வொரு சதுர அணி A உடன், நாம் அணி A-ன் அணிக்கோவை என்ற எண்ணைத் தொடர்புபடுத்தலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ எனில், } A\text{–ன் அணிக்கோவை } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு 7.5

(i) சதுர அணிகளுக்கு மட்டுமே அணிக்கோவைகளை வரையறுக்க முடியும்.

(ii) ஒரு சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவையை $|A|$ எனக் குறிக்கிறோம்.

(இதனை அணிக்கோவை A எனப்படிக்கவும்)

(iii) ஓர் அணி என்பது வடிவமைப்பு மட்டுமே. ஆனால், அணிக்கோவை ஒரு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

7.3.1 பல்வேறு வரிசைகள் உடைய அணியின் அணிக்கோவைகள் (Determinants of matrices of different order)

வரிசை 1 உடைய அணியின் அணிக்கோவை

$A = [a]$ என்பது வரிசை 1 உடைய அணி எனில், A–ன் அணிக்கோவை 'a' என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரிசை 2 உடைய அணியின் அணிக்கோவை

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 2 உடைய அணி எனில், A–ன் அணிக்கோவை

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7.14

மதிப்பிடுக : (i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

தீர்வு

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 2) - (-1 \times 4) = 4 + 4 = 8.$

(ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = (\cos\theta.\cos\theta) - (-\sin\theta.\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

வரிசை 3 உடைய அணியின் அணிக்கோவை

மெய்யெண்கள் அல்லது $\mathbb{R}$–ல் வரையறுக்கப்பட்ட மெய் மதிப்புகளையுடைய சார்புகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 3 × 3 வரிசையுடைய அணிக்கோவையை எடுத்துக்கொண்டு, அதன் பண்புகளைப் பற்றிப் படிப்பதுடன் அணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளைக் காணும் பல்வேறு முறைகள் குறித்தும் விவாதிப்போம்.

வரையறை 7.19

$A=[a_{ij}]_{3\times3}$ என்பது 3–ஆம் வரிசையுடைய சதுர அணி என்க. ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு a_{ij} –ன் **சிற்றணிக்கோவை**யானது a_{ij} உள்ள i-ஆவது நிரை மற்றும் j-ஆவது நிரலை நீக்குவதால் பெறப்படும் அணிக்கோவையாகும். a_{ij} –ன் சிற்றணிக்கோவையானது வழக்கமாக M_{ij} எனக் குறிக்கப்படும்.

வரையறை 7.20

தகுந்த குறியிடப்பட்ட சிற்றணிக்கோவை **இணைக்காரணி** எனப்படும். a_{ij} –ன் இணைக்காரணி A_{ij} எனக்குறிக்கப்படும். மேலும் $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ என வரையறுக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ என்பது 3×3 வரிசை உடைய அணி என்க.

இவ்வணியின் உறுப்புகள் a_{11}, a_{12}, a_{13} ஆகியவற்றின் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகள் பின்வருமாறு :

(i) a_{11} –ன் சிற்றணிக்கோவை $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$

a_{11} –ன் இணைக்காரணி $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$

(ii) a_{12} –ன் சிற்றணிக்கோவை $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}$

a_{12} –ன் இணைக்காரணி $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})$

(iii) a_{13} –ன் சிற்றணிக்கோவை $M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}$

a_{13} –ன் இணைக்காரணி $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}$

முடிவு 7.1 லாப்லாஸ் விரிவாக்கம் (Laplace Expansion)

கொடுக்கப்பட்ட $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ என்ற அணியின் முதல் நிரையிலுள்ள உறுப்புகளை அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகளுடன் பெருக்கிக் கூடுதல் கண்டால், அது A–ன் அணிக்கோவைக்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$. ... (1)

இதனையே சிற்றணிக் கோவைகளின் வரையறையைப் பயன்படுத்தி பின்வருமாறு எழுதலாம்.
$|A|=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$.

ஓர் அணிக்கோவையை எந்தவொரு நிரை அல்லது நிரல் வழியாகவும் விரிவுப்படுத்தலாம். இவ்வாறு காணப்படும் எல்லா விரிவாக்கங்களின் மதிப்புகள் அனைத்தும் சமமாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

R_2 வழியாக விரிவுபடுத்த, $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

C_1 வழியாக விரிவுபடுத்த, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

எடுத்துக்காட்டு 7.15

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், A என்ற அணியின் அனைத்து சிற்றணிக்கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகளைக் காண்க. இவற்றைப் பயன்படுத்தி $|A|$-ஐக் காண்க. மேலும். எந்த ஒரு நிரை அல்லது நிரலைப் பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்தினாலும் $|A|$–ன் மதிப்பு மாறுவதில்லை எனச்சரிபார்க்க.

தீர்வு

சிற்றணிக்கோவைகள் :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 30 = -40$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 18 = 26$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 = 16$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 9 = 14$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 12 = -17$$

இணைக்காரணிகள் :

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(-40) = -40$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}(+26) = -26$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}(16) = -16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}(-4) = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}(14) = -14$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}(8) = 8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}(-17) = -17$$

R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த,

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$|A| = 1(-40) + (3)(-26) + (-2)(5) = -128 \qquad \ldots (3)$$

C_1 வழியாக வரிவுபடுத்த,

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= 1(-40) + 4(-16) + -3(8) = -128 \qquad \ldots (4)$$

(3) மற்றும் (4)லிருந்து,

R_1 வழியாக விரிவுபடுத்திப் பெறப்பட்ட | A |-ன் மதிப்பானது C_1 வழியாக விரிவுபடுத்திப் பெற்ற | A |-ன் மதிப்புக்குச் சமம் என நிரூபணமாகிறது.

சாரஸ் விதியைப் பயன்படுத்தி வரிசை 3 உடைய அணிக்கோவையை மதிப்பிடல் (பிரெஞ்சுக் கணித மேதை பியாரே ப்ரடிக் சாரஸ் என்பவரது பெயரால் இவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது)

(Evaluation of determinant of order 3 by using Sarrus Rule)

$$[A]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A என்ற அணியின் உறுப்புகளை பின்வருமாறு எழுதுக:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$|A|$ ஆனது பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது :

$$|A| = \left[a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right] - \left[a_{33}a_{21}a_{12} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{31}a_{22}a_{13}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 7.16

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{bmatrix}$$ எனில், $|A|$-ஐ காண்க.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} = 0M_{11}-\sin\alpha M_{12}+\cos\alpha M_{13}$$

$$= 0-\sin\alpha(0-\cos\alpha\sin\beta)+\cos\alpha(-\sin\alpha\sin\beta-0)=0.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.17

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$ எனில், $|A|$-ன் மதிப்பை சாரஸ் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{array}$$

$$|A| = \left[3(-1)(6)+4(2)(5)+1(0)(-2)\right] - \left[5(-1)(1)+(-2)(2)3+6(0)(4)\right]$$

$$= [-18+40+0]-[-5-12+0] = 22+17 = 39.$$

குறிப்பு 7.6

ஓர் அணிக்கோவையின் மதிப்பை எளிமையாகக் காண, அவ்வணிக்கோவையைப் பூஜ்ஜியங்கள் அதிகமாக உள்ள நிரை அல்லது நிரல் வழியாக விரிவுபடுத்தலாம்.

வரிசை n, $n\geq 4$ என உள்ள சதுர அணியின் அணிக்கோவை

அணிக்கோவைகளின் கருத்தாக்கத்தை வரிசை $n, n\geq 4$ என உள்ள சதுர அணிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். $A=[a_{ij}]_{n\times n}, n\geq 4$ என்க.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ என்ற அணியின் அணிக்கோவையில் i ஆவது நிரை மற்றும் j ஆவது நிரலை நீக்கினால், வரிசை $(n-1)$ உடைய ஒரு அணிக்கோவை கிடைக்கும். இவ்வணிக்கோவை a_{ij} என்ற உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவையாகும். இதனை M_{ij} எனக்குறிக்கிறோம். a_{ij}–ன் இணைக்காரணி $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

முடிவு 7.2

வரிசை n உடைய சதுர அணி $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ –ன் முதல் நிரையில் உள்ள உறுப்புகளையும் அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகளையும் பெருக்கிக் கூட்டினால், அது அணிக்கோவை A–க்கு சமமாகும். அதாவது,

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$ இதற்குச் சமமாகச் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகளின் வரையறையைப் பயன்படுத்தி பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \ .$$

இங்கு, A_{1j} என்பது a_{1j}–ன் இணைக்காரணி மற்றும் M_{1j} என்பது a_{1j}–ன் சிற்றணிக் கோவையாகும். $j = 1, 2, \ldots n$ ஆகும்.

குறிப்பு 7.7

(i) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ எனில், A–ன் அணிக்கோவையை $det(A)$ அல்லது $det\ A$ அல்லது Δ எனக் குறிப்பிடலாம்.

(ii) இதனை, ஏதேனுமொரு நிரை அல்லது நிரலைப் பயன்படுத்தியும் கணக்கிடலாம்.

7.3.2 அணிக்கோவைகளின் பண்புகள் (Properties of Determinants)

அணிக்கோவைகளின் மதிப்புக் காண, பின்வரும் அணிக்கோவையின் பண்புகளில் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவற்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

பண்பு 1

ஓர் அணிக்கோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் இடமாற்றம் செய்தால் அதன் மதிப்பு மாறாது. அதாவது, $|A| = |A^T|$.

ஓர் அணிக்கோவையில் நிரைவழி விரிவு காண்பதும், நிரல் வழி விரிவு காண்பதும் சமம் என்பதிலிருந்து இப்பண்பு உண்மையாகிறது.

பண்பு 2

ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் இரு நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) இடமாற்றம் செய்யப்படும்போது, அணிக்கோவையின் குறி மாறும். ஆனால் எண்ணளவு மாறாது.

சரிபார்த்தல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (R_2 \leftrightarrow R_3) \text{ என்க.}$$

$$= a_1(b_3c_2 - b_2c_3) - b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_3b_2 - a_2b_3)$$

$$= -a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$

$$= -|A|$$

$$|A_1| = -|A| .$$

பண்பு 3

A என்ற அணியின் n நிரைகள் (நிரல்கள்) இடமாற்றம் செய்யப்படின், அவ்வணியின் அணிக்கோவை $(-1)^n |A|$ ஆகும்.

பண்பு 4

ஓர் அணிக்கோவையில் இரு நிரைகள் (அல்லது நிரல்கள்) சர்வ சமம் எனில், அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

சரிபார்த்தல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ என்க. இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நிரைகள் சர்வ சமம் எனக் கொள்க.

இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் நிறைகளைப் பரிமாற்றம் செய்யக் கிடைப்பது

$$-|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = |A|$$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\Rightarrow\ 2|A| = 0\ \Rightarrow |A| = 0.$

பண்பு 5

A என்ற அணியின் ஒரு நிரை (அல்லது நிரல்) அவ்வணியின் மற்றொரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) திசையிலிப் பெருக்கலாக இருப்பின், அதன் அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

குறிப்பு 7.8

(i) ஓர் அணிக்கோவையின் ஒரு நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில், அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

(ii) ஒரு முக்கோண வடிவ அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பானது அதன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாகும்.

பண்பு 6

ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு திசையிலி kஆல் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு kஆல் பெருக்கப்பட்டதாக அமையும்.

சரிபார்த்தல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்க.

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்க.

$$= ka_1(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + kc_1(a_2b_3 - a_3b_2) = k|A|$$

$$= k[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] = k|A|$$

$\Rightarrow |A_1| = k|A|.$

குறிப்பு 7.9

(i) A என்பது வரிசை n உடைய சதுர அணி எனில்,

(ii) $|AB| = |A||B|$

(iii) $AB = O$ எனில், $|A| = 0$ அல்லது $|B| = 0.$

(iv) $|A^n| = (|A|)^n$

பண்பு 7

ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்குமெனில், அவ்வணிக்கோவையை இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிக்கோவைகளின் கூட்டல் பலனாக எழுத இயலும்.

அதாவது, $$\begin{vmatrix} a_1+m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

சரிபார்த்தல்

முதல் நிரல் வழியாக விரிவுபடுத்த

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (a_1+m_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(a_2+m_2)(b_1c_3-b_3c_1)+(a_3+m_3)(b_1c_2-b_2c_1) \\ &= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)+m_1(b_2c_3-b_3c_2)-m_2(b_1c_3-b_3c_1) \\ &\qquad +m_3(b_1c_2-b_2c_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{RHS} \end{aligned}$$

‘

பண்பு 8

ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்போடும் மற்ற பிற நிரைகளில் (நிரல்களில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளைக் குறிப்பிட்ட மாறிலிகளால் முறையே பெருக்கிக் கூட்டுவதால் அல்லது கழிப்பதால் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

சரிபார்த்தல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்க.

மற்றும் $$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1+pa_2+qa_3 & b_1+pb_2+qb_3 & c_1+pc_2+qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa_2 & pb_2 & pc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qa_3 & qb_3 & qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ (பண்பு 7–ன்படி)

$$|A_1| = |A| + p\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$|A_1| = |A| + p(0) + q(0) = |A|$ (பண்பு 4–ன்படி)

$|A_1| = |A|$

இப்பண்பு ஒரு குறிப்பிட்ட நிறையை அல்லது நிரலைச் சார்ந்தது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 7.18

a, b, c மற்றும் x என்பன மிகை மெய்யெண்கள் எனில், $$\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^x+b^{-x})^2 & (b^x-b^{-x})^2 & 1 \\ (c^x+c^{-x})^2 & (c^x-c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}$$ என்பது பூஜ்ஜியமாகும் என நிரூபிக்க.

தீர்வு

$C_1 \to C_1 - C_2$ -ஐ பயன்படுத்த, $\begin{vmatrix} 4 & \left(a^x - a^{-x}\right)^2 & 1 \\ 4 & \left(b^x - b^{-x}\right)^2 & 1 \\ 4 & \left(c^x - c^{-x}\right)^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ [C_1, C_3 விகிதச் சமமானவை]

எடுத்துக்காட்டு 7.19

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{bmatrix}$ ஆகியவற்றின் அணிக்கோவைகளை விரிவுபடுத்தாமல், $|B| = 2|A|$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$|B| = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} (R_2 \to R_2 - R_1 \text{ and } R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= 2(-1)^2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= 2|A|.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.20

மதிப்பு காண்க $\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix}$.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 2017-2014 & 0 \\ 2020 & 2023-2020 & 1 \\ 2023 & 2026-2023 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 3 & 0 \\ 2020 & 3 & 1 \\ 2023 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2014 & 1 & 0 \\ 2020 & 1 & 1 \\ 2023 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3(2014 - 2023) = -3(-9) = 27.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.21

$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ எனில், x-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் என்பதால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு $(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, 2, 3$.

எடுத்துக்காட்டு 7.22

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$ எனில்

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)[(z+x)-(y+x)]$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x) = \text{RHS}.$$

பயிற்சி 7.2

(1) அணிக்கோவையை விரிவுபடுத்தாமல், $\begin{vmatrix} s & a^2 & b^2+c^2 \\ s & b^2 & c^2+a^2 \\ s & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ என நிறுவுக.

(4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ என நிறுவுக.

(5) $\begin{vmatrix} \sec^2\theta & \tan^2\theta & 1 \\ \tan^2\theta & \sec^2\theta & -1 \\ 38 & 36 & 2 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(6) $\begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(7) 3 $\times$ 3 வரிசை உடைய எதிர் சமச்சீர் அணியின் பொது வடிவத்தை எழுதுக. அதன் அணிக்கோவையின் மதிப்பு 0 எனக் காட்டுக.

(8) $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ எனில், a, b, c என்பன G.P.–ல் அமையும் அல்லது α என்பது $ax^2 + 2bx + c = 0$–ன் ஒரு மூலமாகும் என நிறுவுக.

(9) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(10) a, b, c என்பன ஒரு A.P.–ன் p, q மற்றும் r-ஆவது உறுப்புகள் எனில், $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$–ன் மதிப்பு காண்க.

(11) $\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab & ac \\ ab & b^2+x^2 & bc \\ ac & bc & c^2+x^2 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவை x^4ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

(12) a, b, c என்பவை மிகை மற்றும் அவை ஒரு G.P.–ன் p, q மற்றும் rஆவது உறுப்புகள் எனில், $\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

(13) $x, y, z \neq 1$ எனில், $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு காண்க.

(14) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ எனில், $\sum_{k=1}^{n} \det(A^k) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ என நிறுவுக.

(15) விரிவுபடுத்தாமல் பின்வரும் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பைக் காண்க. :

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(16) A என்பது ஒரு சதுர அணி மற்றும் $|A| = 2$ எனில், $|AA^T|$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(17) A, B என்பன $|A| = -1$ மற்றும் $|B| = 3$ எனுமாறு உள்ள 3 வரிசை சதுர அணிகள் எனில், $|3AB|$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(18) $\lambda = -2$ எனில், $\begin{vmatrix} 0 & 2\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 3\lambda^2+1 \\ -1 & 6\lambda-1 & 0 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(19) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

(20) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ என சரிபார்க்க.

(21) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் இரண்டாம் நிரையில் உள்ள உறுப்புகளின் இணைக்காரணிகளைப் பயன்படுத்தி, $|A|$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

7.3.3 அணிக்கோவைகளுக்குக் காரணித் தேற்றத்தின் பயன்பாடு (Application of factor theorem to determinants)

தேற்றம் 7.3 (காரணித்தேற்றம்) (Factor Theorem)

ஓர் அணி A–ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் x–ஆல் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருந்து, $x = a$ எனப் பிரதியிட $|A|$ –ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும் எனில், $(x - a)$ என்பது $|A|$ –ன் ஒரு காரணியாகும்.

குறிப்பு 7.10

(i) ஓர் அணிக்கோவையின் மதிப்பைக் காரணிகளின் பெருக்கல் வடிவில் பெறுவதற்கு இத்தேற்றம் மிகவும் பயன்படுகிறது.

(ii) $b = a$ என $|A|$-ல் பிரதியிட, அதன் ஏதேனும் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் சர்வசமமானால், $|A| = 0$ ஆகும். எனவே காரணித் தேற்றத்தின்படி $(a-b)$ என்பது $|A|$–ன் ஒரு காரணியாகும்.

(iii) n $(n \geq r)$ வரிசையுள்ள அணிக்கோவையில் $x = a$ எனப் பிரதியிட, r நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வசமமானால், $(x - a)^{r-1}$ என்பது $|A|$ –ன் ஒரு காரணியாகும்.

(iv) ஒரு சதுர அணியின் (அல்லது அதன் அணிக்கோவை) ஒவ்வொரு நிரையும் முதல் நிரையில் உள்ள மாறிகளை வட்டச் சுழல் முறையில் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்பட்டால், அது வட்டச் சமச்சீர் வடிவம் எனப்படும்.

(v) ஒரு வட்டச் சமச்சீர் அணிக்கோவையில் m என்பது காரணிகளின் (பிரதியிடுவதால் பெறப்பட்ட) பெருக்கலின் படிக்கும் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கலின் படிக்கும் உள்ள வித்தியாசம் என்க.

(1) இப்போது $m = 0$ எனில் மேலும் தேவையான காரணி மாறிலி k ஆகும்.

(2) $m = 1$ எனில் மேலும் தேவையான காரணி $k(a+b+c)$ ஆகும்.

(3) $m = 2$ எனில் மேலும் தேவையான காரணி $k(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.23

காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+9)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$x = 1$ எனப்பிரதியிட, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

இங்கு மூன்று நிரைகளும் சர்வசமம். எனவே, $(x-1)^2$ ஆனது $|A|$–ன் ஒரு காரணியாகும்.

$|A|$–ல் $x = -9$ எனப் பிரதியிட, $|A| = \begin{vmatrix} -8 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

எனவே, $(x+9)$ஆனது $|A|$–ன் காரணியாகும். $[C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$

அதாவது $(x-1)^2\,(x+9)$ என்பது $|A|$–ன் காரணியாகும். இதன் படி 3 ஆகும். அணிக்கோவை x–ல் அமைந்த 3–ம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எனவே, மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி, மாறிலி 'k' ஆகும்.

ஆகவே, $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = k(x-1)^2(x+9)$

x^3 உறுப்புகளை இருபுறமும் சமப்படுத்த, $k = 1$ எனப்பெறுகிறோம்.

எனவே, $|A| = (x-1)^2\,(x+9)$.

எடுத்துக்காட்டு 7.24

$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)\ (y-z)\ (z-x)\ (xy+yz+zx)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$x = y$ எனப்பிரதியிட, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 = R_2)$

எனவே, $(x-y)$ என்பது $|A|$-ன் ஒரு காரணியாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவை x, y, z என்பவற்றில் வட்ட சமச்சீரானது. ஆகவே, $(y-z)$ மற்றும் $(z-x)$ ஆகியவையும் $|A|$ -ன் காரணிகளாகும்.

இப்போது $(x-y)(y-z)(z-x)$ என்பது $|A|$-ன் காரணியாகும். இதன் படி 3 ஆகும்.

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கல் $1\times y^2\times z^3$. இதன் படி 5 ஆகும்.

எனவே மீதமுள்ள மற்றொரு காரணி $k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)$ ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = [k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)]\times(x-y)(y-z)(z-x)$$

$x=0$, $y=1$ மற்றும் $z=2$ எனப்பிரதியிட,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \left[k(0+1+4)+\ell(0+2+0)\right](-1)(1-2)(2-0)$$

$$\Rightarrow \quad (8-4) = [(5k+2\ell)](-1)(-1)(2)$$

$$4 = 10k+4\ell \Rightarrow 5k+2\ell = 2 \qquad \ldots (1)$$

மேலும், $x=0, y=-1, z=1$ எனப்பிரதியிட,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [k(2)+\ell(-1)](1)(-2)(1)$$

$$\Rightarrow \quad [(2k-\ell)(-2)] = 2$$

$$2k-\ell = -1 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2)-ஐ தீர்க்க, $k=0, \ell=1$ எனப்பெறுகிறோம்.

எனவே, $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$.

எடுத்துக்காட்டு 7.25

$$|A| = \begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = 2pqr\ (p+q+r)^3$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$p=0$ எனப்பிரதியிட, $|A| = \begin{vmatrix} (q+r)^2 & 0 & 0 \\ q^2 & r^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & q^2 \end{vmatrix} = 0$

எனவே, $(p-0)$ என்பது ஒரு காரணியாகும். அதாவது p ஒரு காரணியாகும்.

$|A|$ என்பது p, q, r என்பவற்றில் வட்டச் சமச்சீராகும். எனவே, q, r ஆகியவையும் $|A|$–ன் காரணிகளாகும்.

$p+q+r=0$ எனில், $q+r=-p$; $r+p=-q$; $p+q=-r$

$$|A| = \begin{vmatrix} p^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & q^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & r^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனப்பெறுகிறோம்.}$$

இங்கு மூன்று நிரல்களும் சர்வசமம். எனவே, $(p+q+r)^2$ என்பது $|A|$–ன் காரணியாகும்.

இப்போது $pqr(p+q+r)^2$ என்பது $|A|$–ன் காரணியாகும். இதன் படி 5 ஆகும். $|A|$–ன் படி 6 ஆகும்.

எனவே, மற்றொரு காரணி $k(p+q+r)$ ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = k(p+q+r)\,(p+q+r)^2 \times pqr$$

$p=1,\ q=1,\ c=1$ எனப்பிரதியிட,

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k(1+1+1)^3\ (1)\ (1)\ (1)$$

$4(16-1)-1(4-1)+1(1-4)=27k$

$60-3-3=27k \Rightarrow k=2.$

எனவே, $|A| = 2pqr(p+q+r)^3$.

எடுத்துக்காட்டு 7.26

முக்கோணம் ABC–ல் $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin B(1+\sin B) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0$ எனில், ΔABC ஆனது ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

தீர்வு

$\sin B = \sin A$ எனப் பிரதியிட,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin A & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin A(1+\sin A) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $\sin B = \sin A$ எனில், சமன்பாடு நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

இதேபோல் $\sin B = \sin C$ மற்றும் $\sin C = \sin A$ எனும்போதும் சமன்பாடு நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

ஆகவே, $A=B$ அல்லது $B=C$ அல்லது $C=A$ எனப்பெறுகிறோம்.

மேற்கண்ட எல்லா நிலைகளிலும் ஏதேனும் இரண்டு கோணங்கள் சமமாக உள்ளன. எனவே ΔABC ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணமாகும்.

பயிற்சி 7.3

பின்வருவனவற்றிற்கு காரணித் தேற்றத்தை பயன்படுத்துக :

(1) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^2(x+2a)$ என நிறுவுக.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$ என நிறுவுக.

(3) தீர்க்க : $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0.$

(4) $\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\ (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$ என நிறுவுக.

(5) தீர்க்க : $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ என நிறுவுக.

7.3.4 அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் (Product of determinants)

இரு அணிகளின் பெருக்கலைக் காண 'நிரை-நிரல்' பெருக்கல் விதி மட்டுமே பின்பற்றப்படுகிறது. ஒரு அணிக்கோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் இடமாற்றம் செய்வதால் அதன் மதிப்பு மாறாது (பண்பு 1) எனப் பார்த்தோம். எனவே, இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்கலில் பின்வரும் பெருக்கல் முறைகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(i) நிரை-நிரல் பெருக்கல் விதி

(ii) நிரை-நிரை பெருக்கல் விதி

(iii) நிரல்-நிரல் பெருக்கல் விதி

(iv) நிரல்-நிரை பெருக்கல் விதி

GM80P

குறிப்பு 7.11

(i) A, B என்பன n வரிசை உடைய இரு சதுர அணிகள் எனில், $|AB| = |A|\ |B|$ ஆகும்.

(ii) அணிகளில் பொதுவாக $AB \neq BA$ என இருப்பினும் $|AB| = |BA|$ என்பது எப்போதும் உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.27

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ எனில், $|AB| = |A|\ |B|$ எனச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 1 \qquad \text{... (1)}$$

$$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$|B| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$|A|\ |B| = 1 \qquad \text{... (2)}$$

(1) மற்றும் (2)–லிருந்து, $|AB| = |A|\ |B|$.

எடுத்துக்காட்டு 7.28

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.29

$$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\text{RHS} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{இரண்டாவது} \\ \text{அணிக்கோவையில் } R_2 \leftrightarrow R_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

நிரை-நிரல் பெருக்கல் முறைப்படி

$$= \begin{vmatrix} -a^2+bc+cb & -ab+ab+c^2 & -ac+b^2+ac \\ -ab+c^2+ab & -b^2+ac+ac & -bc+bc+a^2 \\ -ac+ac+b^2 & -bc+a^2+bc & -c^2+ab+ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \text{RHS.}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.30

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix} \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times (-1)\,(-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^2-x^2 & x-x-x^2 & x-x^2-x \\ x-x-x^2 & x^2-1-x^2 & x^2-x-x \\ x-x^2-x & x^2-x-x & x^2-x^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{R.H.S.}$$

7.3.5 அணிக்கோவைக்கும் அதன் இணைக்காரணி அணிக்கோவைக்கும் உள்ள தொடர்பு (Relation between a determinant and its cofactor determinant)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

a_1, b_1, c_1 ... என்பவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் முறையே A_1, B_1, C_1 .... என்க.
எனவே, இணைக்காரணிகளின் அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

$$|A| = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

இதேபோன்று, $|A| = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2$ மற்றும் $|A| = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$

அதாவது, ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) உறுப்புகள் மற்றும் அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதலானது அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பிற்குச் சமமாவதைக் கவனிக்கவும்.

மேலும்,
$$\begin{aligned} a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 &= -a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= -a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_1c_3 - a_3c_1) - c_1(a_1b_3 - a_3b_1) \\ &= a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1 = 0 \end{aligned}$$

இதேபோன்று நாம் பெறுவது

$$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0 \ ; \ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0 \ ;$$

$$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0 \ ;$$

குறிப்பு 7.12

ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) உறுப்புகள் மற்றும் வேறேதேனும் நிரை (அல்லது நிரல்) உறுப்புகளின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதலானது பூஜ்ஜியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.31

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ என்க. a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$ என்பவற்றின் இணைக்காரணிகள் A_i, B_i, C_i

எனில், $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3b_1B_3 + c_1C \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$$

$$|A| \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^3.$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$$

7.3.6 முக்கோணத்தின் பரப்பு (Area of a triangle)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ மற்றும் (x_3, y_3) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பானது $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$ –ன் எண்ணளவாகும் என நாமறிவோம். இக்கோவையை அணிக்கோவை வடிவத்தில் $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7.32

(– 3, 0), (3, 0), (0, k) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 9 சதுர அலகுகள் எனில், k –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

முக்கோணத்தின் பரப்பு = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ –ன் எண்ணளவு ஆகும். எனவே,

$$9 = \left| \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}(-k)(-3-3) \right|$$

ஆகையால் $9 = 3|k|$, $k = \pm 3$.

குறிப்பு 7.13

மூன்று புள்ளிகளால் உருவாக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூஜ்ஜியம் எனில், அம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையும். இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். மேலும், அணிக்கோவையின் மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்கலாம். ஆனால், பரப்பு என்பது எப்போதும் ஒரு குறையற்ற எண்ணாகும் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.33

(– 2, – 3), (3, 2), (– 1, – 8) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

முக்கோணத்தின் பரப்பு = $\left| \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$

$$\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-20+12-22)\right| = |-15| = 15$$

எனவே தேவையான பரப்பு 15 சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 7.34

$(a, b + c), (b, c + a), (c, a + b)$ என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என நிரூபிக்க

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$$ என நிறுவினால் போதுமானது.

$C_1 \to C_1 + C_2$ என எடுக்க,

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\times 0 = 0$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும்.

7.3.7 பூஜ்ஜியக் கோவை மற்றும் பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகள் (Singular and non-singular matrices)

வரையறை 7.21

ஒரு சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவை $|A| = 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியக்கோவை அணி எனப்படும்.

ஒரு சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவை $|A| \neq 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்க.

$|A| = 3(1-1) - 8(-4+4) + 1(-4+4) = 0$.

எனவே A என்பது ஒரு பூஜ்ஜியக் கோவை அணியாகும்.

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ என்க. $|B| = 2(0 - 20) - (-3)(-42 - 4) + 5(30 - 0) = -28 \neq 0$.

எனவே, B என்பது ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணியாகும்.

குறிப்பு 7.14

A, B என்பன ஒரே வரிசை உள்ள பூஜ்ஜியமற்ற அணிகள் எனில், $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$ என்பதால் AB மற்றும் BA என்பனவும் பூஜ்ஜியமற்ற அணிகளாகும்.

பயிற்சி 7.4

(1) (0, 0), (1, 2), (4, 3) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(2) $(k, 2)$, $(2, 4)$ மற்றும் $(3, 2)$ என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 4 சதுர அலகுகள் எனில், k–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(3) கீழ்க்காண்பவற்றில் எவை பூஜ்ஜிய மற்றும் பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகள் எனக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & a-b & k \\ b-a & 0 & 5 \\ -k & -5 & 0 \end{bmatrix}$

(4) பின்வருவன பூஜ்ஜியக் கோவை அணிகள் எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & a \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} b-1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(5) $\cos 2\theta = 0$ எனில், $\begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}^2$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(6) $\begin{vmatrix} \log_3 64 & \log_4 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_8 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix}$ என்ற பெருக்கலின் மதிப்பைக் காண்க.

பயிற்சி 7.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) $a_{ij} = \frac{1}{2}(3i-2j)$ மற்றும் $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ எனில், A என்பது

(1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $2X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், X என்ற அணியானது

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையல்ல?

(1) ஒரு திசையிலி அணி (2) ஒரு மூலைவிட்ட அணி

(3) ஒரு மேல் முக்கோண வடிவ அணி (4) ஒரு கீழ் முக்கோண வடிவ அணி

(4) A, B என்பன $A + B$ மற்றும் AB என்பவற்றை வரையறுக்கும் இரு அணிகள் எனில்,

(1) A, B என்பன ஒரே வரிசை கொண்டவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

(2) A, B என்பன சமவரிசையுள்ள சதுர அணிகள்

(3) A–நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B–ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமம்.

(4) $A = B$

(5) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$ எனில், λ –ன் எம்மதிப்புகளுக்கு $A^2 = O$?

(1) 0 (2) ± 1 (3) -1 (4) 1

(6) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ எனில், a, b–ன் மதிப்புகள்

(1) $a = 4, b = 1$ (2) $a = 1, b = 4$ (3) $a = 0, b = 4$ (4) $a = 2, b = 4$

(7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix}$ என்பது $AA^T = 9I$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் அணியாகும்,

இங்கு I என்பது 3×3 வரிசையுள்ள சமனி அணி எனில், (a, b) என்ற வரிசை ஜோடி

(1) $(2, -1)$ (2) $(-2, 1)$ (3) $(2, 1)$ (4) $(-2, -1)$

(8) A என்பது ஒரு சதுர அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது சமச்சீரல்ல?

(1) $A + A^T$ (2) AA^T (3) $A^T A$ (4) $A - A^T$

(9) A, B என்பன n வரிசையுள்ள சமச்சீர் அணிகள், இங்கு $A \neq B$ எனில்,

(1) $A + B$ ஆனது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணி (2) $A + B$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி

(3) $A + B$ என்பது ஒரு மூலைவிட்ட அணி (4) $A + B$ என்பது ஒரு பூஜ்ஜிய அணி

(10) $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix}$ மற்றும் $xy = 1$ எனில், $\det(A\,A^T)$ –ன் மதிப்பு

(1) $(a-1)^2$ (2) $(a^2+1)^2$ (3) $a^2 - 1$ (4) $(a^2-1)^2$

(11) $A = \begin{bmatrix} e^{x-2} & e^{7+x} \\ e^{2+x} & e^{2x+3} \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு பூஜ்ஜியக் கோவை அணி எனில், x–ன் மதிப்பு

(1) 9 (2) 8 (3) 7 (4) 6

(12) $(x,-2)$, $(5,2)$, $(8,8)$ என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் எனில், x–ன் மதிப்பு

(1) -3 (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) 1 (4) 3

(13) $\begin{vmatrix} 2a & x_1 & y_1 \\ 2b & x_2 & y_2 \\ 2c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \dfrac{abc}{2} \neq 0$ எனில், $\left(\dfrac{x_1}{a}, \dfrac{y_1}{a}\right)$, $\left(\dfrac{x_2}{b}, \dfrac{y_2}{b}\right)$, $\left(\dfrac{x_3}{c}, \dfrac{y_3}{3}\right)$ என்ற

உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{1}{4}abc$ (3) $\dfrac{1}{8}$ (4) $\dfrac{1}{8}abc$

(14) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ என்ற ஒரு சதுர அணியின் வர்க்கம் வரிசை 2 உடைய ஒரு அலகு அணி எனில்,

α, β மற்றும் γ என்பவை நிறைவு செய்யும் தொடர்பு

(1) $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$ (2) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$

(3) $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$ (4) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

(15) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$, எனில் $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix}$ என்பது

(1) Δ (2) $k\Delta$ (3) $3k\Delta$ (4) $k^3\Delta$

(16) $\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு

(1) 6 (2) 3 (3) 0 (4) – 6

(17) $A = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு

(1) – 2abc (2) abc (3) 0 (4) $a^2+b^2+c^2$

(18) x_1, x_2, x_3 மற்றும் y_1, y_2, y_3 ஆகியவை ஒரே பொது விகிதம் கொண்ட பெருக்குத் தொடர் முறையில் இருந்தால், (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகள்

(1) சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்

(2) செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்

(3) இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்

(4) ஒரே கோட்டிலமையும்

(19) $\lfloor . \rfloor$ என்பது மீப்பெரு முழு எண் சார்பு என்க. மேலும் $-1 \le x < 0,\ 0 \le y < 1,\ 1 \le z < 2$ எனில், $\begin{vmatrix} \lfloor x \rfloor + 1 & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor + 1 & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor + 1 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு

(1) $\lfloor z \rfloor$ (2) $\lfloor y \rfloor$ (3) $\lfloor x \rfloor$ (4) $\lfloor x \rfloor + 1$

(20) $a \ne b, b, c$ ஆகியவை $\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ 3 & b & c \\ 4 & a & b \end{vmatrix} = 0$ என்பதை நிறைவு செய்தால், abc என்பது

(1) $a+b+c$ (2) 0 (3) b^3 (4) $ab+bc$

(21) $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ மற்றும் , $B = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ எனில்

(1) $B = 4A$ (2) $B = -4A$ (3) $B = -A$ (4) $B = 6A$

(22) A என்பது n-ஆம் வரிசை உடைய எதிர் சமச்சீர் அணி மற்றும் C என்பது $n \times 1$ வரிசை உடைய நிரல் அணி எனில், $C^T AC$ என்பது

(1) n-ஆம் வரிசையுடைய சமனி அணி (2) வரிசை 1 உடைய சமனி அணி

(3) வரிசை 1 உடைய பூஜ்ஜிய அணி (4) வரிசை 2 உடைய சமனி அணி

(23) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் A என்ற அணி

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(24) $A + I = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ எனில் $(A+I)(A-I)$ –ன் மதிப்பு

(1) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}$

(25) A, B என்பன சம வரிசையுள்ள இரு சமச்சீர் அணிகள் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

(1) $A + B$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி (2) AB என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி

(3) $AB = (BA)^T$ (4) $A^T B = AB^T$

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- மெய்யெண்கள் அல்லது $\mathbb{R}$ –ன் மீதான மெய்மதிப்புச் சார்பு அல்லது கலப்பெண்களை செவ்வக வடிவில் வரிசைப்படுத்துதல் அணியாகும்.
- ஓர் அணி m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் பெற்றிருந்தால், அதன் வரிசை $m \times n$ ஆகும்.
- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ என்ற அணியில்

  $m = n$ எனில், அவ்வணி சதுர அணியாகும்.

  $m = 1$ எனில், அவ்வணி நிரை அணியாகும்.

  $n = 1$ எனில், அவ்வணி நிரல் அணியாகும்.

  $a_{ij} = 0 \; \forall \; i, j$ எனில் அவ்வணி பூஜ்ஜிய அணியாகும்.

  $m = n$ மற்றும் $a_{ij} = 0 \; \forall \; i \neq j$ எனில் அவ்வணி மூலைவிட்ட அணியாகும்.

  $m = n$, $a_{ij} = 0 \; \forall \; i \neq j$ மற்றும் $a_{ii} = \lambda, \; \forall \; i$ அவ்வணி திசையிலி அணியாகும்.

$m = n$, $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$ மற்றும் $a_{ii} = 1, \ \forall \ i$ எனில் அவ்வணி அலகு அணி அல்லது சமனி அணியாகும்.

$m = n$ மற்றும் $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$ எனில் மேல் முக்கோண வடிவ அணியாகும்.

$m = n$ மற்றும் $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$ எனில் கீழ்முக்கோண வடிவ அணியாகும்.

- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்ற அணிகளுக்கு $a_{ij} = b_{ij}, \ \forall \ i$ மற்றும் j எனில் அவை சம அணிகள் எனப்படும்.
- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ எனில் $A + B = [c_{ij}]_{m\times n}$, இங்கு $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் λ ஒரு திசையிலி எனில் $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$.
- $-A = (-1)A$
- $A + B = B + A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, இங்கு A, B, C என்பன ஒரே வரிசை உடையவை.

  (i) $A(BC) = (AB)C$ (ii) $A(B+C) = AB+AC$ (iii) $(A+B)C = AC+BC$
- ஓர் அணி A-யின் நிரை மற்றும் நிரல்களை இடமாற்றம் செய்வதன் மூலம் பெறப்படும் அணி A-ன் நிரை நிரல் மாற்று அணி A^T எனப்படும்.

  (i) $(A^T)^T = A$, (ii) $(kA)^T = kA^T$, (iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$, (iv) $(AB)^T = B^T A^T$
- A என்ற ஒரு சதுர அணி

  (i) $A^T = A$ எனில், அது சமச்சீர் அணி எனப்படும்

  (ii) $A^T = -A$ எனில், அது எதிர் சமச்சீர் அணி எனப்படும்.
- ஒரு சதுர அணியை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.
- ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் பூஜ்ஜியமாகும்.
- A என்பது மெய்யெண் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு சதுர அணி எனில் $A + A^T$ என்பது சமச்சீர் அணியாகும் மற்றும் $A - A^T$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணியாகும். மேலும் $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.
- சதுர அணிகளுக்கு மட்டுமே அணிக்கோவைகளை வரையறுக்க முடியும்.
- $|A^T| = |A|$.
- A, B என்பன சம வரிசை உடைய இரு சதுர அணிகள் எனில், $|AB| = |A|\,|B|$
- ஒரு சதுர அணி $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ எனில் $|kA| = k^n |A|$ இங்கு k என்பது ஒரு திசையிலி.
- ஒரு சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவையின் மதிப்பானது அதன் ஒரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) உறுப்புகள் மற்றும் அவற்றின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கலின் கூடுதலுக்குச் சமம். எடுத்துக்காட்டாக, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

- ஒரு சதுர அணி A–ன் அணி அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரை அல்லது நிரலின் உறுப்புகள் மற்றும் மற்றொரு நிரை அல்லது நிரலின் உறுப்புகளின் ஒத்த இணைக்காரணிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனின் கூடுதலானது பூஜ்ஜியமாகும். எடுத்துக்காட்டாக, $a_{11}A_{13}+a_{12}A_{23}+a_{13}A_{33}=0$.
- ஓர் அணிக்கோவையின் அனைத்து நிரைகளையும் நிரல்களாக இடமாற்றம் செய்தால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.
- ஓர் அணிக்கோவையின் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் இடமாற்றம் செய்யப்பட்டால், அணிக்கோவையின் குறி மாறும்.
- ஓர் அணிக்கோவையின் ஒரு நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில், அதன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.
- ஓர் அணிக்கோவையின் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் சர்வசமம் எனில், அதன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.
- ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு திசையிலி kஆல் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு kஆல் பெருக்கப்பட்டதாக அமையும்.
- ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் r உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்குமெனில், அவ்வணிக்கோவையை r அணிக்கோவைகளின் கூட்டல் பலனாக எழுதலாம்.
- ஓர் அணிக்கோவை $R_i+\alpha R_j+\beta R_k (j,k\neq i)$ என்ற நிரை (R_i) உருமாற்றத்திற்கு அல்லது $C_i+\alpha C_j+\beta C_k (j,k\neq i)$ என்ற நிரல் (C_i) உருமாற்றத்திற்கு உட்படுத்தப்பட்டால், அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது. இங்கு α,β என்பன ஏதேனும் இரு மாறிலிகள்.
- காரணித் தேற்றம்: ஓர் அணி A–ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் x–ல் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருந்து, $x = a$ எனப் பிரதியிட $|A|$–ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியம் எனில், $x = a$ என்பது $|A|$–ன் ஒரு காரணியாகும்.
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ மற்றும் (x_3, y_3) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ –ன் எண்ணளவாகும்.
- முக்கோணத்தின் பரப்பு பூஜ்ஜியம் எனில், இம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையும்.
- ஒரு சதுர அணி A–க்கு $|A| = 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியக்கோவை அணி எனப்படும். $|A|\neq 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

இணையச் செயல்பாடு 7 (a)

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

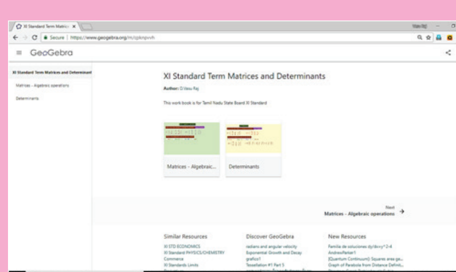
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "Matrices and Determinants" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

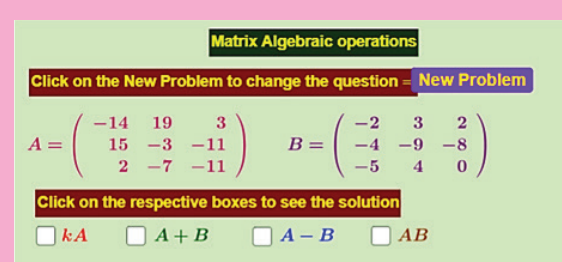
படி –2

"Matrices–Algebraic operations" என்பதைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.அதில் உள்ள கணக்குகளைச் செய்து, அதெற்கென கொடுத்திருக்கும் கட்டங்களில் விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

மேலும் புது வினாக்களுக்கு "New Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்யவும்.



படி – 1



படி –2

உரலி :

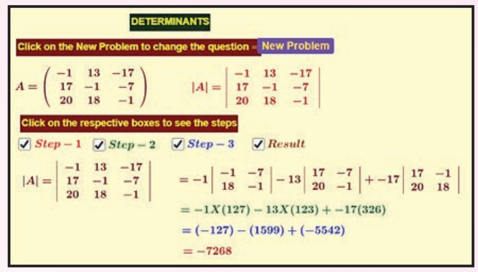
https://ggbm.at/cpknpvvh

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

இணையச் செயல்பாடு 7 (b)

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

செயல்பாட்டின் இறுதியில்
கிடைக்கப் பெறுவது



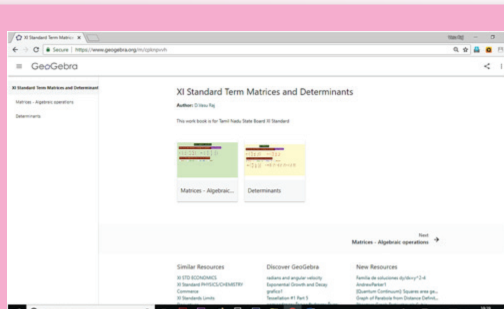
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "Matrices and Determinants" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

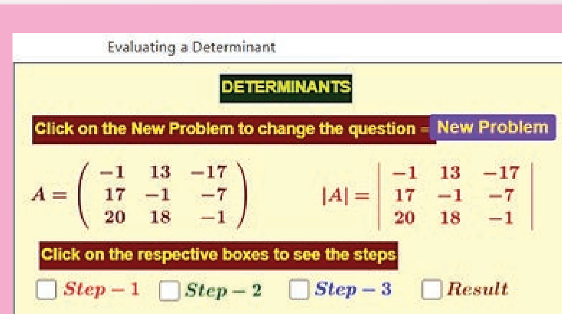
படி –2

“Determinants" என்பதைத் தேர்வு செய்து கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பினை நிர்ணயிக்கவும், மேலும் கொடுத்திருக்கும் கட்டங்களைத் தேர்வு செய்து அதன் படிகளைச்சரி பார்க்கவும்.

புது வினாக்களைப் பெறுவதற்கு "New Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்யவும்.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/cpknpvvh

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

அத்தியாயம் **8**

வெக்டர் இயற்கணிதம் (Vector Algebra)

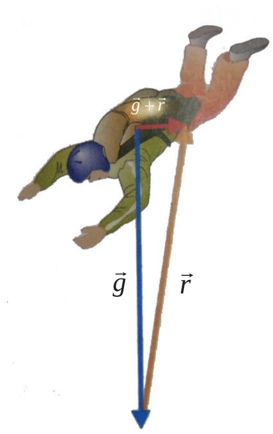
"புவியில் மனிதனைவிட மகத்துவமானது ஏதுமில்லை
மனிதனில் மனதைவிட மகத்துவமானது ஏதுமில்லை"

- ஹாமில்டன்

U6CYZ

8.1 அறிமுகம் (Introduction)

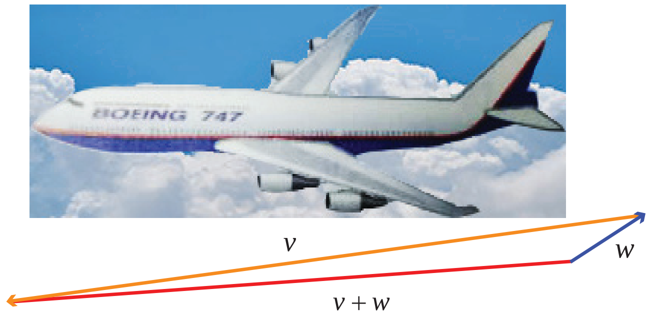
ஒரு விமானத்தை இயக்கும் திட்டத்தைத் தீர்மானிக்க ஒரு விமானி, விமானத்தின் பாதை , அதன் தலைப்பகுதி , காற்றின் வேகம் மற்றும் தரையில் அதன் வேகம் ஆகியவற்றைப் பற்றித் தெரிந்திருக்க வேண்டும். விமானம் நேரடியாக அதன் இலக்கை நோக்கிச் செல்ல வேண்டுமென்றால், காற்றானது சரியாகஎதிர்கொள்ளும்வகையிலானகோணத்தில்விமானத்தைக்காற்றினுள் செலுத்த வேண்டும். ஒரு வழிகாட்டும் கணினி இருந்தால் இவ்வாறான கணக்கீடுகளை வேகமாகவும் துல்லியமாகவும் செய்யலாம். எனினும், அந்த வழிகாட்டும் கணினியை இயக்க முடியாத சூழ்நிலையின் போது விமானி கையில் உள்ள கால்குலேட்டர், எழுதுகோல் மற்றும் காகிதத்தை கொண்டும் வெக்டர்கள் பற்றிய அறிவின் துணை கொண்டும் இதனைத் தீர்மானிப்பார். எனவே வெக்டர்களைப் பற்றியும் அதன் மீதான செயல்பாடுகளைப் பற்றியும் அறிந்திருப்பது விமானிக்கு மிகவும் இன்றியமையாததாகும்.



விண்வீழ் விளையாட்டு வீரரின் மேல் இரண்டு முக்கிய விசைகள் செயல்படுகின்றன. முதல் விசை புவியீர்ப்பு விசை $(\vec{g})$ செங்குத்தாக கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகின்றது. மற்றொன்று எதிர்ப்பு விசை $(\vec{r})$ மேல்நோக்கி ஏதேனும் ஒரு திசையில் செயல்படுகின்றது. எனவே, அந்த விளையாட்டு வீரரின்மேல் செயல்படும் மொத்த விசை $\vec{g}+\vec{r}$ ஆகும். (எவ்வாறு?)

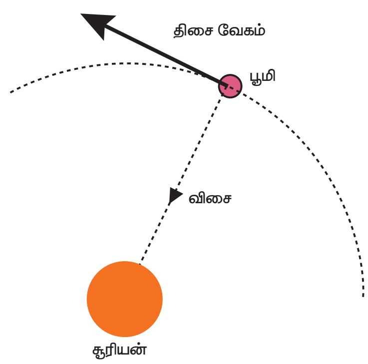
ஒரு ***வானூர்தியின் திசைவேகம்*** $\vec{v}$ எனவும் காற்றின் திசைவேகத்தை $\vec{w}$ எனவும் எடுத்துக்கொண்டால் வானூர்தியின் பயனீட்டுத் திசைவேகம் $\vec{v}+\vec{w}$ ஆகும். மேற்கு நோக்கி வானூர்தி பறக்க வானூர்தியின் தலை எந்த திசை நோக்கி இருக்க வேண்டும்?

ஜி.பி.எஸ் (G.P.S) என்ற கருவி தரை, வான் மற்றும் தண்ணீர் ஆகியவற்றுள் பயணிக்க வழிகாட்டும் வகையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. வெக்டர்களின் செயல்பாடுகள் மூலமே இக்கருவி இயங்குகிறது.



W.R. ஹாமில்டன்
(1805 – 1865)

வெக்டரின் கருத்தாக்கமானது ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் **H.G. கிராஸ்மன்** (1809 – 1877) மற்றும் ஐரிஷ் கணிதவியலாளர் **W.R. ஹாமில்டன்** (1805 – 1865) ஆகியவர்களின் தாக்கத்தினால் வளர்ச்சி பெற்றது. ஹாமில்டன் ஓர் உயர் நிலையினை பெற்றிருந்த போதும் கிராஸ்மன் ஓர் உயர் வகுப்பு பள்ளி ஆசிரியராக இருந்தார். நுண்கணிதம் மற்றும் கார்டீசியன் வடிவியலின் சிறப்பான அம்சங்களை ஒன்றிணைத்து வெக்டர் இயற்கணிதத்தை உருவாக்கிய பெருமை அமெரிக்கக் கணிதவியலாளர் **J.B.கிப்ஸ்** (1839 – 1903) மற்றும் இங்கிலாந்தை சேர்ந்த **Q.ஹெவிசைடு** (1850 - 1925) ஆகியோருக்கு உண்டு. தற்போதைய பயன்பாட்டிலுள்ள வெக்டர் இயற்கணிதம் மற்றும் வெக்டர் பகுப்பாய்வு கருத்தியலானது, முதன்முதலில் கிப்ஸ் என்ற கணிதவியலாளர் யேல் பல்கலைக் கழகத்தில் அவருடைய மாணவர்களுக்கு வழங்கிய விரிவுரையின் மூலம் வெளிக் கொணரப்பட்டதே ஆகும். **கிளிஃபர்ட்** (1845 -1879) என்பவர் தன்னுடைய **'Elements of Dynamics'** என்ற புத்தகத்தில் நுண்கணிதத்தில் பயன்படுத்தப்பட்ட இரு குவாட்டர்னியன் பெருக்கலை இரு விதமான வெக்டர்கள் மீதான பெருக்கல்களாக , அதாவது திசையிலிப் பெருக்கம் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கமாக பிரித்துக் காட்டினார். **வெக்டர்** என்ற வார்த்தையை ஹாமில்டன் என்பவர் **'to carry'** என்ற இலத்தீன் வார்த்தையில் இருந்து வரையறுத்தார்.



மேலும் கிராஸ்மனின் கோட்பாட்டு விரிவாக்கத்தின் மூலமும் வெக்டரின் கருத்தாக்கம் வளர்ச்சியடைந்தது. வடிவியல் மற்றும் இயற்பியலில் உள்ள கருத்துகளை புரிந்துணர வெக்டர் ஒரு சிறந்த கருவியாக அமைந்துள்ளது. பயனீட்டுக் கணிதம் மற்றும் இயற்பியலில் **வெக்டர்களின் கருத்தியல் ஒரு நவீன மொழியாக விளங்குகிறது.**

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- வடிவியல் மற்றும் இயற்பியலில் உள்ள கணக்குகளை புரிந்துகொள்ள வெக்டரை ஒரு கருவியாக உணர்வது
- திசையிலி மற்றும் வெக்டரை வேறுபடுத்துவது
- வெக்டரின் வகைகளையும், வெக்டரின் மீதான இயற்கணிதத்தையும் புரிந்து கொள்வது
- வெக்டரின் இரு பரிமாண மற்றும் முப்பரிமாணக் கூறுகளை வடிவியலின் வாயிலாக அறிந்து கொள்ளுதல்
- வெக்டர் இயற்கணிதத்தில் அணிகள் கருத்தியலின் பயன்பாட்டை அறிவது
- திசையிலிப்பெருக்கம் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கத்தின் மதிப்புகள் முறையே திசையிலி மற்றும் வெக்டர் என்பதைக் கண்டுணர்தல்

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

8.2 திசையிலிகள் மற்றும் வெக்டர்கள் (Scalars and Vectors)

வரையறை 8 .1

எண்ணளவை மட்டுமே கொண்டு தீர்மானிக்கப்படும் ஒரு கணியம் **திசையிலி** ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, தொலைவு, நீளம், வேகம், வெப்பநிலை, மின்னழுத்தம், நிறை, அழுத்தம், வேலை ஆகியவை திசையிலிகளாகும்.

வரையறை 8.2
எண்ணளவு மற்றும் திசையைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்படும் கணியம் **வெக்டர்** ஆகும். எனவே, இதனைத் திசையிடப்பட்ட கோட்டுத்துண்டு எனலாம்.

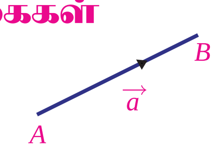
எடுத்துக்காட்டாக, திசை, இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம் (இது வேகத்தையும் அது நகரும் திசையையும் தருகின்றது) ஆகியவை வெக்டர்களாகும்.

வெக்டர்கள் ஆங்கில சிறிய எழுத்துகளைக் கொண்டு அம்புக்குறியுடன் குறிக்கப்படுகின்றது. இரு பரிமாண வெக்டர் என்பது $\mathbb{R}^2$-ல் திசையிடப்பட்ட ஓர் கோட்டுத்துண்டாகும். மேலும் முப்பரிமாண வெக்டர் என்பது $\mathbb{R}^3$-ல் திசையிடப்பட்ட ஓர் கோட்டுத்துண்டாகும்.

8.3 வெக்டரை குறிப்பிடும் முறை மற்றும் வெக்டர்களின் வகைகள் (Representation of a vector and types of vectors)

ஒரு வெக்டருக்கு முடிவு மற்றும் ஆரம்பம் உண்டு.

படம் 8.1-ஐ காண்க.



படம் 8.1

வரையறை 8.3
$\vec{a}$ –ன் ஆரம்பப்புள்ளி A–யினைத் **தொடக்கப்புள்ளி** எனவும் முடிவுப்புள்ளி B–யினை **இறுதிப்புள்ளி** எனவும் அழைக்கிறோம். ஒரு வெக்டரின் தொடக்கப் புள்ளியினை அதன் ஆதிப்புள்ளி எனவும் கொள்ளலாம்.

$\vec{a}$ – ன் தொடக்கப்புள்ளி A–ஆனது நகர்வுக்கு முன் அப்புள்ளியின் நிலையினையும், இறுதிப்புள்ளி B–ஆனது நகர்வுக்குப்பின் அப்புள்ளியின் நிலையினையும் குறிக்கிறது.

$\vec{a}$ என்ற வெக்டரின் எண் மதிப்பு அல்லது நீளம் என்பது கோட்டுத்துண்டு AB – ன் நீளம் ஆகும். மேலும் இதனை $|\vec{a}|$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

AB – ன் வழியே நீட்டப்பட்ட திசையிடப்படாத கோட்டினை $\vec{a}$ – ன் **தாங்கி** எனலாம்.

ஒரு திசையில்லாத கோட்டுத்துண்டையும், ஒரு திசையுடன் கூடிய கோட்டுத் துண்டினையும் வேறுபடுத்த $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\vec{a}$ என அம்புக்குறியிட்டுக் குறிக்கப்படுகின்றது. எனவே AB என்பது ஒரு கோட்டுத்துண்டினை குறிப்பிடுகிறது.

வரையறை 8.4
எந்தவொரு புள்ளியையும் ஆதிப்புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க இயலுமானால் அதனைக் **கட்டிலா வெக்டர்** எனலாம். ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை மட்டுமே ஆதிப் புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானால் அதனை **அறுதியிட்ட வெக்டர்** என்பர்.

வெக்டர்களின் பெருக்கல் வரை நாம் கட்டிலா வெக்டர்களை மட்டுமே பயன்படுத்த உள்ளோம். கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்பதில் அறுதியிட்ட வெக்டர்கள் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளது.

வரையறை 8.5
ஒரே தொடக்கப்புள்ளியைப் பெற்ற வெக்டர்களை **ஒரே தொடக்கப்புள்ளி வெக்டர்கள்** எனவும் ஒரே முடிவுப்புள்ளியைக் கொண்ட வெக்டர்களை **ஒரே முடிவுப் புள்ளி வெக்டர்கள்** எனலாம்.

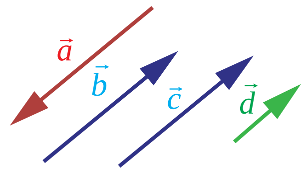
வரையறை 8.6
இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களின் இயக்கம் ஒரே நேர்க் கோட்டிலோ அல்லது அதற்கு இணையாகவோ இருப்பின், அவற்றை **ஒரே கோடமை** அல்லது **இணை வெக்டர்கள்** எனலாம்.

ஒரே தளத்தின் மீது அமைந்த அல்லது அந்தத் தளத்திற்கு இணையாக அமைந்த இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களை **ஒரு தள அமை வெக்டர்கள்** எனலாம்.

வரையறை 8.7

இரு வெக்டர்களின் எண்ணளவுகள் சமமாகவும் மற்றும் அவை ஒரே திசையினையும் பெற்றிருந்தால் அவற்றைச் **சம வெக்டர்கள்** எனலாம்.

சம வெக்டர்களுக்கு ஒரே தொடக்கப்புள்ளியும் இறுதிப் புள்ளியும் இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை. சான்றாக , படம் 8.2– ல் $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை சமநீளம் மற்றும் ஒரே திசையிலுள்ள வெக்டர்கள்என்பதால் அவற்றை சமவெக்டர்கள் என்கிறோம். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை சம எண்ணளவைக் கொண்டிருந்தாலும் அவற்றின் திசை எதிராக இருப்பதால் இவை சமமற்ற வெக்டர்கள் ஆகும். $\vec{c}$ மற்றும் $\vec{d}$ ஆகியவை ஒரே திசையில் இருந்தாலும் எண்ணளவு வெவ்வேறாக இருப்பதால் இவை சமமற்ற வெக்டர்களாகும்.



படம் 8.2

வரையறை 8.8

எண்ணளவு 0 உள்ள வெக்டரை **பூஜ்ஜிய வெக்டர்** என்கிறோம். இதனை $\vec{0}$ எனக் குறிப்பிடலாம். இது ஏதேனும் ஒரு திசையில் இருக்கும்.

அதாவது, தொடக்கப்புள்ளியும் முடிவுப்புள்ளியும் ஒன்றாக அமைந்தால் அது பூஜ்ஜிய வெக்டராக அமையும்.

எண்ணளவு 1 உள்ள வெக்டரை **அலகு வெக்டர்** எனலாம். $\vec{a}$ –ன் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டர் $\hat{a}$ எனக்குறிப்பிடப்படும் (இதனை 'a cap' அல்லது 'a hat' எனப்படிக்க வேண்டும்). தெளிவாக $|\hat{a}| = 1$ ஆகும்.

எண்ணிலா திசைகளிலிருப்பதால் எண்ணிலா அலகு வெக்டர்களும் உள்ளன என்பதைக் கவனிக்க. ஒவ்வொரு திசைக்கும் ஒரு அலகு வெக்டரானது அந்த திசையில் இருக்கும்.

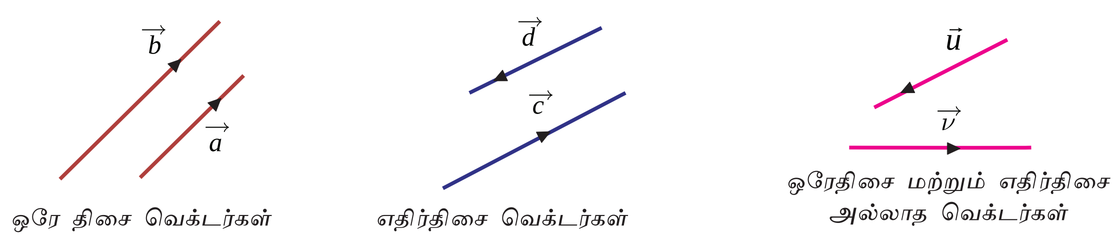
ஒவ்வொரு பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டரையும் $\vec{a}$ வெக்டரின் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டரை ஒரு திசையிலியால் பெருக்கி எழுதலாம். அந்த திசையிலியானது வெக்டரின் எண்ணளவாகும்.

எனவே, எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{a}$ க்கும், $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$ என எழுதலாம். இங்கு $\hat{a}$ என்பது $\vec{a}$ –ன் திசையில் அலகு வெக்டர் ஆகும். எனவே, பூஜ்ஜியமற்ற $\vec{a}$ –க்கு $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ஆகும்.

வரையறை 8.9

ஒரே திசையிலமைந்த இரு வெக்டர்களை **ஒரே திசை வெக்டர்கள்** என்றும், ஒன்றுக்கொன்று எதிர் திசையிலமைந்த இரு வெக்டர்களை **எதிர் திசை வெக்டர்கள்** என்றும் கூறலாம்.

இரண்டு வெக்டர்கள் ஒரே திசையிலமைந்த வெக்டர்களாகவோ எதிர் திசை வெக்டர்களாகவோ அமைந்தால் அவ்வெக்டர்களின் தாங்கிகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக அமையும். இரண்டு வெக்டர்கள் ஒரே திசை வெக்டர்களாக இல்லாமலும் எதிரெதிர்த்திசை வெக்டர்களாக இல்லாமலும் இருக்கலாம்.



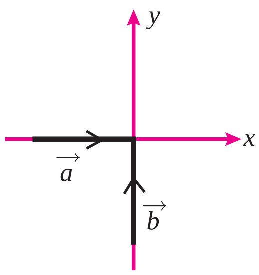
படம் 8.3

8.4 வெக்டர்களின் மீதான இயற்கணிதம் (Algebra of Vectors)

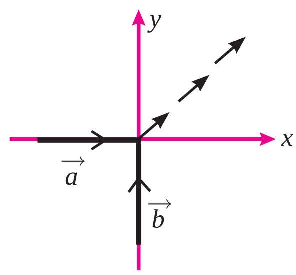
மெய்யெண்கள் அல்லது அணிகளின் மீதான செயல் முறைகள் போன்றே நாம் வெக்டர்களின் மீதும் செயல்முறைகளைக் காணலாம். இரண்டு வெக்டர்களின் கூட்டல், ஒரு வெக்டரிலிருந்து மற்றொரு வெக்டரைக் கழித்தல் மற்றும் ஒரு வெக்டரை ஒரு திசையிலி கொண்டு பெருக்குதல் போன்றவற்றைக் காண்போம்.

8.4.1 வெக்டர்களின் கூட்டல் (Addition of Vectors)

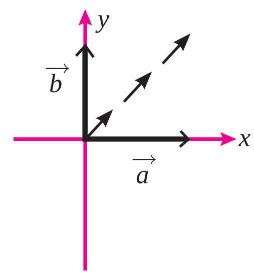
வெக்டர்களின் கூட்டலை இரண்டு வகைகளில் வரையறுத்து அவை ஒன்றே எனக் காண்போம். ஓரலகு நிறை கொண்ட ஒரு பொருள் $\mathbb{R}^2$–ல் (0, 0) என்ற இடத்தில் உள்ளது என்க. அதன் அளவை ஒரு புள்ளி என எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டு ஓரலகு விசைகள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை x–அச்சு மற்றும் y–அச்சின் மிகைத் திசையில் அப்பொருளின் மீது செயல்படுவதாகக் கொள்க. (படம் 8.4–ஐ பார்க்க). இப்பொழுது அப்பொருளானது x – அச்சுடன் 45° கோணத்தில் படம் 8.5.–ல் உள்ளது போல் நகரும் என எளிதில் கணிக்கலாம். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற என்ற விசைகள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களால் படம் 8.6–ல் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. விசைகள் படம் 8.4–ல் அப்பொருளை தள்ளுவதாகவும் படம் 8.6–ல் அப்பொருளை இழுப்பதாகவும் நாம் கருதலாம்.



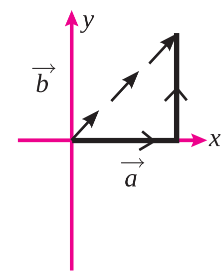
படம் 8.4



படம் 8.5



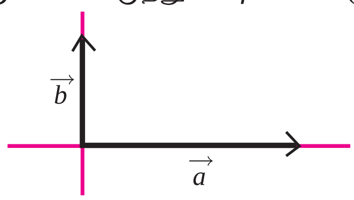
படம் 8.6



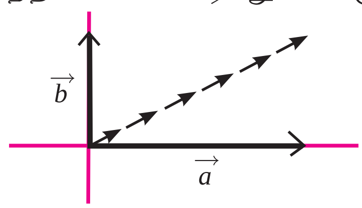
படம் 8.7

அடுத்து நமக்குத் தோன்றும் கேள்வி, “அது எவ்வளவு தூரம் நகரும்?” என்பதாகும். விசைகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகச் செயல்படுவதாகக் கருதுவோம். விசை $\vec{a}$ –ஆனது அப்பொருளை x–அச்சின் திசையில் ஓரலகு தூரம் நகர்த்தும். எனவே அந்தப் பொருள் (0, 0)–ல் இருந்து (1, 0) என்ற புள்ளிக்கு நகர்கின்றது. இப்பொழுது விசை $\vec{b}$ ஆனது அப்பொருளைச் செங்குத்தாக மேல்நோக்கி (1, 0) என்ற புள்ளியில் இருந்து (1, 1) என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்துகின்றது. இறுதியாக அப்பொருள் (1, 1)–ல் உள்ளது. (படம் 8.7ஐ பார்க்க). எனவே இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலானது (0, 0) மற்றும் (1, 1)–ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டாக (0, 0)–லிருந்து (1,1) என்ற திசையில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது மேற்கூறிய சூழ்நிலையில் $\vec{a}$ –ன் எண்ணளவையை 1–க்குப் பதில் 2 எனக் கொள்க. (படம் 8.8–ஐ பார்க்க). படம் 8.9–ல் உள்ளபடி அப்பொருளானது x– அச்சுக்கு அருகில் நகரும் என எளிதில் கணிக்கலாம். மேலும் அப்பொருளானது (2,1) என்ற புள்ளிக்கு நகரும் என்பதையும் கணிக்கலாம். எனவே இந்த இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலானது (0,0)–வையும் (2,1)–ஐயும் இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டினால் “(0,0)–விலிருந்து (2,1) என்ற திசையில் வரையறுக்கப்படுகின்றது”.

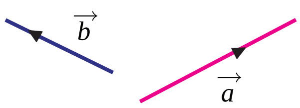


படம் 8.8

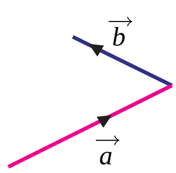


படம் 8.9

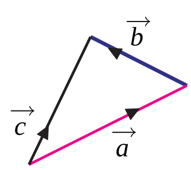
இந்த இரண்டு சூழ்நிலைகளிலும் விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தன. ஆனால் பொதுவாக விசைகள் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. இருந்தபோதிலும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகச் செயல்படும் விசைகளைக் கூட்ட இயலும். உதாரணமாக $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற விசைகளை படம் 8.10–ல் உள்ளது போன்று கருதுக.



படம் 8.10



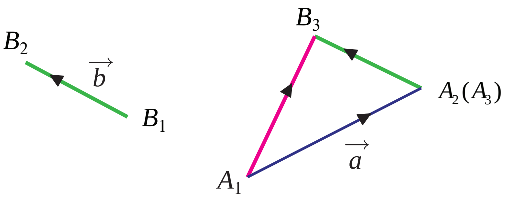
படம் 8.11



படம் 8.12

$\vec{a}$ –ன் இறுதிப்புள்ளியுடன் $\vec{b}$ –ன் ஆரம்பப்புள்ளி அமையுமாறு (படம் 8.11) அமைக்க. இவற்றின் கூடுதலானது படம் 8.12–ல் உள்ளது போன்று கிடைக்கிறது. நாம் இப்பொழுது இரண்டு வெக்டர்களுக்கான கூடுதலின் வரையறையைக் காண்போம்.

வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோணவிதி (Triangle law of addition)



படம் 8.13

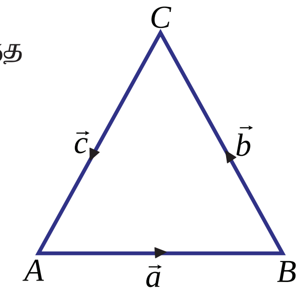
$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இரு வெக்டர்கள் என்க. A_1 மற்றும் B_1 என்பவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் தொடக்கப்புள்ளிகள் எனவும், A_2 மற்றும் B_2 என்பவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் முடிவுப்புள்ளிகள் எனவும் கொள்க.

A_3B_3 –ஐ B_1B_2 –க்கு இணையாக $A_3B_3 = B_1B_2$ என்றவாறு வரைக. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் கூடுதலானது $\overrightarrow{A_1B_3}$ என்ற வெக்டரால் $\vec{a}+\vec{b}$ என குறிப்பிடப்படுகிறது. இதனைக் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கலாம்.

> **வரையறை 8 .10 (வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதி)**
> இரு வெக்டர்கள் அவற்றின் எண்ணளவாலும் திசையாலும் ஒரு முக்கோணத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பக்கங்களின் மூலமாகக் குறிப்பிட்டால், அவற்றின் கூடுதலை அம்முக்கோணத்தின் எதிர் வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட மூன்றாவது பக்கத்தினால் குறிக்கலாம்.

முடிவு 8.1

$\vec{a}, \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை முக்கோணத்தின் வரிசையாக அமைந்த அடுத்தடுத்த பக்கங்களானால் $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ஆகும்.



படம் 8.14

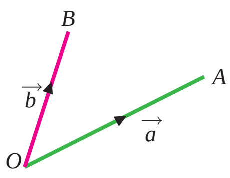
நிரூபணம்

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b},$ மற்றும் $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$ என்க.

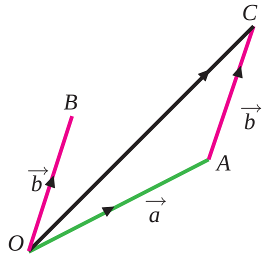
இப்பொழுது, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

வெக்டர் கூட்டலின் இணைகர விதி (Parallelogram law of vector addition)

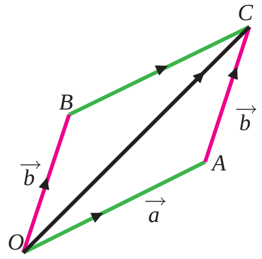
$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் என்க. இந்த இரு வெக்டர்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை (O) ஒன்றாகக்கொண்டு, வரையறை 8.7–ஐப் பயன்படுத்தி கூடுதலைக் காண்போம். A மற்றும் B ஆகியவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றின் முடிவுப்புள்ளிகள் (படம் 8.15) என்க. $\vec{a}$ + $\vec{b}$ –ஐக் காண, AC–ஐ OB–க்கு இணையாக OB = AC என்றவாறு வரைக. இங்கு $\overrightarrow{OC}$ என்பது இவற்றின் கூடுதலாகும். (படம் 8.16). இங்கு OA மற்றும் BC ஆகியவை இணை என்பதைக் கவனிக்க (படம் 8.17).



படம் 8.15



படம் 8.16



படம் 8.17

எனவே ஒரே தொடக்கப் புள்ளிகளை உடைய இரு வெக்டர்களின் கூடுதலைக் காண இந்த வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்டு ஓர் இணைகரம் வரைந்து அதன் மூலைவிட்டத்தை அதன் கூடுதல் என்கிறோம். ஒரே தொடக்கப்புள்ளியைக் கொண்டில்லாத இரு வெக்டர்களை ஏதேனும் ஒரு வெக்டரைத் தகுந்தவாறு நகர்த்தி ஒரே தொடக்கப்புள்ளியினை உடைய வெக்டர்களாக மாற்றலாம். இதிலிருந்து கீழ்க்காணும் வரையறை 8.11–ஐ பெறலாம்.

O என்ற ஒரே தொடக்கப்புள்ளியை உடைய இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்க. இவற்றின் இறுதிப்புள்ளிகள் முறையே A மற்றும் B என்க.

$OACB$ என்ற இணைகரத்தை பூர்த்தி செய்க. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் கூடுதலானது $\overrightarrow{OC}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரையறை 8 .11 (கூட்டலின் இணைகர விதி)

$OABC$ என்ற இணைகரத்தில் $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை அடுத்தடுத்த பக்கங்களைக் குறித்தால், அதன் மூலைவிட்டமான $\overrightarrow{OC}$, இவற்றின் கூடுதலைக் குறிக்கும் (படம் 8.17–ஐ பார்க்க).

வெக்டர் கூட்டலுக்கு இரண்டு வகையான வரையறைகள் இருந்தபோதிலும் அவை இரண்டும் ஒன்றே ஆகும். வரையறை 8.10 ஆனது வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதியையும் வரையறை 8.11 ஆனது வெக்டர் கூட்டலின் இணைகர விதியையும் கூறுகிறது.

முக்கோணம் ABC-ல் $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{BC}$ ஆகியவை இரண்டு பக்கங்களைக் குறித்தால், மூன்றாவது பக்கம் $\overrightarrow{AC}$ ஆனது அதன் கூடுதலைக் குறிக்கின்றது.

8.4.2 இரண்டு வெக்டர்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் (Difference between two Vectors)

இப்பொழுது ஒரு வெக்டரிலிருந்து மற்றொரு வெக்டரை கழிக்கும் முறையைக் காண்போம்.

வரையறை 8.12

$\vec{a}$ ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் என்க. $\vec{a}$ –ன் எதிர்மறை வெக்டரை $-\vec{a}$ எனக் குறிப்போம். இது $\vec{a}$ –க்குச் சமமான எண்ணளவினையும் $\vec{a}$ –ன் திசைக்கு எதிர்த் திசையையும் கொண்ட வெக்டர் ஆகும்.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ எனில் $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ என்பதனை கவனத்தில் கொள்ளவும்.

வெக்டர்களின் வித்தியாசத்திற்கான வடிவக் கணித விளக்கம் (Geometrical interpretation of difference between two vectors)

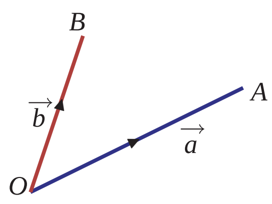
$\vec{a}$ என்ற வெக்டரின் ஆரம்பப் புள்ளி P மற்றும் முடிவுப்புள்ளி Q என்க. $\vec{b}$ என்ற வெக்டரின் ஆரம்பப்புள்ளி Q மற்றும் முடிவுப்புள்ளி P என்க. இந்த இரு வெக்டர்களின் எண்ணளவைகள் P மற்றும் Q என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நீளம் ஆகும். எனவே இவற்றின் எண் அளவைகள் சமம். ஆனால் இவற்றின் திசைகள் நேர் எதிரானவை. எனவே $\vec{b}$ –ஆனது $-\vec{a}$ –க்குச் சமம் ஆகும்.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a}-\vec{b}$ –ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $-\vec{b}$ –ன் கூடுதலாக $\vec{a}+(-\vec{b})$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

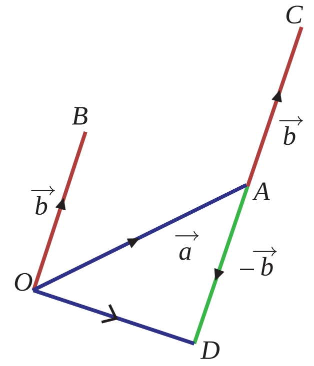
நாம் இதனை வடிவியலின் துணைகொண்டு பார்க்கலாம். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை முறையே $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவற்றைக் குறிக்கிறது என்க. (படம் 8.18). ACயை OBக்கு இணையாக $AC = OB$ எனுமாறு வரைக. இப்பொழுது $\overrightarrow{AC}$ என்பது $\vec{b}$ –க்குச் சமமாக இருக்கும். $CA = AD$ எனுமாறு CA

02_8 Vector Algebra Tamil.indd 57 30-05-2022 13:16:35

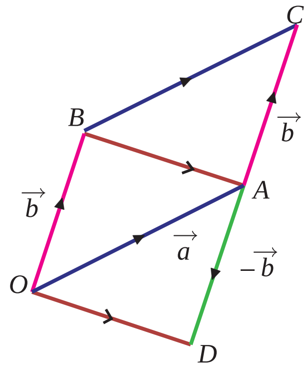
என்ற கோட்டை D வரை நீட்டுக. இப்பொழுது $\overrightarrow{AD}$ என்பது $-\vec{b}$ க்கு சமம் ஆகும். எனவே $\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{OD}$. ஆகவே $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OD}$ (படம் 8.19).



படம் 8.18



படம் 8.19



படம் 8.20

$OACB$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க. இதிலிருந்து BA மற்றும் OD ஆகியவை இணையாகவும் சமநீளத்திலும் உள்ளதை அறியலாம். எனவே $\overrightarrow{BA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OD}$ ஆகியவை சமவெக்டர்கள் ஆகும். எனவே $\overrightarrow{BA}$ ஐ நாம் $\vec{a}-\vec{b}$ ஆகக் கொள்ளலாம். இதிலிருந்து $OACB$ என்ற இணைகரத்தில் பக்கங்கள் $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை முறையே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ வெக்டர்களைக் குறித்தால், மூலைவிட்டம் $\overrightarrow{BA}$ என்பது $\vec{a}-\vec{b}$ ஐ குறிக்கும். (படம் 8.20ஐ பார்க்க). நாம் ஏற்கனவே $\overrightarrow{OC}$ ஆனது $\vec{a}+\vec{b}$ ஐ குறிக்கும் என அறிந்துள்ளோம்.

ஆகவே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்களைக் குறித்தால் $\vec{a}+\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a}-\vec{b}$ ஆகியவை மூலைவிட்டங்களைக் குறிக்கும்.

8.4.3 வெக்டரின் திசையிலிப் பெருக்கல் (Scalar multiplication of a vector)

நாம் இப்பொழுது ஒரு வெக்டரை ஒரு திசையிலியால் எவ்வாறு பெருக்குவது என்பதைக் காண்போம்.

$\vec{a}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வெக்டர், m ஒரு திசையிலி என்க. $m\vec{a}$ என்பது வெக்டர் $\vec{a}$ -யுடன் திசையிலி m–ன் திசையிலிப் பெருக்கம் என்கிறோம்.

m பூஜ்ஜியம் எனில், $m\vec{a}$ –ன் எண்ணளவு 0 ஆகும். எனவே $m\vec{a}$ என்பது பூஜ்ஜிய வெக்டர் ஆகும். m மிகை எண் எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $m\vec{a}$ ஆகியவை ஒரே திசையைக் குறிப்பதாகவும் m குறை எண் எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $m\vec{a}$ ஆகியவை எதிர் திசையைக் குறிப்பதாகவும் அமையும். ஆகவே m மிகை எண் எனில் $\vec{a}$ மற்றும் $m\vec{a}$ ஆகியவை ஒரே திசை வெக்டர்கள் ஆகவும், m குறை எண் எனில் $\vec{a}$ மற்றும் $m\vec{a}$ ஆகியவை எதிர் திசை வெக்டர்கள் ஆகவும் அமையும். $m\vec{a}$ –ன் எண்ணளவு $|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$ ஆகும்.

வரையறை 8.13

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் இணை எனில் ஏதேனும் ஒரு திசையிலி λ -க்கு $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ என அமையும். $\lambda>0$ எனில், அவை ஒரே திசையிலும், $\lambda<0$ எனில், அவை எதிர்த்திசையிலும் அமையும்.

8.4.4 சில பண்புகளும் முடிவுகளும் (Some Properties and results)

KCJY7

ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ திசையிலிகள் m, nக்கு

(i) $m(n\vec{a})=mn(\vec{a})=n(m\vec{a})$

(ii) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

(iii) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

முடிவு 8.2

வெக்டர் கூட்டல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.

ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ -க்கு

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) .$$

முடிவு 8.3

ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் $\vec{a}$ -க்கு $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$

முடிவு 8.4

எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{a}$ -க்கு $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \vec{0}.$

இந்த முடிவிலிருந்து ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் கூட்டல் எதிர்மறை உள்ளது என்பதை அறியலாம்.

முடிவு 8.5

வெக்டர்களின் கூட்டல் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்யும்.

நிரூபணம்

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இரு வெக்டர்கள் என்க. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ என்க.

$OACB$ என்ற இணைகரத்தை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்டு பூர்த்தி செய்க. $\overrightarrow{OB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ ஆகியவை ஒரே எண்ணளவினையும் திசையையும் கொண்டுள்ளன.

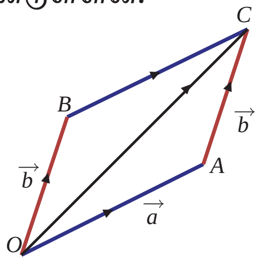
ஆகவே, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$.

எனவே, $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.

இதேபோன்று $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

$\vec{b}+\vec{a} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$.

ஆகவே $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$.



படம் 8.21

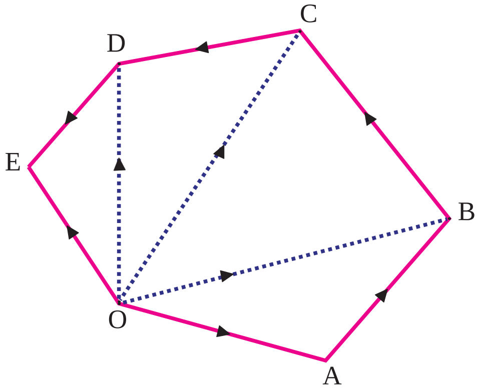
வெக்டர் கூட்டலின் பலகோண விதி (Polygon law of addition)

படம் 8.22–ல் $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ மற்றும் $\overrightarrow{DE}$ ஆகியவை ஏதேனும் 5 வெக்டர்கள் என்க. ஒவ்வொரு வெக்டரும் முந்தைய வெக்டரின் முடிவுப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்டுள்ளதைக் கவனத்தில் கொள்க. வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதிப்படி

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \;;\; \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} \;;\; \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$$

ஆகவே $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$.



படம் 8.22

எனவே அனைத்து வெக்டர்களின் கூடுதலானது முதல் வெக்டரின் தொடக்கப்புள்ளியைக் கடைசி வெக்டரின் முடிவுப்புள்ளியுடன் இணைக்கும் வெக்டராகும். இதனை வெக்டர் கூட்டலின் பலகோண விதி என்கிறோம்.

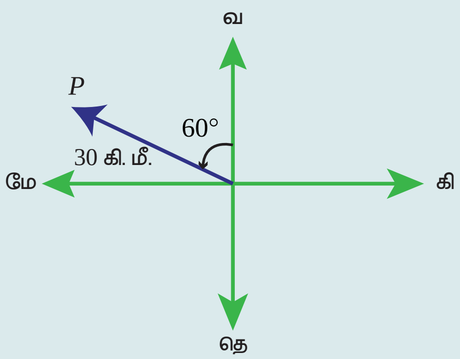
எடுத்துக்காட்டு 8.1

வரைபடத்தின் வாயிலாகக் கீழ்க்காணும் இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்க.

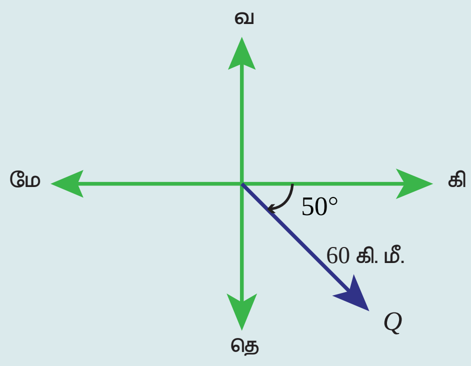
(i) 30 கி.மீ., 60° வடக்கிலிருந்து மேற்காக

(ii) 60 கி.மீ., 50° கிழக்கிலிருந்து தெற்காக

தீர்வு



படம் 8.23



படம் 8.24

எடுத்துக்காட்டு 8.2

ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் இரண்டு அடுத்தடுத்த பக்கங்கள் $\vec{a}$, $\vec{b}$ ஆக இருந்தால் பிற பக்கங்களைக் குறிக்கும் வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு

A,B,C,D,E,F ஆகியவை ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என்க.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ என்க.

ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் கீழ்க்காணும் பண்புகளை பயன்படுத்தி பக்கங்களைக் காணலாம்.

(i) AB, CF மற்றும் ED ஆகியவை இணையானவை. மேலும், BC, AD மற்றும் EF ஆகியவையும் இணை ஆகும்.

(ii) CF–ன் நீளம் AB–ன் நீளத்தைப் போல் இரண்டு மடங்கு மற்றும் AD–ன் நீளம் BC–ன் நீளத்தைப் போல் இரண்டு மடங்கு ஆகும்.

AB மற்றும் DE ஆகியவை இணையானவை. நீளங்கள் சமமாகவும் திசை எதிர்த் திசையாகவும் உள்ளன.

ஆகவே, $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$.

AB மற்றும் CF ஆகியவை இணையாகவும் எதிர்த்திசையிலும் அமைவதால்

$$\overrightarrow{CF} = -2\vec{a}$$

இதே போன்று

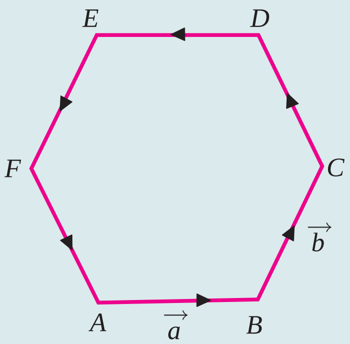
$$\overrightarrow{EF} = -\vec{b} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ஆகையால்

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ஆகையால்

$$\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{b}.$$



படம் 8.25

எனவே $\overrightarrow{CD} = 2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}$.

$\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD}$ என்பதால்

$$\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}.$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட பக்கங்கள் $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ எனக்கொண்டு மற்ற பக்கங்களை $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{DE} = -\vec{a}, \overrightarrow{EF} = -\vec{b}$, மற்றும் $\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$ எனப்பெறலாம்.

8.5 நிலை வெக்டர்கள் (Position vectors)

வரையறை 8.14

O வை ஆதியாகக் கொள்க. மற்றும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P–ஐ (தளத்திலோ அல்லது முப்பரிமாண வெளியிலோ) குறிக்கவும். இப்பொழுது $\overrightarrow{OP}$ –ஆனது O வைப் பொறுத்து P–ன் நிலைவெக்டர் என்று அழைக்கப்படுகின்றது.

வெக்டருக்கும் நிலை வெக்டர்களுக்கும் இடையேயான தொடர்பைக் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கலாம்.

முடிவு 8.6

O–வை ஆதி என்க. மேலும் A மற்றும் B–யை ஏதேனும் இரு புள்ளிகள் என்க. இப்போது $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. இங்கு, $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்களாகும்.

நிரூபணம்

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ஆகும்.

தேற்றம் 8.1 (பிரிவு சூத்திரம்-உட்புறமாகப் பிரித்தல்) (Section Formula - Internal Division)

O–வை ஆதியாகவும். A மற்றும் B–யை ஏதேனும் இரு புள்ளிகளாகவும் கொள்க. மேலும் P என்ற புள்ளியானது AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக பிரிக்கிறது என்க. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்களாயின் P –ன் நிலை வெக்டர்

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{n+m}.$$

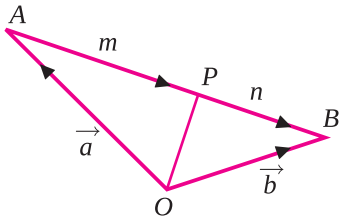
நிரூபணம்

O ஆதிப்புள்ளி மற்றும் A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பதால்,

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{OB} = \vec{b} \text{ ஆகும்.}$$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} \text{ என்க.}$$

AB என்ற கோட்டுத்துண்டை P ஆனது $m : n$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிப்பதால்



படம் 8.26

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{m}{n}$$

எனவே, $n|\overrightarrow{AP}| = m|\overrightarrow{PB}|$.

$\overrightarrow{AP}$ மற்றும் $\overrightarrow{PB}$ ஆகியவை ஒரே திசையில் இருப்பதால்,

$$n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}. \qquad (8.1)$$

ஆனால் $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \vec{b} - \vec{r}$

சமன்பாடு (8.1)–ல் பிரதியிட,

$$n(\vec{r} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{r})$$

$$(n+m)\vec{r} = n\vec{a} + m\vec{b}.$$

எனவே
$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{n+m}.$$

தேற்றம் 8.2 பிரிவு சூத்திரம்-வெளிப்புறமாகப் பிரித்தல் (நிரூபணமின்றி)
(Section Formula - External Division)

O–வை ஆதியாகவும், A மற்றும் B–யை ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளாகவும் கொள்க. P என்ற புள்ளியானது AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாக பிரிக்கிறது என்க. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்கள் எனில், P–ன் நிலை வெக்டர்

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n-m}.$$

குறிப்பு 8.1

$m = n = 1$ எனத் தேற்றம் 8.1–ல் பிரதியிட A மற்றும் B–யை இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ ஆகும். இங்கு $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை A மற்றும் B–ன் நிலை வெக்டர்களாகும். மேற்கண்ட தேற்றத்திலிருந்து மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் இருப்பதற்கான கட்டுப்பாட்டைப் பெறலாம்.

முடிவு 8.7

$\vec{a}$, $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாக கொண்ட புள்ளிகள் A, B மற்றும் C ஒரே கோட்டில் அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை x,y,z, என்ற மெய்யெண்கள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமில்லாமல் $x + y + z = 0$ மற்றும் $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ என்றவாறு அமைய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.3

A மற்றும் B என்ற இரு புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $2\vec{a} + 4\vec{b}$ மற்றும் $2\vec{a} - 8\vec{b}$ என்க. A மற்றும் B–யை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டினை $1 : 3$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு

O–வை ஆதியாகக் கொள்க.

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB} = 2\vec{a} - 8\vec{b}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

C மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $1 : 3$ என்ற விகிதத்தில் முறையே உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கின்றது என்க.

எனவே,
$$\overrightarrow{OC} = \frac{3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3+1} = \frac{3(2\vec{a} + 4\vec{b}) + (2\vec{a} - 8\vec{b})}{4} = 2\vec{a} + \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{3-1} = \frac{3(2\vec{a} + 4\vec{b}) - (2\vec{a} - 8\vec{b})}{2} = 2\vec{a} + 10\vec{b}.$$

ஒரு முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சிப்புள்ளியில் இருந்து அதன் எதிர்ப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியை இணைக்கும் கோடு நடுக்கோடு என்பதை நாம் நினைவு கூர்வோம். மையக்கோட்டுச்சந்தி நடுக்கோட்டினை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும்.

தேற்றம் 8.3

ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

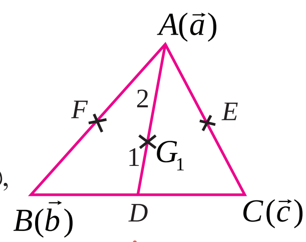
நிரூபணம்

ABC என்ற முக்கோணத்தில் *BC*, *CA* மற்றும் *AB* ஆகிய பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகள் முறையே *D*, *E*, *F* என்க. நாம் *AD*, *BE*, *CF* ஆகிய நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவ வேண்டும்.

O–வை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்டு *A*, *B*, *C* என்ற முனைப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்க.

D, *E*, *F* –ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}, \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

AD–யை G_1 ஆனது உட்புறமாக 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில்,



படம் 8.27

$$G_1 \text{ –ன் நிலை வெக்டர்} = \frac{2\overrightarrow{OD}+1\overrightarrow{OA}}{2+1}$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{2\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)+1\vec{a}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad ...(1)$$

BE-யை G_2 –ஆனது உட்புறமாக 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில்,

$$G_2 \text{ –ன் நிலை வெக்டர்} = \frac{2\overrightarrow{OE}+1\overrightarrow{OB}}{2+1}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{2\left(\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)+1.\vec{b}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad ...(2)$$

இதைப்போலவே *CF*–யை G_3 ஆனது உட்புறமாக 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில்,

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad ...(3)$$

(1), (2), (3)–லிருந்து G_1, G_2, G_3 ஆகியவற்றின் நிலை வெக்டர்கள் சமம். எனவே அவை வெவ்வேறான புள்ளிகள் இல்லை. அந்த பொதுப்புள்ளியை *G* என்க.

முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியின்வழிச் சந்திக்கின்றன.

தேற்றம் 8.4

ஒரு நாற்கரம் இணைகரமாக இருக்கத் தேவையானது மற்றும் போதுமான நிபந்தனை அதன் மூலைவிட்டங்கள் இருசமக் கூறிடும் என்பதாகும்.

நிரூபணம்

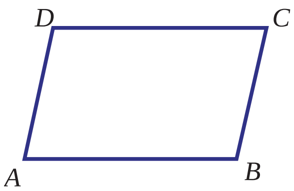
AC, *BD* ஆகியவற்றை மூலைவிட்டங்களாக கொண்ட நாற்கரத்தின் முனைப்புள்ளிகள் *A*, *B*, *C*, *D* என்க. *O*–வை ஆதியாகக் கொண்டு *A*, *B*, *C* மற்றும் *D*–ன் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ மற்றும் $\vec{d}$ என்க.

நாற்கரம் $ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனக் கொள்க.

இப்பொழுது

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{b} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$$

மேலும் $$\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}.$$



படம் 8.28

இதிலிருந்து AC மற்றும் BD ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் ஒன்றே ஆகும். அதாவது, மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக்கூறிடுகின்றன.

மறுதலையாக, நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக்கூறிடுகின்றன எனக் கொண்டால், மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் சமம் ஆகும்.

எனவே, $$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} \Rightarrow \vec{a}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{d} \Rightarrow \vec{c}-\vec{d} = \vec{b}-\vec{a}$$

இதிலிருந்து $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ மேலும் $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ என நிறுவலாம். இதிலிருந்து AB மற்றும் DC ஆகியவை இணை எனலாம். $\vec{a}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{d}$ என்பதிலிருந்து $\vec{a}-\vec{d} = \vec{b}-\vec{c}$ என்பதால் AD மற்றும் BC ஆகியவை இணை எனலாம். எனவே, $ABCD$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

பயிற்சி 8.1

(1) கீழ்க்காணும் இடப்பெயர்ச்சிகளை வரைபடம் மூலம் விவரிக்க.

(i) 45 செ.மீ., 30° கிழக்கிலிருந்து வடக்காக (ii) 80 கி.மீ., 60° மேற்கிலிருந்து தெற்காக

(2) தொடர்பு R ஆனது V என்ற வெக்டர்களின் கணத்தின் மீது "$\vec{a}\ R\ \vec{b}$ என்பது $\vec{a} = \vec{b}$" என வறையறுக்கப்பட்டால் அது V-ன் மீது ஒரு சமானத் தொடர்பு என நிறுவுக.

(3) A மற்றும் B ஆகியவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் நிலைவெக்டர்கள் எனில் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை மூன்று சம பாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ மற்றும் $\dfrac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$ என நிறுவுக.

(4) முக்கோணம் ABC-ல் AB மற்றும் AC–ன் மையப்புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E எனில் $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ என நிறுவுக.

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு அதன் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணை எனவும், அதன் நீளத்தில் பாதி எனவும் வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

(6) ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடுகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

(7) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை இணைகரத்தின் ஒரு பக்கத்தையும் ஒரு மூலைவிட்டத்தையும் குறித்தால் அதன் பிற பக்கங்களையும் மற்றொரு மூலைவிட்டத்தினையும் காண்க.

(8) $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$ எனில், P, Q, R ஆகியவை ஒரே கோடமைபுள்ளிகள் என நிறுவுக.

(9) முக்கோணம் ABC–ல் பக்கம் BC–ன் மையப்புள்ளி D எனில், $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ என நிறுவுக.

(10) ABC என்ற முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி G எனில், $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ என நிறுவுக.

(11) A, B, C ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் மற்றும் D,E,F என்பவை BC, CA, AB ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகள் எனில், $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ என நிறுவுக,

(12) $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் AC, BD-ன் நடுப்புள்ளிகள் E மற்றும் F ஆக இருப்பின் $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{EF}$ என நிறுவுக.

8.6 வெக்டரைக் கூறுகளாகப் பிரித்தல் (Resolution of Vectors)

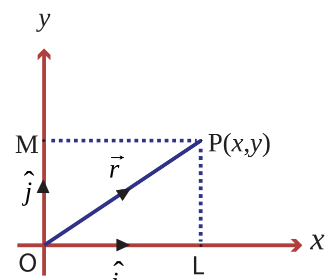
ஒரு வெக்டரைக் கூறுகளாக எந்தவொரு முடிவுள்ள பரிமாணத்திலும் பிரிக்கலாம். ஆனால் நாம் இரண்டு மற்றும் மூன்று பரிமாணங்களில் கூறுகளாக பிரிப்பதைக் காணலாம்.

நாம் இப்பொழுது இரு பரிமாணத்தில் இருந்து தொடங்குவோம்.

8.6.1 இரு பரிமாணத்தில் ஒரு வெக்டரின் கூறுகள் (Resolution of a vector in two dimension)

$\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ என்பவை முறையே x, y அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் O–வை ஆரம்பப்புள்ளியாகக் கொண்ட ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க. தளத்தில் P என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ எனில் அதனை x, y என்கிற ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்த மெய்யெண்களுக்கு $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$ என எழுதலாம். மேலும் $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

நிரூபணம்



படம் 8.29

P என்ற புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x, y) என்க. L, M ஆகியவை Pயிலிருந்து x, y-அச்சுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகளின் அடிப்புள்ளிகள் என்க. எனவே, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}$.

$\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ ஆகியவை அலகு வெக்டர்கள் ஆதலால், $\overrightarrow{OL}=x\hat{i}$ மற்றும் $\overrightarrow{OM}=y\hat{j}$ ஆகும்.

எனவே, $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$

$\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ எனில் $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$ ஆகும்.

ஒருமைத்தன்மையை நிறுவ $x_1\hat{i}+y_1\hat{j}$ மற்றும் $x_2\hat{i}+y_2\hat{j}$ ஆகியவை ஒரே புள்ளி Pயை குறிப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே,

$$x_1\hat{i} + y_1\hat{j} = x_2\hat{i}+y_2\hat{j} .$$

இதிலிருந்து $$(x_1-x_2)\hat{i}-(y_2-y_1)\hat{j} = \vec{0} \Rightarrow x_1-x_2=0, y_2-y_1=0$$

அதாவது, $x_1=x_2$ மற்றும் $y_1=y_2$. இதிலிருந்து ஒருமைத்தன்மையை அறியலாம்.

முக்கோணம் OLPல் $OP^2=OL^2+LP^2$; ஆகவே $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

அதாவது $|\vec{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2}$. ■

$\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ ஆகியவை x மற்றும் y அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் அலகு வெக்டர்கள் எனில், (6,4) என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டரை $6\hat{i}+4\hat{j}$ என ஒரே ஒரு வழியில் மட்டுமே எழுத முடியும்.

முடிவு 8.8

ஒரு தளத்தில் $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை ஒரே கோட்டில் அமையாத இரு வெக்டர்கள் எனில், அந்தத் தளத்தில் உள்ள எந்தவொரு வெக்டரையும் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக ஒரே ஒரு வழியில் எழுத முடியும். அதாவது அத்தளத்தில் உள்ள எந்த ஒரு வெக்டரையும் $l\vec{a}+m\vec{b}$ என எழுதலாம். இங்கு l மற்றும் m திசையிலிகள் ஆகும்.

நிரூபணம்

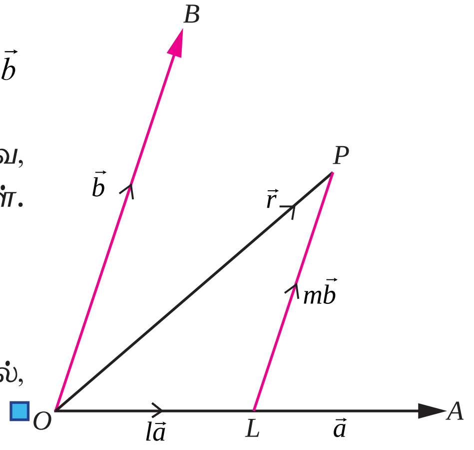
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ என்க. $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ என்க. மற்றும் $\vec{r}$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ அமைந்த தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் என்க.

OBக்கு இணையாக PL–ஐ வரைக. எனவே, $\overrightarrow{LP} = m\vec{b}$ மற்றும் $\overrightarrow{OL} = l\vec{a}$ ஆகும். இங்கு l மற்றும் m திசையிலிகள்.

இப்போது $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP}$.

அதாவது, $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b}$.

ஆகவே, $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை ஒரு தள அமை வெக்டர்கள் எனில், $\vec{r}$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ன் ஒருபடி சேர்க்கையாகும்



படம் 8.30

குறிப்பு 8.2

ஏதேனும் மூன்று ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையாத வெக்டர்கள் ஒரு தள அமை வெக்டர்கள் எனில் இதில் எந்த ஒரு வெக்டரையும் மற்ற இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக ஒரே வழியில் எழுதலாம். மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

முடிவு 8.9

$\vec{a}, \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை ஒரே தளத்தில் அமையாத வெளியில் அமைந்த ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில், வெளியில் அமைந்த எந்த ஒரு வெக்டரையும் $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ என எழுதலாம். இங்கு l, m மற்றும் n ஆகியவை திசையிலிகளாகும்.

வரையறை 8.15

$\hat{i}$ மற்றும் $\hat{j}$ முறையே x மற்றும் y அச்சின் மிகைத் திசையில் அமைந்த அலகு வெக்டர்கள் என்க. $\vec{r}$ என்பது இத்தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் எனில், $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ஆகும். இங்கு x மற்றும் y மெய்யெண்கள். இங்கு $x\hat{i}$ மற்றும் $y\hat{j}$ ஆகியவை முறையே x மற்றும் y அச்சின் திசையில் $\vec{r}$ –ன் இருபரிமாணக் கூறுகள் ஆகும்.

நாம் இதுவரை இரு பரிமாணத்தில் விவாதித்த கூறுகளை முப்பரிமாண வெளிக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

8.6.2 முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வெக்டரின் கூறுகள்
(Resolution of a vector in three dimension)

தேற்றம் 8.6

$\hat{i}, \hat{j}$ மற்றும் $\hat{k}$ ஆகியவை முறையே x, y மற்றும் z அச்சின் மிகை திசையில் O–வை ஆதியாகக் கொண்ட அலகு வெக்டர்கள் என்க. வெளியில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. P–ன் நிலைவெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ –ஐ ஒரே ஒரு வழியில் $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என எழுதலாம்.

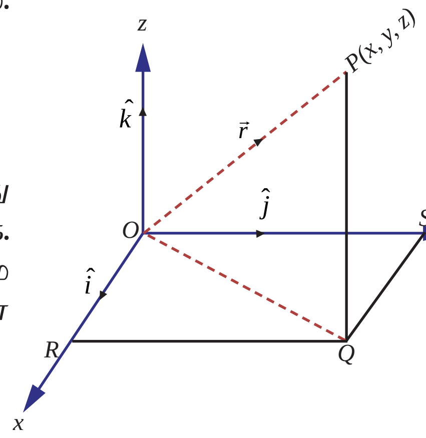
இங்கு, x, y, z மெய்யெண்கள். மேலும், $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

நிரூபணம்

P–ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y, z) என்க. P–லிருந்து xy-தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிப்புள்ளி Q என்க. R மற்றும் S ஆகியவை Qவிலிருந்து முறையே x மற்றும் y–அச்சுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிப்புள்ளிகள் என்க. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ என்க.

அப்பொழுது $OR = x, \quad OS = y, \quad QP = z$.

எனவே , $\overrightarrow{OR} = x\hat{i}, \quad \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$, மற்றும் $\overrightarrow{QP} = z\hat{k}$



படம் 8.31

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\hat{k}$$

அதாவது $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ஆகும்.

இதுவே O–வைப் பொறுத்த முப்பரிமாண வெளியில் P–ன் நிலை வெக்டர் ஆகும்.

முக்கோணம் ORQ–ல்

$$OQ^2 = OR^2 + RQ^2 \text{ (எவ்வாறு?)}$$

மற்றும் முக்கோணம் OQP–ல்

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2.$$

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

மேலும் $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, அதாவது $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ■

இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் வெக்டரின் கூறுகள்
(Components of vector joining two points)

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் கூறுகளைக் காண்போம்.

A மற்றும் B என்ற புள்ளிகள் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்க. P என்ற புள்ளியை $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ஆகக் கொள்க. இப்பொழுது $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ ஆகும். $\overrightarrow{OP}$ –ன் கூறுகள் $(x_2 - x_1)\hat{i}$ மற்றும் $(y_2 - y_1)\hat{j}$ ஆகும். எனவே, x மற்றும் y அச்சுகளின் திசையில் $\overrightarrow{AB}$ –ன் கூறுகள் $(x_2 - x_1)\hat{i}$ மற்றும் $(y_2 - y_1)\hat{j}$ ஆகும்.

இதே போன்று (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) ஆகியவை A மற்றும் B எனில், $\overrightarrow{AB}$ –ன் கூறுகள் x, y மற்றும் z அச்சுகளின் திசையில் $(x_2 - x_1)\hat{i}$, $(y_2 - y_1)\hat{j}$ மற்றும் $(z_2 - z_1)\hat{k}$ ஆகும்.

8.6.3 ஒரு வெக்டரின் அணி வடிவம் (Matrix representation of a vector)

மூன்று கூறுகளைக் கொண்ட வெக்டரை ஒரு நிரை அணியாகவோ அல்லது நிரல் அணியாகவோ முறையே $[x, y, z]$ அல்லது $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ என எழுதலாம்.

ஆகவே எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ –ஐயையும் $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = \vec{A}$ எனப் பெறலாம்.

எனவே வெக்டர்களின் கூட்டல் மற்றும் திசையிலிப் பெருக்கல் ஆகியவை கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \text{ மற்றும் } \vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} \text{ எனில், } \vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$,

மேலும், $k\vec{A} = k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$

அதாவது, $k\vec{A} = ka_1\hat{i} + ka_2\hat{j} + ka_3\hat{k}$

$k \in \mathbb{R}$க்கு $k > 1$ எனில், நீட்சியும், $0 < k < 1$ எனில், குறுக்கமும், மேலும் $k = 0$ எனில், $O\vec{A} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$ என பூஜ்ஜிய வெக்டரும் கிடைக்கும்.

முடிவு 8.10

வெக்டர் கூட்டலின் பரிமாற்று மற்றும் சேர்ப்புப் பண்புகள், மற்றும் திசையிலி பெருக்கத்தின் பங்கீட்டு விதி ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவலாம்.

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k},\ \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ மற்றும் m ஒரு திசையிலி என்க.

(i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}.$

(ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}.$

(iii) $m\vec{a} = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k}.$

(iv) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3.$

எடுத்துக்காட்டு 8.4

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ –ன் திசையில் உள்ள ஓர் ஓரலகு வெக்டரைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}$ –ன் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர் $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ஆகும். எனவே, $5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ –ன் திசையில் ஓரலகு வெக்டர் $\dfrac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{|5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}|} = \dfrac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \dfrac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$

குறிப்பு 8.3

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ க்கு எதிர் திசையில் மேலும் ஓரலகு வெக்டர் $-\dfrac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$ உள்ளது.

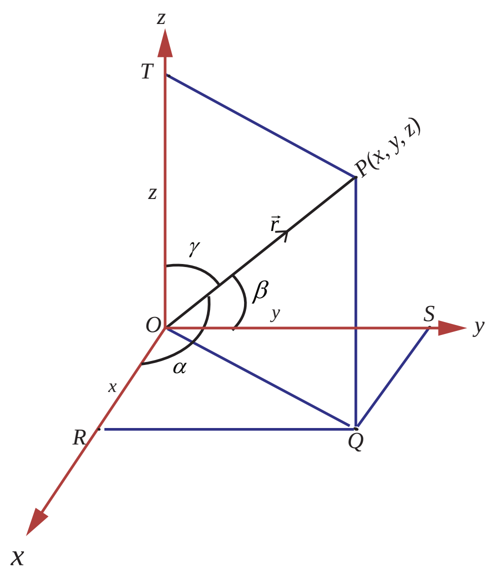
8.7 திசைக் கொசைன்கள் மற்றும் திசை விகிதங்கள் (Direction Cosines and Direction Ratios)

ஆதியில் இருந்து r தொலைவு தூரத்தில் உள்ள புள்ளி P–ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y, z) என்க. P–யிலிருந்து x, y மற்றும் z அச்சுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துகளின் அடிப்புள்ளிகள் முறையே R, S மற்றும் T என்க.

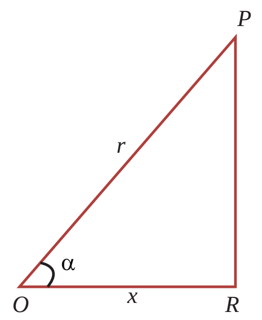
$$\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90^\circ.$$

$$OR = x,\ OS = y,\ OT = z \text{ and } OP = r.$$

(படத்தைப் பார்த்து, $\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90^\circ$ எனக் காட்சிப்படுத்துவது சற்றே சிரமம் ஆகும். ஏன் எனில் இவை அச்சுகளில் இருந்து P–க்கு வரையப்படும் செங்குத்துகள். முப்பரிமாண மாதிரியில் இதனை எளிதில் கண்டுணரலாம்)



படம் 8.32



படம் 8.33

$\overrightarrow{OP}$ ஆனது x, y மற்றும் z அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் α, β, γ எனில்,

$$\angle POR = \alpha, \quad \angle POS = \beta \text{ மற்றும் } \angle POT = \gamma.$$

ΔOPR ல் $\angle PRO = 90°, \angle POR = \alpha, OR = x$ மற்றும் $OP = r$.

$$\text{எனவே, } \cos\alpha = \frac{OR}{OP} = \frac{x}{r}.$$

இதுபோலவே நாம் $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ என காணலாம்.

இங்கு $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$-ன் **திசைக் கோணங்கள்** α, β, γ எனவும், $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ -ன் திசைக்கொசைன்கள் $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என்ற வெக்டரின் **திசைக்கொசைன்கள்** $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, இங்கு $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

திசைக்கொசைன்களுடன் விகித சமத்தில் உள்ள எந்த மூன்று எண்களையும் அந்த வெக்டரின் திசை விகிதங்கள் என்கிறோம். எனவே ஒரு வெக்டரின் திசை விகிதங்கள் ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது அல்ல. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டருக்கு எண்ணிலடங்காத் திசைவிகிதங்கள் இருக்கும்.

உற்று நோக்கல்

(i) கொடுக்கப்பட்ட பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டருக்கு திசை விகிதங்கள் மற்றும் திசைக் கொசைன்களைக் காணலாம்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட திசை விகிதங்களைக் கொண்டு நம்மால் அந்த வெக்டரை நிர்ணயிக்க இயலாது.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட திசைக் கொசைன்களைக் கொண்டு நம்மால் அந்த வெக்டரைக் கண்டறிய இயலாது.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட வெக்டருக்கு திசைக்கொசைன்களின் தொகுப்பு திசை விகிதங்களின் ஒரு தொகுப்பாக அமையும்.

(v) ஒரு வெக்டரைக் கண்டறிய, அதன் எண்ணளவு மற்றும் திசைக் கொசைன்களோ அல்லது திசை விகிதங்களோ அவசியமாகும்.

குறிப்பு 8.4

$\overrightarrow{OP}$ எனும் ஒரு வெக்டரை கருதுக. இதன் தொடக்கப் புள்ளி ஆதி ஆகும். ஒரு வெக்டருக்கு தொடக்கப்புள்ளி ஆதி இல்லை எனில் ஆதியை தொடக்கப்புள்ளியாகக் கொண்டு அதே எண்ணளவிற்கு அந்த வெக்டருக்கு இணையாக வரைக. சம வெக்டர்களுக்கான கோட்பாட்டிலிருந்து இவை இரண்டிற்கும் ஒரே திசை கொசைன்கள் இருக்கும். இவ்வாறாக நாம் எந்த ஒரு வெக்டரின் திசை கொசைனையும் காணலாம்.

முடிவு 8.11

ஒரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என்க. மேலும் $\vec{r}$ –ன் திசை கோணங்கள் α, β, γ எனில்,

(i) $\vec{r}$ –ன் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 1 ஆகும்.

(ii) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

(iii) $\vec{r}$ –ன் திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) l, m, n ஆகியவை ஒரு வெக்டரின் திசைக் கொசைன்கள் எனில், $l^2+m^2+n^2=1$. இதன் மறுதலையும் உண்மை.

(v) எந்த ஒரு அலகு வெக்டரையும் நாம் $\cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$ என எழுதலாம்.

நிரூபணம்

(i) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} + \dfrac{z^2}{r^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$

(ii), (iii), (iv), மற்றும் (v)–ன் நிரூபணங்கள் பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்குத் திசை விகிதங்கள் மற்றும் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(i) $3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$, (ii) $3\hat{i} - 4\hat{k}$.

தீர்வு

(i) $3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ –ன் திசை விகிதங்கள் 3, 4, – 6.

திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}$. இங்கு $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

எனவே திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{3}{\sqrt{61}}, \dfrac{4}{\sqrt{61}}, \dfrac{-6}{\sqrt{61}}$ ஆகும்,.

(ii) $3\hat{i} - 4\hat{k}$ –ன் திசை விகிதங்கள் 3, 0, – 4.

திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{3}{5}, 0, \dfrac{-4}{5}$.

எடுத்துக்காட்டு 8.6

(i) 2, 3, – 6 என திசை விகிதங்களைக் கொண்ட வெக்டரின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(ii) $30°, 45°, 60°$ ஆகியவை ஒரு வெக்டருக்கு திசைக் கோணங்களாகுமா?

(iii) A (2, 3, 1) மற்றும் B (3, – 1, 2) எனில், $\overrightarrow{AB}$ –ன் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(iv) (2, 3, 1) மற்றும் (3, – 1, 2)–ஐ இணைக்கும் கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(v) 2, 3, 6–ஐ திசை விகிதங்களாகவும் எண்ணளவு 5–ம் உடைய வெக்டரைக் காண்க.

தீர்வு

(i) திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

அதாவது $\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{-6}{7}$.

(ii) தேவையான நிபந்தனை $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

இங்கு $\alpha=30°, \beta=45°, \gamma=60°$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\neq 1$.

எனவே, இவை எந்த வெக்டருக்கும் திசைக் கொசைன்களாகாது.

(iii) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$

திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{-4}{\sqrt{18}}, \dfrac{1}{\sqrt{18}}$

(iv) A மற்றும் B என்ற புள்ளிகள் $(2, 3, 1)$ மற்றும் $(3, -1, 2)$ என்க. $\overrightarrow{AB}$ –ன் திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{-4}{\sqrt{18}}, \dfrac{1}{\sqrt{18}}$.

இருப்பினும், எந்த புள்ளியையும் முதல் புள்ளியாக எடுத்துக் கொள்ளலாம், எனவே இதற்கு எதிர்த் திசையிலும் திசை விகிதங்களை காணலாம். ஆகவே, நமக்கு $\dfrac{-1}{\sqrt{18}}, \dfrac{4}{\sqrt{18}}, \dfrac{-1}{\sqrt{18}}$ என மற்றொரு தொகுப்பு திசைக் கொசைன்களாக கிடைக்கிறது.

(v) திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{6}{7}$.

அலகு வெக்டர் $\dfrac{2}{7}\hat{i}+\dfrac{3}{7}\hat{j}+\dfrac{6}{7}\hat{k}$

தேவையான வெக்டர் $\dfrac{5}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$.

எடுத்துக்காட்டு 8.7

$2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k},\ 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k}$ ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

O–வை ஆதிப்புள்ளி என்க. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ மற்றும் $\overrightarrow{OC}$ என்பன முறையே $2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k},\ 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k}$ என்க. எனவே,

$$\overrightarrow{AB}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{AC}=4\hat{i}-8\hat{j}+12\hat{k}.$$

எனவே $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AB}$. ஆகவே $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ ஆகியவை இணையாகும். இவற்றிற்கு A என்ற பொதுப்புள்ளி உள்ளது, எனவே, இந்த மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும்.

மாற்று முறை

O-ஐ ஆதியாகக் கொள்க.

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}, \overrightarrow{OB} = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{OC} = 6\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k} \; ; \; \overrightarrow{BC} = 3\hat{i}-6\hat{j}+9\hat{k} \quad \overrightarrow{CA} = 4\hat{i}+8\hat{j}-12\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14} \; ; \; |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14} \; ; \; |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}.$$

எனவே, $AC = AB + BC.$

ஆகவே, A, B, C ஆகியவை ஒரே கோட்டின் மீது அமையும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோடமைப் புள்ளிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.8

எண்ணளவை 5-ம் $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ -க்கு இணையாகவும் உள்ள வெக்டரை நிலை வெக்டராக கொண்ட புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}$ -ஐ $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ எனக் கொள்க.

$\vec{a}$ -ன் திசையில் அலகு வெக்டர் $\hat{a}$ ஆனது $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ க்குச் சமம். அதாவது $\dfrac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}$ க்குச் சமம். எண்ணளவை 5-ம், $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ க்கு இணையாகவும் உள்ள வெக்டர் $5\left(\dfrac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}\right) = \dfrac{4\hat{i}}{\sqrt{5}} - \dfrac{3}{\sqrt{5}}\hat{j} + 2\sqrt{5}\,\hat{k}$. எனவே, தேவையான புள்ளி $\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}, -\dfrac{3}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5}\right)$.

எடுத்துக்காட்டு 8.9

$2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$, $4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$, $10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு

O-ஐ ஆதிப்புள்ளியாகக் கொண்டு A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$, $4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$, $10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ என்க.

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}, \; \overrightarrow{OB} = 4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{OC} = 10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = (4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})-(2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}) = 2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}.$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{4+9+36} = 7$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB} = (10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})-(4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}) = 6\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = 7$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC} = (2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})-(10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}) = -8\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-8)^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{64+25+9} = \sqrt{98}$$

$$BC^2 = 49, \; CA^2 = 98, \; AB^2 = 49.$$

அதாவது $CA^2 = BC^2 + AB^2$.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தினை அமைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.10

$5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k},\ 7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k},\ 3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k} = s(7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k})+t(3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k})$ என்க.

கூறுகளைச் சமப்படுத்த,

$$7s + 3t = 5$$
$$-8s + 20t = 6$$
$$9s + 5t = 7$$

முதல் இரு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, $s = t = \frac{1}{2}$ எனப் பெறலாம். இவை மூன்றாவது சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

ஆகவே, ஒரு வெக்டரை மற்ற இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக எழுதலாம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு தளஅமை வெக்டர்களாகும்.

பயிற்சி 8.2

(1) கீழ்க்காணும் விகிதங்களை திசைக் கொசைன்களாக கொண்டு ஒரு வெக்டர் அமையுமா என சரிபார்க்க.

(i) $\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{4}{3},0,\frac{3}{4}$

(2) கொடுக்கப்பட்ட திசை விகிதங்களைக் கொண்ட ஒரு வெக்டரின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(i) 1 , 2 , 3 (ii) 3 , – 1 , 3 (iii) 0 , 0 , 7

(3) கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்குத் திசைக் கொசைன்கள், மற்றும் திசை விகிதங்களைக் காண்க.

(i) $3\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$ (ii) $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ (iii) $\hat{j}$

(iv) $5\hat{i}-3\hat{j}-48\hat{k}$ (v) $3\hat{i}-3\hat{k}+4\hat{j}$ (vi) $\hat{i}-\hat{k}$

(4) புள்ளிகள் (1, 0, 0), (0, 1, 0) மற்றும் (0, 0, 1) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(5) $\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},a$ ஆகியவை ஒரு வெக்டரின் திசைக்கொசைன்களாயின் a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(6) $(a , a + b , a + b + c)$ என்பது (1, 0, 0) மற்றும் (0, 1, 0) ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் எனில், a, b, c -ஐக் காண்க.

(7) $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k},\ 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k},\ \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

(8) $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+9\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b}=\hat{i}+\lambda\hat{j}+3\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் இணை எனில், λ-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(9) கீழ்க்காணும் வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக.

(i) $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k},\ -2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k},\ -\hat{j}+2\hat{k}$ (ii) $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k},\ \hat{i}-\hat{j},\ 7\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$.

(10) $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k},\ -\hat{j}-\hat{k},\ 3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $-4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ ஆகியவற்றை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு தளஅமைவன எனக்காட்டுக.

(11) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k},\ \vec{c}=-3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ எனில் கீழ்க்காணும் வெக்டர்களின் எண்ணளவையும் திசைக் கொசைன்களையும் காண்க. (i) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (ii) $3\vec{a}-2\vec{b}+5\vec{c}$.

(12) $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\ 3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ மற்றும் $-2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் எனில், அந்த முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

(13) $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k},\ \vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ எனில், $3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான அலகு வெக்டரைக் காண்க.

(14) மூன்று புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ஆகியவை $2\vec{a}-7\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்தால் அப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையுமா எனக் கூறுக.

(15) P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}),(2\hat{i}+5\hat{j}),(3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$ மற்றும் $(\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k})$ எனில் PQ மற்றும் RS ஆகியவை இணை எனக்காட்டுக.

(16) $m(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ஓர் அலகு வெக்டராயின் m-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(17) A (1, 1, 1), B(1, 2, 3) மற்றும் C(2, − 1, 1) ஆகிய புள்ளிகள்ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என நிறுவுக.

8.8 வெக்டர்களின் பெருக்கம் (Product of vectors)

நாம் இதுவரையிலும் இரு வெக்டர்களின் கூட்டல், ஒரு வெக்டரை மற்றொரு வெக்டரில் இருந்து கழித்தல் மற்றும் ஒரு வெக்டரை ஒரு திசையிலியால் பெருக்குதல் போன்றவற்றை பார்த்துள்ளோம். நாம் இப்பொழுது இரண்டு வெக்டர்களின் பெருக்கலைப் பற்றிப் பார்க்கலாம். வெக்டர்களைப் பெருக்க இரு வழிகள் உள்ளன.

(i) திசையிலிப் பெருக்கல் (புள்ளிப் பெருக்கல்) மற்றும்

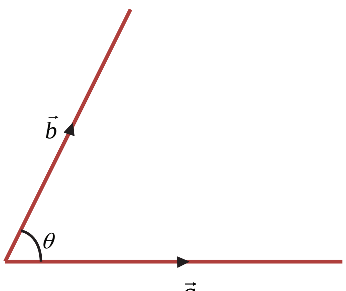
(ii) வெக்டர் பெருக்கல் (குறுக்குப் பெருக்கல்)

ZLMH9

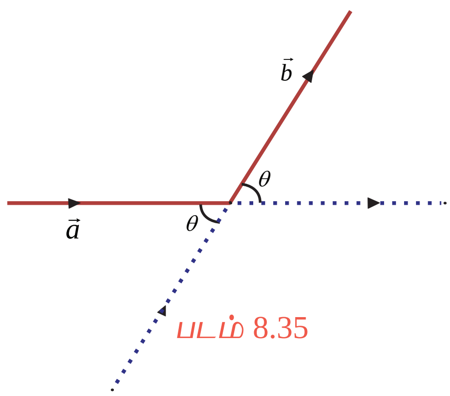
இவற்றை வரையறுக்க இரு வெக்டர்களுக்கு இடைபட்ட கோணம் நமக்கு தேவை.

8.8.1 இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between two vectors)

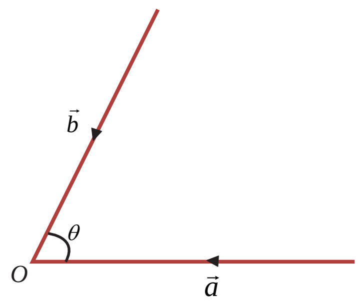
$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்களை முறையே $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ எனக் கொள்வோம். இரு



படம் 8.34



படம் 8.35



படம் 8.36

வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்பது அவற்றின் திசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும். அவை இரண்டும் வெட்டும் புள்ளியிடத்து விரியும் தன்மையாகவோ (படம் 8.34) அல்லது குவியும் தன்மையாகவோ (படம் 8.36) இருக்க வேண்டும்.

θ–ஆனது இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில், $0 \le \theta \le \pi$ ஆகும்.

$\theta = 0$ அல்லது π ஆக இருக்கும்போது வெக்டர்கள் இணை ஆகும்.

இரண்டு வெக்டர்கள் படம் 8.35–ல் காட்டியுள்ளது போன்று விரியவோ அல்லது குவியவோ இல்லை எனில் நாம் அதில் ஏதேனும் ஒரு வெக்டரின் நீளத்தை நீட்டி விரியவோ அல்லது குவியவோ செய்து வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தைக் காணலாம்.

8.8.2 திசையிலிப் பெருக்கம் (Scalar product)

வரையறை 8.16

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க. (படம் 8.34). இவற்றின் **திசையிலிப் பெருக்கம்** அல்லது **புள்ளிப் பெருக்கம்** $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ எனக் குறிக்கப்பட்டு $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ கணக்கிடும்போது கிடைப்பது ஒரு திசையிலி. எனவே இதனைத் திசையிலிப் பெருக்கம் என்கிறோம். மேலும், இவற்றிற்கு இடையே புள்ளி (‘$\cdot$’) என்ற செயலியை பயன்படுத்துவதால் இதனைப் புள்ளிப் பெருக்கம் என்றும் கூறலாம்.

திசையிலிப் பெருக்கத்தின் வடிவக் கணித விளக்கம் (ஒரு வெக்டரின் மீது மற்றொரு வெக்டரின் வீழல்) (Geometrical meaning of scalar product (projection of one vector on another vector))

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ மற்றும் θ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்க.

OA–க்கு செங்குத்தாக BL வரைக. செங்கோண முக்கோணம் OLB–ல்

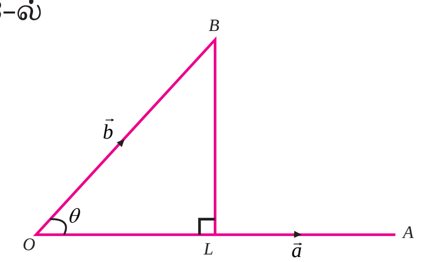
$$\cos\theta = \frac{OL}{OB}$$

$$OL = OB\cos\theta = |\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a}$ –ன் மீது $\vec{b}$ –ன் வீழல் OL ஆகும். எனவே

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|(OL)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \ (\vec{a} \text{ –ன் மீது } \vec{b} \text{ –ன் வீழல்})$$



படம் 8.37

ஆகவே, $\vec{a}$ –ன் மீது $\vec{b}$ –ன் வீழல் = $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

இதே போன்று $\vec{b}$ –ன் மீது $\vec{a}$ –ன் வீழல் = $\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|}$.

8.8.3 திசையிலிப் பெருக்கத்தின் பண்புகள் (Properties of Scalar Product)

(i) இரண்டு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம் பரிமாற்றுப் பண்புடையது.

வழக்கமான வரையறையின்படி $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta = \vec{b}\cdot\vec{a}$

அதாவது, ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

(ii) திசையிலிப் பெருக்கத்தின் தன்மை

$0 \le \theta \le \pi$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\theta = 0$ எனில் $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$ [வெக்டர்கள் இணை மற்றும் ஒரே திசையில் இருக்கும்போது $\theta = 0$] .

$\theta = \pi$ எனில் $\vec{a}\cdot\vec{b} = -ab$ [வெக்டர்கள் இணை மற்றும் எதிர்திசையில் இருக்கும்போது $\theta = \pi$.].

$\theta = \frac{\pi}{2}$ எனில் $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ [இரண்டு வெக்டர்களும் செங்குத்து எனில் $\theta = \frac{\pi}{2}$].

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ எனில், $\cos\theta$ மிகை. எனவே, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ –யும் மிகை.

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ எனில் $\cos\theta$ குறை. எனவே $\vec{a}\cdot\vec{b}$ –யும் குறை.

அதாவது, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ என்பது $\begin{cases} >0\ ,\ 0 \le \theta < \pi/2 \\ =0\ ,\ \theta = \pi/2 \\ <0\ ,\ \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases}$

(iii) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow\ |\vec{a}| = 0$ அல்லது $|\vec{b}| = 0$ அல்லது $\theta = \frac{\pi}{2}$

(iv) பூஜ்ஜியமற்ற இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ –க்கு $\vec{b}$ செங்குத்து

(v) $\vec{a}\cdot\vec{a}$ –ஐ பல்வேறு வகைகளில் எழுதுதல்

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = (\vec{a})^2 = \vec{a}^2 = a^2$.

இவ்வாறாக எழுதுவது கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் காணும்போது மிகவும் பயன்படும்.

(vi) $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ மற்றும் $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$ (ஏன்?).

(vii) ஏதேனும் இரு திசையிலிகள் λ, μ க்கு

$$\lambda\vec{a}\cdot\mu\vec{b} = \lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\mu\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\mu\vec{b}).$$

(viii) திசையிலிப் பெருக்கம் கூட்டலுடன் பங்கீட்டு விதிக்கு உட்படும்.

அதாவது, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்களுக்கு

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (இடது பங்கீடு)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (வலது பங்கீடு)

இதன் விளைவாக

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$ மற்றும் $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c}$ ஆகும்.

இதனை எத்தனை வெக்டர்களுக்கு வேண்டுமானாலும் விரிவுபடுத்தலாம்.

(ix) வெக்டர் முற்றொருமைகள்

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

நிரூபணம்

பண்பு (iii)-ன் படி

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

இதே போன்று மற்றவற்றையும் நிறுவலாம்.

(x) திசையிலிப் பெருக்கத்தைக் காணச் செயல் விதி

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ என்க.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \\ &= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k}) \\ &\quad + a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j}) + a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k}) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .\end{aligned}$$

ஆகவே, இரண்டு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் என்பது அவைகளின் ஒத்திசைவான ஆயத்தொலைகளின் குணகங்களைப் பெருக்கிக் கூட்டுவதற்குச் சமம் ஆகும். ■

(xi) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில் $\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right]$.

(xii) ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் எனில் $\vec{a}+\vec{b}$ என்பது அம்முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமாக அமையும். எனவே, முக்கோணத்தின் பக்கப் பண்பின்படி

$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$. ■

(xiii) ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b}$ –க்கு $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$.

இதில் ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் பூஜ்ஜிய வெக்டர் எனில், இவை சமம் ஆகும். எனவே இரண்டு வெக்டர்களும் பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டர்கள் என்க.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

அதாவது, $$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$$

$$\Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 8.11

கீழ்க்காண்பவைகளுக்கு $\vec{a}\cdot\vec{b}$ காண்க.

(i) $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{k}$

(ii) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை (2, 3, – 1) மற்றும் (– 1, 2, 3) என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கும் வெக்டர்கள்

தீர்வு

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 2\hat{k}) = (1)(3) + (-1)(0) + (5)(-2) = 3 - 10 = -7$.

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2)(-1) + (3)(2) + (-1)(3) = -2 + 6 - 3 = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ எனில், $(\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(2\vec{a} - \vec{b})$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}\cdot\vec{a}+5\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b} = 2(1+1+4)+5(3+2-2)-3(9+4+1) = -15 .$$

எடுத்துக்காட்டு 8.13

$\vec{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{b} = -\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் $\vec{c} = 3\hat{i}+\hat{j}$ மேலும் $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ஆனது $\vec{c}$ –க்கு செங்குத்து எனில் λ–ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{c} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{c}+\lambda\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow\ (6+2)+\lambda(-3+2) = 0$$

$$\Rightarrow\ \lambda = 8.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.14

$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை செங்குத்து என நிறுவுக.

தீர்வு

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$$

$$\Rightarrow\ |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

ஆகவே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை செங்குத்து ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{r}$ –க்கும் $\vec{r} = (\vec{r}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ என்க.

$$\vec{r}\cdot\hat{i} = \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{i} = x$$

$$\vec{r}\cdot\hat{j} = \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{j} = y$$

$$\vec{r}\cdot\hat{k} = \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{k} = z$$

$$(\vec{r}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = \vec{r}$$

எனவே $\vec{r} = (\vec{r}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}$.

எடுத்துக்காட்டு 8.16

$5\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a} = 5\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 6\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$ என்க.

இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க. எனவே,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{30-24-4}{\sqrt{50}\,\sqrt{101}} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}\right].$$

எடுத்துக்காட்டு 8.17

A, B, C, D ஆகியவை (4, – 3, 0), (7, – 5, – 1), (– 2, 1, 3), (0, 2, 5) என்ற புள்ளிகள் எனில், $\overrightarrow{CD}$ மீது $\overrightarrow{AB}$ –ன் வீழலைக் காண்க.

தீர்வு

O–வை ஆதிப்புள்ளியாகக் கொள்க.

ஆகவே, $\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$; $\overrightarrow{OB} = 7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$; $\overrightarrow{OC} = -2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$; $\overrightarrow{OD} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{CD}$ ன் மீது $\overrightarrow{AB}$ ன் வீழல் $= \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{6-2-2}{3} = \dfrac{2}{3}$.

எடுத்துக்காட்டு 8.18

$\vec{a}, \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகிய மூன்று அலகு வெக்டர்கள் $\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ –க்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\begin{aligned}
\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} &= 0\\
\Rightarrow \quad |(\vec{a}+\vec{c})| &= |\sqrt{3}\,\vec{b}|\\
\Rightarrow \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta &= 3|\vec{b}|^2\\
\Rightarrow \quad 1 + 1 + (2)(1)(1)\cos\theta &= 3(1)\\
\Rightarrow \quad \cos\theta &= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 8.19

(4, – 3, 1), (2, – 4, 5) மற்றும் (1, – 1, 0) என்ற ஒரே கோட்டில் அமையாப் புள்ளிகள் ஓர் செங்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு

எளிதாக இப்புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனத் தெரியும். இப்போது ஏதேனும் ஒரு கோணம் $\dfrac{\pi}{2}$ என நிறுவ வேண்டும். எனவே இம்முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் காணவேண்டும்.

O –வை ஆதிப்புள்ளி என்க. *A,B,C* ஆகியவற்றை (4, – 3, 1), (2, – 4, 5) மற்றும் (1, – 1, 0) எனக் கொள்க.

$\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}, \quad \overrightarrow{OC} = \hat{i} - \hat{j}$

இப்பொழுது $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

இதுபோலவே $\quad \overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} \; ; \; \overrightarrow{CA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

ஆகவே ஒரு கோணம் $\frac{\pi}{2}$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

குறிப்பு 8.5

மூன்று பக்கங்கள் வெக்டர் வடிவில் கொடுக்கப்பட்டால், இவை முக்கோணத்தின் பக்கங்களாக இருக்க,

(i) இந்த வெக்டர்களின் கூடுதல் $\vec{0}$ அல்லது ஏதேனும் இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதல் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு சமம் என நிறுவ வேண்டும்.

(ii) செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு கோணம் $\frac{\pi}{2}$ எனக் காட்ட ஏதேனும் இரு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட புள்ளிப் பெருக்கம் 0 என நிரூபிக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 8.3

(1) கீழ்க்காணும் $\vec{a}, \vec{b}$ க்கு $\vec{a}.\vec{b}$ –ஐக் காண்க.

(i) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$ (ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

(2) கீழ்க்காணும் வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை செங்குத்து எனில், λ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ (ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$

(3) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 15$ மற்றும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 75\sqrt{2}$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்டக் கோணத்தைக் காண்க.

(4) கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(i) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ (ii) $\hat{i} - \hat{j}$ மற்றும் $\hat{j} - \hat{k}$

(5) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ எனும் மூன்று வெக்டர்களுக்கு $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ மற்றும் $|\vec{c}| = 7$ எனில் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(6) $\vec{a} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}),\ \vec{b} = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}),\ \vec{c} = (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிரூபிக்க.

(7) $-\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}, 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $-\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

(8) $|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 6,\ |\vec{c}| = 7$ மற்றும் $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ எனில், $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ –ஐக் காண்க.

(9) (2, – 1, 3), (4, 3, 1) மற்றும் (3, 1, 2) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோடமைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(10) $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை அலகு வெக்டர்கள் மற்றும் θ என்பது இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்,

(i) $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\vec{a} - \vec{b}|$ (ii) $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\vec{a} + \vec{b}|$ (iii) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{a} + \vec{b}|}$ எனக்காட்டுக.

(11) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4,\ |\vec{c}| = 5$ மற்றும் ஒவ்வொரு வெக்டரும் மற்ற இரு வெக்டர்களின் கூடுதலுக்குச் செங்குத்தாகவும் அமைந்தால் $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ –ஐக் காண்க.

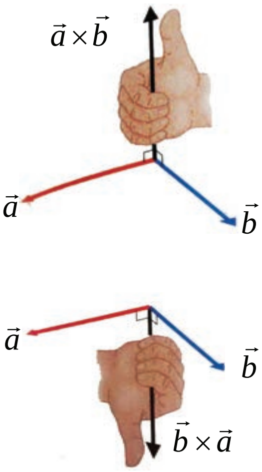
(12) $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ –ன் மீது $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ –ன் வீழலைக் காண்க.

(13) $\vec{b}=2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ –ன் மீது $\vec{a}=\lambda\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ –ன் வீழல் 4 அலகுகள் எனில், λ–ன் மதிப்பைக் காண்க.

(14) $\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$ மற்றும் $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ என அமைந்தால் $4\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+3\vec{c}\cdot\vec{a}$ –ஐக் காண்க.

8.8.4 வெக்டர் பெருக்கம் (Vector product)

இரு வெக்டர்களுக்கு இடையேயான வெக்டர் பெருக்கத்தை வரையறுக்க வலக்கை முறை மற்றும் இடக்கை முறை ஆகியவற்றின் கருத்தாக்கம் தேவைப்படுகிறது.

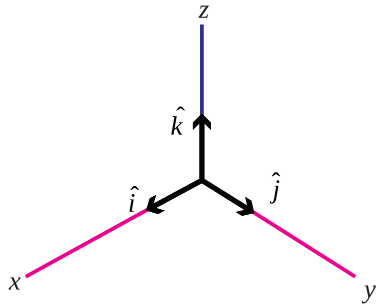


படம் 8.38

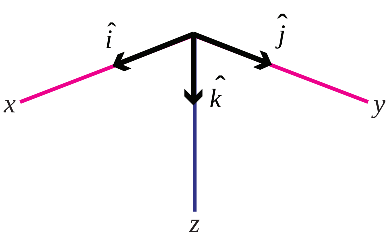
வலது கையின் விரல்களை $\vec{a}$ உடன் ஒன்றுமாறு வைத்து விரல்களை $\vec{a}$ –லிருந்து $\vec{b}$ இருக்கும் திசை நோக்கி மடக்கினால் (கோணம் 180° க்கு குறைவாக இருக்க வேண்டும்), நமது கட்டை விரலானது $\vec{a}\times\vec{b}$ –ன் திசையை குறிக்கும். இப்போது வலக்கை முறையின்படி $\vec{b}\times\vec{a}$ –ன் திசையானது $\vec{a}\times\vec{b}$ –க்கு எதிர் திசையில் இருக்கும் (படம் 8.38–ஐ பார்க்க).

மேலும் நாம் $\vec{a}$ –ஐ $\vec{b}$ –ன் திசையை நோக்கி θ கோணம் $(<\pi)$ திருப்பினால் $\vec{a}\times\vec{b}$ –ன் திசையானது வலக்கை முறையில் அமைந்த திருகு நகரும் திசையிலேயே அமையும் எனக் காணலாம்.

ஒரு கார்டீசியன் ஆயத்தொலை முறை ஒரு வலக்கை முறையை அமைக்க வேண்டுமாயின் அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் அலகு வெக்டர்களான $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ என்பவை படம் 8.39–ல் உள்ளது போன்று அமைய வேண்டும். $\hat{k}$ –ன் திசையானது படம் 8.40–ல் உள்ளவாறு அமைந்தால் அதனை இடக்கை முறை என்கிறோம்.



வலக்கை
படம் 8.39



இடக்கை
படம் 8.40


வல திருகு
படம் 8.41

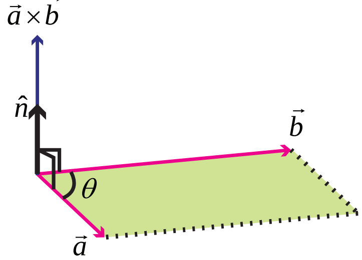

இட திருகு
படம் 8.42

வரையறை 8.17

இரு பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் **வெக்டர் பெருக்கம்** $\vec{a}\times\vec{b}$ எனக் குறிப்பிட்டு

$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு θ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம், $0\le\theta\le\pi$.

இங்கு $\vec{a},\vec{b},\hat{n}$ ஆகியவை வலக்கை முறையை அமைக்கும்.



படம் 8.43

$\vec{a}\times\vec{b}$ ஆனது $|\vec{a}|\ |\vec{b}|\sin\theta$ என்கிற எண்ணளவையும் $\hat{n}$ என்ற திசையையும் கொண்ட ஒரு வெக்டர் ஆகும்.

இதுமட்டுமல்லாமல் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ உள்ள தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

குறிப்பு 8.6

(i) $\hat{n}$ –ன் திசையைக் கணிப்பதற்கு $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –ன் வரிசை மிகவும் முக்கியமானதாகும்.

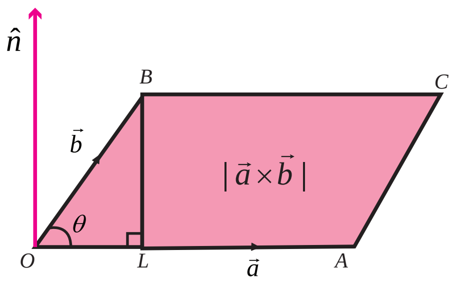
(ii) வெக்டர் பெருக்கலின் போது கிடைப்பது ஒரு வெக்டர். எனவே இதனை வெக்டர் பெருக்கம் என்று அழைக்கிறோம். இந்த பெருக்கத்தை குறிப்பிட '×' என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகின்றோம். எனவே இதனை **குறுக்குப் பெருக்கம்** என்றும் அழைக்கலாம்.

வெக்டர் பெருக்கத்தின் வடிவக் கணித விளக்கம்

(Geometrical interpretation of vector product)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ஆகியவை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்டு $OACB$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$\angle AOB=\theta$ என்க.



படம் 8.44

படத்திலிருந்து

$$\sin\theta = \frac{BL}{OB}$$

$$BL = (OB)\sin\theta = |\vec{b}|\sin\theta$$

இப்பொழுது $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}|(BL)$

= (அடிப்பக்கம்) (உயரம்) = இணைகரம் $OACB$–ன் பரப்பளவு

ஆகவே, $\vec{a}\times\vec{b}$ என்ற வெக்டரின் எண்ணளவு $\vec{a},\vec{b}$ ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பிற்குச் சமம் ஆகும். மேலும் இதன் திசை $\vec{n}$ ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ யை உள்ளடக்கிய தளத்திற்குச் செங்குத்து மட்டுமல்லாமல் $\vec{a},\vec{b},\vec{n}$ ஆகியவை ஒரு வலக்கை முறையை அமைக்கும்.

எனவே, $|\vec{a}\times\vec{b}|$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு ஆகும்.

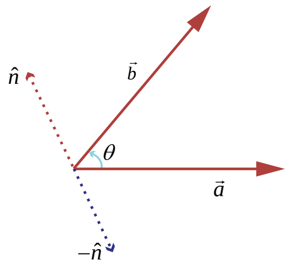
இதிலிருந்து இணைகரம் $OACB$–ன் பரப்பளவில் பாதியானது, முக்கோணம் OAC–ன் பரப்பு என வருவிக்கலாம்.

வருவித்தல்

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு $=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

8.8.5. பண்புகள்

(i) வெக்டர் பெருக்கம் பரிமாற்ற விதிக்கு உட்படாது. வரையறையிலிருந்து,



படம் 8.45

$$\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta(-\hat{n}) \quad \left(\vec{b},\vec{a},-\vec{n}\ \begin{cases}\text{ஆகியவை வலக்கை}\\ \text{முறையை அமைப்பதால்}\end{cases}\right)$$

$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

$$= -(\vec{a}\times\vec{b})$$

எனவே வெக்டர் பெருக்கம் பரிமாற்றத்தக்கதல்ல.

(ii) இரு வெக்டர்கள் இணையாக அல்லது ஒரே கோட்டில் அமைந்தால் $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ (எவ்வாறு?)

ஆனால் $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\ \vec{a}=\vec{0}$ அல்லது $\vec{b}=\vec{0}$ அல்லது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவை இணையாகும்.

(iii) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய ஏதேனும் இரு பூஜ்ஜியமற்ற வெக்டர்களுக்கு

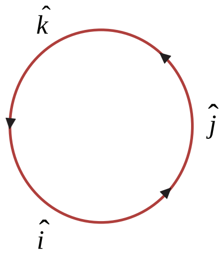
$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ இணையானவை. இதிலிருந்து $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ என வருவிக்கலாம்.

(iv) $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ ஆகியவற்றின் வரையறையிலிருந்து, (இவை வலக்கை முறையை அமைக்கும்)

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ;\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ;\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}\ ;\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}\ ;\ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$$ (எவ்வாறு?)



படம் 8.46

(v) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ எனில், $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\hat{n}$

(vi) ஏதேனும் இரு திசையிலிகள் m மற்றும் n-க்கு

$$m\vec{a}\times n\vec{b} = mn(\vec{a}\times\vec{b})=(mn\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(mn\vec{b})=n\vec{a}\times m\vec{b}$$

(vii) வெக்டர் பெருக்கம் கூட்டலின் மீது பங்கீட்டு விதியை நிறைவு செய்யும்.

அதாவது,
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

இதனை கழித்தல் மட்டுமல்லாமல் இரண்டுக்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

அதாவது,
$$\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d}).$$

(viii) குறுக்குப் பெருக்கத்தைக் காணச் செயல் விதி

$$\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$$
$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})\\ &\quad +a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}\end{aligned}$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

(ix) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta=\sin^{-1}\left[\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$.

(இதன் நிரூபணமானது பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளது)

குறிப்பு 8.7

இதில் θ எப்பொழுதும் குறுங்கோணமாகவே அமையும். எனவே வெக்டர் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காணும்போது எப்பொழுதும் குறுங்கோணம் மட்டுமே நமக்கு கிடைக்கும். ஆகவே கோணங்களைக் கணக்கிடப் புள்ளிப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்துவதே சிறந்தது. இதன்மூலம் θ அமையும் இடத்தை அறிய முடியும்.

(x) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு செங்குத்தாக உள்ள அலகு வெக்டர்கள் $\pm\hat{n} = \pm\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ (எவ்வாறு?)

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு செங்குத்தாக λ எண்ணளவுள்ள வெக்டர்கள் $\pm\lambda\hat{n} = \pm\lambda\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$.

எடுத்துக்காட்டு 8.20

$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ எனில் $|\vec{a}\times\vec{b}|$–ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-0) - \hat{j}(3-0) + \hat{k}(3-4) = 4\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}\,.$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.21

$\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ எனில், கீழ்க்காண்பவைகளை சரிபார்க்க.

(i) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து

(ii) $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து

தீர்வு

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & -7 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12+14) - \hat{j}(9+42) + \hat{k}(-6-24) = 2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}$$

(i) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (-3\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k})\cdot(2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}) = -6 - 204 + 210 = 0$

எனவே, $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

(ii) $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}) = 12 - 102 + 90 = 0$

எனவே, $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து.

எடுத்துக்காட்டு 8.22

$\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ எனில், இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தான 6 எண்ணளவு உள்ள வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2-3) - \hat{j}(-8+6) + \hat{k}(4-2) = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்குசெங்குத்தாக உள்ள அலகு வெக்டர்கள் $\pm\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \pm\left[\dfrac{-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{3}\right]$

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு செங்குத்தாக எண்ணளவு 6 உடைய வெக்டர்கள் $\pm\, 2(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$.

எடுத்துக்காட்டு 8.23

$\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ஆகியவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் மற்றும் கொசைன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}) = 8-2+6=12$$

$$|\vec{a}| = |2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}| = \sqrt{14} \quad ; \quad |\vec{b}| = |4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}| = \sqrt{24}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2+6)-\hat{j}(4-12)+\hat{k}(-4-4) = 8\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |8\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}| = 8\sqrt{3}$$

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.24

$\vec{a} = 3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ஆகியவற்றை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1+4)-\hat{j}(3-4)+\hat{k}(-3-1) = 5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}| = \sqrt{42}$$

இணைகரத்தின் பரப்பளவு $\sqrt{42}$ ச.அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.25

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற ஏதேனும் இரு வெக்டர்களுக்கு, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ மற்றும் $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ என நாம் அறிவோம்.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\sin^2\theta + |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\cos^2\theta$$

$$= |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = |\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2$$

எடுத்துக்காட்டு 8.26

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாக கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு

நாம் இப்பொழுது முக்கோணத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களைக் காண்போம்.

$$\overrightarrow{AB} = -\hat{i}+\hat{j}; \quad \overrightarrow{AC} = -\hat{i}+\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$$

முக்கோணம் ABC –ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

குறிப்பு 8.8

$\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC}$ –க்கு பதிலாக எந்த இரண்டு பக்கங்களைக் கொண்டும் தீர்வு காணலாம்.

பயிற்சி 8.4

(1) $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ எனில், $\vec{a}\times\vec{b}$ –ன் எண் மதிப்பைக் காண்க.

(2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{0}$ எனக் காட்டுக.

(3) $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் $\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ என்ற வெக்டர்கள் உள்ள தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் எண்ணளவு $10\sqrt{3}$ உடைய அலகு வெக்டர்களைக் காண்க.

(4) $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ எனில், $\vec{a}+\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a}-\vec{b}$ ஆகியவற்றிற்கு தனித்தனியாக செங்குத்தாக உள்ள வெக்டர்களைக் காண்க.

(5) $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ மற்றும் $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ஆகியவற்றை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(6) $A(3, -1, 2)$, $B(1, -1, -3)$ மற்றும் $C(4, -3, 1)$ ஆகியவற்றை உச்சிப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(7) முக்கோணம் ABC–ன் உச்சிப்புள்ளிகள் A, B, C–ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ எனில், முக்கோணம் ABC–ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$ என நிரூபித்து, இதிலிருந்து A, B, C ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டிலமைய நிபந்தனையைக் காண்க.

(8) எந்தவொரு வெக்டர் $\vec{a}$ –க்கும் $|\vec{a}\times\hat{i}|^2+|\vec{a}\times\hat{j}|^2+|\vec{a}\times\hat{k}|^2 = 2|\vec{a}|^2$ என நிரூபிக்க.

(9) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற அலகு வெக்டர்களுக்கு $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கும் $\vec{c}$ –க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனில், $\vec{a} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b}\times\vec{c})$ என நிரூபிக்க.

(10) $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ மற்றும் $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை வெக்டர் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

பயிற்சி 8.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

YCVDA

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}$ என்பது

(1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{CA}$ (3) $\vec{0}$ (4) $-\overrightarrow{AD}$

(2) $\vec{a}+2\vec{b}$ மற்றும் $3\vec{a}+m\vec{b}$ ஆகியவை இணை எனில், m-ன் மதிப்பு

(1) 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 6 (4) $\frac{1}{6}$

(3) $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ மற்றும் $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களின் கூடுதலுக்கு இணையாக உள்ள அலகு வெக்டர்

(1) $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (2) $\frac{2\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{5}}$

(4) ஒரு வெக்டர் $\overrightarrow{OP}$ ஆனது x மற்றும் y அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் முறையே 60° மற்றும் 45°-ஐ ஏற்படுத்துகின்றது. $\overrightarrow{OP}$ ஆனது z-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம்

(1) 45° (2) 60° (3) 90° (4) 30°

(5) $\overrightarrow{BA}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் B-ன் நிலை வெக்டர் $\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ எனில் A-ன் நிலைவெக்டர்

(1) $4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ (2) $4\hat{i}+5\hat{j}$ (3) $4\hat{i}$ (4) $-4\hat{i}$

(6) ஒரு வெக்டர் ஆய அச்சுகளுடன் சமகோணத்தை ஏற்படுத்தினால் அக்கோணம்

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (2) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (3) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (4) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(7) $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ ஆகிய வெக்டர்கள்

(1) ஒன்றுக்கொன்று இணையானது (2) அலகு வெக்டர்கள்

(3) செங்குத்தான வெக்டர்கள் (4) ஒருதள வெக்டர்கள்

(8) $ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனில், $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ என்பது

(1) $2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ (2) $4\overrightarrow{AC}$ (3) $4\overrightarrow{BD}$ (4) $\vec{0}$

(9) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரம் $ABCD$-ன் ஒரு மூலைவிட்டம் $\vec{a}+\vec{b}$ எனில் மற்றொரு மூலைவிட்டம் $\overrightarrow{BD}$ ஆனது

(1) $\vec{a}-\vec{b}$ (2) $\vec{b}-\vec{a}$ (3) $\vec{a}+\vec{b}$ (4) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(10) A, B-ன் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b}$ எனில், கீழ்க்காணும் நிலை வெக்டர்களில் எந்த நிலை வெக்டரின் புள்ளி AB என்ற கோட்டின் மீது அமையும்.

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{2}$ (3) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ (4) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$

(11) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ஆகியவை ஒரே கோட்டிலமைந்த மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் எனில் கீழ்க்காண்பவைகளுள் எது சரியானது?

(1) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ (2) $2\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ (3) $\vec{b} = \vec{c} + \vec{a}$ (4) $4\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

(12) P என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = \dfrac{9\vec{a} + 7\vec{b}}{16}$ என்க. P ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ஐ நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டைப் பிரிக்கும் விகிதம்

(1) 7 : 9 உட்புறமாக (2) 9 : 7 உட்புறமாக

(3) 9 : 7 வெளிப்புறமாக (4) 7 : 9 வெளிப்புறமாக

(13) $\lambda\hat{i} + 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}$ என்பது ஓரலகு வெக்டர் எனில், λ–ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{2}$

(14) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ மற்றும் $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$. மையக்கோட்டு சந்தியின் நிலை வெக்டர் $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ எனில், மூன்றாவது முனைப் புள்ளியின் நிலை வெக்டர்

(1) $-2\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$ (2) $-2\hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}$ (3) $2\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}$ (4) $-2\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$

(15) $|\vec{a} + \vec{b}| = 60, |\vec{a} - \vec{b}| = 40$ மற்றும் $|\vec{b}| = 46$, எனில், $|\vec{a}|$–ன் மதிப்பு

(1) 42 (2) 12 (3) 22 (4) 32

(16) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ – ஒரே எண்ணளவைக் கொண்டுள்ளது. இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $60°$ மற்றும் இவற்றின் திசையிலிப் பெருக்கம் $\frac{1}{2}$ எனில், $|\vec{a}|$ –ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 3 (3) 7 (4) 1

(17) $\vec{a} = (\sin\theta)\hat{i} + (\cos\theta)\hat{j}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + 2\hat{k}$ ஆகியவை செங்குத்தாக அமைந்து $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ எனில், θ–ன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

(18) $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 5$ மற்றும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 60°$ எனில், $|\vec{a} \times \vec{b}|$–ன் மதிப்பு

(1) 15 (2) 35 (3) 45 (4) 25

(19) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $120°$. $|\vec{a}| = 1, |b| = 2$ எனில், $[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})]^2$ –ன் மதிப்பு

(1) 225 (2) 275 (3) 325 (4) 300

(20) $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றின் எண்ணளவு 2, மேலும் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $60°$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{a} + \vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) 30° (2) 60° (3) 45° (4) 90°

(21) $\hat{i} + 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$ –ன் மீது $5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ –ன் வீழலும் $5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ –ன் மீது $\hat{i} + 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$ வீழலும் சமம் எனில், λ–ன் மதிப்பு

(1) ± 4 (2) ± 3 (3) ± 5 (4) ±1

(22) $\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ என்ற வெக்டரின் ஆரம்ப மற்றும் இறுதிப் புள்ளிகள் (1, 2, 4) மற்றும் (2, – 3λ – 3) எனில், λ–ன் மதிப்பு

(1) $\frac{7}{3}$ (2) $-\frac{7}{3}$ (3) $-\frac{5}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

(23) $10\hat{i}+3\hat{i}, 12\hat{i}-5\hat{j}$ மற்றும் $a\hat{i}+11\hat{j}$ ஆகிய நிலை வெக்டர்களின் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைந்தால் 'a'–ன் மதிப்பு

(1) 6 (2) 3 (3) 5 (4) 8

(24) $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=2\hat{i}+x\hat{j}+\hat{k},\ \vec{c}=\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ மற்றும் $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=70$ எனில் x –ன் மதிப்பு

(1) 5 (2) 7 (3) 26 (4) 10

(25) $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}, |\vec{b}|=5$ மேலும் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{6}$ எனில், இவ்விரு வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) $\frac{7}{4}$ (2) $\frac{15}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{17}{4}$

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- எண்ணளவைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்படும் கணியம் திசையிலி ஆகும்.
- எண்ணளவு மற்றும் திசை ஆகியவற்றைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்படும் கணியம் வெக்டர் ஆகும்.
- எந்தவொரு புள்ளியையும் ஒரு வெக்டரின் ஆதிப்புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானால் அது கட்டிலா வெக்டர் ஆகும். ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை மட்டுமே ஆதிப்புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானால் அது அறுதியிட்ட வெக்டர் ஆகும்.
- ஒரே தளத்தின் மீது அமைந்த அல்லது அந்தத் தளத்திற்கு இணையாக அமைந்த இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரே தள அமை வெக்டர்கள் ஆகும்.
- இருவெக்டர்களின் எண்ணளவுகள் சமமாகவும் அவை ஒரே திசையினையும் பெற்றிருந்தால் அவற்றைச் சமவெக்டர்கள் எனலாம்.
- ஒரு வெக்டரின் எண்மதிப்பு 0 எனில் அது பூஜ்ஜிய வெக்டர் ஆகும்.
- ஒரு வெக்டரின் எண்ணளவு 1 எனில் அது அலகு வெக்டர் ஆகும்.
- $\vec{a}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வெக்டர், m ஒரு திசையிலியாயின் $m\vec{a}$ என்பது வெக்டர் $\vec{a}$ உடன் திசையிலி m–ன் திசையிலிப் பெருக்கம் ஆகும்.
- $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் இணை எனில், $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. இங்கு λ ஓர் திசையிலி.
- $\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை முக்கோணத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட பக்கங்கள் எனில், $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$
- வெக்டர்களின் கூட்டல், சேர்ப்புப் பண்புக்கு உட்படும்.
- எந்த ஒரு வெக்டர் $\vec{a}$ –க்கும் $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
- எந்த ஒரு வெக்டர் $\vec{a}$ –க்கும் $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

- வெக்டர் கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்புடையது.
- இரு வெக்டர்கள் அவற்றின் எண்ணாலும் திசையாலும் ஒரு முக்கோணத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பக்கங்களின் மூலமாக குறிப்பிடப்பட்டால், அவற்றின் கூடுதல் அம்முக்கோணத்தின் எதிர்வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட மூன்றாவது பக்கமாகும். இதுவே வெக்டர் கூட்டலின் முக்கோண விதி.
- $OABC$ என்ற இணைகரத்தில் $\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாயின், அதன் மூலைவிட்டம் $\overrightarrow{OC}$ இவற்றின் கூடுதலைக் குறிக்கும். இதுவே வெக்டர் கூட்டலின் இணைகர விதியாகும்.
- α, β, γ ஆகியவை திசைக் கோணங்கள் எனில், $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ஆகியவை திசைக் கொசைன்களாகும்.
- $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என்ற வெக்டரின் திசை விகிதங்கள் x, y, z ஆகும்.
- $\vec{a}, \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவை ஒரே தளத்தில் அமையாத வெக்டர்கள் எனில், வெளியில் உள்ள எந்த ஒரு வெக்டரையும் $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ எனத் தனித்த வழியில் எழுதலாம்.

ஒரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

மற்றும் $\vec{r}$ –ன் திசைக் கோணங்கள் α, β, γ எனில்,

(i) $\vec{r}$ –ன் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 1.

(ii) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

(iii) $\vec{r}$ –ன் திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) l, m, n ஆகியவை ஒரு வெக்டரின் திசைக் கொசைன்கள் எனில், $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

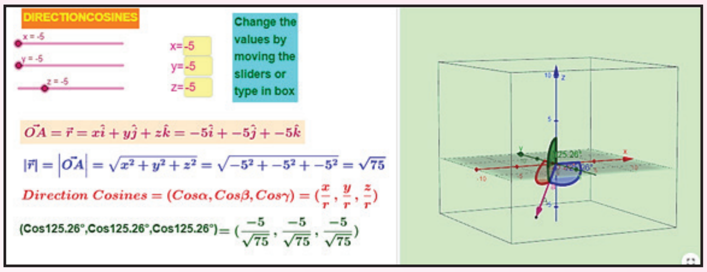
(v) எந்த ஒரு அலகு வெக்டரையும் $\cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$ என எழுதலாம்.

- $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கம் $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ஆகும்.
- $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கம் $\vec{a}\times\vec{b}$ எனக் குறிப்பிட்டு $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ஆகும். இங்கு θ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ –க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $0 \le \theta \le \pi$. இங்கு $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ ஆகியவை வலக்கை முறையை அமைக்கும்.

இணையச் செயல்பாடு 8 (a)

வெக்டர் இயற்கணிதம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

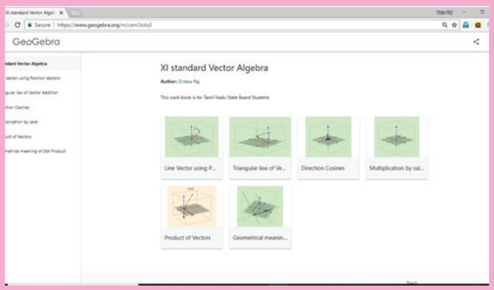


படி – 1

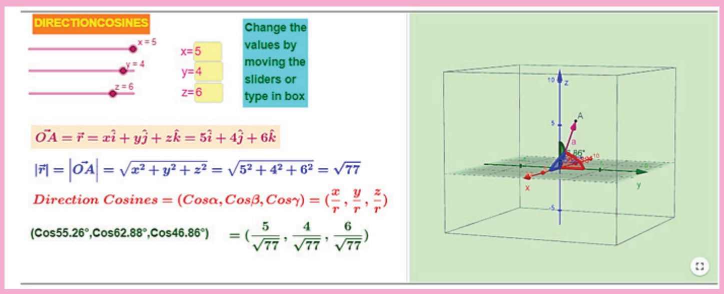
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "XI standard Vector Algebra" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி –2

"Direction Cosines" பயிற்சித்தாளைத்தேர்வுசெய்துநழுவல்களை நகர்த்தியதும் 3-D உருவமைப்பு வலப்பக்கம் காணப்படும். 3-D உருவமைப்பைச்சுழற்றசுட்டியைவலப்பக்கம்சொடுக்கிபல்வேறுஅமைப்புகளைக்காணலாம். நழுவல்களை நகர்த்தி, அல்லது x, y மற்றும்z மதிப்புகளைப் பதிந்து திசையெண்ணை மாற்றலாம்



படி – 1



படி –2

உரலி :

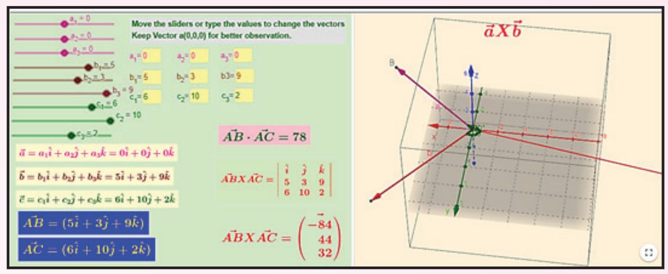
https://ggbm.at/cem3sdq5

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

இணையச் செயல்பாடு 8 (b)

வெக்டர் இயற்கணிதம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

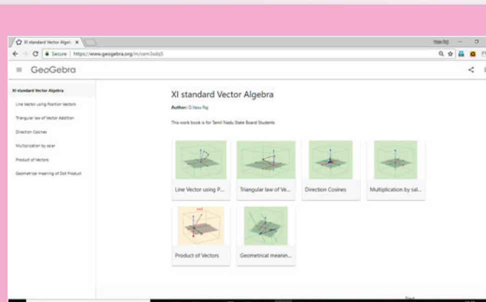


படி – 1

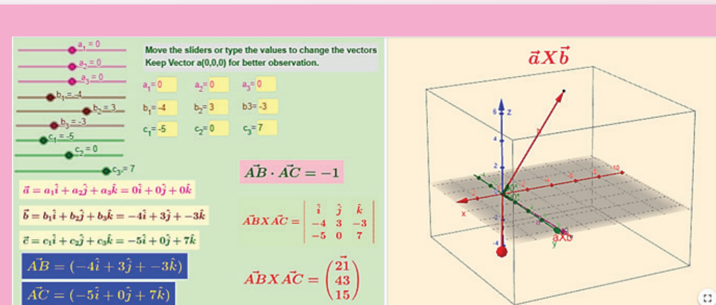
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra–வின் "XI standard Vector Algebra" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பயிற்சித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Product of Vectors" பயிற்சித்தாளைத்தேர்வுசெய்துநழுவல்களை நகர்த்தியதும் 3–D உருவமைப்பு வலப்பக்கம் காணப்படும். 3–D உருவமைப்பைச்சுழற்றசுட்டியைவலப்பக்கம்சொடுக்கிபல்வேறு அமைப்புகளைக்காணலாம். நழுவல்களை நகர்த்தி, அல்லது x, y மற்றும்z மதிப்புகளைப் பதிந்து திசையெண்ணை மாற்றலாம் (நன்றாகப் புரிந்து கொள்ள $a1$, $a2$, மற்றும் $a3$ மதிப்புகளை மாற்ற வேண்டாம்) ABXAC அவற்றின் கூறுகள் நேர்குத்தாகக் கொடுக்கபட்டுள்ளது.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/cem3sdq5

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

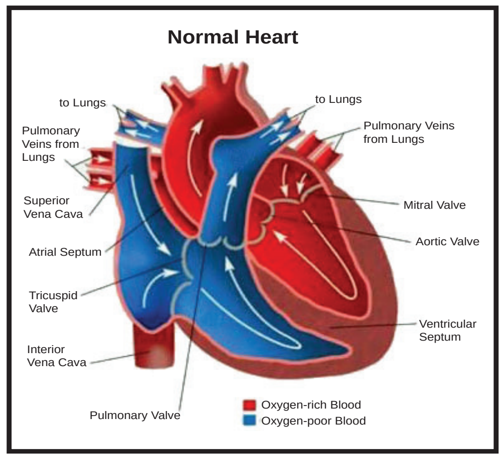
அத்தியாயம் 9

வகை நுண்கணிதம்
எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை
DIFFERENTIAL CALCULUS LIMITS AND CONTINUITY

ZG0UJ

"மனிதர்கள் மறையலாம்,
அவர்களின் செயல்கள் மறைவதில்லை"
- அகஸ்டின் – லூயிஸ் கோசி

9.1 அறிமுகம் (Introduction)



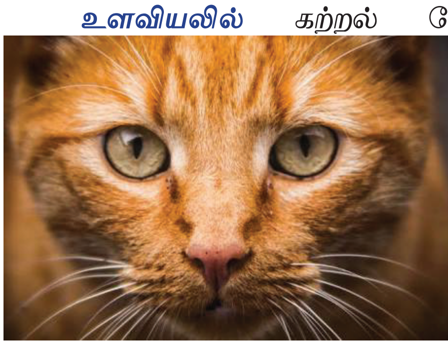
நுண்கணிதம் என்பது மாற்றத்தின் வீதங்கள் தொடர்பானது. அறிவியலின் அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் மாறுதலின் வீதங்கள் உள்ளன. **கணிதவியலில் அறிஞர்கள்** ஒரு வளைவரையின் மீது அமையும் நேர்க்கோட்டில் ஏற்படும் மாறுவீதத்தைக் கணக்கிடுவதில் ஆர்வமாக இருக்கின்றனர். அதே சமயம் **இயற்பியல் அறிஞர்கள்** ஒரு நகரும் பொருளின் இடப்பெயர்ச்சியின் மாறுவீதம், மற்றும் அதன் திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவதில் ஆர்வம் காட்டுகின்றனர். **வேதியியலாளர்கள்** ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மூலகங்கள் சேர்ந்து ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பொருட்களைக் கொடுக்கும் வேதி வினையின் வீதத்தைக் கணக்கிட விரும்புகின்றனர்.

ஓர் **உயிரியலாளர்,** விலங்குகள் அல்லது தாவரங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையில் குறிப்பிட்ட சில விலங்குகள் அல்லது தாவரங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களை ஆய்வு செய்ய விரும்புகின்றார். மேலும் இரத்த நாளங்கள் அல்லது தமனிகளில் உள்ள இரத்த ஓட்டத்தின் வீதத்தைக் கணக்கிடவும், இரத்த ஓட்டம் எந்த இரத்த நாளங்கள்/தமனிகளில் குறைவாக/அதிகமாக உள்ளது என்பதைக் காணவும் விழைகின்றார்.

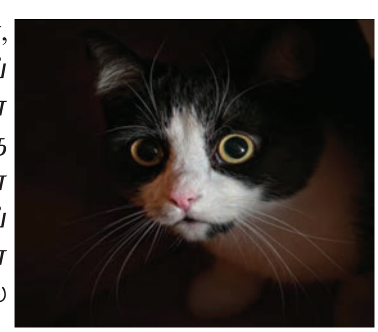
பொருளியலாளர்கள், இறுதிநிலைத் தேவை, இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை இலாபம் ஆகியவற்றை, தேவை, வருவாய் இலாபச் சார்புகளின் மாறுவீதம் மூலம் காண்கின்றனர்.

புவியியலாளர்கள், உருகிய பாறைக் குழம்புகள் சுற்றியுள்ள பாறைகளுடன் வெப்பத்தைக் கடத்தி குளிர்வதற்கான வீதத்தைக் கணக்கிடுவதில் ஆர்வம் காட்டுகின்றனர். ஒரு **பொறியாளர்**, மேல்நிலைத் தொட்டிக்குத் தண்ணீர் ஏற்றும் வீதம் மற்றும் தொட்டியிலிருந்து தண்ணீர் வெளியேறும் வீதத்தைக் கணக்கிட விரும்புகின்றார். நகர்ப்புறப் **புவியியலாளர்**, ஒரு நகரம் விரிவுபடுத்தப்படும்போது ஏற்படும் மக்கள்தொகை அடர்த்தி வீதத்தினைக் கணக்கிட விரும்புகின்றார்.

வானிலையாளர்கள் உயரத்திற்குத் தகுந்தாற்போல் வளிமண்டல அழுத்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதலின் மாறுவீதத்தைக் கணக்கிடுவதில் ஆர்வம் காட்டுகின்றனர்.



உளவியலில் கற்றல் கோட்பாட்டில் ஆர்வமுள்ளவர்கள், கற்றல் வளைவரையைப் பற்றிப் படிக்கின்றனர். இது ஒருவரின் பயிற்சிக் காலத்தைப் பொறுத்த கற்றல் திறன் செயல்பாட்டின் வளைவரையாகும். காலத்தைப் பொறுத்துத் திறன் மேம்பாட்டின் வீதத்தின் அடிப்படையில் ஆர்வத்தைக் காணலாம்.



நாம் ஓர் இருட்டு அறையில் நுழையும்போது சுற்றியுள்ள பொருட்களைக் காண அதிக ஒளி உள் செல்ல ஏதுவாக நமது கண்பாவை விரிவடைந்து பொருட்களைத் தெளிவாகக் காண உதவுகிறது. அதற்கு நேர்மாறாக நாம் அதிக வெளிச்சமுள்ள ஓர் அறையில் நுழையும்போது அதிக வெளிச்சத்தினால் (ஒளியினால்) நமது பார்வைத் திறன் பாதிக்காத வகையில் நமது கண்பாவை சுருங்கி உள்ளே செல்லும் ஒளியின் அளவைக் குறைக்கின்றது. ஆராய்ச்சியாளர்கள், இது போன்ற செயல்பாடுகளின் வழிமுறையைக் கணித எல்லைகள் மூலம் காண்கின்றனர்.

இயற்பியலில் திசைவேகம், அடர்த்தி, மின்னோட்டம், மின்னாற்றல் மற்றும் வெப்பநிலையின் மாறுநிலை; வேதியியலில் எதிர்வினையின் வீதம் மற்றும் ஒருங்குத் தன்மை; உயிரியியலில் வளர்ச்சி வீதம் மற்றும் இரத்த ஓட்டத்தின் வேகம்; பொருளியியலில் இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் இறுதிநிலை இலாபம்; புவியியலில் வெப்ப ஓட்டத்தின் வீதம்; உளவியலில் செயல்திறன் ஆகியவை வகைக்கெழு என்ற ஒரே ஒரு கணிதக் (கோட்பாட்டின்) கருத்தாக்கத்தின் அடிப்படையில் அமைகிறது.

மேற்கூறியவை கணிதத்தின் திறன் அதன் உள்நுட்பமான தன்மையின் அடிப்படையில் உள்ளதற்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும். ஒரே ஒரு நுட்பமானக் கணிதக் கருத்தாக்கம் (வகைக்கெழு) அறிவியலின் பல்வேறு பிரிவுகளில் பலவிதமான விளக்கங்களைத் தருகின்றது. நாம் கணிதக் கருத்துருக்களை உருவாக்கும்போது அவற்றின் முடிவுகள் அறிவியலின் பல்வேறு பிரிவுகளில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அறிவியலின் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உருவாகும் தனிப்பட்ட கருத்துருக்களைக் காட்டிலும் இது ஆற்றலுடையது.

பழங்காலத்தின் மிகச் சிறந்த படைப்புகளில் ஒன்று யூக்ளிடின் வடிவியல் ஆகும். இந்த முக்கியமான படைப்புக்கு இணையாக எந்தக் கண்டுபிடிப்பும் இரண்டாயிரம் ஆண்டுகளாக நுண்கணிதம் கண்டுபிடிக்கும்வரை நிகழவில்லை.

நுண்கணிதமானது இங்கிலாந்தில் **சர் ஐசக் நியூட்டன்** (1642-1727) மற்றும் ஜெர்மனியில் **காட்ஃபிரைட் வில்ஹெல்ம் லிபினிட்ஸ்** (1646-1716) என்பவர்களால் 17-ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் உருவாக்கப்பட்டது.

நியூட்டனின் கணித ஆர்வத்திற்குக் காரணம், அவருடைய காலத்தில் அவருக்குக் கிடைத்த மிகச் சிறந்த **Euclid's Elements** மற்றும் **Descartio La Geometric** ஆகிய இரு புத்தகங்களாகும். அவர், அவருக்கு முன்னர் வாழ்ந்த **கலிலியோ** மற்றும் **பெர்மாட்** போன்ற ஆராய்ச்சியாளர்கள் பற்றியும் அவர்களின் கண்டுபிடிப்புகள் பற்றியும் அறிந்திருந்தார்.

1664–ன் முடிவில் நியூட்டன் அவருடைய காலத்தில் கணித அறிவை முழுமையாகப் பெற்று அதன்பின் மேலும் வளர்த்துக் கொண்டார். 1665-ல் தொடர்ந்து மாறக்கூடிய தூரங்கள், வெப்பநிலைகள் போன்றவற்றின் மாறுகின்ற வீதம் பற்றி அவருடைய ஆராய்ச்சியை ஆரம்பித்தார். இந்த ஆராய்ச்சியின் விளைவுதான் இன்று நாம் காணும் வகைநுண்கணிதம் ஆகும். இன்று கணிதவியல் படிப்பவர்கள் அனைவரும் ஐசக் நியூட்டனின் கண்டுபிடிப்புகளில் பயணிக்கின்றனர்.

லிபினிட்ஸின் கணித ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகள் அவர் 1682-ல் ஆரம்பித்த **'Acta Eruditorum'** என்ற சஞ்சிகையில் பிரசுரமானது. இந்த சஞ்சிகையில் அவருடைய நுண்கணிதம் பற்றிய கட்டுரைகள் இடம்பெற்றன. இதுவே யார் முதலில் நுண்கணிதம் கண்டுபிடித்தது என நியூட்டனுடன் ஏற்பட்ட முரண்பாட்டிற்குக் காரணமாக இருந்தது. நுண்கணிதத்தின் முக்கிய முடிவுகளையும், தற்போது பயன்படுத்தும் வகைக்கெழு குறியீட்டையும் முதன்முதலாகப் பயன்படுத்தியவர் லிபினிட்ஸ் ஆவார்.

கோஷி
(1789 – 1857)

பாரிசில் 1789-ம் ஆண்டு பிறந்து 19-ஆம் நூற்றாண்டின் முதல் அரைப்பகுதியின் முதன்மையான கணிதமேதையாக அறியப்பட்டவர் **அகஸ்டின் – லூயிஸ் கோஷி** (1789-1857) ஆவார். கோஷி நுண்கணிதத்திற்குப் பல பங்களிப்புகள் செய்திருக்கின்றார். 1829இல் இவருடைய **'Lecons Le calcul differential'** என்ற புத்தகத்தில் முதன்முதலாக எல்லைகள் பற்றிய தெளிவான வரையறையைத் தந்துள்ளார். மேலும் வகைக்கெழுவை வித்தியாசங்களின் விகிதத்தின் எல்லையாக, அதாவது,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ -ன் எல்லை எனத் தந்துள்ளார்.

எல்லைகளின் துல்லியமான $(\in - \delta)$ வரையறை, தொடர்ச்சி மற்றும் வகைக்கெழு பற்றிய துல்லியமான கருத்துருக்களைக் **கார்ல் வொயர்ஸ்ட்ராஸ்** (1815-1897) என்ற ஜெர்மன் கணிதமேதை தந்துள்ளார்.

நுண்கணிதம் என்றால் என்ன?

அளவுகளின் அல்லது கணியங்களின் மாறுவீத கணிதம் நுண்கணிதம் ஆகும். மேலும் அன்றாட வாழ்வில் ஆராய்ச்சியாளர்கள், பொறியாளர்கள், பொருளியல் வல்லுனர்கள் பயன்படுத்தும் தொடுகோடுகள், சாய்வுகள், பரப்பு, கன அளவு, வில்லின் நீளம், நடுக்கோட்டுச் சந்தி, விளைவுத் தன்மை போன்ற கருத்துகளின் கணிதமாகவும் நுண்கணிதம் உள்ளது.

நுண்கணிதத்திற்கு முந்தைய புகுமுக நுண்கணிதத்தில், திசைவேகம் முடுக்கம், தொடுகோடுகள், சாய்வுகள் போன்றவைகள் வரையறுக்கப்பட்டிருப்பினும் நுண்கணிதத்திற்கும் புகுமுக நுண்கணிதத்திற்கும் அடிப்படையில் சில வேறுபாடுகள் உள்ளன. நுண்கணிதத்திற்கு முந்தைய புகுமுக நுண்கணிதம் நகராத தன்மையை உரைப்பதாகவும் நுண்கணிதம் நகரும் தன்மையை உரைப்பதாகவும் உள்ளன என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

- மாறாத திசைவேகத்தில் பயணிக்கும் ஒரு பொருளினைப் பகுப்பாய்வு செய்ய புகுமுக நுண்கணிதம் போதுமானது. ஆனால் முடுக்கிவிடப்பட்ட ஒரு பொருளின் திசைவேகத்தைப் பகுப்பாய்வு செய்ய நுண்கணிதம் தேவைப்படுகின்றது.
- ஒரு நேர்க்கோட்டின் சாய்வைப் பகுப்பாய்வு செய்ய புகுமுக நுண்கணிதம் போதுமானது. ஆனால் ஒரு வளைவரையின் சாய்வினைப் பகுப்பாய்வு செய்ய நுண்கணிதம் தேவைப்படுகின்றது.
- ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோட்டைப் பகுப்பாய்வு செய்யப் புகுமுக நுண்கணிதம் போதுமானது. ஆனால் ஏதேனுமொரு வளைவரையின் தொடுகோட்டைப் பகுப்பாய்வு செய்ய நுண்கணிதம் தேவைப்படுகின்றது.
- ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பைப் பகுப்பாய்வு செய்யப் புகுமுக நுண்கணிதம் போதுமானது. ஒரு வளைவரை ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண நுண்கணிதம் தேவைப்படுகின்றது.

மேற்கண்ட ஒவ்வொரு சூழலிலும் உள்ள பொதுவான உத்தி எல்லைச் செயல்முறை மூலம் புகுமுக நுண்கணிதத்தினை நுண்கணிதமாக மறுசீரமைக்கும் செயலாகும். நுண்கணிதம் என்றால் என்ன? என்ற கேள்விக்கு விடையளிக்கும் விதமாக நுண்கணிதத்தை மூன்று நிலைகள் உடைய "எல்லை இயந்திரம்" எனலாம். இதில் முதல் நிலையானது நேர்க்கோட்டின் சாய்வு, செவ்வகத்தின் பரப்பு காணுதல் போன்ற புகுமுக நுண்கணிதம் ஆகும். இரண்டாம் நிலை எல்லைச் செயல்பாடு ஆகும். மூன்றாம் நிலை புதிய பரிமாணமான வகையிடுதல் மற்றும் தொகையிடுதல் ஆகும்.

புகுமுக நுண்கணிதம்	$\Rightarrow$	**எல்லைச் செயல்பாடு**	$\Rightarrow$	**நுண்கணிதம்**

நுண்கணிதத்தை ஒரு செயல்முறையாக அல்லாமல் புதிய சூத்திரங்களின் தொகுப்பாக படிக்க முயற்சிப்பவர்கள், புரிதல், தன்னம்பிக்கை மற்றும் திருப்தியை இழப்பார்கள் என எச்சரிக்கப்படுகின்றனர்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- வடிவியல் செயல்முறையாக எல்லை/தொடர்ச்சிக் கருத்துருக்களைக் காணல்
- எல்லை/தொடர்ச்சிக் கருத்துருகளை அன்றாட வாழ்க்கை செயல்களோடு தொடர்புபடுத்துதல்
- எல்லை/தொடர்ச்சியை நுண்கணிதத்தின் இதயம் மற்றும் உயிர்த் துடிப்பாக உணர்வது
- விஞ்ஞான உலகத்தில் நடைபெறும் ஒவ்வொரு மாற்றத்தினை அளவிடுதலுக்கும் மற்றும் கணிதமயமாக்கலுக்கும் எல்லை/தொடர்ச்சியினை ஒரு கருவியாகப் பயன்படுத்துதல்
- எல்லை/தொடர்ச்சிக் கருத்துருவை வாழ்க்கைச் சூழல் மூலம் திடப்படுத்துதல்

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

9.2 எல்லைகள் (Limits)

9.2.1 எல்லைகளைக் காணுதல் (The calculation of limits)

நவீனக் கணிதத்திலும், நுண்கணிதத்திலும் முக்கிய பங்காற்றும் எல்லை பற்றிய கருத்துகளை இந்த அத்தியாயத்தில் விரிவாக காண்போம். கணிதவியல் 3000 ஆண்டுகளுக்கு முற்பட்டது என்றாலும், 19–ம் நூற்றாண்டில் பிரெஞ்சுக் கணித மேதை அகஸ்டின் -லூயிஸ் கோஷி மற்றும் கார்ல் வொயர்ஸ்ட்ராஸ் ஆகியோர் குறிப்பிடும்வரை எல்லை பற்றி அறிந்திருக்கவில்லை. இப்பகுதியில் எல்லையின் வரையறை மற்றும் அவற்றை எவ்வாறு காண்பது என்பதைப் பற்றியும் பார்ப்போம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $y = f(x) = x^2 + 3$ என வரையறுப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$x = 2$ என்ற புள்ளியில் இந்தச் சார்பின் தன்மை பற்றி ஆராய்வோம். இருவிதமான x-ன் மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துவோம் : ஒன்று 2-ன் இடப்பக்கமிருந்து (2-க்கு குறைவானது) 2-ஐ நோக்கி நெருங்கும் மதிப்புகள் ; மற்றொன்று 2-ன் வலப்பக்கமிருந்து 2-ஐ நோக்கி நெருங்கும் மதிப்புகள் (2க்கு அதிகமான).

இடப்பக்கமிருந்து 2-ஐ நெருங்கும் x வலப்பக்கமிருந்து 2-ஐ நெருங்கும் x

x	1.7	1.9	1.95	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.05	2.1	2.3
$f(x)$	5.89	6.61	6.8025	6.9601	6.99601	6.99960001	7	7.0040001	7.004001	7.0401	7.2025	7.41	8.29

அட்டவணையிலிருந்து x-ன் மதிப்பு 2-ஐ நோக்கி நெருங்கும்போது $f(x) = x^2 + 3$-ன் மதிப்பு 7-ஐ நெருங்குவதைக் காணலாம். இதில் வியக்கத்தக்கது ஒன்றுமில்லை, ஏனெனில் $x = 2$-ல் $f(x)$-ன் மதிப்பை கணக்கிடும்போது $f(2) = 2^2 + 3 = 7$ எனக்கிடைப்பதைக் காணலாம்.

இந்த எல்லை மதிப்பை யூகிப்பதற்கு $x = 2$-ல் $f(x)$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட வேண்டிய அவசியமில்லை.

x-ன் மதிப்பு 2-க்கு இடமிருந்தும் (2-ஐ விட குறைவான மதிப்புகள்) வலமிருந்தும் (2-ஐ விட அதிக மதிப்புகள்) 2-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் மதிப்பு 7-ஐ நெருங்குகிறது. அதாவது x-ன் மதிப்பு 2-க்கு மிக நெருக்கமாக அமையும்போது $f(x)$-ன் மதிப்பு 7-க்கு மிக அருகில் அமைகிறது. இந்தச் சூழலை சுருக்கமாக பின்வருமாறு கூறலாம்.

x-ன் மதிப்பு 2-ஐ இடப்பக்கமாக நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் இடது எல்லை 7–ஆகவும், அதேபோல் x-ன் மதிப்பு 2-ஐ வலப்பக்கமாக நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் வலது எல்லை 7–ஆகவும் உள்ளது என்று பொருள். இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$x \to 2^-$ எனில், $f(x) \to 7$ மற்றும் $x \to 2^+$ எனில் $f(x) \to 7$

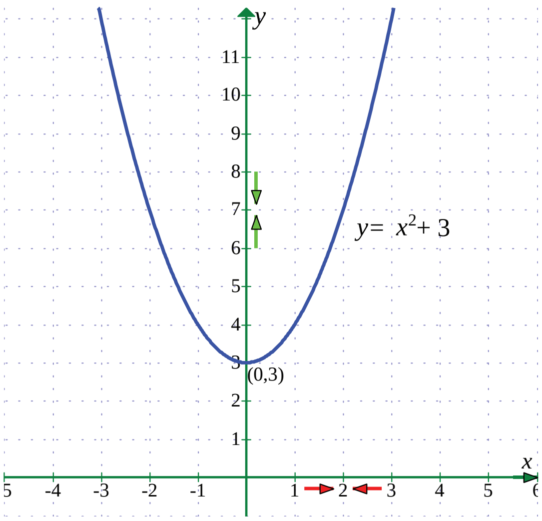
அல்லது

அதாவது, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 7$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 7.$

அதாவது $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 7 = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x).$

இதன் பொதுவான மதிப்பினை $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$ என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து எல்லை மதிப்பு ஒரு அறுதியிட்ட மெய்யெண் என அறியலாம். இங்கு அறுதியிட்ட என்பது $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ஆகியவை வெவ்வேறானவை அல்ல என்பதையும், $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ என்பது தனித்த ஒரு மெய்யெண் என்பதையும் குறிக்கும்.



படம் 9.1

$x \to 2$ எனும்போது $f(x) = x^2 + 3$-ன் தன்மையை, படம் 9.1 வடிவியல் முறையில் விளக்குகிறது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.2

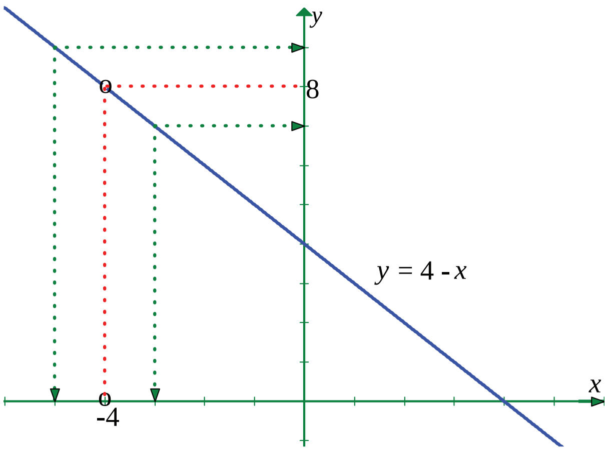
அடுத்ததாக $f(x) = \dfrac{16-x^2}{4+x}$ என்ற விகிதமுறு சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இந்தச் சார்பின் மதிப்பகம் $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ ஆகும். $f(-4)$ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனினும், x-–ன் மதிப்பு -4ஐ நெருங்கும்போது உள்ள $f(x)$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட இயலும், ஏனெனில், $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{16-x^2}{4+x}\right)$ என்ற குறியீட்டின்படி நாம் x–க்கு -4 அருகில் உள்ள மதிப்புகளை மட்டுமே கருத்தில் கொள்கிறோம். $x = -4$ அல்ல என்பதை இது குறிக்கின்றது. பின்வரும் அட்டவணை x-ன் மதிப்பு -4ஐ நெருங்கும்போது உள்ள $f(x)$–ன் மதிப்புகளைத் தருகிறது,

$(x < -4)$ $(x \to -4^-)$	$f(x)$	$(x > -4)$ $(x \to -4^+)$	$f(x)$
-4.1	8.1	-3.9	7.9
-4.01	8.01	-3.99	7.99
-4.001	8.001	-3.999	7.999

$x \neq -4$ எனில், $f(x)$–ஐ நீக்கல் முறையில் சுருக்கலாம் :

$$f(x) = \frac{16-x^2}{4+x} = \frac{(4+x)(4-x)}{(4+x)} = 4 - x.$$



படம் 9.2

படம் 9.2லிருந்து, $f(x)$–ன் வரைபடமானது $x = -4$ என்ற புள்ளியைத் தவிர மற்ற இடங்களில் $y = 4 - x$ என்ற கோட்டின் வரைபடம் அமைந்துள்ளதைக் காணலாம். $x = -4$ என்ற புள்ளி சிறு துவாரமாகத் (puncture) தொடர்ச்சியற்றுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. x–ன் மதிப்பு -4–ஐ நெருங்க, நெருங்க y–ன் மதிப்பு 8–ஐ நெருங்கி, நெருங்கி செல்வதைக் காணலாம். இவை படத்தில் x-அச்சின் மீதுள்ள அம்புக்குறிகளையும், y-அச்சின் மீதுள்ள அம்புக்குறிகளையும் குறிக்கின்றன.

இங்கு,

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = 8 = \lim_{x\to -4^+} f(x), \text{ எனவே}$$

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{16-x^2}{4+x} = 8.$$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.2-ல் $x = -4$ இல் $f(x)$ வரையறுக்கப்படவில்லை எனினும் x-ன் மதிப்பு -4ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் மதிப்பு ஒரு எல்லையை நெருங்குவதைக் காணலாம். $x = -4$-ல் சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்பு இருந்தாலும், இல்லாமல் இருந்தாலும் அது x-ன் மதிப்பு -4-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பு இருத்தலைப் பாதிக்கவில்லை என்பதை உணரலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.3

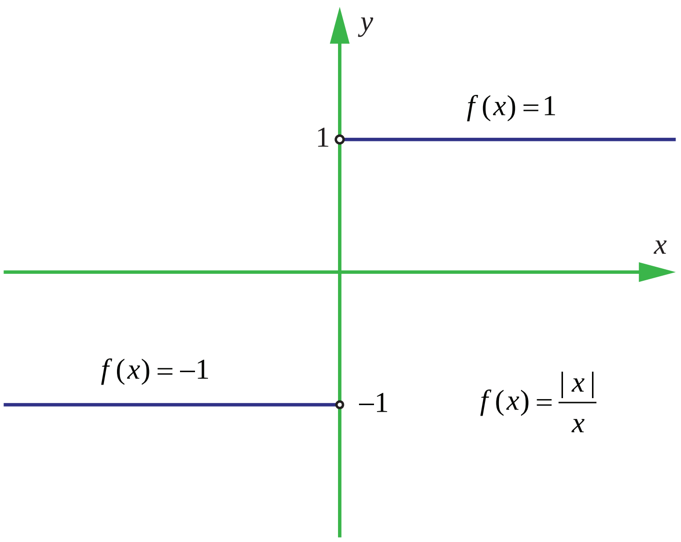
தற்போது நாம் விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் 9.1 மற்றும் 9.2-லிருந்து வேறுபட்ட ஒரு சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ என்க.

$x = 0$ என்ற மதிப்பு $f(x)$ என்ற சார்பின் சார்பகமான $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-ல் இல்லை. வரைபடத்தைக் கவனிக்கவும். வரைபடத்தில் இருந்து x-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு,

$\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = +1$ எனவும் x-ன்

குறைமதிப்புகளுக்கு, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$



படம் 9.3

எனவும் உள்ளதைக் காணலாம்.

x-ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு எவ்வளவு மிக அருகில் இருந்தாலும் (பூஜ்ஜியத்தின் அண்மையில்), x-ன் மிகை மற்றும் குறை மதிப்புகளுக்கு முறையே $f(x) = 1$ மற்றும் $f(x) = -1$ எனுமாறு இருக்கும் என அறியலாம்.

அதாவது, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +1$.

இதிலிருந்து $x = 0$-ல் எல்லை மதிப்பு இல்லை என அறியலாம். ஆனால், x-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு எல்லை மதிப்புகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டாக, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x|}{x} = 1$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$.

இதுபோல், $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{-x}{x} = -1$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to -3^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

அதாவது $x_0 \neq 0$ என உள்ள எல்லா மெய்யெண்களுக்கும்,

$x_0 < 0$ எனில், $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1 = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{|x|}{x}$ மற்றும்

$x_0 > 0$ எனில் $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{|x|}{x} = 1 = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{|x|}{x}$

இப்போது 9.1 முதல் 9.3 வரையிலான விளக்க எடுத்துக்காட்டுகளின் வேறுபாடுகளைக் காண்போம். விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.1–ல் $f(x) = x^2 + 3$ என்ற சார்பு $x = 2$–ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது 2 என்ற எண் $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ என்ற சார்பகத்தில் உள்ளது. விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.2–ல் $x = -4$ என்ற புள்ளியில் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை. முதலில் கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில் x–ன் மதிப்பு 2–ஐ நெருங்க நெருங்க $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ கிடைக்கக் கூடியதாக அதாவது $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ கிடைக்கப்பெற்று அவை சமமாகவும் ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணாகவும் உள்ளன.

இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டில் $x = -4$–ல் சார்பு வரையறுக்கப்படாவிடினும் x–ன் மதிப்பு -4-ஐ நெருங்க நெருங்க $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ கிடைக்கிறது.

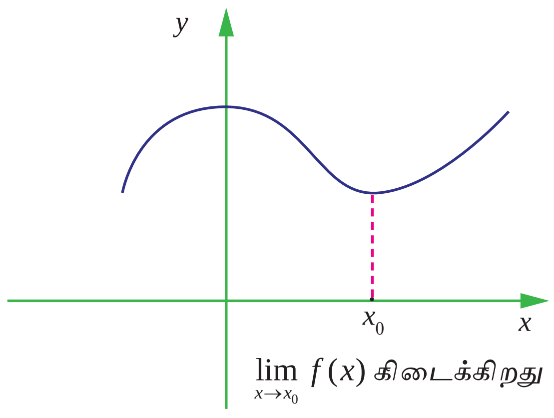
விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.3–ல் $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ –ன் மதிப்பு கிடைக்கப்பெறவில்லை என்பதன் பொருள், x–ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு மிக அருகில் உள்ளபோது ஒரு பக்க எல்லைகளான $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$ –ன் மதிப்புகள் வெவ்வாறாக உள்ளன என்பதாகும்.

மேற்கண்ட உற்று நோக்கல்களிலிருந்து எல்லைக்கான வரையறையை உய்த்தறியும் முறையில் பெறலாம்.

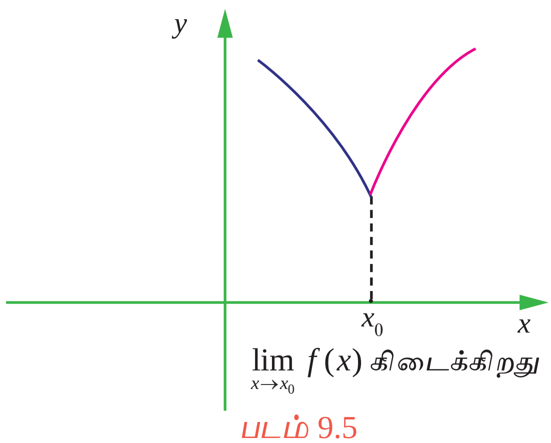
வரையறை 9.1

I என்பது $x_0 \in \mathbb{R}$ என்ற புள்ளியை உள்ளடக்கிய ஒரு திறந்த இடைவெளி என்க. சார்பு $f : I \to \mathbb{R}$. என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. x–ன் மதிப்பு x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை மதிப்பு L (அதாவது குறியீட்டில் $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$) எனக் கூற வேண்டுமானால், $x \neq x_0$ ஆக அமைந்து x-ஆனது தேவையான அளவுக்கு x_0–ஐ இருபுறமுமாக நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் மதிப்பானது தேவையான அளவுக்கு L–க்கு மிக அருகில் அமைய வேண்டும்.

மேற்கூறிய விவரங்களை பின்வரும் வரைபடங்கள் (9.4 மற்றும் 9.5) மூலம் காணலாம்.



படம் 9.4



படம் 9.5

9.2.2 ஒருபுற எல்லைகள் (One sided limits)

வரையறை 9.2

x–ன் மதிப்பு தேவையான அளவு x_0–க்கு அருகிலும் x_0–ஐ விடக் குறைவாகவும் இருக்கும்போது $f(x)$–ன் மதிப்பு l_1க்கு மிக அருகில் இருக்கும் எனில், x–ன் மதிப்பு x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் **இடப்பக்க எல்லை** (x இடப்பக்கமிருந்து x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை) எனக்கூறலாம்.

குறியீட்டில் $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1$ என எழுதலாம்.

இதேபோன்று

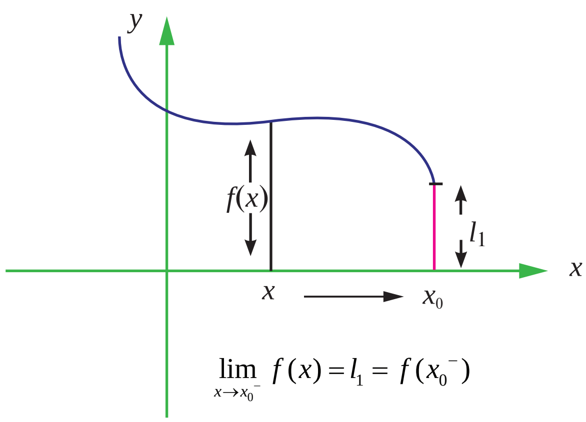
வரையறை 9.3

x–ன் மதிப்பு தேவையான அளவு x_0–க்கு அருகிலும் x_0–ஐ விட அதிகமாகவும் இருக்கும்போது $f(x)$–ன் மதிப்பு l_2–க்கு மிக அருகில் இருக்கும் எனில், x–ன் மதிப்பு x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் **வலப்பக்க எல்லை** (x வலப்பக்கமிருந்து x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை) எனக்கூறலாம்.

குறியீட்டில் $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ என எழுதலாம்.

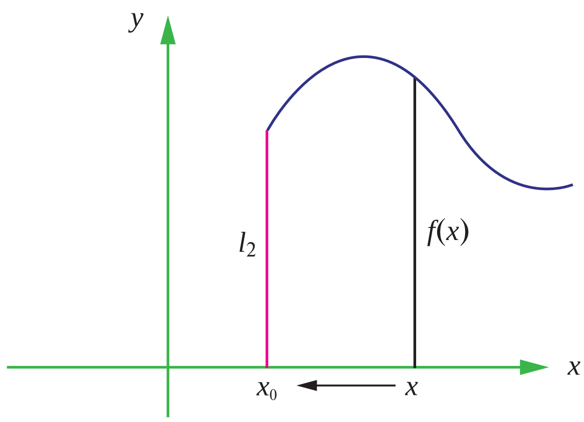
மேலும் $x < x_0$ மற்றும் $x > x_0$ என்பவை முறையே "$x \to x_0^-$" மற்றும் "$x \to x_0^+$" எனக்குறிக்கப்படுகிறது.

இந்த வரையறைகள் 9.6 முதல் 9.9 வரையிலான படங்கள் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளன.



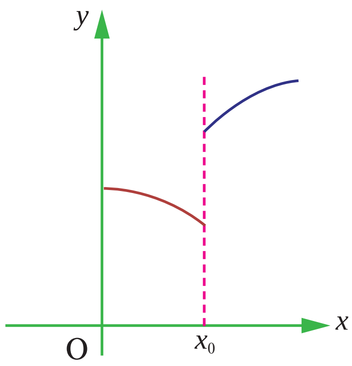
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 = f(x_0^-)$

படம் 9.6



$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 = f(x_0^+)$

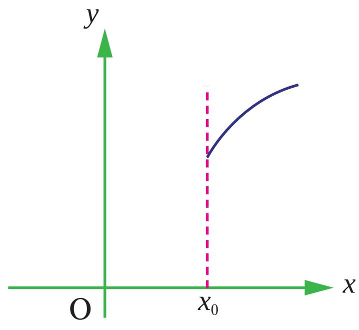
படம் 9.7



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ இல்லை

படம் 9.8

(x_0 - ஐ இடப்பக்கம், வலப்பக்கம் இருந்து நெருங்கும்போது வெவ்வேறான மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன)



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ இல்லை

படம் 9.9

(x_0–க்கு இடப்பக்கம் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை)

மேற்கண்ட விவாதங்களிலிருந்து $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ என கிடைக்க வேண்டுமானால் பின்வரும் முடிவுகள் கிடைக்க வேண்டும்.

(i) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

x-ன் மதிப்பு x_0-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் எல்லை மற்றும் ஒருபுற எல்லைகளின் வரையறைகளிலிருந்து பின்வருவனவற்றை பெறலாம்.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

இவ்வாறாக, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ கிடைக்கப்பெறும் எனில் L ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணாகும். மேற்கண்ட நிபந்தனைகளில் ஏதேனும் ஒன்றை நிறைவு செய்யவில்லை எனில் x-ன் மதிப்பு x_0-ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-க்கு எல்லை மதிப்பு இல்லை எனலாம்.

ஒருபுற எல்லைகள், எல்லைகளைவிட வலுக்குறைந்தவையாகும் என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். ஒருபுற எல்லைகளைக் காண கீழ்க்காண்பவை பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

$h > 0$ எனில்,

$$f(x_0^-) = \lim_{h \to 0} f(a-h), \quad f(x_0^+) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

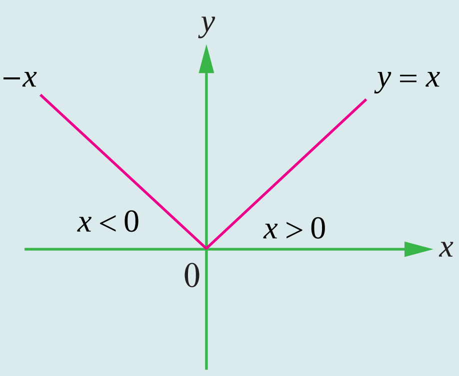
குறிப்பாக $f(x_0^-)$ மற்றும் $f(x_0^+)$ ஆகியவை முறையே இடப்புற மற்றும் வலப்புற எல்லைகளைக் குறிக்கும்போது $f(x_0)$ என்பது $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் சார்பின் மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

$\lim_{x \to 0} |x|$-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

அத்தியாயம் 1-ல் உள்ளபடி $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$



படம் 9.10

$x > 0$ எனில், $|x| = x$, இங்கு x-ன் மதிப்பு 0-ஐ வலப்பக்கமாக நெருங்கும்.

எனவே $\lim_{x \to 0^+} |x| = 0$.

$x < 0$ எனில், $|x| = -x$. இங்கு x-ன் மதிப்பு 0-ஐ இடப்பக்கமாக நெருங்கும். எனவே $\lim_{x \to 0^-} |x| = 0$

இவ்வாறாக, $\lim_{x \to 0^-} |x| = 0 = \lim_{x \to 0^+} |x|$

எனவே, $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

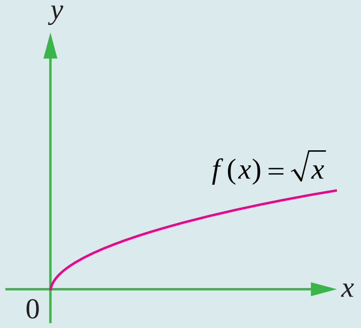
எடுத்துக்காட்டு 9.2

$f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ எனில், $\lim_{x \to 0} f(x)$ கிடைக்கப்பெறுமா எனக்காண்க.

தீர்வு

எல்லை கிடைக்காது.

$x < 0$-க்கு $f(x) = \sqrt{x}$ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, $x \to 0^-$-க்கு, $\sqrt{x}$ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ -ன் மதிப்பு கிடைக்கப்பெறாது. இருப்பினும் $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. ஆகையால் $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$ கிடைக்கப்பெறாது.



படம் 9.11

$\lim\limits_{x\to 0^-} \log x$ கிடைக்கப்பெறுமா?

இந்த வினாவின் விடைக்கு log x-ன் வரைபடத்தைப் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.3

$\lim\limits_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

x-ஐ விட மிகைப்படாத மீப்பெரு முழு எண் மதிப்பைப் பெறும் சார்பு $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ஆகும். படம்1.25-ல் உள்ள இந்த சார்பின் வரைபடம் மூலம் $\lim\limits_{x \to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 2^+} \lfloor x \rfloor = 2$ என்பது தெளிவாகிறது.

மேலும், ஏதேனும் ஒரு இயல் எண் n-க்கு, $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$ ஆகும்.

$f(x) = \lim\limits_{x\to n} \lceil x \rceil$ கிடைக்கப்பெறுமா? இந்த வினாவிற்கான விடைக்கு $\lceil x \rceil$ என்ற சார்பின் படம் 1.26-ஐ பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.4

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$ என்க.

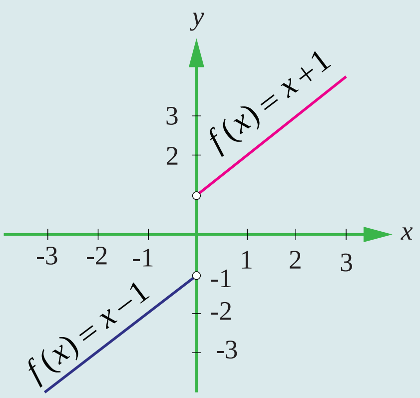
$x \to 0$ எனில், $f(x)$-க்கு எல்லை மதிப்பு உள்ளதா என சோதிக்கவும்.

தீர்வு

இந்தச் சார்பின் (படம் .9.12)

படத்திலிருந்து $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

இம்மதிப்புகள் வெவ்வேறானவையாக உள்ளதால் $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ கிடைக்கப்பெறாது.



படம் 9.12

எடுத்துக்காட்டு 9.5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+5|}{x+5}, & ; \ x \neq -5 \\ 0, & ; \ x = -5 \end{cases}$$ எனில், $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ கிடைக்கப் பெறுமா எனச் சோதிக்க.

தீர்வு

(i) $f(-5^-)$.

$x < -5$ எனில், $|x+5| = -(x+5)$

எனவே, $f(-5^-) = \lim_{x\to -5^-} \frac{-(x+5)}{(x+5)} = -1$

(ii) $f(-5^+)$.

$x > -5$ எனில், $|x+5| = (x+5)$

இதனால் $f(-5^+) = \lim_{x\to -5^+} \frac{(x+5)}{(x+5)} = 1$

$f(-5^-) \neq f(-5^+)$. எனவே எல்லை மதிப்பு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 9.6

$\lim_{x\to 1} \frac{4|x-1|+x-1}{|x-1|}, x \neq 1$ கிடைக்கப்பெறுமா எனச் சோதிக்க.

தீர்வு

$x > 1$ எனில், $|x-1| = x-1$ மற்றும் $f(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{4(x-1)+x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{5(x-1)}{(x-1)} = 5$

$x < 1$ எனில், $|x-1| = -(x-1)$, மற்றும் $f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-4(x-1)+(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x-1)}{(x-1)} = 3$

அதாவது $f(1^-) \neq f(1^+)$. எனவே எல்லை மதிப்பு கிடைக்காது.

பயிற்சி 9.1

1 முதல் 6 வரை உள்ள கணக்குகளுக்குக் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.344820	0.33444	0.33344	0.333222	0.33222	0.332258

(2) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.25641	0.25062	0.250062	0.24993	0.24937	0.24390

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.2911	0.2891	0.2886	0.2886	0.2885	0.28631

(4) $\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

x	– 3.1	– 3.01	– 3.00	– 2.999	– 2.99	– 2.9
$f(x)$	– 0.24845	– 0.24984	– 0.24998	– 0.25001	– 0.25015	– 0.25158

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

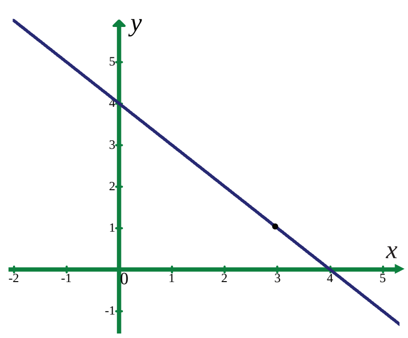
x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999	0.99998	0.99833

(6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.0001	0.01	0.1
$f(x)$	0.04995	0.0049999	0.0004999	–0.0004999	–0.004999	–0.04995

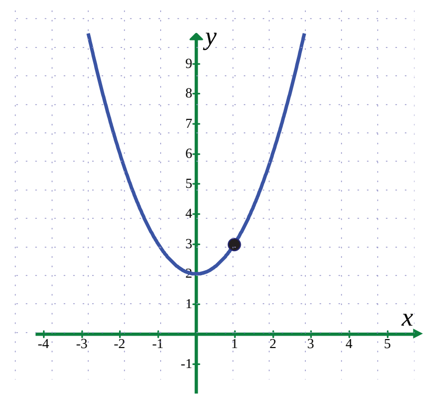
7 முதல் 15 வரை உள்ள கணக்குகளுக்கு வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எல்லை மதிப்பு காண்க (உள்ளது எனில்). எல்லை மதிப்பு இல்லை எனில், காரணத்தை விளக்குக.

(7) $\lim_{x\to 3}(4-x)$



படம் 9.13

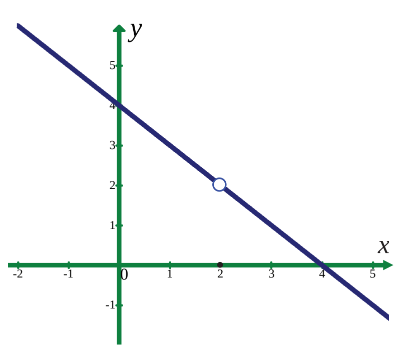
(8) $\lim_{x\to 1}(x^2+2)$.



படம் 9.14

(9) $\lim_{x\to 2} f(x)$.

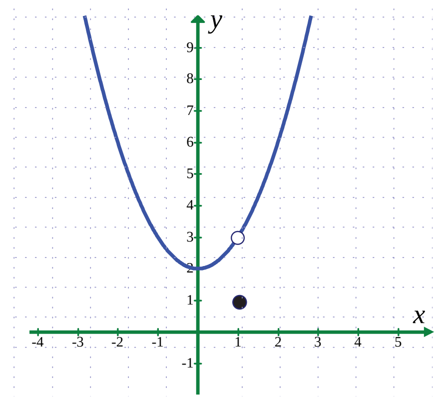
இங்கு $f(x)=\begin{cases}4-x, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$.



படம் 9.15

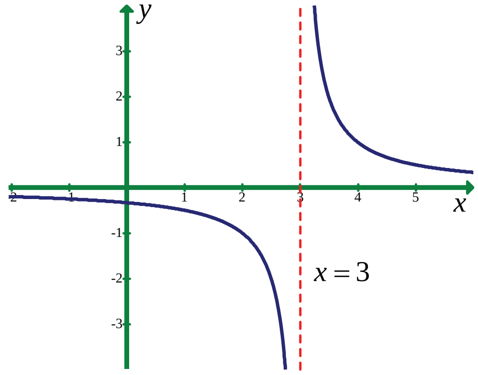
(10) $\lim_{x\to 1} f(x)$.

இங்கு $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.



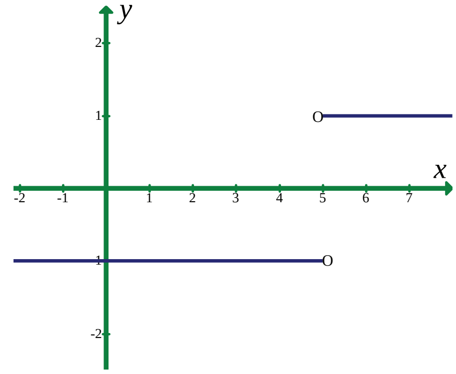
படம் 9.16

(11) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-3}$



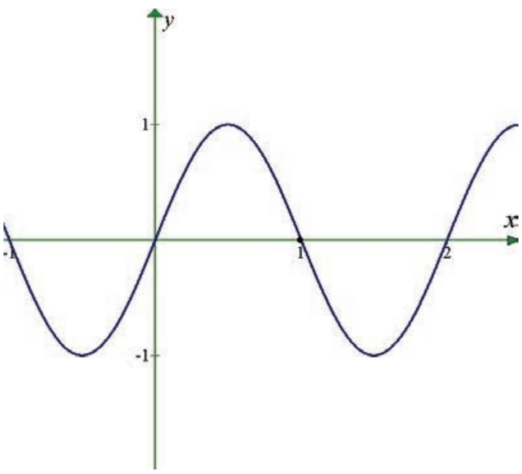
படம் 9.17

(12) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$



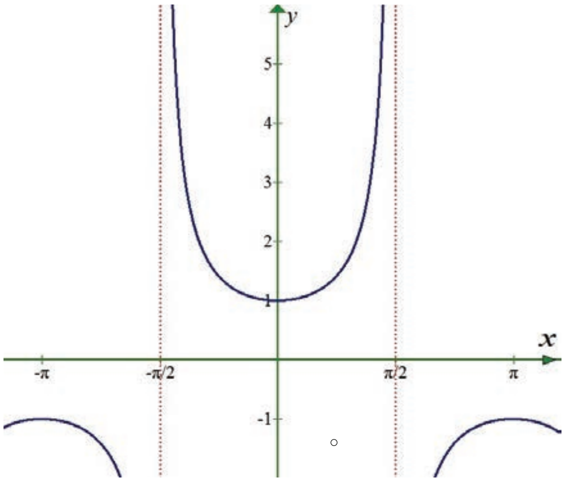
படம் 9.18

(13) $\lim\limits_{x \to 1} \sin \pi x$



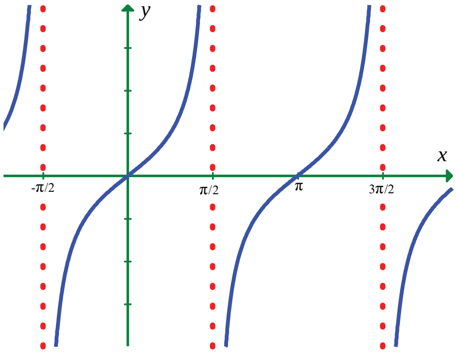
படம் 9.19

(14) $\lim\limits_{x \to 0} \sec x$



படம் 9.20

(15) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$



படம் 9.21

16, 17 கணக்குகளுக்கு f–ன் வரைபடம் வரைந்து x_0–ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ உள்ளது என்பதைக் காண்க.

(16) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 8-2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \ge 4 \end{cases}$.

(17) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$

(18) கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை நிறைவு செய்யும் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

(i) $f(0)$ வரையறுக்கப்படவில்லை

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

(ii) $f(-2) = 0$

$f(2) = 0$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ என்ற எல்லை மதிப்பு இல்லை

(19) $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 25$ என்ற குறியீட்டு முறையின் பொருளைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

(20) $f(2) = 4$ எனில், x–ன் மதிப்பு 2–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை மதிப்பைப் பற்றி ஏதேனும் முடிவு செய்ய இயலுமா?

(21) x–ன் மதிப்பு 2–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$–ன் எல்லை மதிப்பு 4 எனில், $f(2)$–ஐப் பற்றி ஏதேனும் முடிவு செய்ய இயலுமா? விடைக்கான விளக்கம் தருக.

(22) $f(3^-)$ மற்றும் $f(3^+)$ கண்டு, அவற்றின் மூலம் $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ –க்கு மதிப்பு இருக்குமானால் அந்த மதிப்பைக் காண்க.

(23) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1}, & ;\ x \neq 1 \\ 0, & ;\ x = 1 \end{cases}$ எனில் $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ –ன் மதிப்பு உள்ளதா என்பதைச் சரிபார்க்க.

9.2.3 எல்லைகள் மீதான தேற்றங்கள் (Theorems on limits)

முற்பகுதியில் எடுத்துக் கொண்ட முறைசாரா விவாதத்தின் நோக்கம் எல்லை மதிப்பு உள்ளதா, இல்லையா என்பதைப் பற்றி உள்ளார்ந்து உணர்ந்து கொள்ளவே. இருப்பினும், எல்லா நேரங்களிலும் வரைபடம் அல்லது சார்பின் மதிப்புக்கான அட்டவணை மூலம் எல்லை மதிப்பு உள்ளதா? என்பது பற்றி முடிவு செய்வது நடைமுறைச் சாத்தியமில்லை. எனவே எல்லை மதிப்பைக் காணவும் அல்லது எல்லை மதிப்பு இல்லை என நிறுவவும் ஒரு முறை தேவை. இப்பகுதியில் அது போன்ற வழிகளை நிறுவும் தேற்றங்களைக் காணலாம். இந்தத் தேற்றங்களின் நிரூபணம் இப்புத்தகத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.1–ல் $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3) = 2^2+3 = 7$ என முடிவு செய்தோம். அதாவது x–ன் மதிப்பு 2-ஐ நெருங்கும்போது $f(x) = x^2 + 3$–ன் எல்லை மதிப்பு $x = 2$–ல் $f(x)$–ன் மதிப்புக்குச் சமம் [அதாவது, $f(2)$]. இருப்பினும், சில நேரங்களில் x_0 என்ற புள்ளியில் $f(x)$ வரையறுக்கப்படாமலும் இருக்கலாம் என்பதால் இந்த முறையில் எல்லை மதிப்பைக் காண்பதை எல்லா நேரங்களிலும் பயன்படுத்த முடியாது. இருந்தாலும் **f ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் மதிப்பீடு முறையில் எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிட முடியும்.**

தேற்றம் 9.1

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. இங்கு $a_0, a_1 \cdots a_n$ என்பன மெய்யெண்கள் மற்றும் n ஒரு நிலையான மிகை முழு எண், எனில்

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = P(x_0) \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.7

$\lim\limits_{x\to 3}(x^3 - 2x + 6)$ –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$P(x) = x^3 - 2x + 6$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை.

எனவே, $\lim\limits_{x\to 3} P(x) = P(3) = 3^3 - 2\times 3 + 6 = 27.$

எடுத்துக்காட்டு 9.8

ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் x_0–க்கு $\lim\limits_{x\to x_0}(5)$ –ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$f(x) = 5$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை (படி 0).

எனவே, $\lim\limits_{x\to x_0}(5) = f(x_0) = 5$.

மாறிலிச் சார்பின் எல்லை மதிப்பு அந்த மாறிலியாகும்.

தேற்றம் 9.2

$x_0 \in \mathbb{R}$ என்ற புள்ளியை உள்ளடக்கிய ஒரு திறந்த இடைவெளி I என்க.

$f, g : I \to \mathbb{R}$ என்க.

c ஒரு மாறிலியாகவும் $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$–ன் மதிப்புகள் உள்ளன எனில்,

$\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

என்பனவற்றின் மதிப்புகள் கிடைக்கும். மேலும்

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) . \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ மற்றும்

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, இங்கு $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0.$

இந்த முடிவுகளை, எல்லா முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான சார்புகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.9

மதிப்பினைக் காண்க : (i) $\lim\limits_{x\to 8}(5x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to -2}\left(-\dfrac{3}{2}x\right)$.

தீர்வு

(i) $\lim\limits_{x\to 8}(5x) = 5\lim\limits_{x\to 8}(x) = 5\times 8 = 40$.

(ii) $\lim\limits_{x\to -2}\left(-\dfrac{3}{2}x\right) = -\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to -2}(x) = \left(-\dfrac{3}{2}\right)(-2) = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 9.10

கணக்கிடுக : $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2+x}{x}+4x^3+3\right]$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+x}{x}+4x^3+3\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right)+\lim_{x\to 0}(4x^3+3)$$

$$= \lim_{x\to 0}(x+1)+\lim_{x\to 0}(4x^3+3)$$

$$= (0 + 1) + (0 + 3) = 4.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.11

கணக்கிடுக : $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)^{10}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3) = 1 - 3 = - 2.$$

எனவே, $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)\,(x^2-3)\ldots(x^2-3)$ (10 முறை)

$$= \lim_{x\to -1}(x^2-3)\,\lim_{x\to -1}(x^2-3)\ldots\lim_{x\to -1}(x^2-3) \text{ (10 முறை)}$$

$$= \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10} = (-2)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

$\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \left[\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10}$ என்பதை கவனிக்கவும்.

தேற்றம் 9.3

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ கிடைக்குமானால் $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n$ -ம் கிடைக்கப்பெற்று

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.12

$\lim\limits_{x\to -2}(x^3-3x+6)\;(-x^2+15)$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6) = (-2)^3 - 3(-2) + 6 = - 8 + 6 + 6 = 4$$

$$\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = -(- 2)^2 + 15 = - 4 + 15 = 11$$

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,(-x^2+15) = \lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = 4\times 11 = 44.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.13

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{x\to 3}(x^2-6x+5) = 3^2 - 6\times 3 + 5 = -4$$

$$\lim_{x\to 3}(x^3-8x+7) = 3^3 - 8\times 3 + 7 = 10 \neq 0.$$

எனவே, $$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-6x+5)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-8x+7)} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

நினைவில் கொள்க

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ எனில் பின்னச்சார்புக்கு எல்லைத் தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்துதல் கூடாது.

எடுத்துக்காட்டு 9.14

கணக்கிடுக : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

தீர்வு

இங்கு $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$. எனவே தொகுதியை விகிதப்படுத்துக.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(1)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.15

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

இயற்கணித முறையில் தொகுதியை விகிதப்படுத்துக.

$$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \frac{t^2+9-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\sqrt{t^2+9}+3} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}.$$

தேற்றம் 9.4

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}.$$

நிரூபணம்

$$x^n-a^n = (x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+x-a^{n-2}+a^{n-1})$$

$$= a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1} \ (n \text{ முறை})$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$$

இது எல்லா விகிதமுறு எண் n–க்கும் உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.16

கணக்கிடுக : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = 3(1)^{3-1} = 3 .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.17

$\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{t - 1} = \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.18

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 + x)^5 - 2^5}{x}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$2 + x = y$ என்க. இதனால் $x \to 0$ எனில், $y \to 2$ ஆகும்.

எனவே, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2+x)^5 - 2^5}{x} = \lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^5 - 2^5}{y - 2} = 5(2^4) = 80.$

எடுத்துக்காட்டு 9.19

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^n - 3^n}{x - 3} = 27$ எனுமாறு உள்ள மிகை முழு எண் n-ஐ காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^n - 3^n}{x - 3} = n.3^{n-1} = 27$$

அதாவது, $n.3^{n-1} = 3 \times 3^2 = 3 \times 3^{3-1} \Rightarrow n = 3$

எடுத்துக்காட்டு 9.20

$f(x) = \begin{cases} ax + b & , x > 3 \\ 3ax - 4b + 1 & , x < 3 \end{cases}$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ கிடைக்கப்பெறுமானால் a மற்றும் b-க்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 9a - 4b + 1$$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3a + b$. எல்லை கிடைக்கப் பெறுதல் என்பதன் விளைவாக,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) .$$

$\Rightarrow 9a - 4b + 1 = 3a + b$

$\Rightarrow 6a - 5b + 1 = 0.$

பயிற்சி 9.2

பின்வரும் எல்லை மதிப்புகளைக் காண்க :

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, m, n முழு எண்கள்

(3) $\lim\limits_{\sqrt{x}\to 3}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$ (4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}, x>0$ (5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

(6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ (7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$ (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$ (11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4-x}}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ (13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$ (14) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

(15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}(a>b)$

FDZCV

9.2.4 முடிவுறா எல்லை மற்றும் முடிவிலியில் எல்லை (Infinite limits and Limits at infinity)

முடிவுறா எல்லை (Infinite Limits)

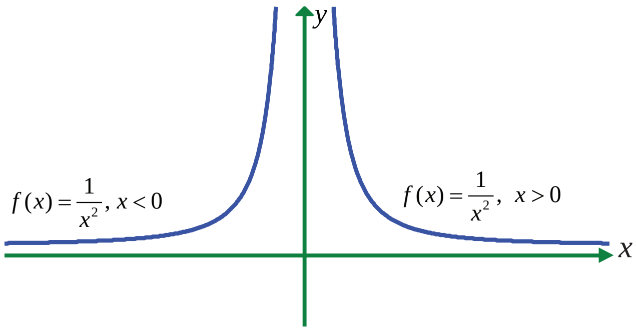
$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ என்ற சார்பு $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. இப்போது $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ கணக்கிடுவதைக் காண்போம். 0-ன் அருகில் $\dfrac{1}{x^2}$-ன் மதிப்புகளை கீழ்க்காணும் அட்டவணை காண்பிக்கிறது.

$x\to 0^+$			$x\to 0^-$		
x	x^2	$\frac{1}{x^2}$	x	x^2	$\frac{1}{x^2}$
1	1	1	–1	1	1
0.5	0.25	4	– 0.5	0.25	4
0.1	0.01	100	– 0.1	0.01	100
0.01	0.0001	10,000	– .01	0.0001	10,000
0.001	0.000001	10,00,000	– 0.001	0.000001	10,00,000
0.0001	0.00000001	10,00,00,000	– 0.0001	0.00000001	10,00,00,000

அட்டவணையிலிருந்து x-ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்தை நெருங்க, நெருங்க $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ –ன் மதிப்பு பெரிய, பெரிய மதிப்பாக மாறுவதைக் கவனிக்கலாம். உண்மையில் x-ன் மதிப்பு இருபுறமிருந்தும் பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும்போது $\dfrac{1}{x^2}$ –ன் மதிப்பு எல்லை இல்லாமல் அதிகரிக்கிறது. இந்நிலையில் x பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும்போது $f(x)$ ஆனது ∞–ஐ நெருங்குகிறது எனலாம்.

$x \to 0^-$ எனில், $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$ மற்றும் $x \to 0^+$ எனில் $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$. எனவே $x \to 0$ எனில், $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$

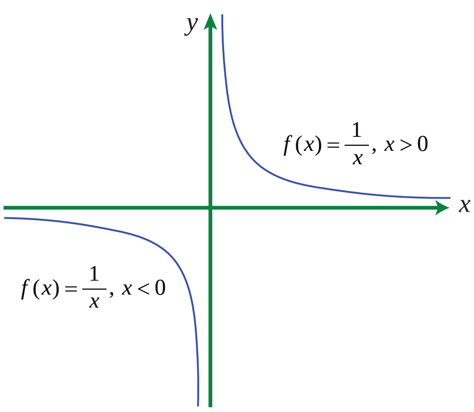
வடிவியலில், $x = 0$ அதாவது y-அச்சு $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ என்ற வளைவரையின் செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.



படம் 9.22

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ –ன் வரைபடம் படம் 9.22–ல் தரப்பட்டுள்ளது.

$x = 0$ எனில் எல்லை மதிப்பு முடிவிலி. அதனால் $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ கிடைக்கப்பெறாது. ∞ என்பது $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ என்ற சார்பின் இந்த செயல்பாட்டைக் குறிக்கும் ஒரு குறியீடு மட்டுமே. அது ஒரு புதிய எண் அல்ல என்பதை மாணவர்கள் நினைவில் கொள்ள வேண்டும். இதுபோல் $f(x) = \dfrac{1}{x}$, (படம் 9.23) என்ற சார்புக்கு



படம் 9.23

$x \to 0^-$ எனில் $\dfrac{1}{x} \to -\infty$

$x \to 0^+$ எனில் $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ எனச் சுலபமாகக் காணலாம்.

இதனை $f(x) = \dfrac{1}{x}$ –ன் வடிவியல் முறையில் தெளிவாக அறியலாம்.

பொதுவாகப் பின்வரும் உள்ளுணர்வு வரையறைகளைக் காணலாம்.

வரையறை 9.4

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு $M > 0$–க்கு (M, ∞) என்ற திறந்த இடைவெளி ∞ –ன் அண்மைப்பகுதியாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு $K < 0$க்கு $(-\infty, K)$ என்ற திறந்த இடைவெளி $-\infty$-ன் அண்மைப்பகுதியாகும்.

வரையறை 9.5

கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண் M–க்கு x-ன் மதிப்பு x_0 –ன் அண்மைப்பகுதியில் $f(x) > M$ (அதாவது $f(x) \in (M, \infty)$) என இருக்குமாறு x_0–ன் அண்மைப்பகுதி அமையுமானால் $x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to \infty$ எனலாம்.

இதே போன்று கொடுக்கப்பட்ட $K < 0$–க்கு x–ன் அண்மைப்பகுதியில் $f(x) < K$ (அதாவது $f(x) \in (-\infty, K)$) என இருக்குமாறு x_0 அண்மைப்பகுதி அமையுமானால் $x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to -\infty$ எனலாம்.

இந்நிகழ்வுகளை குறியீடு வாயிலாகக் கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்.

$x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to \infty$

$x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to -\infty$

$x \to x_0^-$ எனும்போது $f(x) \to \infty$

$x \to x_0^+$ எனும்போது $f(x) \to -\infty$

$x \to x_0^+$ எனும்போது $f(x) \to \infty$

$x \to x_0^-$ எனும்போது $f(x) \to -\infty$

என்பன **முடிவிலி எல்லைகள்** எனப்படும். மேற்கண்ட நிபந்தனைகளில் ஒன்று நிவர்த்தி செய்யப்படின் $x = x_0$ என்ற கோடு $f(x)$ வரைபடத்தின் **செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடாக** இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.21

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{(x^2 + x^3)}$.

தீர்வு

பூஜ்ஜியத்திற்கு அருகில் (இருபுறமிருந்தும்) உள்ள x–ன் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்தினால் $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x^3}$ –ன் மதிப்பு எல்லையற்று அதிகரிக்கின்றது என அறியலாம். எனவே $x \to 0$ எனில் $f(x) \to \infty$ ஆகும்.

இந்தச் சார்பின் எல்லை மதிப்பினை அட்டவணை இல்லாமல் காண்பதற்கு, முதலில் தொகுதியையும் பகுதியையும் x^2–ஆல் வகுக்க வேண்டும். எல்லை மதிப்புக் காணும்போது $x \neq 0$ மற்றும் $x^2 \neq 0$. எனவே வகுத்தல் சாத்தியமாகிறது.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2 + x^3}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)}.$$

தற்போது $x \to 0$ எனில் $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x) = 1$.

அதாவது, பகுதி 1-ஐ நெருங்கும்போது தொகுதி முடிவில்லாமல் அதிகரிக்கின்றது. அதாவது, $\dfrac{1}{(x^2 + x^3)}$ முடிவிலியை நோக்கிச் செல்கிறது எனலாம்.

இந்த எடுத்துக்காட்டு ஒரு கடினமான கணக்கிடுதலை சில இயற்கணித மாற்றங்களின் மூலம் எவ்வாறு எளிமையாக்கலாம் என விளக்குகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 9.22

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x - 2)^3}$.

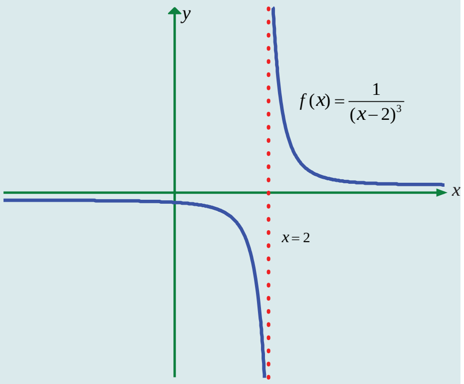
தீர்வு

$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^3}$ -ன் வரைபடத்திலிருந்து

$x \to 2^-$ எனில், $\dfrac{1}{(x-2)^3} \to -\infty$

மற்றும் $x \to 2^+$ எனில் $\dfrac{1}{(x-2)^3} \to \infty$ ஆகும்.

எனவே எல்லை மதிப்பு இல்லை.



படம் 9.24

பொதுவாக

(i) n ஒரு இரட்டைப்படை முழு எண் :

$x \to a$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n} \to \infty$

$x \to a^-$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n} \to \infty$

$x \to a^+$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n} \to \infty$

(ii) n ஒரு ஒற்றைப்படை மிகை முழு எண் :

$x \to a^-$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n} \to -\infty$

$x \to a^+$ எனில் $\dfrac{1}{(x-a)^n} \to +\infty$

$x = a$ என்ற கோடு செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடாக அமையும்.

9.2.5 முடிவிலியில் எல்லைகள் (Limits at infinity)

முற்பகுதியில் முடிவுறா எல்லைகள் மற்றும் செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடுகள் பற்றி ஆராய்ந்தோம். அங்கு x-ன் மதிப்பு குறிப்பிட்ட எண்ணை நோக்கி நகரும்போது y-ன் மதிப்பு கட்டுப்பாடு இன்றி அதிகரித்தது (மிகை அல்லது குறையில் எல்லையற்று). இப்பகுதியில் x-ன் மதிப்பு சீரற்ற முறையில் அதிகரிக்கும்போது y-ன் மதிப்பு எவ்வாறு உள்ளது எனக் காணலாம்.

x மிகப்பெரிய அளவில் அதிகரிக்கும்போது, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ என்ற சார்பின் தன்மை பற்றி ஆராய்வோம்.

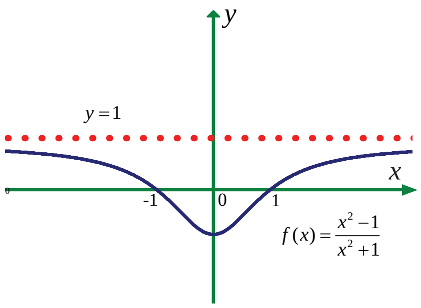
இந்த சார்பின் மதிப்புகளை அட்டவணையிடுவோம்

x	$f(x)$
0	-1
±1	0
±2	0.6000000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

x–ன் மட்டு மதிப்பு பெரிதாகப் பெரிதாக (மிகை அல்லது குறை) $f(x)$–ன் மதிப்பு 1–ஐ நெருங்கி நெருங்கிச் செல்வதைக் காணலாம். x–ன் மதிப்பைத் தேவையான அளவு பெரிதாக எடுத்துக்கொண்டு $f(x)$–ன் மதிப்பை 1–க்கு நெருக்கமாகக் காணலாம் எனத் தெரிகிறது. இந்த நிலையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

வடிவியலில் இச்சூழல் (படம் 9.25) பின்வரும் வரையறைக்குக் கொண்டு செல்கிறது.



படம் 9.25

வரையறை 9.6

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ அல்லது $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ எனில் $y = l$ என்ற கோடு $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.4

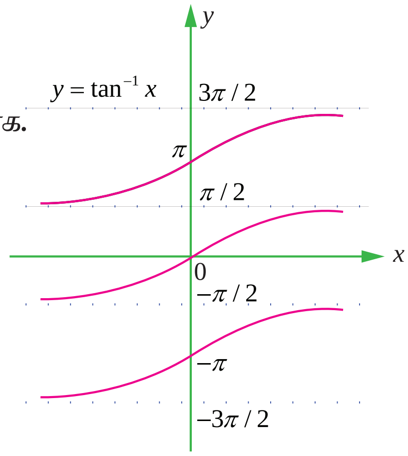
$f : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$–ல் $f(x) = \tan^{-1} x$ எனில்

$\lim\limits_{x \to -\infty} \tan^{-1} x$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan^{-1} x$ என்பவற்றின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$y = \tan^{-1} x$ என்ற வரைபடத்தைக் காண்க.

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$



படம் 9.26

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.5

கணக்கிடுக : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 + 4x + 4}$.

தீர்வு

இதன் எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிட எல்லைத் தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தினால் நாம் பின்வரும் சூழலைச் சென்றடைவோம்.

$x \to \infty$ எனில் $(2x^2 - 2x + 3) \to \infty$

$x \to \infty$ எனில் $(x^2 + 4x + 4) \to \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 + 4x + 4}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$ இது தேறப்பெறாத வடிவம் எனப்படும்.

ஆனால் நேரிடையான கணக்கீடு மற்றும் அதன் அட்டவணை பின்வருமாறு உள்ளது :

x	$2x^2 - 2x + 3$	$x^2 + 4x + 4$	$\frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 + 4x + 4}$
1	3	9	0.3333
10	183	144	1.27083
100	19803	10404	1.90340
1000	1998003	1004004	1.99003
10000	199980003	100040004	1.99900

அட்டவணையிலிருந்து x தேவையான அளவிற்கு பெரியதாகும்போது $f(x)$-ன் மதிப்பு 2-ஐ நெருங்கி நெருங்கி செல்வதைக் காணலாம்.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}\right)=2.$$

இந்தக் கணக்கில் பகுதியையும் தொகுதியையும் x^2–ஆல் வகுப்பதன் மூலம் சுருக்கலாம்.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$=\frac{2-0+0}{1+0+0}\ (x\to\infty \text{ எனில் } \frac{1}{x}\to 0,\ \frac{1}{x^2}\to 0)$$

$$=2.$$

இங்குப் பகுதி, தொகுதிகளின்படிச் சமமாக உள்ளதைக் காணலாம்.

பொதுவாக $x\to\pm\infty$ எனில் விகிதமுறு கோவைகளின் எல்லை மதிப்பைக் காண பகுதியில் உள்ள x-ன் அதிகபட்ச அடுக்கால் பகுதியையும் தொகுதியையும் வகுத்து பகுதிக்கும் தொகுதிக்கும் தனித்தனியே எல்லை மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.23

மதிப்புக் காண்க : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}$.

தீர்வு

x^2–ஆல் வகுக்க

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}}\to\infty$$

அதாவது, $x\to\infty$ எனில் $\dfrac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}\to\infty$

அதாவது, எல்லை மதிப்பைக் காண இயலாது. தொகுதியின் படி பகுதியின் படியைவிட அதிகமாக உள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.24

மதிப்புக் காண்க : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{3x+2}$

தீர்வு

x–ஆல் வகுக்க

$$\frac{1-x^3}{3x+2}=\frac{\frac{1}{x}-x^2}{3+\frac{2}{x}}\ .\ x\to\infty \text{ எனில் } \frac{1-x^3}{3x+2}\to-\infty$$

ஆதலால் எல்லை மதிப்பு இல்லை.

9.2.6 விகிதமுறு சார்புகளின் எல்லைகள் (Limits of rational functions)

$R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $q(x)$–ன் படியைவிட $p(x)$–ன் படி அதிகமாக இருந்தால்

$x \to \infty$ எனும்போது $\dfrac{p(x)}{q(x)} \to +\infty$ அல்லது $-\infty$ ஆகும்.

$q(x)$–ன் படி $p(x)$–ன் படியைவிட அதிகமாக இருந்தால்,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

முடிவாக $p(x)$ மற்றும் $q(x)$–ன் படிகள் சமம் எனில்,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)\text{ல் உள்ள } x\text{-ன் அதிகபட்ச அடுக்கின் கெழு}}{q(x)\text{ல் உள்ள } x\text{-ன் அதிகபட்ச அடுக்கின் கெழு}}$$

குறிப்புரை

$x \to a$ எனில் $f(x) \to \infty$, $x \to a$ எனில் $f(x) \to -\infty$ மற்றும் $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to \infty$, $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to -\infty$ என்பவைகள் எல்லை மதிப்பு இல்லை என்பதை மறுபடியும் உறுதி செய்கின்றன. ∞ என்ற குறியீடு ஒரு எண்ணைக் குறிக்கவில்லை. மேலும் அதை ஒரு எண்ணாகவும் பயன்படுத்தக்கூடாது.

9.2.7 எல்லைகளின் பயன்பாடு (Applications of limits)

எடுத்துக்காட்டு 9.25

உடலில் உள்ள ஆல்கஹாலை நுரையீரல், சிறுநீரகம் போன்ற உறுப்புகளும் மற்றும் வேதி வினைமூலம் கல்லீரலும் வெளியேற்றுகின்றன. ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி மிதமாக இருந்தால் அதை வெளியேற்றுகின்ற வேலையின் பெரும்பகுதியைக் கல்லீரலே செய்கின்றது. அதன் அளவில் 5% க்குக் குறைவாகவே நுரையீரலும், சிறுநீரகமும் வெளியேற்றுகின்றன. இரத்த ஓட்டத்தில் உள்ள ஆல்கஹாலை கல்லீரல் பிரித்தெடுக்கும் வீதம் r–க்கும் இரத்தத்தில் உள்ள ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி x–க்கும் உள்ள தொடர்பு ஒரு விகிதமுறு சார்பாக $r(x) = \dfrac{\alpha x}{x+\beta}$ என உள்ளது. இங்கு α, β என்பன மிகை மாறிலிகள். ஆல்கஹாலினை வெளியேற்றும் மீப்பெரு வீதம் காண்க.

தீர்வு

ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி x அதிகரிக்கும்போது அதை வெளியேற்றும் வீதமும் அதிகரிக்கின்றது.

எனவே, வெளியேற்றும் மீப்பெரு வீதம் என்பது $\lim\limits_{x\to\infty} r(x)$ ஆகும்.

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x}{x+\beta}$$

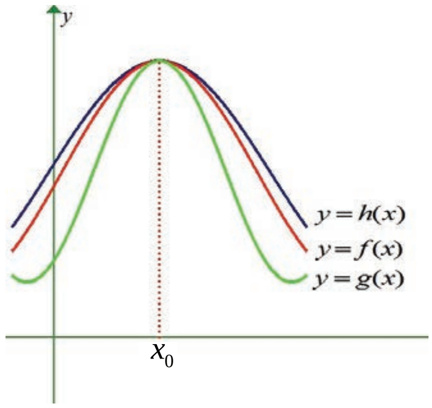
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\left(1+\dfrac{\beta}{x}\right)} = \alpha$$

9.2.8 இடையீட்டுத் தேற்றம் (Sandwich Theorem)

இத்தேற்றம் நெருக்குத் தேற்றம் (Squeeze Theorem) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. படம் 9.27–ல் உள்ளபடி $f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவரை $y = f(x)$ மற்றும் $y = g(x)$ என்ற வளைவரைகளுக்கு இடையில் அமைந்துள்ளது. குறிப்பாக x என்ற புள்ளியானது x_0–ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$ ஆனது $g(x)$ மற்றும் $h(x)$–க்கு இடையில் மிக நெருக்கமாக அமைகிறது. இப்போது x-ஆனது x_0–ஐ நெருங்கும்போது g மற்றும் h என்பவைகளின் எல்லைகள் lஆக இருப்பின் f–ன் எல்லையும் l–ஆக அமையும்.

இடையீட்டுத் தேற்றம் (Sandwich Theorem)

$f, g, h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள் I-ல் உள்ள x_0-ஐ நீக்கிய x_0-ன் அண்மைப்பகுதியில் உள்ள எல்லா x-க்கும் $g(x) \le f(x) \le h(x)$ எனவும் மேலும் $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l,$ எனவும் இருக்குமானால் $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ஆக இருக்கும்.



படம் 9.27

எடுத்துக்காட்டு 9.26

ஐன்ஸ்டினின் சார்பியல் கோட்பாட்டின்படி v திசைவேகத்துடன் கூடிய ஒரு பொருளின் நிறை $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, இங்கு m_0 என்பது ஆரம்ப நிறை மற்றும் c என்பது ஒளியின் வேகம். $v \to c^-$ எனில் m-ல் ஏற்படும் மாற்றம் என்ன? ஏன் இடதுபக்க எல்லை அவசியம்?

தீர்வு

$$\lim_{v\to c^-}(m) = \lim_{v\to c^-}\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\lim\limits_{v\to c^-}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$h > 0$ எனில், $c-h < v < c$. இதன் மூலம் $(c-h)^2 < v^2 < c^2$

அதாவது $\dfrac{(c-h)^2}{c^2} < \dfrac{v^2}{c^2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(c-h)^2}{c^2} < \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v^2}{c^2} < \lim\limits_{h\to 0}1$

$$\Rightarrow 1 < \lim_{h\to 0}\frac{v^2}{c^2} < 1 \Rightarrow 1 < \lim_{h\to 0}(m)\frac{v^2}{c^2} < 1 \Rightarrow 1 < \lim_{v\to c^-}\frac{v^2}{c^2} < 1$$

இடையீட்டுத் தேற்றத்தின்படி, $\lim\limits_{v\to c^-}\dfrac{v^2}{c^2} = 1$

எனவே $\lim\limits_{v\to c^-}(m) \to \infty$

ஆகவே, $v \to c^-$ எனில் நிறை மிக மிகப்பெரியதாக (முடிவிலி) அமைகிறது.

இடப்புற எல்லை தேவையானதாக உள்ளது. வலப்புற எல்லை எடுப்பின் $v \to c^+$ எனில் $1-\dfrac{v^2}{c^2} < 0$ ஆக அமையும். எனவே நிறை காண இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 9.27

ஆகாயத்திலிருந்து விழுகின்ற ஒரு பொருளின் வேகம் $r(t) = -\sqrt{\dfrac{32}{k}}\,\dfrac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. வேகம் அடி/வினாடியில் கணக்கிடப்படுகிறது. இங்கு k என்ற மாறிலி அந்தப் பொருளின் அளவு, வடிவம் மற்றும் காற்றின் அடர்த்தியைப் பொறுத்து உள்ளது. அந்தப் பொருளின் எல்லை வேகத்தினைக் காண்க. அதாவது, $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{\frac{32}{k}}\,\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{32}{k}}\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{32}{k}}\,\frac{(1-0)}{(1+0)} = -\sqrt{\frac{32}{k}} \text{ அடி/வினாடி}$$

எடுத்துக்காட்டு 9.28

ஒரு விலங்கின் கண்பாவையின் விட்டம் $f(x) = \dfrac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}$ என்ற சார்பாகத் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு x என்பது ஒளியின் செறிவினைக் குறிக்கின்றது மற்றும் $f(x)$ மி.மீ.–இல் தரப்பட்டுள்ளது. அந்தக் கண்பாவையின் விட்டத்தை,

(a) ஒளியின் செறிவு குறைவாக (b) ஒளியின் செறிவு அதிகமாக, காண்க.

தீர்வு

(a) ஒளியின் செறிவு குறைவாக இருக்கும்போது, அதாவது $x \to 0^+$ எனும்போது, சார்பின் எல்லையைக் காண வேண்டும்.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15} = \lim_{x\to 0^+}\frac{160+90x^{0.4}}{4+15x^{0.4}}$$

$$= \frac{160}{4} = 40 \text{ மி.மீ}$$

(b) ஒளியின் செறிவு அதிகமாக இருக்கும்போது, அதாவது $x \to \infty$ எனும்போது, சார்பின் எல்லையைக் காணவேண்டும்.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15} = \frac{90}{15} = 6 \text{ மி.மீ}$$

ஒளியின் செறிவு அதிகமாக இருக்கும்போது கண்பாவையின் விட்டத்தின் எல்லை 6 மி.மீ ஆக இருக்கும்.

பயிற்சி 9.3

(1) பின்வரும் சார்புகளுக்கு இடப்புற, வலப்புற எல்லைகளின் மதிப்பைக் காண்க.

(a) $x = -2$-ல் $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x^2+4x+4)(x+3)}$

(b) $x = \dfrac{\pi}{2}$ -ல் $f(x) = \tan x$

பின்வரும் எல்லைகளின் மதிப்பைக் காண்க :

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2(x^2-6x+9)}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2x+11}{x^2+x-6}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

(8) நிறுவுக

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{3n^2+7n+2}=\dfrac{1}{6}$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+...+(3n)^2}{(1+2+...+5n)(2n+3)}=\dfrac{9}{25}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1$

(9) மீன் வள அறிவியலின் முக்கிய பிரச்சனை நீரோடைகளில் உள்ள முட்டையிடத் தகுதியான மீன்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட்டு இந்தத் தகவலைப் பயன்படுத்தி இனப்பெருக்கக் காலத்தில் ஆற்றுக்குள் நுழையும் மீன் பிடிப்புக்குத் தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுவதாகும். S என்பது முட்டையிடும் நிலையில் உள்ள மீன்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் R என்பது மீன் பிடிப்புக்குத் தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கையாகும். " பிவர்ட்டன் ஹோல்ட்" –ன் இனப்பெருக்கச் சார்பு $R(S)=\dfrac{S}{(\alpha S+\beta)}$, இங்கு α, β என்பன மிகை மாறிலிகள்.

இந்தச் சார்பு இனப்பெருக்க நிலையில் இருக்கும் மீன்களின் எண்ணிக்கை தேவையான அளவு அதிகரிக்கும் போது அறுவடைக்குத் தகுந்த மீன்களின் எண்ணிக்கை தோராயமாக மாறிலியாக அமையும் என நிறுவுக.

(10) ஒரு தொட்டியில் 5000 லிட்டர் நல்ல நீர் உள்ளது என்க. ஒரு லிட்டருக்கு 30 கி அளவு உப்பு கொண்ட உவர் நீர் 25 லி/நிமிடம் என்ற அளவில் தொட்டியில் செலுத்தப்படுகின்றது. t நிமிடங்களில் இந்த உவர் நீரின் அடர்த்தி (கிராம்/லிட்டர்) $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$ என தரப்பட்டுள்ளது. $t\to\infty$ எனில் அடர்த்தி எவ்வாறு மாறும்?

எடுத்துக்காட்டு 9.29

மதிப்பைக் காண்க : $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

தீர்வு

$-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1$ என நமக்குத் தெரியும். இதிலிருந்து $-x^2\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$

இங்கு $g(x)=-x^2$, $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$; $h(x)=x^2$ என்க.

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0$ மற்றும்

$\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2)=0$ ஆகும்.

இடையீட்டுத் தேற்றப்படி

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0 \text{ ஆகும்.}$$

எல்லை மதிப்புத் தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தியிருந்தால் தவறான முடிவுக்கு வந்திருப்போம்.

அதாவது, $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2)\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$

தற்போது, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$–க்கு மதிப்பு இல்லை. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ எனவே $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$–ன் மதிப்பு பிரச்சனைக்குரியதாக உள்ளது.

குறிப்பு : $a \le f(x) \le a$, எனில், $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

எடுத்துக்காட்டு 9.30

நிறுவுக : $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

தீர்வு

எல்லா $x \ge 0$–க்கும் $-x \le \sin x \le x$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to 0}(x) = 0.$

இடையீட்டுத் தேற்றப்படி $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 9.31

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right]=120$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{1}{x}-1 \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \le \frac{1}{x}+1$$

$$\frac{2}{x}-1 \le \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor \le \frac{2}{x}+1$$

$$\vdots$$

$$\frac{15}{x}-1 \le \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor \le \frac{15}{x}+1$$

கூடுதல் காண,

$$\frac{120}{x}-15 \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor \le \frac{120}{x}+15$$

$$120-15x \le x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le 120+15x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(120-15x) \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le \lim_{x\to 0^+}(120+15x)$$

$$120 \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le 120$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right]=120.$$

9.2.9 இரண்டு சிறப்பான முக்கோணவியல் எல்லைகள் (Two special Trigonometrical limits)

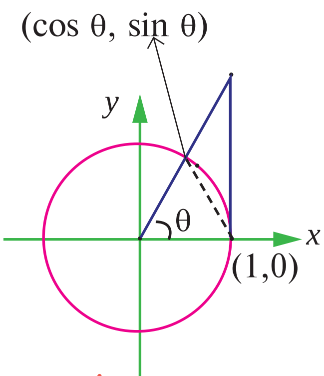
முடிவு 9.1

(a) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ (b) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$.

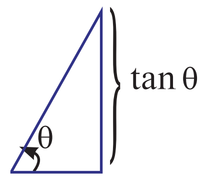
நிரூபணம்

இதனை வட்டக்கோணப் பகுதி மூலம் நிறுவலாம்.

மையம்(0, 0) மற்றும் ஆரம் 1 உள்ள வட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(\cos\theta, \sin\theta)$ என்க.

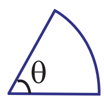


படம் 9.28



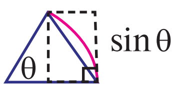
முக்கோணத்தின் பரப்பு $\dfrac{\tan\theta}{2}$

படம் 9.29



வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு $\dfrac{\theta}{2}$

படம் 9.30



முக்கோணத்தின் பரப்பு $\dfrac{\sin\theta}{2}$

படம் 9.31

(a) பரப்பின் பண்புப்படி $\dfrac{\tan\theta}{2} \geq \dfrac{\theta}{2} \geq \dfrac{\sin\theta}{2}$

இதனை $\dfrac{2}{\sin\theta}$ –ஆல் பெருக்க, $\dfrac{1}{\cos\theta} \geq \dfrac{\theta}{\sin\theta} \geq 1$ எனக் கிடைக்கும். தலைகீழி காண, $\cos\theta \leq \dfrac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$.

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ மற்றும் $\dfrac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ என்பதால் இந்த சமனிலி $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் உள்ள பூஜ்ஜியம் அல்லாத எல்லா θ மதிப்புக்கும் பொருந்தும் எனலாம்.

$\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1; \lim\limits_{\theta \to 0}(1) = 1$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே இடையீட்டுத் தேற்றப்படி $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$. ■

(b) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$.

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{எனவே,}\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right).\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= 0 \times 1 = 0.$$

9.2.10 மற்ற முக்கிய எல்லைகள் (Some important other limits)

முடிவு 9.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

நிரூபணம்

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad \text{(தொடர்முறைகளும் தொடர்களும்)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\right) = 1.$$

முடிவு 9.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a,\ \ a>0$$

நிரூபணம்

$a^x, \log_a x$ என்பவை ஒன்றுக்கு ஒன்று நேர்மாறு என நாம் அறிவோம்.

$\log f(x)$ என்பது $\exp(f(x))$ -ன் நேர்மாறு எனில் $\exp(\log f(x)) = f(x)$

$$\text{எனவே,}\qquad a^x = \exp(\log a^x)$$

$$= e^{x\log a}$$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\times \log a$$

$x\to 0$ எனில், $y = x\log a \to 0$

$$\text{எனவே,}\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\times\log a = \log a\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right) = \log a(1) = \log a$$

முடிவு 9.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

நிரூபணம்

என்க $\log(1+x)=y$

$x\to 0$ எனில் $y\to 0$ மற்றும்

$$1+x=e^{y}$$

$$x=e^{y}-1$$

எனவே, $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^{y}-1}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

நிரூபணம் இல்லாத சில முக்கிய எல்லைகள் (Some important limits without proof)

முடிவுகள் 9.5 முதல் 9.9

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$ (6) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

(7) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ உள்ளது மற்றும் இந்த மதிப்பு e எனக் குறிக்கப்படும், $2<e<3$.

(8) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$.

எண் e என்பது ஆழ்நிலை எண் எனவும் கூறலாம். e என்ற எண் எனவும் கூறலாம்.

e என்ற எண் $a_0x^{n}+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n=0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை எப்போதும் நிறைவு செய்யாது.

எடுத்துக்காட்டு 9.32

மதிப்பைக் காண்க : $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$

தீர்வு

$\sin x=\frac{1}{y}$ என்க.

$x\to 0$ எனில், $y\to\infty$ மற்றும்

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{2}=e^{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9.33

மதிப்பிடுக : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x}$.

தீர்வு

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{x-2+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{(x-2)+2}$$

$y=x-2$ எனில் $x\to\infty$ எனும்போது $y\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}.\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{2}$$

$$= e^4.1 = e^4 .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.34

மதிப்பிடுக : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x}$.

தீர்வு

$$\frac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x} = \frac{2^{\frac{5}{2}}-\left[(\cos x+\sin x)^2\right]^{\frac{5}{2}}}{1-\sin 2x}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

எனவே, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2^{\frac{5}{2}}-[(\cos x+\sin x)^2]^{5/2}}{2-[1+\sin 2x]} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2^{\frac{5}{2}}-[1+\sin 2x]^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$.

$y = 1+\sin 2x$ என்க. $x \to \frac{\pi}{4}$ எனில் $y \to 2$

$$= \lim_{y\to 2}\frac{2^{\frac{5}{2}}-y^{\frac{5}{2}}}{2-y}$$

$$= \frac{5}{2}.2^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}\times 2^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{2} .$$

எடுத்துக்காட்டு 9.35

$x \to 0$ எனும்போது பின்வரும் சார்புகளுக்கு எல்லைமதிப்பு உள்ளதா எனக் காண்க? விடைக்கான காரணம் கூறுக.

(i) $\frac{\sin|x|}{x}$ (ii) $\frac{\sin x}{|x|}$ (iii) $\frac{x\lfloor x\rfloor}{\sin|x|}$ (iv) $\frac{\sin(x-\lfloor x\rfloor)}{x-\lfloor x\rfloor}$.

தீர்வு

(i) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(-x)}{x} & ; -1<x<0 \\ \frac{\sin x}{x} & ; 0<x<1 \end{cases}$$

எனவே, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ மற்றும்

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +1$.

இங்கு $f(0^-) \neq f(0^+)$ ஆகையால் எல்லை மதிப்பு இல்லை.

(ii) $$\frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{-x} & ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

எனவே, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. ஆகையால் எல்லை மதிப்பு இல்லை.

(iii) $$f(x) = \frac{x\lfloor x \rfloor}{\sin |x|} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sin(-x)} & ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{x.0}{\sin x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & ; -1 < x < 0 \\ 0 & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

எனவே, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0.$

எனவே எல்லை மதிப்பு இல்லை.

(iv) $$\frac{\sin(x - \lfloor x \rfloor)}{x - \lfloor x \rfloor} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-(-1))}{x-(-1)} & ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin(x-0)}{x-0} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+1)}{(x+1)} & ; -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{\sin 1}{1} = \sin 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1.$

எனவே எல்லை மதிப்பு இல்லை.

பயிற்சி 9.4

பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{7x}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + x)^{1/3x}$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5}\right)^{8x^2+3}$

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{x+2}$

(6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^3\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^3}$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ (8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

(9) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin(\alpha^n)}{(\sin \alpha)^m}$ (10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$

(11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+a^2} - a}{\sqrt{x^2+b^2} - b}$ (12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \arcsin x}{3x}$

(13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

(15) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x}$ (16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$

(17) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x}$ (18) $\lim\limits_{x \to \infty} x \left[3^{\frac{1}{x}} + 1 - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}} \right]$

(19) $\lim\limits_{x \to \infty} \{x[\log(x+a) - \log(x)]\}$ (20) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(21) $\lim\limits_{x \to \pi} (1 + \sin x)^{2 \operatorname{cosec} x}$ (22) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

(23) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$ (24) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$

(25) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ (26) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

(27) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3}$ (28) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

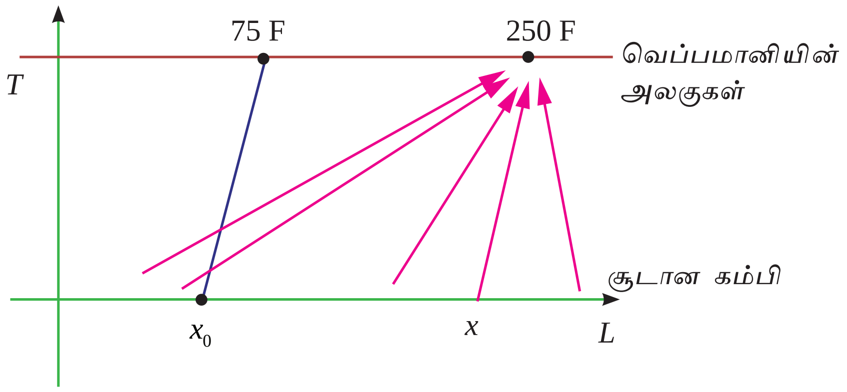
9.3 தொடர்ச்சித் தன்மை (Continuity)

ஒரு சார்பின் தனிச்சிறப்பு வாய்ந்த பண்புகளில் ஒன்று அதன் தொடர்ச்சியாகும். நடைமுறையில் காணும் பல இயற்கை சூழல்களில் இந்தப் பண்பினைக் காணலாம். உதாரணமாக ஒரு கம்பியை சூடேற்றும்போது கம்பியானது தொடர்ந்து நீட்சியடைகிறது. ஓர் உயிரியின் தொடர்ச்சியான வளர்ச்சி, தொடர் ஓட்டம், வளிமண்டல வெப்பநிலையின் தொடர்ச்சியான மாறுதல் எனப் பலவாறாக பேசுவதைக் கேட்டிருப்போம்.

ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சி என்ற கருத்தானது சார்பின் வளைவரை எங்கும் "உடைந்து காணப்படவில்லை" என்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இந்தச் சொல் "Continuous"என்பது இலத்தீன் மொழியில் "Continuere"இணைந்திருத்தல் என்ற சொல்லில் இருந்து தோன்றியது ஆகும். சார்புகளைப் பகுப்பாய்வு செய்யும்போது தொடர்ச்சியானது என்பதைக் குறிப்பிட "உடைந்து காணப்படவில்லை" அல்லது "இணைந்திருக்கிறது" எனக் கூறுவதில் பெரிய குறைபாடு உள்ளது. ஆகவே தொடர்ச்சியின்மை பற்றி அறிய சார்பின் வளைவரையை முதிர்ச்சி இல்லாமல் பயன்படுத்துவது தவறான வழிகாட்டுதலாகும். இருப்பினும் ஒரு சார்பிற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் தொடர்ச்சி என்பது சார்பகம் தெரிந்து கொண்டு, அந்த வளைவரையைப் பென்சிலின் முனையை எடுக்காமல் வரையக்கூடிய வளைவரை என்பதைப் ஒருவர் பின்னர் உணர்ந்து கொள்வார்.

தொடர்ச்சியின் கருத்தாக்கத்தைப் புரிந்துகொள்ளத் தொடர்ச்சியை எல்லையுடன் தொடர்புபடுத்திக் கற்றல் என்பது மிகச் சிறந்த வழியாகும். பொதுவாகக் கூறவேண்டுமானால்,

தொடர்ச்சித் தன்மை உள்ளது எனக் கூறும்போது அதன் பொருள் தேவையான ஓர் எல்லை கிடைக்கின்றது என்பதாகும். எல்லையிலிருந்து தொடர்ச்சிக்கான கருத்தாக்கத்தை உருவாக்க ஒரு புள்ளியில் நமது கவனத்தைக் குவிக்க வேண்டும். ஒரு புள்ளியில் எல்லை மற்றும் தொடர்ச்சி ஆகியவை தொடக்க நிலைக் கருத்துகள் ஆகும். ஆனால் சார்பின் தொடர்ச்சி என்பது புள்ளி வாரியாக பெறப்பட்ட சார்பு முழுமைக்குமான பொதுப் பண்பு ஆகும்.



படம் 9.32

உதாரணமாக, ஒரு வெப்பமானி T ஆனது L நீளமுள்ள சூடான கம்பியின் வெப்ப நிலையைப் பதிவு செய்வதாகக் கொள்வோம். L-ன் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி x-லும் அதன் வெப்பநிலை $t(x)$ என்க. L நீளமுள்ள கம்பியில் x_0-ஐ அடையும் வரை அதன் வெப்பநிலை $250°F$ எனக் கொள்வோம். x_0 என்ற புள்ளியில் திடீரென்று வெப்பநிலையானது (insulation) காப்பின் காரணமாக அறையின் வெப்பநிலையான $75°F$ –க்குக் குறைகின்றது. x_0 –க்குப் பிறகு அதன் வெப்ப நிலை $250°F$ ஆகத் தொடர்கிறது எனில் சார்பின் குறியீட்டால்

$$t(x) = \begin{cases} 250^{\circ} F & ; \ x \neq x_0 \\ 75^{\circ} F & ; \ x = x_0 \end{cases}$$ என எழுதலாம்.

ஆகவே x_0 என்ற புள்ளி தனித்துவப் புள்ளியாக (சிறப்பு புள்ளியாக அல்லது வழக்கமற்ற புள்ளியாக) மாறுகின்றது. வெப்பநிலையின் வீச்சை ஆராயும்போது x ஆனது x_0-ஐ நெருங்கவில்லை என்பதை அறியலாம். சுருக்கமாகக் கூறினால் x_0-ல் ஒரு துள்ளல் நிகழ்ந்துள்ளது. ஆகவே வெப்பநிலைச் சார்பானது x_0 –ல் தொடர்ச்சியாக இல்லை எனக் கூற முற்படுகின்றோம். ஏனெனில் x_0 –ன் அண்மையில் x இருக்கும்போது $t(x) = 250°F$ ஆக இருப்பதால் $t(x_0)$–ன் மதிப்பும் $250°F$ ஆக இருக்க வேண்டும் என எதிர்பார்க்கிறோம். இப்பொழுது நாம் தொடர்ச்சி எனும் கருத்தாக்கத்தை பொதுமைப்படுத்தும்போது பிரதி பிம்பங்கள் நெருங்கி வரும்போது அதற்குரிய பிம்பங்களும் நெருங்கி வரவேண்டும் என்கிறோம்.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில் கம்பியின் மீதுள்ள புள்ளிகள் பிரதி பிம்பங்கள் ஆகும். அதற்கான வெப்பநிலைகளின் பிம்பங்கள் ஆகும்.

ஒரு மாணவனுக்குத் தொடர்ச்சியைப் பற்றிய உள்ளுணர்வான கருத்து அதன் தொடர்ச்சித் தன்மையிலிருந்து உருவாக வேண்டுமே அல்லாமல், நடைமுறையில் காணப்படும் திடீரென ஏற்படும் தொடர்ச்சியற்ற தன்மையிலிருந்து உருவாகக் கூடாது. உடனடியாக மனத்தில் தோன்றும் சில சார்புகளின் கணித மாதிரிகளைக் கீழே பட்டியலிட்டுள்ளோம்.

(1) ஒளி விளக்கை ஒளிரச் செய்தல் : இங்கு ஒளியின் செறிவு என்பது காலத்தைப் பொறுத்த சார்பு.

(2) வாகனங்களின் மோதல் : இங்குத் திசைவேகம் என்பது காலத்தைப் பொறுத்த சார்பு.

(3) வானொலியினை அணைத்தல் : இங்கு ஒலியின் செறிவு காலத்தைப் பொறுத்த சார்பு.

(4) பலூன் வெடித்தல் : இங்கு ஆரம் உள்ளே செலுத்தப்படும் காற்றைப் பொறுத்த சார்பு.

(5) கயிற்றினை அறுத்தல் : இங்கு இறுக்கம் என்பது நீளத்தைப் பொறுத்த சார்பு.

(6) அஞ்சல் கட்டணம் : இங்கு அஞ்சல் கட்டணம் என்பது எடையைச் சார்ந்த சார்பு.

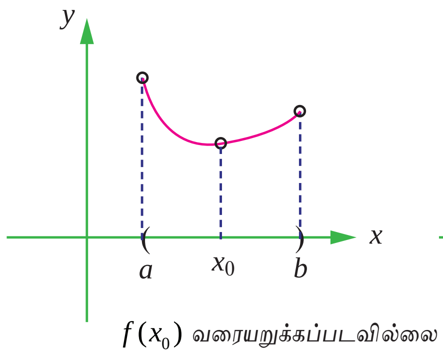
(7) வருமான வரி : இங்கு வரி விகிதம் என்பது வருமானத்தைச் சார்ந்த சார்பு.

(8) வயது வருடங்களில் : இங்கு வயது முழு வருடங்களில் என்பது காலத்தைச் சார்ந்த சார்பு.

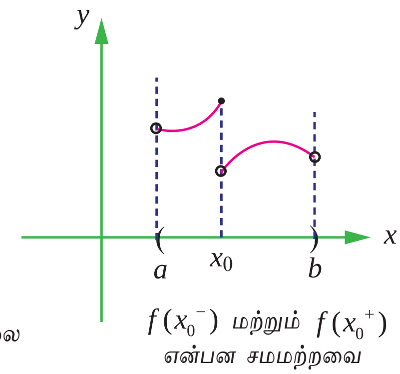
(9) காப்பீட்டுத் தவணை : தவணை என்பது வயதைப் பொறுத்த சார்பு.

எடுத்துக்காட்டுகள் (1) – (5) வரை மிகவும் துல்லியமாக இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக ஒளியின் செறிவு என்பது பரவலாக பூஜ்ஜிய செறிவிலிருந்து மிகைச் செறிவை நோக்கி நகர்கிறது. உண்மையில் இயற்கை தொடர்ச்சியற்ற தன்மையை வெறுப்பதாகத் தோன்றுகிறது. (6) – (9) வரை உள்ள எடுத்துக்காட்டுகள் தொடர்ச்சியற்றதாகவும் மேலும் உண்மையில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் துள்ளல் இருப்பதையும் அறியலாம்.

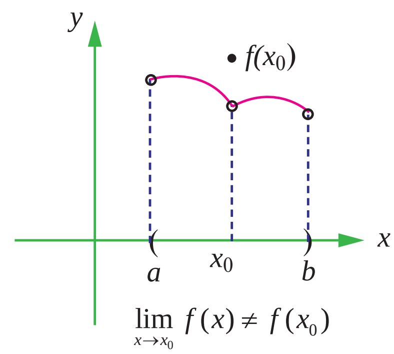
மாணவர்கள், தொடர்ச்சியின் வரையறையை, வழக்கமாக நாம் நடைமுறையில் பயன்படுத்தும் தொடர்ச்சியான என்ற வார்த்தையின் பொருளுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டும். ஒரு தொடர்ச்சியான நிகழ்வானது படிப்படியாக எந்த இடையூறும் இல்லாமலும், திடீரென்ற மாற்றங்களும் இல்லாதவாறு நடைபெறுவதாகும். அதாவது அதில் எந்த ஒரு ஓட்டையோ, துள்ளலோ அல்லது இடைவெளியோ இல்லாதிருத்தலாகும். கீழ்க்காணும் x-ன் மூன்று மதிப்புகளில் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளதைக் காணலாம். இடைவெளி (a, b)-ன் மற்ற எல்லா இடங்களிலும் f-ன் வளைவரை எந்தவித குறுக்கீடும் இன்றித் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.



படம் 9.33



படம் 9.34



படம் 9.35

மேற்கூறிய வளைவரைகளில் (படம் 9.33 - 9.35) மூன்று நிபந்தனைகளில் $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சித் தன்மை இல்லாமல் இருக்க மூன்று நிபந்தனைகள் உள்ளன.

(1) $x = x_0$-ல் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை.

(2) $x = x_0$-ல் $f(x)$-க்கு எல்லை வரையறுக்கப்படவில்லை.

(3) $x = x_0$-ல் $f(x)$-க்கு எல்லை உள்ளது. ஆனால் இதன் மதிப்பு $f(x_0)$-க்குச் சமமாக இல்லாமல் இருக்கிறது.

நாம் இப்பொழுது சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.6

(i) $f(x) = x^2+3$ (ii) $f(x) = \dfrac{16-x^2}{4+x}$

தீர்வு

(i) $x \to 2$ எனில் ஒரு பக்க எல்லைகள்

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 7$$

எனவே $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$ மேலும் $f(2) = 7 = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$. இதனால் $x = 2$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது.

(ii) இதன் ஒரு பக்க எல்லைகள்

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = 8$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = 8$$

ஆகையால் $\lim_{x \to -4} f(x) = 8$ ஆனால் $f(-4)$-ன் மதிப்பு இல்லை.

$f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பு இருந்தபோதிலும் $x = -4$-ல் சார்பின் மதிப்பு $f(-4)$ வரையறுக்கப்படவில்லை. இதனால் $\lim_{x \to -4} f(x)$ இருப்பதற்கும் $f(-4)$ஆக இருப்பதற்கும் எந்தத் தொடர்பும் இல்லை.

தற்போது நாம் தொடர்ச்சி பற்றி முறையான வரையறையைக் காண்போம்.

வரையறை 9.7

x_0-ஐ உள்ளடக்கிய திறந்த இடைவெளி I என்க. $f : I \to \mathbb{R}$ என்க. f என்ற சார்பு $x = x_0$-ன் அண்மைப்பகுதியில் வரையறுக்கப்பட்டு $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் சார்பின் மதிப்பும், அதன் எல்லை மதிப்பும் கிடைக்கப்பெற்று சமமாகவும் இருக்குமானால், f என்ற சார்பு $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் *தொடர்ச்சியானது* எனலாம்.

இவ்வாறு $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் ஒரு சார்பு $y = f(x)$ தொடர்ச்சியானதாக இருக்க மூன்று நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) x_0-ன் அண்மைப் பகுதியில் $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ கிடைக்க வேண்டும்.

(iii) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

நிபந்தனை (iii)-ஐ $\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ என மாற்றியும் அமைக்கலாம். மேலும் x_0-ல் f-ன் தொடர்ச்சியைப் பின்வருமாறு மாற்றியும் வரையறுக்கலாம். அதாவது.

வரையறை 9.8

x_0 என்ற புள்ளியின் அண்மைப் பகுதியில் சார்பு f வரையறுக்கப்பட்டு $\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ ஆகவும் இருக்குமானால் $y = f(x)$ என்ற சார்பு $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியானது எனலாம்.

(iii) என்ற நிபந்தனையை $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$ எனவும் எழுதலாம். $\lim_{x \to x_0} x$-ல் f ஆனது தொடர்ச்சியாக இருக்குமானால் எல்லைக் குறியீட்டையும், சார்புக் குறியீட்டையும் இடமாற்றம் செய்ய முடியும்.

9.3.1 ஒரு புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் எடுத்துக்காட்டுகள் (Examples of functions continuous at a point)

(1) மாறிலிச் சார்பு $\mathbb{R}$ -ன் எல்லா புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியானது .

$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ என்பது ஒரு மாறிலி. $x_0 \in \mathbb{R}$, எனில் $f(x_0) = k$. மேலும்

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}(k) = k.$$

(2) மிகை முழு எண் அடுக்கு உடைய அடுக்குச் சார்புகள் $\mathbb{R}$ –ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை. $f(x) = x^n$ எனில், f –ன் சார்பகம் $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ மற்றும் எல்லைத் தேற்றத்தின்படி $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_o^n, x_0 \in \mathbb{R}$.

(3) $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $\mathbb{R}$ –ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது. எல்லைத் தேற்றப்படி

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n = p(x_0)$$

(4) பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பின்னம் அதாவது $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ என்ற விகிதமுறு சார்புகள் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை.

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} p(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = R(x_0).$$

(5) வட்டச் சார்புகளான $\sin x$ மற்றும் $\cos x$ என்பவை அவற்றின் சார்பகம் $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$–ல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானவை.

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

இதன் விளைவாக, எல்லைகளின் தலைகீழி மற்றும் வகுத்தல் விதிகிளின்படி, $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ போன்ற சார்புகள் அவற்றிற்கு பொருத்தமான சார்பகங்களில் தொடர்ச்சியானவை.

(6) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ போன்ற n–ஆம் படி மூல சார்புகள் அவற்றிற்கு பொருத்தமான சார்பகங்களில் தொடர்ச்சியானவை. காரணம் $\lim\limits_{x \to x_0} \left(x^{\frac{1}{n}} \right) = x_0^{\frac{1}{n}}$.

(7) தலைகீழிச் சார்பு $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$–ல் அது தொடர்ச்சியற்றது. ஆனால் $\mathbb{R} - \{0\}$ –ல் எல்லா புள்ளிகளுக்கும் f தொடர்ச்சியானது.

(8) $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$

h–ன் சார்பகம் எல்லா மெய்யெண்கள் ஆகும். மேலும்

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-}(x+1) = 1 = h(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+}(x^2+1) = 1 = h(0).$$

எனவே $x = 0$–ல் h ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகும். மேலும் $(-\infty, 0)$ மற்றும் $(0, \infty)$–ல் h ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு. எனவே, $(-\infty, \infty)$–ல் $h(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியானது.

(9) மீப்பெரு முழு எண் சார்பு $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x = 0$–ல் தொடர்ச்சியற்றது.

$$\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1 \text{ மற்றும்}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$$

எல்லா முழு எண் மதிப்புகளுக்கும் இந்தச் சார்பு தொடர்ச்சியற்றது.

குறிப்பாக $\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ மற்றும்

$$\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

(10) மட்டுச் சார்பு $\mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & ; \ x < 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ x & ; \ x > 0 \end{cases}$$

குறிப்பாக,

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0, \text{ மற்றும்}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

(11) படிக்குறிச் சார்பு $f(x) = e^x$, $\mathbb{R}$ –ன் எல்லா புள்ளிகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.

(12) மடக்கைச் சார்பு $f(x) = \log x$ $(x > 0)$, $(0, \infty)$–ல் தொடர்ச்சியானது.

9.3.2 தொடர்ச்சியான சார்புகளின் இயற்கணிதம் (Algebra of continuous functions)

f மற்றும் g என்ற சார்புகள், x_0–ஐ உள்ளடக்கிய அண்மைப் பகுதியிலும் x_0 என்ற புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியானவைகள் எனில்,

(1) $x = x_0$–இல் $f + g$ தொடர்ச்சியானது

(2) $x = x_0$–இல் $f - g$ தொடர்ச்சியானது

(3) $x = x_0$–இல் $f \cdot g$ தொடர்ச்சியானது

(4) $x = x_0$–இல் $\dfrac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ தொடர்ச்சியானது

(5) தொடர்ச்சியைப் பற்றிய சார்புகளின் சேர்ப்புத் தேற்றம் f என்ற சார்பு $g(x_0)$–இல் மற்றும் g என்ற சார்பு $x = x_0$–இல் தொடர்ச்சியானவை எனில் fog –யும் x_0–இல் தொடர்ச்சியானது.

மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சி (Continuity in a closed interval)

வரையறை 9.9

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு, திறந்த இடைவெளி (a, b)–ல் தொடர்ச்சியானதாகவும் $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ மற்றும் $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ஆகவும் இருப்பின், அந்தச் சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ –ல் தொடர்ச்சியானது எனக்கூறலாம்.

அதாவது ஒரு சார்பு a–க்கு வலப்பக்கமிருந்து தொடர்ச்சியாகவும் b–க்கு இடப்பக்கமிருந்து தொடர்ச்சியாகவும் மற்றும் (a, b) திறந்த இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி x_0–க்கும் தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 9.7

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ என்ற சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க.

தீர்வு

சார்பு f–ன் வரையறைப்படி சார்பகம் மூடிய இடைவெளி $[-1,1]$ ஆகும்.

($1 - x^2 \geq 0$ ஆக இருக்கும்போது f வரையறுக்கப்படுகிறது)

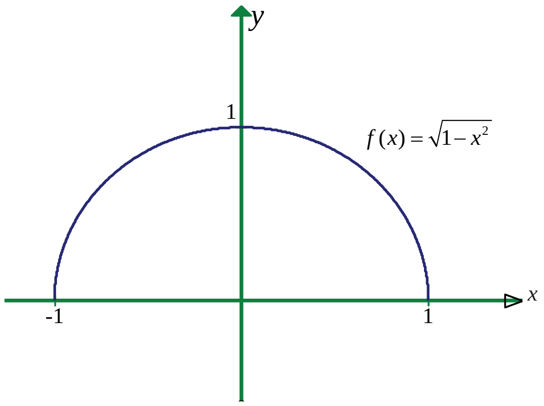
$c \in (-1, 1)$ என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\sqrt{1-x^2} = \left[\lim_{x\to c}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1-c^2)^{\frac{1}{2}} = f(c).$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 0 = f(1).$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \left[\lim_{x\to -1^-}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}} = 0 = f(-1).$$



படம் 9.36

இவ்வாறாக f என்ற சார்பு $[-1, 1]$ இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது. இந்தக் கணக்கினை சார்புகளின் சேர்ப்புத் தேற்றம் மூலமும் தீர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.36

பின்வரும் சார்புகள் எந்த இடைவெளிகளில் தொடர்ச்சியானது எனக் காண்க.

(i) $f(x) = \tan x$ (ii) $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (iii) $h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

தீர்வு

(i) $f(x) = \tan x$ என்ற சார்பு $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$ என்ற இடங்களில் வரையறுக்கப்படவில்லை. மற்ற எல்லா இடங்களிலும் இது தொடர்ச்சியானது, எனவே $f(x) = \tan x$ சார்பு

$$\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$$ போன்ற திறந்த இடைவெளிகளில் தொடர்ச்சியானது.

(ii) $y = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பு $x = 0$–ஐ தவிர $\mathbb{R}$ –ன் மற்ற எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது. $x = 0$–இல் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை.

$g(x) = \sin\frac{1}{x}$ என்ற சார்பு $x = 0$ தவிர மற்ற எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ மதிப்பு கிடைக்காது. எனவே g என்ற சார்பு $(-\infty, 0)$ மற்றும் $(0, \infty)$ இடைவெளிகளில் தொடர்ச்சியானது.

(iii) $h(x)$ என்ற சார்பு, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$-ல் $x_0 \neq 0$ என உள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \left(\lim_{x \to x_0} x \sin \frac{1}{x} \right) = x_0 \sin \frac{1}{x_0} = h(x_0)$$

For $x_0 = 0$

$$h(x) = x.\sin\frac{1}{x}$$

$$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$$

$$g(x) = -x, f(x) = x\sin\frac{1}{x}, h(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

நெருக்குத் தேற்றத்தின்படி

$$\lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0 = h(0).$$

எனவே மெய்யெண் கோட்டில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் $h(x)$ தொடர்ச்சியானது.

எடுத்துக்காட்டு 9.37

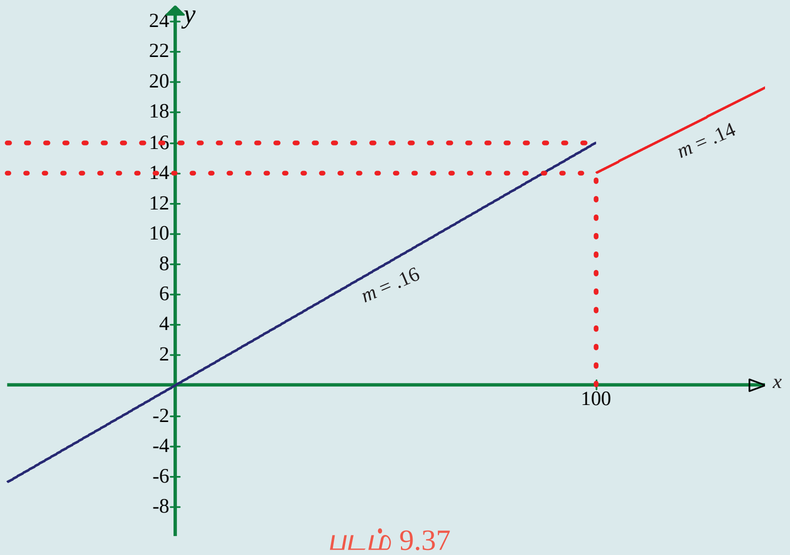
தக்காளி மொத்த விற்பனையாளர் ஒருவர் புதியதாக அறுவடையான தக்காளியின் விலை 100 கிலோவுக்கு குறைவாக வாங்கினால் ரூபாய் ₹ 0.16/கி வீதமும் குறைந்தபட்சம் 100 கி வாங்கினால் ரூபாய் ₹ 0.14/கி விற்பதாகக் காண்கிறார். மொத்த விலையின் சார்பையும் 100 கிலோ வாங்கும்போது உள்ள விலையையும் காண்க.

தீர்வு

நாள் ஒன்றுக்கு வாங்கும் தக்காளியின் அளவு x என்க. மற்றும் விலை C என்க.

$$C(x) = \begin{cases} 0.16x, & ; \; 0 \leq x < 100 \\ 0.14x, & ; \; x \geq 100 \end{cases}$$

இந்தச் சார்பின் படம் பின்வருமாறு :



படம் 9.37

$x = 100$-இல் சார்பு தொடர்ச்சியற்றது. ஏனெனில் $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = 16$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 100^+} C(x) = 14$

$C(100) = 14$

இவ்வாறாக, $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = 16 \neq 14 = \lim\limits_{x \to 100^+} C(x) = C(100)$

இங்குச் சார்பு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு 14-ல் இருந்து மற்றொரு எண் 16க்கு மாற்றம் அடைகிறது.

9.3.3 நீக்கக் கூடிய மற்றும் துள்ளல் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை (Removable and Jump discontinuities)

பின்வரும் சார்புகளைக் கவனிப்போம் :

(i) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

(ii) $g(x) = C(x)$. (எடுத்துக்காட்டு 9.38-ல் வரையறுக்கப்பட்ட $C(x)$)

$x = 0$-ஐ தவிர மெய்யெண் நேர்க்கோட்டில் உள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும் $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது, $f(0)$ வரையறுக்கப்படவில்லை. ஆனால், $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ ஆக உள்ளது. பின்வருமாறு சார்பை மாற்றி வரையறுப்போம் எனில்

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

மெய்யெண் நேர்க்கோட்டில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளுக்கும் $x = 0$-ஐயும் சேர்த்து h வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் $x = 0$-இல் h தொடர்ச்சியானது.

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = h(0).$$

$x \neq 0$-க்கு $h(x) = f(x)$ என்பதைக் கவனிக்கவும். மூலச்சார்பு $f(x)$, $x = 0$-இல் தொடர்ச்சியற்றதாக இருந்தபோதிலும் மாற்றி வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு h பூஜ்ஜியத்திலும் தொடர்ச்சியானதாக உள்ளது. அதாவது சார்பை மாற்றி வரையறுத்து தொடர்ச்சியற்ற தன்மையை தொடர்ச்சியானதாக மாற்ற முடியும். இவ்வாறு உள்ள தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகள் நீக்கக்கூடியத் தொடர்ச்சியின்மை எனப்படும்.

வரையறை 9.10

$h : I \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $h(x) = \begin{cases} f(x), & ;\ x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & ;\ x = x_0 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்டால் $I \subseteq R$ என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு f-க்கு $x_0 \in I$-இல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது எனலாம்.

நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மைக்கு $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ கிடைக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.38-ல் உள்ளவாறு $g(x) = C(x)$ என்ற சார்பை ஆய்வு செய்வோம். இது $[0, \infty)$-இல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் வரையறுக்கப்பட்டாலும், $\lim\limits_{x\to 100} g(x)$ கிடைக்கப்பெறவில்லை. மேலும் $\lim\limits_{x\to 100^+} g(x) - \lim\limits_{x\to 100^-} g(x) = 16 - 14 = 2$ என்ற முடிவான மதிப்புக்கு

ஒரு துள்ளல் உள்ளது. $\lim\limits_{x\to 100} g(x)$-ன் மதிப்பு கிடைக்கவில்லை என்பதால் $x = 100$-இல் அது தொடர்ச்சியற்றது. இதுபோன்ற தொடர்ச்சியற்ற தன்மைகள் துள்ளல் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை எனப்படும். இதிலிருந்து பின்வரும் வரையறையைப் பெறலாம் :

வரையறை 9.11

$I \subseteq R$ என்ற இடைவெளியில் f என்ற சார்பு வரையறுக்கப்பட்டது என்க.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ஆகியவை கிடைக்கப்பெற்று $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ எனுமாறு $x_0 \in I$-இல் f-க்குத் துள்ளல் தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.38

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & ;\ x \neq 0 \\ 0, & ;\ x = 0 \end{cases}$$ என வரையறுக்கப்பட்டால் f என்ற சார்பு $\mathbb{R}$ -இல் தொடர்ச்சியானதா எனத் தீர்மானிக்க.

தீர்வு

இடையீட்டுத் தேற்றப்படி $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$ மற்றும் $f(x)$-ன் வரையறைப்படி $f(0) = 0$, எனவே, $x = 0$-இல் f தொடர்ச்சியானது. மேலும் மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது என்பது தெளிவாகத் தெரிகிறது. எனவே f என்ற சார்பு $\mathbb{R}$ -இல் தொடர்ச்சியானது.

பயிற்சி 9.5

(1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $\mathbb{R}$ -ன் எல்லா புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

(2) பின்வருவனவற்றின் தொடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க :

(i) $x + \sin x$ (ii) $x^2 \cos x$ (iii) $e^x \tan x$

(iv) $e^{2x} + x^2$ (v) $x \,.\ln x$ (vi) $\dfrac{\sin x}{x^2}$

(vii) $\dfrac{x^2-16}{x+4}$ (viii) $|x+2| + |x-1|$ (ix) $\dfrac{|x-2|}{|x+1|}$

(x) $\cot x + \tan x$

(3) பின்வரும் சார்புகளுக்குத் தொடர்ச்சித் தன்மையைக் கொடுக்காத புள்ளிகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = \begin{cases} 4x+5, & ;\ x \leq 3 \\ 4x-5, & ;\ x > 3 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} x+2, & ;\ x \geq 2 \\ x^2, & ;\ x < 2 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & ,\ x \leq 2 \\ x^2 + 1, & ,\ x > 2 \end{cases}$ (iv) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

(4) கொடுக்கப்பட்ட சார்புக்குக் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி x_0-இல் தொடர்ச்சியானதா அல்லது தொடர்ச்சியற்றதா எனக் காரணத்துடன் கூறுக.

(i) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ (ii) $x_0 = 3,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & ;\ x \neq 3 \\ 5, & ;\ x = 3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & ;\ x \neq 1 \\ 3, & ;\ x = 1 \end{cases}$ என்ற சார்பு $(-\infty, \infty)$-இல் தொடர்ச்சியானது எனக்காட்டுக.

(6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1}, & ;\ x \neq 1 \\ \alpha, & ;\ x = 1 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பில் $x = 1$-இல் சார்பு தொடர்ச்சியானது எனில், α-ன் மதிப்பு காண்க.

(7) $f(x) = \begin{cases} 0, & ;\ x < 0 \\ x^2, & ;\ 0 \leq x < 2 \\ 4, & ;\ x \geq 2 \end{cases}$ என்ற சார்பின் வளைவரையை வரைக. இச்சார்பு $(-\infty, \infty)$-ல் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

(8) f மற்றும் g தொடர்ச்சியான சார்புகள் மேலும் $f(3) = 5$ மற்றும் $\lim\limits_{x \to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$ எனில் $g(3)$-ஐக் காண்க.

(9) சார்பு தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ள புள்ளிகளைக் காண்க. இந்தப் புள்ளிகளில் எந்தப் புள்ளிகளுக்கு f-க்கு வலப்பக்கத் தொடர்ச்சி, இடப்பக்கத் தொடர்ச்சி மற்றும் எதுவுமில்லை என உள்ளதைக் காண்க. f-ன் வளைவரையை வரைக.

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & ;\ x \leq -1 \\ 3x & ;\ -1 < x < 1 \\ 2x-1, & ;\ x \geq 1 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & ;\ x < 0 \\ (x+1)^3, & ;\ x \geq 0 \end{cases}$

(10) f பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x < 0 \\ x & ;\ 0 \leq x < 1 \\ -x^2+4x-2 & ;\ 1 \leq x < 3 \\ 4-x & ;\ x \geq 3 \end{cases}$$

இந்தச் சார்பு தொடர்ச்சியானதா?

(11) பின்வரும் சார்புகளில் எவற்றுக்கு $x = x_0$-ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது எனக் காண்க? தொடர்ச்சியற்ற தன்மை இருக்குமானால், f-ன் $x \neq x_0$-க்கு ஏற்றவாறு $\mathbb{R}$-இல் தொடர்ச்சியாக இருக்குமாறு g என்ற சார்பைக் காண்க.

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x+2}, \quad x_0 = -2$.

(ii) $f(x) = \dfrac{x^3+64}{x+4}, \quad x_0 = -4$.

(iii) $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}, \quad x_0 = 9$.

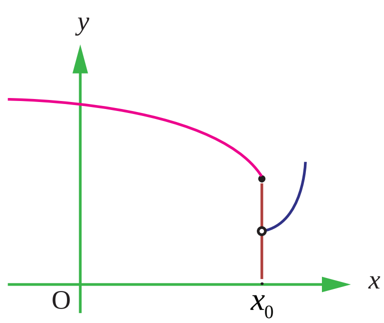
(12) $g(x) = \begin{cases} x^2 - b^2 & ; \; x < 4 \\ bx + 20 & ; \; x \geq 4 \end{cases}$ என்ற சார்பு $(-\infty, \infty)$ -ல் தொடர்ச்சியானது எனில் மாறிலி b -ஐக் காண்க.

(13) $f(x) = x \sin \dfrac{\pi}{x}$ என்க. $f(0)$–ன் எந்த மதிப்புக்கு f எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்?

(14) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ என்ற சார்பு $x = 1$–ல் வரையறுக்கப்படவில்லை. $f(1)$–ன் எந்த மதிப்பிற்கு $x = 1$–ல் f தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும் ?

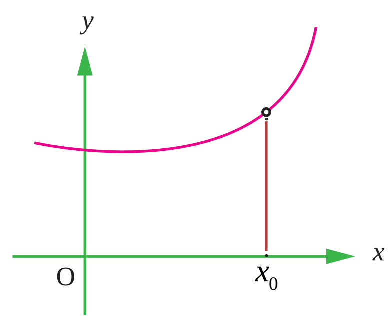
(15) பின்வரும் வளைவரைகளுக்கு $x = x_0$ -ல் எவ்வாறு தொடர்ச்சியற்று உள்ளது எனக்கூறுக?

(a)



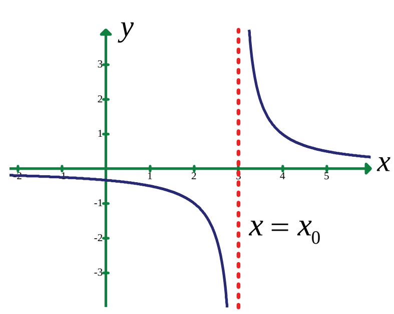
படம் 9.38

(b)



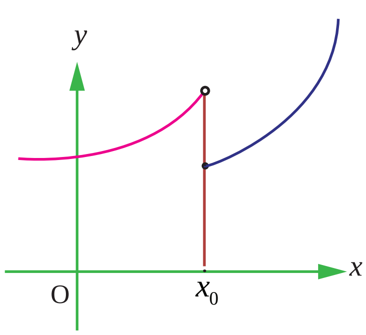
படம் 9.39

(c)



படம் 9.40

(d)



படம் 9.41

பயிற்சி 9.6

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

(1) 1 (2) 0 (3) ∞ (4) $-\infty$

(2) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{2x - \pi}{\cos x}$

(1) 2 (2) 1 (3) -2 (4) 0

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$

(1) 0 (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) இவற்றில் ஏதுமில்லை

(4) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin \theta}}$

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) 2

(5) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + x + 3} \right)^x$

(1) e^4 (2) e^2 (3) e^3 (4) 1

(6) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1} =$

(1) 1 (2) 0 (3) – 1 (4) $\frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} =$

(1) $\log ab$ (2) $\log \left(\frac{a}{b} \right)$ (3) $\log \left(\frac{b}{a} \right)$ (4) $\frac{a}{b}$

(8) $\lim_{x \to 0} \frac{8^x - 4^x - 2^x + 1^x}{x^2} =$

(1) 2 log 2 (2) $2(\log 2)^2$ (3) log 2 (4) 3 log 2

(9) $f(x) = x(-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$, $x \leq 0$, இங்கு x என்பது x-க்குச் சமமான அல்லது குறைவான மீப்பெரு முழு எண், எனில், $\lim_{x \to 0} f(x)$ -ன் மதிப்பு

(1) – 1 (2) 0 (3) 2 (4) 4

(10) $\lim_{x \to 3} \lfloor x \rfloor =$

(1) 2 (2) 3 (3) மதிப்பு இல்லை (4) 0

(11) $f(x) = \begin{cases} 3x & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ -3x + 5 & , \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$ எனில்

(1) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ (2) $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

(3) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ (4) $\lim_{x \to 1} f(x)$ இல்லை

(12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ என்பது $f(x)=\lfloor x-3\rfloor+|x-4|$, $x\in\mathbb{R}$, என வரையறுக்கப்பட்டால் $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ –ன் மதிப்பு

(1) – 2 (2) – 1 (3) 0 (4) 1

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\sin x}{x}$ –ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

(14) If $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{\tan 3x}=4$ எனில் p–ன் மதிப்பு

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 4

(15) $\lim\limits_{\alpha\to\pi/4}\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{4}}$ –ன் மதிப்பு

(1) $\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (3) 1 (4) 2

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$ is

(1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 0 (3) 1 (4) ∞

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}=$

(1) 1 (2) e (3) $\dfrac{1}{e}$ (4) 0

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x-x}=$

(1) 1 (2) e (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 0

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$ –ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) எல்லை மதிப்பு இல்லை

(20) $\lim\limits_{x\to k^-} x-\lfloor x\rfloor$ –ன் மதிப்பு இங்கு k

(1) – 1 (2) 1 (3) 0 (4) 2

(21) $x=\dfrac{3}{2}$ –ல் $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$ என்பது

(1) தொடர்ச்சியானது (2) தொடர்ச்சியற்றது

(3) வகையிடத்தக்கது (4) பூஜ்ஜியமற்றது

(22) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ என்பது $f(x)=\begin{cases} x & ;\ x \text{ ஒரு விகிதமுறா எண்} \\ 1-x & ;\ x \text{ ஒரு விகிதமுறு எண்} \end{cases}$ எனில் f என்பது

(1) $x=\frac{1}{2}$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது (2) $x=\frac{1}{2}$ -ல் தொடர்ச்சியானது

(3) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது (4) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியற்றது

(23) சார்பு $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+1}$, $x=-1$ ஆல் வரையறுக்கப்படவில்லை. $f(-1)$ -ன் எம்மதிப்பிற்கு இந்த சார்பு தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்.

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) 0

(24) f என்ற சார்பு [2, 5]–இல் தொடர்ச்சியானது என்க. x–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் f விகிதமுறு மதிப்புகளை மட்டுமே பெறும். மேலும் $f(3)=12$ எனில் $f(4.5)$ –ன் மதிப்பு

(1) $\frac{f(3)+f(4.5)}{7.5}$ (2) 12 (3) 17.5 (4) $\frac{f(4.5)-f(3)}{1.5}$

(25) f என்ற சார்பு $f(x)=\frac{x-|x|}{x}, x\neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டு $f(0)=2$ எனில் f என்பது

(1) எங்கும் தொடர்ச்சியானது அல்ல

(2) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது

(3) x = 1–ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(4) x = 0 –ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- x–ன் மதிப்பு x_0 –க்கு குறைவான மதிப்பிலிருந்து x_0 –ஐ நெருங்கும்போது $y=f(x)$ என்ற சார்பின் எல்லை மதிப்பு
- x–ன் மதிப்பு x_0 –க்கு அதிகமான மதிப்பிலிருந்து x_0 –ஐ நெருங்கும்போது $y=f(x)$ என்ற சார்பின் எல்லை மதிப்பு.
- x_0 -ஐ நீக்கிய x_0 –ன் அண்மைப்பகுதியில் x–ன் மதிப்பு x_0 –ஐ நெருங்கும்போது சார்பு f–ன் எல்லைமதிப்பு இருக்குமானால் $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ என இருக்கும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ என்பது $x=x_0$ –ஐ தவிர x–ன் மதிப்பு x_0 –க்கு இருபுறமிருந்தும் x_0 –ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$ –ன் மதிப்பு L –க்கு நெருங்குகின்றது.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ இருக்குமானால்

(i) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x). \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ எனில் $g(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

- $x \to x_0^-$ எனும்போது $f(x) \to \pm\infty$ அல்லது $x \to x_0^+$ எனும்போது $f(x) \to \pm\infty$ அல்லது $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \neq l_2 = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ என இருக்குமானால், x-ன் மதிப்பு x_0 -ஐ நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பு இல்லை.
- (M, ∞) என்பது $+\infty$ -ன் அண்மைப்பகுதி, $M > 0$

  $(-\infty, K)$ என்பது $-\infty$ -ன் அண்மைப்பகுதி $K < 0$.
- $x \to x_0$ எனும்போது $f(x) \to \pm\infty$ எனில் $x \to x_0$ என்று செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.
- $x \to \infty$ எனும்போது $f(x) \to l_1$ அல்லது $x \to -\infty$ எனும்போது $f(x) \to l_2$ ஆகியவற்றில் ஒன்று உண்மை எனில் $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு $y = l_1$ (அ) l_2 என்ற கோடு கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.
- $f(x)$ தொடர்ச்சியானது எனில்

  (i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

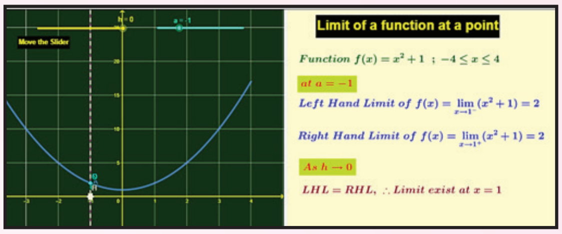
  (ii) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

  (iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$ இதன் மறுதலையும் உண்மை.
- துள்ளல் மற்றும் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை.

இணையச் செயல்பாடு 9 (a)

வகை நுண்கணிதம்-எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது



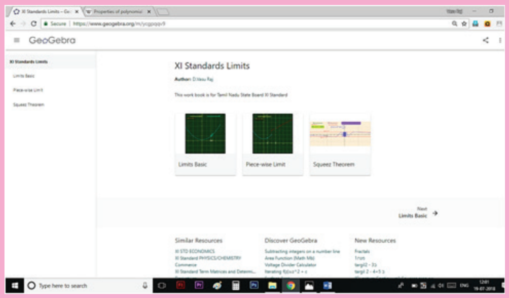
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "XI standard Limits" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பயிற்சித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்..

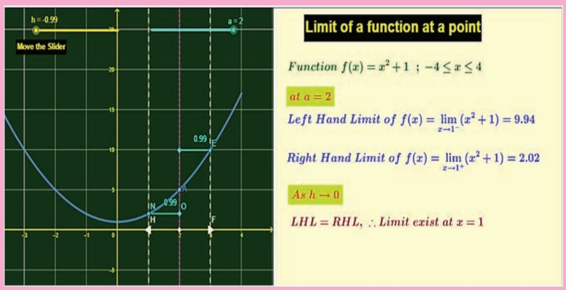
படி –2

"Limits basic" என்ற பயிற்சித் தாளைத் தேர்வு செய்க. தொடர் சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.உங்களுக்கு வேண்டிய புள்ளியை நழுவல் 'a' நகர்த்தி தேர்வு செய்து கொள்ளலாம்.கோடு $x = h$ -ஐ நகர்த்தவும் (ஒரு புள்ளிக்கு அருகில்) இடது மற்றும் வலது பக்கம் இரு புறமும் f(h) -ஐ சரிபார்க்க நழுவல் "h"-ஐ நகர்த்தவும். புத்தகத்தில் உள்ள வரையறையுடன் ஒப்பிட்டு சரி பார்க்கவும்..

மேலும் புது வினாக்களுக்கு "New Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்யவும்.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

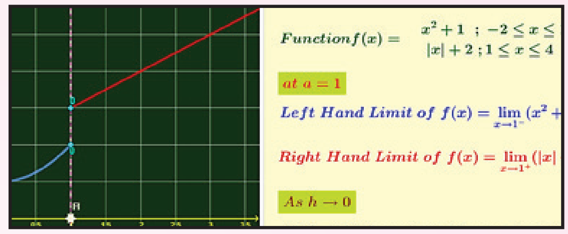
https://ggbm.at/ycgpqqv9

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

இணையச் செயல்பாடு 9 (b)

வகை நுண்கணிதம்-எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

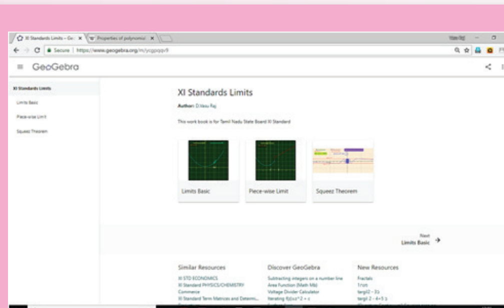


படி – 1

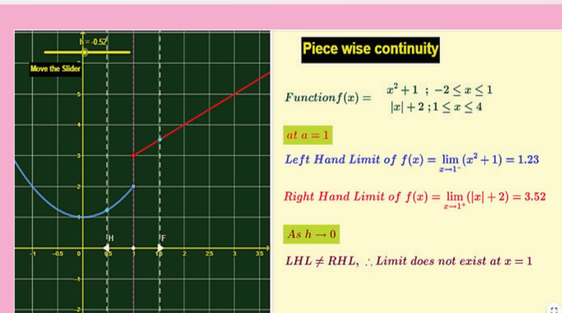
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் XI " standard Limits" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பயிற்சித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Piece-wise limit" என்ற பயிற்சித் தாளைத் தேர்வுசெய்க.கோடு $x = h$ –ஐ நகர்த்தவும் (ஒரு புள்ளிக்கு அருகில்) இடது மற்றும் வலதுபக்கம் இருபுறமும் f(h) –ஐ சரிபார்க்க நழுவல் "h"–ஐ நகர்த்தவும். புத்தகத்தில் உள்ள வரையறையுடன் ஒப்பிட்டுச் சரிபார்க்கவும்.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/ycgpqqv9

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

அத்தியாயம் 10

வகை நுண்கணிதம்
வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்
DIFFERENTIABILITY AND METHODS OF DIFFERENTIATION

B10C2

"தேவையானதை எடுத்துக் கொள், செய்வன செய்,
அடையவேண்டியதை அடைவாய்"

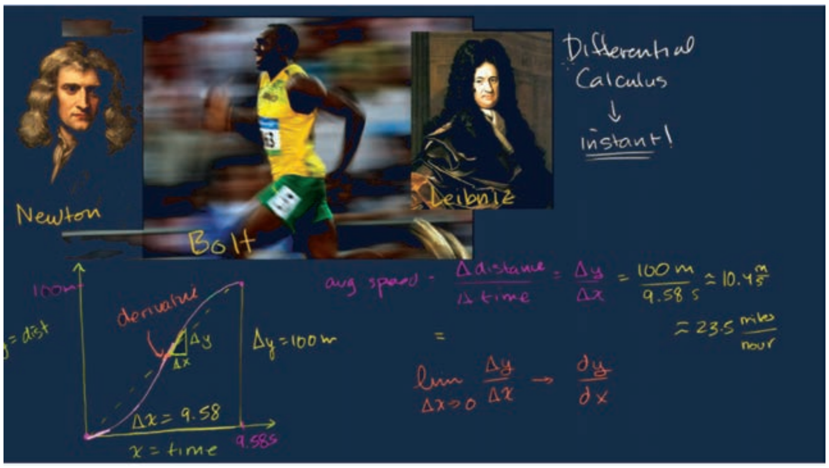
- லிபினிட்ஸ்

10.1 அறிமுகம் (Introduction)

இப்பாடப்பகுதியில் வகைக்கெழுக் கருத்தியலைப் பற்றியும், அதன் தொடர்பான இதர கருத்துகளையும் ஆராய்வதன் மூலம் அன்றாட வாழ்க்கையில் சந்திக்கும் சவால்களுக்குத் தீர்வுக் காண இயலும். இதன் தொடர்ச்சியாக திசைவேகத்தின் சராசரியைக் கீழ்க்காணும் உதாரணத்தின் மூலம் காண்போம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தினைக் கடக்க உள்ளுணர்வு மூலம் திசைவேகம் அல்லது வேக வீதத்தினைப் பயன்படுத்தும் இயல்பு பொதுவாக அனைவரிடமும் உள்ளது. சான்றாக ஒரு மணி நேரத்தில் ஒரு பேருந்து 60 கி.மீ. தூரத்தினைக் கடந்தால் அப்பேருந்தின் சராசரித் திசைவேகம் மணிக்கு 60 கி.மீ. என அமையும். ஆனால் பயணத் தூரம் முழுவதும் 60 கி.மீ. எனச் சீரான வேகத்திலேயே பேருந்தினை இயக்க இயலாது. ஏனெனில் நகர்ப்புறங்களில் சற்றே வேகத்தினை குறைக்கவும் பிற வாகனங்களைக் கடக்கும்போது வேகத்தினைக் கூட்டவும் வேண்டும். வேறு சொற்களில் சொல்வதென்றால், நேரத்தினைப் பொறுத்துத் திசைவேகம் மாறும் எனலாம்.

ஒரு போக்குவரத்து நிறுவனத்தின் அட்டவணைப்படி ஒரு பேருந்து ஓர் ஊரிலிருந்து மற்றோர் ஊருக்குச் செல்ல ஒரு மணி நேரத்தில் 60 கி.மீ. கடக்க வேண்டுமெனில் பேருந்தின் பயணப்பாதையில் ஆங்காங்கே ஏற்படும் நேர விரயத்தினையும், வேகக் குறைவினையும் ஏனைய இடங்களில் ஈடுசெய்ய வேண்டும் என்பதனை ஓட்டுநர் உணர்ந்தே பேருந்தினை இயக்குகிறார். சராசரித் திசைவேகம் மணிக்கு 60 கி.மீ. என்று அறிந்திருந்தாலும், ஒரு குறிப்பிட்ட தருணத்தில் பேருந்தின் திசைவேகம் என்னவென்பதற்கு விடையாக அமையாது.



உசேன் போல்ட்டின் சராசரி வேகம்

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{100\text{மீ}}{9.58\text{வி}} = 10.4 \text{ மீ/வி}$$

உசேன் போல்ட்டின் தற்போதைய வேகம் என்ன? → நுண்கணிதம்

பொதுவாக, சராசரித் திசைவேகம் அல்லது நகரும் பொருளின் சராசரி வேகம் என்பது இடப்பெயர்ச்சியின் நேர வீதம் என்பது கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$v_{ave} = \frac{\text{பயண தூரம்}}{\text{பயண நேரம்}}$$

ஒரு 10 கி.மீ பந்தயத் தூரத்தினை ஓர் ஓட்டப் பந்தய வீரர் நிறைவு செய்ய எடுத்துக் கொண்ட நேரம் 1 மணி 15 நிமிடங்கள் (1.25 மணி) எனக் கருதுவோம்.

காட்ஃபிரைட் வில்ஹெல்ம் லிபினிட்ஸ் (1646 - 1716)

இந்த ஓட்டப் பந்தயத்தில் அவருடைய சராசரித் திசைவேகம் அல்லது சராசரி வேகம்

$$v_{ave} = \frac{10}{1.25} = 8 \text{ கி.மீ. / மணி என்பதாகும்.}$$

பந்தயத்தூரத்தின்பாதித்தூரத்தினைக்கடக்கும்தருணத்தில்ஓடுபவரின் வேகம் v-யினைத் துல்லியமாகக் கணக்கிட வேண்டும் எனக் கருதுவோம். 0 மணியிலிருந்து 0.5 மணிக்குள் உள்ள நேர இடைவெளியில் உள்ள தூரம் 5 கி.மீ. எனில், $v_{ave} = \frac{5}{0.5} = 10$ கி.மீ/மணி ஆகும்.

அதே சமயம், அரை மணி நேரத்தில் ஓடுபவரின் வேக வீதத்திற்கான கணநேர வீதம் v–ஐ சிறந்த குறியீடாக மேற்கண்ட விடையை எடுத்துக் கொள்ள இயலாது. தொடக்க இடத்திலிருந்து 5.7 கி.மீ தூரத்தில் 0.6 மணியில் இருக்கிறார் எனத் தீர்மானித்தால், 0 மணியிலிருந்து 0.6 மணி வரையுள்ள சராசரி வேகம் $v_{ave} = \frac{5.7-5}{0.6-0.5} = 7$ கி.மீ./மணி ஆகும்.

கடைசியாகப் பெறப்பட்ட v–ன் மதிப்பை சற்றேறக்குறையச் சரியான மதிப்பீடாகக் கருதலாம். இக்கால இடைவெளியை 0.5 மணிக்குள் 'குறைப்பதன் மூலமும்' அதற்கேற்ப 5 கி.மீ. தூரத்திற்கு ஒப்ப நேர அளவீட்டையும் கணக்கிடும்போது ஓடுபவரின் வேகத்தினை அரைமணியில் மேலும் சிறப்பான தோராய மதிப்பீடுகளைத் தர இயலும்.

திசைவேகத்தினைக் கணக்கிடுவது என்பது $y = f(x)$ எனும் பொதுவான பகுமுறைச் சார்பினது கணித மாதிரியின் வகையிடுதலைக் கணக்கிடுவதற்கு இட்டுச் செல்கிறது. அதன் விளைவாக கீழ்க்காணும் குறிக்கோள்களையும், தொடர்ச்சியாக வகையிடுதலின் பகுப்பாய்வினைப் பற்றியும் காண்போம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- பின்னங்களின் எல்லையாக வகையீட்டினை அறிதல்
- வடிவியல் ரீதியாக வகையீட்டினைக் காணுதல்
- மாற்றங்களின் அளவீட்டுச் செயலாக வகையீட்டினைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- வளைவரைகளின் மீதான தொடுகோடுகளின் சாய்வாகவும்/மாறுவீதம் ஆகவும் வகையீட்டினை உணர்ந்து கொள்ளுதல்
- வகையிடுதலின் பல்வேறு முறைகளை அறிந்து கொள்ளுதல்
- அன்றாட நிகழ்வுகளின் தீர்வுகளுக்குக் கருவியாக வகை நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்துதல்.

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

10.2 வகையிடுதலின் கருத்தாக்கம் (The concept of derivative)

பதினேழாம் நூற்றாண்டில் கணிதவியலாளர்கள் தீர்வு காண முயன்ற நான்கு முக்கியமான கணக்குகளிலிருந்து வகைநுண் கணிதம் தோன்றி வளர்ச்சி பெற்றது. அவை

(1) தொடுகோடுக் கணக்கு

(2) திசைவேகம் மற்றும் முடுக்கக் கணக்கு

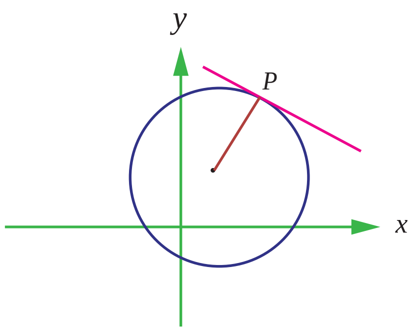
(3) சிறுமம் மற்றும் பெருமக் கணக்கு

(4) பரப்பளவுக் கணக்கு.

முதலிரண்டு கணக்குகளைப் பற்றி இப்பாடப்பகுதியில் காண்போம். ஏனைய இரண்டினைப் பின்னர் வரும் பாடப்பகுதியில் காணலாம்.

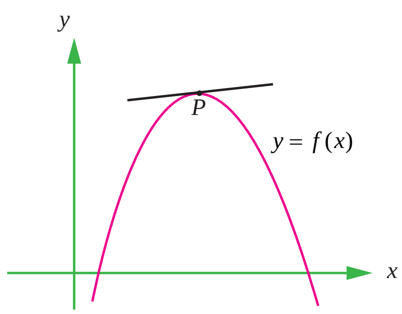
10.2.1. தொடுகோடுக் கணக்கு(The tangent line problem)

ஒரு வளைவரையில் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் ஒரு நேர்க்கோடு தொடுகோடாக அமைகின்றது என்பதன் பொருள் என்ன? ஒரு வட்டத்தில் 'P' எனும் புள்ளியின் மீது தொட்டுச் செல்லும் தொடுகோடு என்பது படம் 10.1–ல் கண்டுள்ளவாறு 'P' எனும் புள்ளியைச் சந்திக்கும் ஆரக்கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோடாக (radial line) அமையும்.

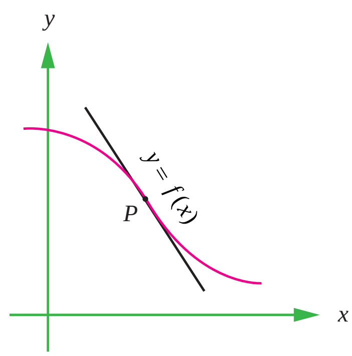


படம் 10.1

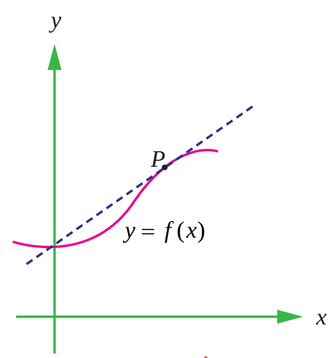
ஆனால் பொதுவான வளைவரையாக இருந்தால் தொடுகோட்டைக் கண்டறிவது மிகக் கடினமான செயலாகும். எடுத்துக்காட்டாக கீழ்க்காணும் 10.2–லிருந்து 10.4 வரையிலான படங்களில் உள்ளவற்றிற்குத் தொடுகோடுகளை எவ்வாறு வரையறுக்க இயலும்?



படம் 10.2



படம் 10.3



படம் 10.4

'P' எனும் புள்ளியில் வளைவரையை வெட்டிச் செல்லாமல் தொட்டுச் செல்லும் கோடுதான் தொடுகோடாக அமையும் எனக் கூற முனையலாம். இந்த வரையறை படம் 10.2–ல் உள்ளது போன்ற வளைவரைக்குப் பொருந்தும், ஆனால் 10.3–ல் உள்ள வளைவரைக்குப் பொருந்தாது, அல்லது ஒரு வளைவரைக்கு ஒரு கோடு தொடுகோடாக அமைய வேண்டுமெனில், கோடும் வளைவரையும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொட்டுச் செல்லவோ அல்லது சந்திக்கவோ வேண்டும். ஆனால் இந்த வரையறை வட்டத்திற்குப் பொருந்தக் கூடும். ஆனால் படம் 10.4–ல் உள்ளது போன்ற பொதுவான வளைவரைகளுக்கு இந்த வரையறை பொருந்தாது.

அடிப்படையில் 'P' எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டைக் கண்டறிய முயல்வது 'P' எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் கண்டறிவதாக மாறுகிறது.

இச்சாய்வினை, தொடுவரைப்புள்ளி (point of tangency) மற்றும் வளைவரையின் மீதான மற்றொரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வெட்டுக் கோட்டின் சாய்வுக்குத் தோராயமாகப் படம் 10.5ல் காண்பதுபோல் காணலாம்.

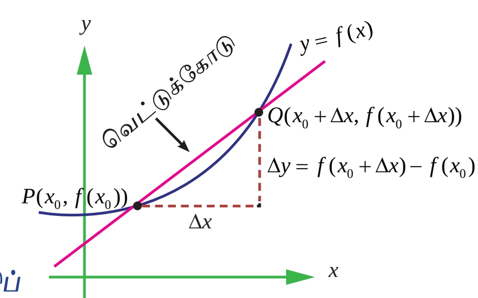
தொடுவரைப்புள்ளியாக $P(x_0, f(x_0))$ எனவும் இரண்டாவது புள்ளியாக $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ எனவும் கருதுவோம்.

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ எனும் சாய்வு விதியில் பிரதியிடுவதன் மூலம் இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வெட்டுக் கோட்டின் சாய்வைப் பெற இயலும்.

$$m_{sec} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{(x_0+\Delta x) - x_0} = \frac{y\text{-ன் மாற்றம்}}{x\text{-ன் மாற்றம்}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

அதாவது, $m_{\text{sec}} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ என்பது

வெட்டுக்கோட்டின் சாய்வாக அமையும்.



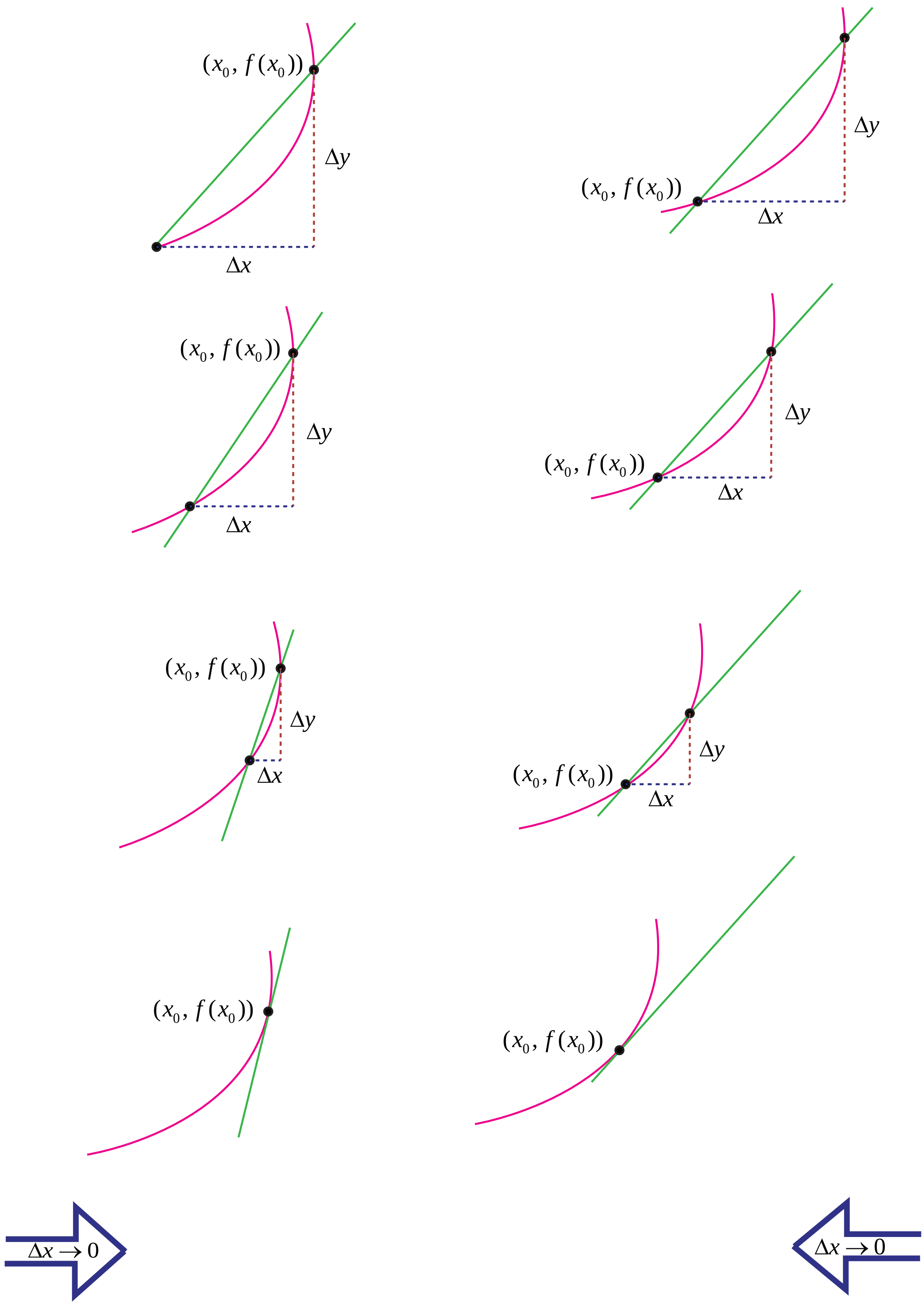
படம் 10.5

இந்தச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் இருப்பது வேறுபாட்டுப் பின்னம் (Difference quotient) ஆகும்.

பகுதி Δx என்பது ***x*–ன் மாற்றம்** (x–ன் அதிகரிப்பு) மற்றும் தொகுதி $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ என்பது ***y*–ன் மாற்றம்** ஆகும்.

தொடுவரைப்புள்ளிக்கு மிக அருகே புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் தொடுகோட்டின் சாய்விற்கான சிறந்த தோராய மதிப்பினைப் பெற இயலும் என்பதே இம்முறையின் சிறப்பம்சம் ஆகும்.

தொடுகோட்டின் தோராயம்



படம் 10.6 முதல் 10.13 வரை

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.1

$f(x) = x^2$ எனும் வளைவரைக்கு (1, 1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் கண்டறிவோம்.

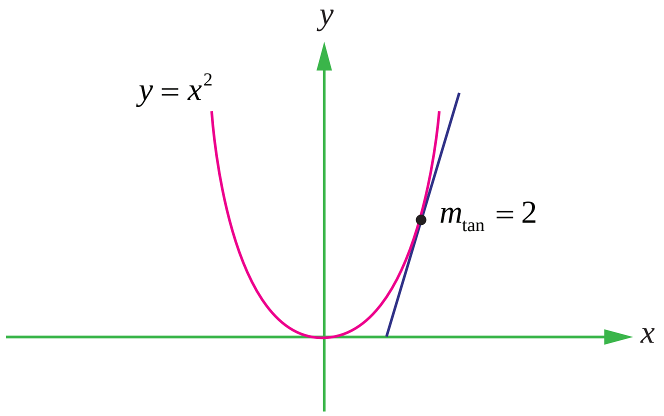
முதலில் $\Delta x = 0.1$ எனக் கருதுவோம். (1, 1) மற்றும் $(1.1, (1.1)^2)$ புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வெட்டுக்கோட்டின் சாய்வினைக் கண்டறிவோம்.

(i) $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$

(ii) $\Delta y = f(1.1) - f(1)$

$= 1.21 - 1 = 0.21$

(iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0.21}{0.1} = 2.1$



படம் 10.14

1–க்கு வலப்பக்கமும் இடப்பக்கமும் அமையும் அடுத்தடுத்த மதிப்புகளைக் கீழ்க்காணும் வகையில் அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

Δx	$1 + \Delta x$	$f(1)$	$f(1 + \Delta x)$	Δy	$\Delta y / \Delta x$
0.1	1.1	1	1.21	0.21	2.1
0.01	1.01	1	1.0201	1.0201	2.01
0.001	1.001	1	1.002001	0.002001	2.001
– 0.1	0.9	1	0.81	– 0.19	1.9
– 0.01	0.99	1	0.9801	– 0.0199	1.99
– 0.001	0.999	1	0.998001	– 0.001999	1.999

தெளிவாக, $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

இவற்றின் மூலம் $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ எனக் காணலாம்.

எனவே, $y = x^2$ எனும் வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்வு (1, 1) எனும் புள்ளியில் $m_{\tan} = 2$ என அமையும்.

படங்கள் 10.6 முதல் 10.13, விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.1 மற்றும் நமது உள்ளுணர்வின் வாயிலாக, "P எனும் புள்ளியில் $y = f(x)$ எனும் வளைவரையின் 'L' எனும் தொடுகோடு, $Q \to P$ $(\Delta x \to 0)$ எனுமாறு P மற்றும் Q–ன் வழியாகச் செல்லும் வெட்டுக்கோடு PQ –ன் எல்லை என எடுத்துரைக்க இயலும்'. மேலும் L–ன் சாய்வு $m_{\tan}$ என்பது $\Delta x \to 0$ எனும்போது $m_{\sec}$ –ன் **எல்லை மதிப்பாக** அமையும். இதனையே பின்வருமாறு தொகுத்துக் கூறலாம்:

வரையறை 10.1 (சாய்வு m உள்ள தொடுகோடு) (Tangent line with slope m)

x_0 என்ற புள்ளி அமைந்துள்ள திறந்த இடைவெளியில் f என்ற சார்பினை வரையறுப்போம்.

மேலும், $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m_{\tan}$ கிடைக்கப்பெற்றால், m எனும் சாய்வுடன் $(x_0, f(x_0))$ புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோடு, $(x_0, f(x_0))$ எனும் புள்ளியில் f எனும் வளைவரையின் **தொடுகோடாக** அமையும்.

$(x_0, f(x_0))$ என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட **தொடுகோட்டின் சாய்வு**, அப்புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது,

வரையறையின் மூலம் ஒரு வளைவரை $(x_0, f(x_0))$ என்ற புள்ளியில் ஒரு தொடுகோட்டினைத் தருமாயின் அது தனித்ததாக இருக்கும். ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி மற்றும் சாய்வு வழியாக ஒரே ஒரு கோட்டினையே வரைய இயலும்.

வளைவரையின் சாய்வைக் காண்பதற்கான நிபந்தனைகளை 4 படி நிலைகளாக எழுதலாம்.

(i) x_0 மற்றும் $x_0 + \Delta x$ என்ற புள்ளிகளில் f–ன் மதிப்புகளைக் காண்க. அதாவது, $f(x_0)$ மற்றும் $f(x_0 + \Delta x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) Δy கணக்கிடுக: அதாவது $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$–ஐ காண்க.

(iii) Δy–ஐ $\Delta x \neq 0$ஆல் வகுக்க : அதாவது, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ –ஐ காண்க.

(iv) $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$ எனும்போது : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ –ன் எல்லையைக் காண்க. அதாவது, $m_{\tan} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

விளக்கஎடுத்துக்காட்டு 10.1–ல் உள்ள வளைவரையின் சாய்வினைக் காண்பதை எளிமைப்படுத்த வரையறைகள் பயன்படுவதைக் காணலாம்.

(i) $f(1) = 1^2 = 1$.

எந்தவொரு $\Delta x \neq 0$–க்கும் $f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$

(ii) $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 2\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x\,(2 + \Delta x)$

(iii)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$= 2 + \Delta x .$$

(iv)
$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x) = 2+0 = 2 .$$

எடுத்துக்காட்டு 10.1

$f(x) = 7x + 5$ எனும் வளைவரைக்கு $(x_0, f(x_0))$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் காண்க.

தீர்வு

படிநிலை (i) $f(x_0) = 7x_0 + 5.$

எந்தவொரு $\Delta x \neq 0$–க்கும்,

$$f(x_0 + \Delta x) = 7(x_0 + \Delta x) + 5$$
$$= 7x_0 + 7\Delta x + 5$$

படிநிலை (ii)
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= (7x_0 + 7\Delta x + 5) - (7x_0 + 5)$$
$$= 7\Delta x$$

படிநிலை (iii)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$$

எனவே, $f(x) = 7x + 5$ எனும் வளைவரையில் உள்ள எந்தவொரு புள்ளிக்கும்,

படிநிலை (iv) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (7)$

$= 7$

ஒரு நேரிய வளைவரைக்கு, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ என்பது x_0 மற்றும் ஏற்ற மதிப்பான Δx ஆகியவற்றை சாராமல் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.2

$f(x) = -5x^2 + 7x$ எனும் வளைவரைக்கு $(5, f(5))$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் காண்க.

தீர்வு

படிநிலை (i) $f(5) = -5(5)^2 + 7 \times 5 = -125 + 35 = -90.$

எந்தவொரு $\Delta x \neq 0$–க்கும்

$f(5 + \Delta x) = -5(5 + \Delta x)^2 + 7(5 + \Delta x) = -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2.$

படிநிலை (ii) $\Delta y = f(5 + \Delta x) - f(5)$

$= -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2 + 90 = -43\Delta x - 5(\Delta x)^2$

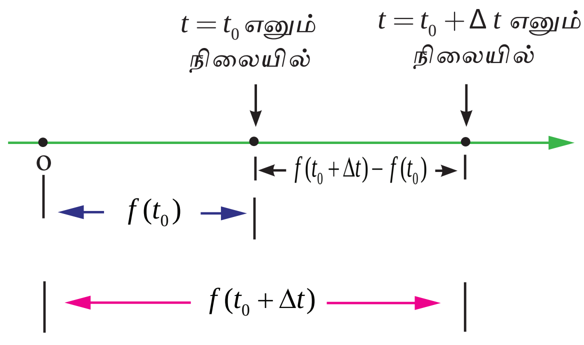
$= \Delta x\,[-43 - 5\Delta x].$

படிநிலை (iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -43 - 5\Delta x$

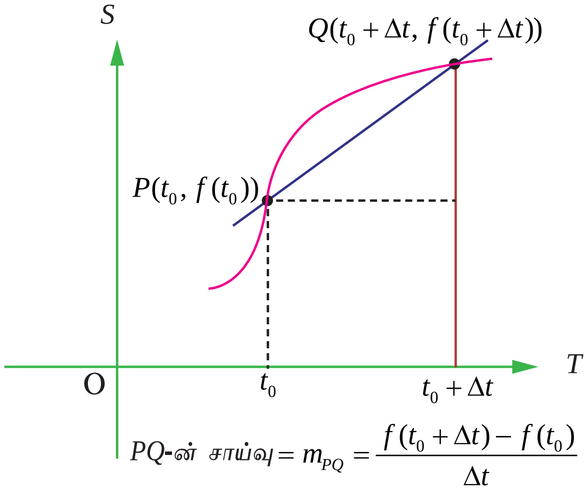
படிநிலை (iv) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -43.$

10.2.2 நேர்க்கோட்டியக்கத்தில் திசைவேகம் (Velocity of Rectilinear motion)

ஆதியிலிருந்து 't' நேரத்தில் ஒரு பொருளின் நகர்வு (இயக்கப்பட்ட தூரம்) s என்க. $s = f(t)$ எனும் இயக்கச் சமன்பாட்டின்படி அப்பொருள் நேர்க்கோட்டில் நகர்வதாகக் கொள்வோம். இங்கு இயக்கத்தை விவரிக்கும் 'f' எனும் சார்புப் பொருளின் '**நிலைச்சார்பு**' (position function) என அழைக்கப்படுகிறது. $t = t_0$–லிருந்து $t = t_0 + \Delta t$ எனும் நேர இடைவெளியில் நிலை மாற்றம் $f(t_0 + \Delta t) - fs(t_0)$ ஆகும். இந்த நேர இடைவெளியில் சராசரி திசைவேகம்



படம் 10.15

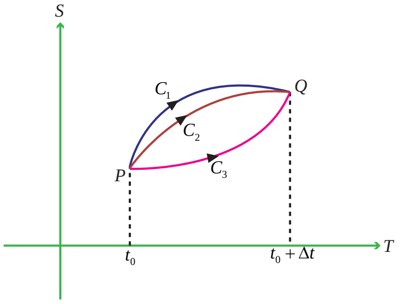


படம் 10.16

$$\mathrm{v}_{\text{avg}} = \frac{\text{நிலை மாற்றத் தொலைவு}}{\text{நேரம்}} = \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = \frac{s\text{-ல் உள்ள மாற்றம்}}{t\text{-ல் உள்ள மாற்றம்}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

இது படம் 10.16–ல் உள்ளபடி PQ எனும் வெட்டுக்கோட்டின் சாய்வு ஆகும்.

நேர இடைவெளி Δt –ல் (t_0–லிருந்து $t_0 + \Delta t$ வரை) தூரத்தை நிறைவு செய்தல் (செல்லும் தூரம்) ஒன்றாக இருந்தாலும் இயக்கம் பல வகையாக அமையலாம். இது ஒரு தளத்திலுள்ள P மற்றும் Q புள்ளிகளுக்கிடையே முற்றிலும் வெவ்வேறான C_1, C_2, C_3 … வளைவரைகள் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளது. (படம் 10.17) இந்த வரைபடத்தில் உள்ள வளைவரைகள் கொடுக்கப்பட்ட நேர இடைவெளிகளில், அனைத்து இயக்கங்களுக்கும் $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ எனும் ஒரே சராசரித் திசைவேகம் கொண்டதாகவும் ஆனால், முற்றிலும் வெவ்வேறான இயக்கங்களாகவும் அமைகின்றது.



படம் 10.17

$[t_0, t_0 + \Delta t]$ எனும் குறுகிய மற்றும் மேலும் தொடர்ந்து குறுகிய நேர இடைவெளிகளில் சராசரித் திசைவேகங்களை இப்போது கணக்கிடுவோம். வேறு விதமாகக் கூறுவதென்றால், Δt என்பது 0–வை அணுகுவதாக கொள்வோம். இப்போது $t = t_0$ என்ற நேரத்தில் திசைவேகத்தினை $v(t_0)$ (கணநேர திசைவேகம்) சராசரித் திசைவேகங்களின் எல்லையாகக் காணலாம்.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

இதிலிருந்து $t = t_0$ என்ற நேரத்தில் திசைவேகம் என்பதும் P என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வும் சமமாக இருக்கிறது என்பது தெளிவாகிறது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.2

வெற்றிட வெளியில் தடையின்றி விழும் ஒரு பொருள் கடந்த தூரம் s என்க. அதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t என்க. இவை இரண்டும் மாறிகளாகவும் ஒன்றையொன்று சார்ந்ததாகவும் இருக்கும். தடையற்று விழும் விதிப்படி மேற்கண்ட சார்ந்த தன்மையைக் கீழ்க்காணுமாறு விவரிக்கலாம்:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (தொடக்கத் திசைவேகம் இல்லாதபோது),}$$

இங்கு g புவியீர்ப்பு மாறிலியாகும்.

படிநிலை (i) $$f(t_0+\Delta t) = \frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g\left(t_0^2+2t_0\Delta t+(\Delta t)^2\right)$$

படிநிலை (ii) $$\Delta s = f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$$
$$= \frac{1}{2}g\left[(t_0^2+2t_0\Delta t+(\Delta t)^2\right]-\frac{1}{2}gt_0^2$$
$$= g\,\Delta t\left[t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right]$$

படிநிலை (iii) $$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g\,\Delta t\left[t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right]}{\Delta t} = g\left[t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right]$$

படிநிலை (iv) $$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0\,.$$

இதிலிருந்து, t_0 கணநேரத்தில் முழுமையாகத் திசைவேகம் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்பது தெளிவாகிறது. மேலும் இது இயக்க நேரத்திற்கு விகித சமமாக அமைகின்றது.

10.2-3. சார்பின் வகைக்கெழு அல்லது வகையிடல் (The derivative of a Function)

இப்போது நாம் நுண் கணிதத்தின் மிக முக்கியமான தருணத்திற்கு வந்துள்ளோம். எல்லை மூலமாகத் தொடுகோட்டின் சாய்வை வரையறுத்தல் அல்லது எல்லை மூலமாகத் தடையின்றி விழும் பொருளின் கணநேரத் திசைவேகத்தினைக் காணுதல், என்பது வகை நுண்கணிதத்தில் உள்ள இரு அடிப்படைச் செயல்பாடுகளில் ஒன்றான **வகையிடல்** ஆகும்.

வரையறை 10.2

x_0 என்ற புள்ளி அமைந்துள்ள ஒரு திறந்த இடைவெளியான $I \subseteq \mathbb{R}$–ல் f என்ற சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ என்பது கிடைக்கப்பெறும் என்க. இப்போது f என்பது x_0–ல் **வகையிடத்தக்கது** எனவும், x_0–ல் f –ன் **வகைக்கெழு** என்பது $f'(x_0)$ எனக் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு அமைகிறது.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

இந்த எல்லையானது கிடைக்கப்பெறும் அனைத்து x–ன் மதிப்புகளுக்கும்

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ என்பது x–ன் சார்பாக அமையும்.

x–ஆல் ஆன சார்பின் வகைக்கெழுவும் x–ஆல் ஆன சார்பாக அமைவதை உறுதி செய்ய முடியும். இந்தப் "புதிய சார்பு" $(x, f(x))$, எனும் புள்ளியில் f என்ற வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் கொடுப்பதாக அறியலாம். (அந்தப் புள்ளியில் தொடுகோட்டை வரைய முடியுமெனில்)

ஒரு சார்பின் வகைக்கெழுவைக் காணும் முறையினை **வகையிடல்** என அழைக்கிறோம். ஒரு சார்பு x–ல் வகையிடத்தக்கதாக (வகைமையாக) இருக்க, x–ல் அதன் வகைக்கெழு இருத்தல் வேண்டும். மேலும் **திறந்த இடைவெளியான (a, b)–ல் வகைமையாக இருக்க வேண்டுமாயின் (a, b)–ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைமையாக இருத்தல் வேண்டும்.**

$y = f(x)$–ன் வகைக்கெழுவைக் குறிக்க, $f'(x)$ "f prime of x" அல்லது "f dash of x" என்பது மட்டுமன்றி பிற குறியீடுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவற்றில் சில,

$f'(x), \dfrac{dy}{dx}, y', \dfrac{d}{dx}[f(x)], D_x[y]$ அல்லது Dy அல்லது y_1. இங்கு $\dfrac{d}{dx}$ அல்லது D என்பது வகையிடல் செயலி ஆகும்.

இங்கு $\dfrac{dy}{dx}$ என்பதை "$dy - dx$", அல்லது "Dee y Dee x" அல்லது "Dee Dee x of y" எனவும் படிக்கலாம். இக்குறியீடு ஒரு பின்னத்தை குறிக்காது என்பதை நினைவில் நிறுத்தவும்.

$\dfrac{dy}{dx}$ என்ற குறியீட்டினை **லிபினிட்ஸ் குறியீடு** என்பர்.

10.2.4 ஒரு பக்க வகைக்கெழுக்கள் (இடப்பக்க மற்றும் வலப்பக்க வகைக்கெழு)
One sided derivatives (left hand and right hand derivatives)

x_0 எனும் புள்ளியினை உடைய திறந்த இடைவெளியான (a, b)–ல் $y = f(x)$ எனும் சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது. $x = x_0$–ல் f–ன் **இடப்பக்க வகைக்கெழு**வும் **வலப்பக்க வகைக்கெழு**வும் முறையே $f'(x_0^-)$ மற்றும் $f'(x_0^+)$, எனக் குறிக்கப்பட்டுக் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

எல்லைகள் கிடைக்கும் பட்சத்தில்

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ எனவும்}$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ எனவும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.}$$

அதாவது, வலப்பக்கமாகவும் இடப்பக்கமாகவும் சார்பு வகைமையானதாக அமைகிறது, x_0-ல் சார்பின் எல்லை வரையறையில் கண்டது போல், $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ என்ற வகைக்கெழு கிடைக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை என்னவெனில்,

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{மற்றும்} \quad f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{ஆகியவை}$$

கிடைக்கப்பெற்று, மேலும் $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ ஆக இருத்தல் வேண்டும் என்பதாகும்.

எனவே, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு நிபந்தனை மீறப்பட்டாலும் f ஆனது x_0 –ல் வகைமையாகாது.

இதனையே $h = \Delta x > 0$ என்ற வகையில்,

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ மற்றும்}$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

வரையறை 10.3

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் சார்பு f வகைமையானது எனக்கூற வேண்டுமானால், சார்பு f ஆனது (a, b) எனும் திறந்த இடைவெளியில் வகைமையானதாகவும், மேலும் இறுதிப்புள்ளியான a மற்றும் b–ல்

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad h>0$$

$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(b-h)-f(b)}{h}, \quad h>0.$$

$x = x_0$ என்ற புள்ளியில் f வகையிடத்தக்கதாக இருப்பின் $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, இங்கு

$x = x_0 + \Delta x$ மற்றும் $\Delta x \to 0$ என்பது $x \to x_0$–க்கு சமானம் ஆகும். இத்தகைய மாற்று முறை சில நேரங்களில் வகைமையைக் கணக்கிட எளிதாக அமையும்.

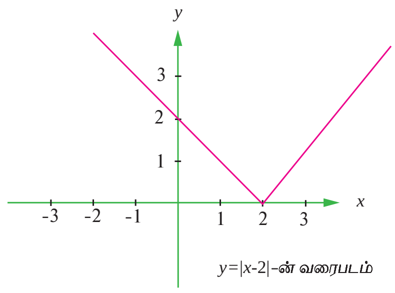
வசதிக்கேற்ப, $h = \Delta x$, என எடுத்துக்கொண்டால் எல்லை கிடைக்கப்பெறின்,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

10.3 வகைமை (வகையிடல் தன்மை) மற்றும் தொடர்ச்சி (Differentiability and Continuity)

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.3

$x = 2$ என்ற புள்ளியில் $f(x) = |x - 2|$ எனும் சார்பின் வகைமைத் தன்மையைச் சோதிக்க.



படம் 10.18

தீர்வு

இச்சார்பு $x = 2$-ல் தொடர்ச்சியானது என்பதை அறிவோம்.

ஆனால்,
$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)} = -1 \text{ மற்றும்}$$
$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)}{(x-2)} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

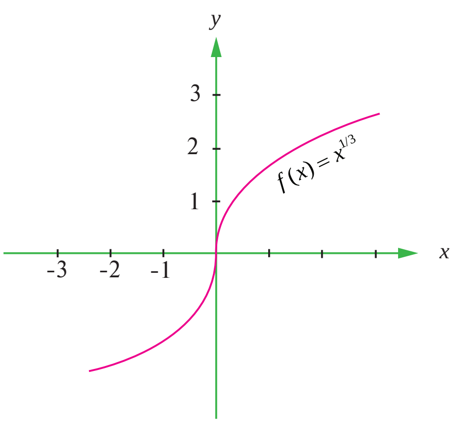
இங்கு இடப்பக்க மற்றும் வலப்பக்க வகைக்கெழுக்களான $f'(2^-)$ மற்றும் $f'(2^+)$ ஆகியவை சமமற்றவை என்பதால், $f'(2)$ கிடைக்கப்பெறாது. அதாவது, $x = 2$-ல் f என்ற சார்பு வகையிடத் தக்கதல்ல. ஏனைய புள்ளிகளில் சார்பு வகைமையானது (வகையிடத்தக்கது) ஆகும்.

மேலும் $x_0 \neq 2$ எனும் மற்ற புள்ளிகளில்
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{|x-x_0|}{x-x_0} = \begin{cases} 1 & x > x_0 \text{ எனில்} \\ -1 & x < x_0 \text{ எனில்}\end{cases}$$
$$\text{Thus} \quad f'(2) = \begin{cases} 1 & x > 2 \text{ எனில்} \\ -1 & x < 2 \text{ எனில்}\end{cases}$$

உண்மையில், $f'(2)$ கிடைக்கப் பெறாது எனும் கருத்து வடிவியல் ரீதியாக வளைவரை $y = |x - 2|$-க்கு (2, 0) என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு இல்லை என்பதன் மூலம் புலனாகிறது. மேலும் (2, 0) புள்ளியில் வளைவரை கூர்முனை கொண்டுள்ளதைக் கவனிக்க.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.4

$x = 0$ என்ற புள்ளியில் $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ -ன் வகைமைத் தன்மையைக் காண்க.



படம் 10.19

தீர்வு

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ என்க. இச்சார்பின் வளைவரையில் எவ்வித துவாரமோ (அல்லது) உடைப்போ இல்லை என்பதால் சார்பகத்தில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருக்கும்.

$f'(0)$ கிடைக்கப் பெறுமா எனச் சோதித்துப் பார்ப்போம்.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}-0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{\frac{-2}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \to \infty$$

எனவே, $x = 0$–ல், $f(x)$–க்கு வகைமை இல்லை, மேலும் $x = 0$–ல் தொடுகோடு செங்குத்துக் கோடாக உள்ளது (படம் 10.19). எனவே, $x = 0$–ல் f–க்கு வகைமை இல்லை.

ஒரு சார்புக்கு ஒரு புள்ளியில் தொடர்ச்சித் தன்மை உள்ளதாலேயே அச்சார்பு அப்புள்ளியில் வகைமையாக இருக்கும் எனக் கூற இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 10.3

மீப்பெரு முழு எண் சார்பான $f(x) = \lfloor x \rfloor$ என்பது எந்த ஒரு முழு எண்ணிற்க்கும் ஒரு வகைமையாகாது என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு

மீப்பெரு முழு எண் சார்பான $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ஆனது ஒவ்வொரு முழு எண் n–க்கும் தொடர்ச்சியற்றது. ஏனெனில் $\lim_{x\to n^-}\lfloor x \rfloor = n-1$ மற்றும் $\lim_{x\to n^+}\lfloor x \rfloor = n$. எனவே, $f'(n)$ கிடைக்கப்பெறாது.

ஏனைய புள்ளிகளில் சார்பின் வகைமையைப் பற்றி என்ன கூற இயலும்?

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.5

$$f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1+x & x > 0 \end{cases}$$ என்க.

$f'(0)$ கிடைக்கப்பெறின் அதனைக் காண்க.

தீர்வு

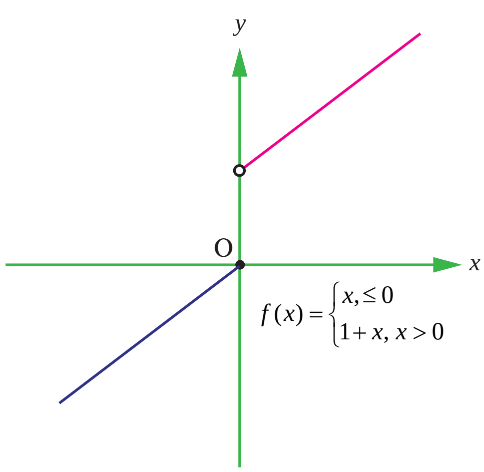
$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1+\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{\Delta x}\right) \to \infty$$



படம் 10.20

எனவே $f'(0)$ கிடைக்கப்பெறாது.

இங்கு $x = 0$–ல் f –க்கு ஒரு துள்ளல் (jump) உள்ளது. அதாவது $x = 0$ என்பது ஒரு துள்ளல் தொடர்ச்சியின்மையாகும்.

மேற்கண்ட விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் மற்றும் உதாரணங்கள் ஆகியவற்றிலிருந்து பின்வரும் முடிவகளைத் தொகுக்கலாம்.

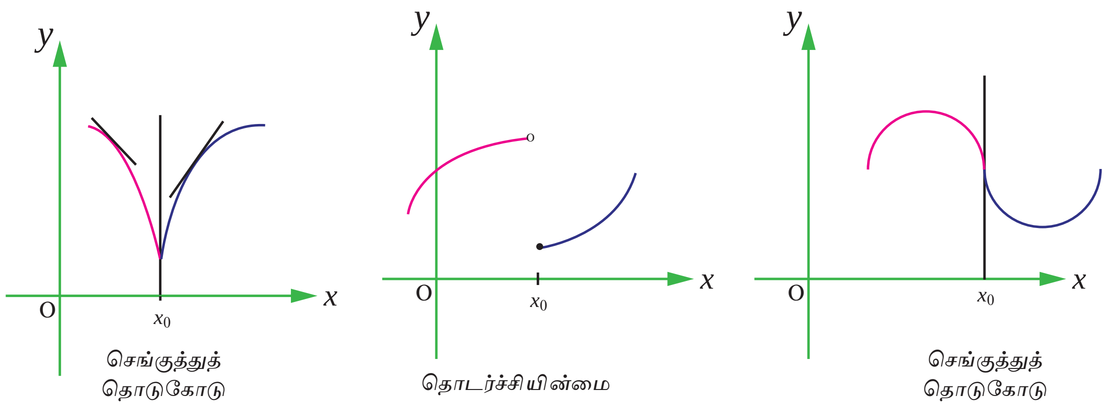
ஒரு சார்பு f ஆனது சார்பகத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி x_0–ல் கீழ்க்காணும் ஏதாவது ஒரு நிகழ்வு மெய் எனில், f அப்புள்ளியில் வகைமையாகாது.

(i) $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் f –க்கு செங்குத்துத் தொடுகோடு அமைகிறது.

(ii) $x = x_0$ என்ற ஒரு கூர்முனைப்புள்ளியில் சந்திக்கிறது. (கூர்மையான $\vee$ வடிவம் அல்லது கூர்மையான உச்சி $\wedge$)

(iii) $x = x_0$ என்ற புள்ளியில் f ஆனது தொடர்ச்சியற்றது.

கீழ்க்காணும் நிகழ்வுகளில் ஒரு சார்பு வகைமை ஆகாது :



படம் 10.21 படம் 10.22 படம் 10.23

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 10.3 மற்றும் 10.4–ல் சார்பு $f(x) = |x-2|$ மற்றும் $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ முறையே $x = 2$ மற்றும் $x = 0$–ல் தொடர்ச்சியாகவும் ஆனால் அந்த இடங்களில் f வகைமையற்றதாகவும் உள்ளது.

அதே நேரத்தில் 10.3 உதாரணத்திலும் 10.5 விளக்க எடுத்துக்காட்டிலும் உள்ள சார்புகள் $f(x) = \lfloor x \rfloor$ மற்றும் $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1+x & x > 0 \end{cases}$ ஆகும். முறையே எந்தவொரு முழு எண் $x = n$–க்கும் மற்றும் $x = 0$ –ல் தொடர்ச்சியற்றும் வகைமையில்லாமலும் அமைகின்றது. மேற்கண்ட ஆய்வைப் பின்வரும் வகையில் சுருக்கமாகக் கூறலாம் : தொடர்ச்சியின்மை வகைமையின்மையை கொடுக்கிறது.

தேற்றம் 10.1 (வகைமைத் தொடர்ச்சியை கொடுக்கிறது)
(Differentiability implies continuity)

$x = x_0$ என்ற புள்ளியில் f வகைமையானால் அப்புள்ளியில் f தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்.

நிரூபணம்

x_0 எனும் புள்ளியைக் கொண்ட (a, b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ வகைமையானது என்க. எனவே, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ கிடைக்கப்பெற்று $f'(x_0)$ என்பது ஒரு முடிவுறு எண் என்பது புலனாகிறது.

இப்போது $$\lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \times \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] \times \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)$$

$$= f'(x_0) \times 0 = 0.$$

இதிலிருந்து $x = x_0$–ல் f தொடர்ச்சியாக இருக்கிறது என்பது உண்மையாகிறது.

முதல் கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணல் (Derivatives from first principle)

வகைக்கெழு வரையறைகளில் எடுத்துரைக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு காணும் வழிமுறையே முதல் கொள்கையிலிருந்து வகைக்கெழு காணல் என அழைக்கப்படுகிறது.

பயிற்சி 10.1

(1) முதல் கொள்கையினைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களைக் காண்க.

(i) $f(x) = 6$ (ii) $f(x) = -4x + 7$ (iii) $f(x) = -x^2 + 2$

(2) கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு $x = 1$ல் இடப்பக்க மற்றும் வலப்பக்க வகைக்கெழு (கிடைக்கப்பெறின்) காண்க. $x = 1$-ல் சார்புகளுக்கு வகைமைத்தன்மை உள்ளதா என்பதனையும் காண்க.

(i) $f(x) = |x-1|$ (ii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

(3) கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் கீழ்க்காணும் சார்புகள் வகைமையானதா என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்.

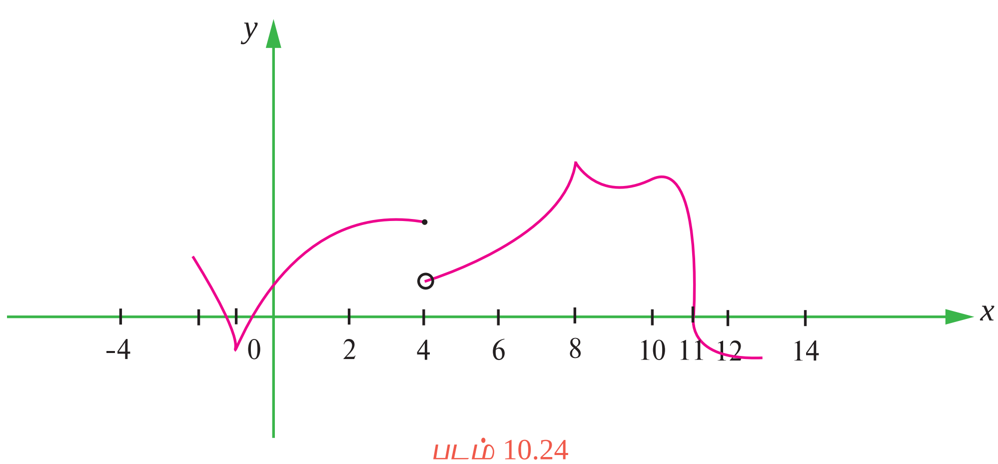
(i) $f(x) = x\,|x|\,;\ x = 0$ (ii) $f(x) = |x^2 - 1|;\ x = 1$

(iii) $f(x) = |x| + |x-1|\ ;\ x = 0, 1$ (iv) $f(x) = \sin|x|\ ;\ x = 0$

(4) கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்குக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் வகைமை இல்லை என்பதை நிறுவுக.

(i) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \le 2 \\ 2x-4, & x > 2 \end{cases}\ ;\ x = 2$ (ii) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases}\ ,\ x = 0$

(5) தரப்பட்டுள்ள f-ன் வரைபடத்தில் எந்தெந்த x-ன் மதிப்புகளுக்கு (எண்களுக்கு) f வகைமை இல்லை என்பதனையும் அதற்கான காரணங்களையும் கூறுக.



படம் 10.24

(6) $f(x) = |x + 100| + x^2$ எனில், $f'(-100)$ கிடைக்கப்பெறுமா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

(7) கீழ்க்காணும் சார்புகளின் வகைமைத் தன்மையைப் படங்கள் வரைந்து $\mathbb{R}$ -ல் பரிசோதிக்கவும்.

(i) $|\sin x|$ (ii) $|\cos x|$

10.4 வகையிடல் விதிகள் (Differentiation Rules)

I எனும் திறந்த இடைவெளியில் மெய்மாறிக்கு வரையறுக்கப்படும் மெய் மதிப்புடைய சார்பு f மற்றும் $y = f(x)$ என்பது x-ன் வகைமைச் சார்பு எனில், $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ஆகும்.

பொதுவாக முதல் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி வகையிடல் காணும் முறை பல இடங்களில் கடினமாகவும் நேர விரயத்தை ஏற்படுத்துவதாகவும் உள்ளது. ஆனால் அனைத்து அடிப்படையான மூலச்சார்புகளுக்கான வகையிடலை அறிந்து, மேலும் சார்புகளின் கணிதச் செயல்பாடுகளைக் கொண்டு வகையிடல் முறையையும், சார்பின் மீதான சார்புகள் முறையையும் அறிந்திருந்தால் ஒவ்வொரு முறையும் எல்லைச் செயலைப் பயன்படுத்தாமல் அனைத்திற்கும் வகையிடல் கண்டறிய இயலும். எனவே வகையிடல் மீதான செயல்பாடுகளை நேரடியாகவே செய்து விடலாம். இப்போது சார்புகளின் கூடுதல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தலுக்கான வகையிடல் விதிகளின் மீது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

தேற்றம் 10.2

இரண்டு (அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட) வகைமையான சார்புகளின் கூடுதலின் வகையிடலும் அச்சார்புகளின் தனித்தனியான வகையிடலின் கூடுதலும் சமமாக இருக்கும். அதாவது u மற்றும் v என்பவை இரு வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில் $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dx}v.$

நிரூபணம்

$I \subseteq \mathbb{R}$ எனும் திறந்த இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட வகைமையான இரு மெய் மதிப்புடைய சார்புகள் u மற்றும் v என்க. $y = u + v$ எனில் $y = f(x)$ என்பது I-ல் வரையறுக்கப்பட்ட சார்பாகும். அனுமானத்தின்படி,

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \text{ இருத்தலாகும்.}$$

இப்போது,
$$f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)$$
$$f(x+\Delta x)-f(x) = u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x).$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

இதிலிருந்து,
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0}\frac{(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

அதாவது,
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u'(x)+v'(x).$$

அதாவது, $f'(x) = u'(x)+v'(x).$

அல்லது $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x).$

எனவே, $\boxed{\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dx}v}.$

இதனை முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான வகைமையான $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ஆகிய சார்புகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். $(u_1+u_2+\cdots+u_n)' = u_1'+u_2'+\cdots+u_n'$.

தேற்றம் 10.3

u மற்றும் v என்பவை இரு வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில் $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

நிரூபணம்

u மற்றும் v என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரு வகைமையான சார்புகள் ஆதலால்,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \text{ மற்றும் } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}.$$

$y = f(x) = u.v$ என்க.

எனவே, $f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x)$, மற்றும்

$$f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x).v(x)$$
$$= v(x + \Delta x)\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]+u(x)\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right].$$

இதிலிருந்து , $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\frac{\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{\Delta x}+v(x+\Delta x)\frac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x)+v(x)u'(x) \quad (v \text{ தொடர்ச்சியானது, } \lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x))$$

அதாவது, $f'(x) = u(x)\dfrac{dv}{dx}+v(x)\dfrac{du}{dx}$ அல்லது

$$\boxed{\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}}$$

அல்லது $\boxed{(uv)'=uv'+vu'}$

இதேபோன்று $(uvw)'=uvw'+uv'w+u'vw$.

மேலும் இதனை முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான வகைமையான $u_1, u_2 \ldots u_n$ சார்புகளுக்கு நீட்டித்து, கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் கீழ்வருமாறு பெறலாம் :

$$(u_1.u_2,\ldots,u_n)'=u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n'+u_1u_2\ldots u_{n-1}'u_n+\ldots+u_1'u_2\ldots u_n.$$

தேற்றம் 10.4 (வகுத்தல் விதி) (Quotient Rule)

u மற்றும் v வகைமையான இரு சார்புகள், $v(x)\neq 0$ எனில் $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$.

நிரூபணம்

$y=f(x)=\dfrac{u}{v}$ என்க. மேலும் $v(x)\neq 0$.

இப்போது $f(x+\Delta x) = \dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

இதிலிருந்து, $f(x+\Delta x)-f(x) = \dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}$

$$= \frac{v(x)u(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)} \ .$$

இதிலிருந்து, $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{v(x)\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x} - \frac{u(x)\left[v(x+\Delta x - v(x)\right]}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

இதிலிருந்து $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)v(x)} \qquad \left(\because \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)\right)$$

இதிலிருந்து, $$f'(x) = \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \ .$$

அதாவது, $$\frac{d}{dx}(f) = \frac{vu'-uv'}{v^2}$$

அல்லது $$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}} \ .$$

தேற்றம் 10.5 (இணைப்பு விதி / சார்புகளின் சேர்ப்பின் விதி / சார்பின் சார்பு விதி)
(Chain Rule / Composite Function Rule or Function of a Function Rule)

$y = f(u)$ என்பது u-ன் சார்பாகவும் மேலும் $u = g(x)$ என்பது x-ன் சார்பாகவும் இருப்பின்

$y = f\left(g(x)\right) = (fog)(x)$. இப்போது $\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

நிரூபணம்

$y = f\left(g(x)\right) = (fog)(x)$

மேற்கண்ட சார்பில் $u = g(x)$ என்பது உட்சார்பு எனவும், f என்பது வெளிப்புறச் சார்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

முத்தாய்ப்பாக y என்பது x-ன் சார்பாகும்.

இப்போது $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$

எனவே $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\times\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$ எனில் $\Delta u \to 0$ ஆகும்.

எனவே, $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(u) \times u'(x)$$

$$= f'\left(g(x)\right) g'(x) \text{ அல்லது } \boxed{\frac{d}{dx}\left(f(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right) g'(x)}$$

எனவே $y = f\left(g(x)\right)$ எனும் சார்பினை வகையிட $g(x) = u$ என்பதைப் பொறுத்து வெளிப்புறச்சார்பு f-ன் வகையிடலைச் சாரா மாறி x-ஐ பொறுத்து உட்புறச் சார்பின் வகையிடலுடன் பெருக்க வேண்டும். இங்கு u என்பது இடைப்பட்ட மாறி என அழைக்கப்படுகிறது.

தேற்றம் 10.6

$f(x)$ என்ற சார்பு வகைமையானதாகவும், $y = kf(x), k \neq 0$ எனில் $\frac{d}{dx}\left(kf(x)\right) = k\frac{d}{dx} f(x)$

நிரூபணம்

$f(x)$ என்பது வகைமையான சார்பு என்க. $y = kf(x)$, $k \neq 0$ என்க.

f என்பது வகைமையானதால் $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

$$y = h(x) = kf(x) \text{ என்க.}$$

$$h(x + \Delta x) = kf(x + \Delta x)$$

$$h(x + \Delta x) - h(x) = kf(x + \Delta x) - kf(x)$$

$$= k\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]$$

$$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = k\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}$$

இதிலிருந்து,
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= kf'(x) = k\frac{d}{dx} f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(h(x)\right) = k\frac{d}{dx} f(x)$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}\left(kf(x)\right) = k\frac{d}{dx} f(x)}$

10.4.1 அடிப்படைச் சார்புகளின் வகைக்கெழு

(Derivatives of basic elementary functions)

அனைத்து அடிப்படைச் சார்புகளின் வகையிடல் முறையை காண்போம். முதலில் மாறிலிச் சார்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(1) மாறிலிச் சார்பின் வகையிடல் பூஜ்ஜியமாகும்

$y = f(x) = k$ என்க, k ஒரு மாறிலி

எனவே $f(x + \Delta x) = k$ மற்றும்

$f(x + \Delta x) - f(x) = k - k = 0$

இதிலிருந்து, $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$

எனவே, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$

That is, $f'(x) = 0$

or $\boxed{\dfrac{d}{dx}(k) = 0}$

(2) $y = x^n$ எனும் அடுக்குச் சார்பு, $n > 0$ என்பது ஒரு முழு எண்

$f(x) = x^n$ என்க.

எனவே, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ மற்றும்

$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$

இதிலிருந்து, $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x}$

ஆகையால் $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x}$

$= \lim\limits_{y \to x} \dfrac{y^n - x^n}{y - x} = nx^{n-1}$ இங்கு $y = x + \Delta x$ என்க மற்றும்

$\Delta x \to 0$ எனில் $y \to x$

அதாவது $\dfrac{d}{dx} f(x) = nx^{n-1}$ அல்லது $\boxed{\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$

கிளைத்தேற்றம் 10.1

$n = \dfrac{p}{q}, (p, q) = 1$ எனில், $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \dfrac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1}$

கிளைத்தேற்றம் 10.2

α என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் எனில், $\dfrac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha - 1}$

சில உதாரணங்கள்

(1) $\dfrac{d}{dx}(5) = 0$ ஏனெனில் 5 ஒரு மாறிலியாகும்

(2) $\dfrac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, அடுக்குச் சார்பு விதியின்படி

(3) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$ அடுக்குச் சார்பு விதியின்படி

(4) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$ அடுக்குச் சார்பு விதியின்படி

(5) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}, (x \neq 0),$ அடுக்குச் சார்பு விதியின்படி

(6) $\frac{d}{dx}(100x^9) = 100\frac{d}{dx}(x^9) = 100 \times 9x^{9-1} = 900x^8$ தேற்றம் 10.6–ன் படி

(3) மடக்கைச் சார்பின் வகைக்கெழு

x-ன் இயற்கை மடக்கையை $\log_e x$ அல்லது $\log x$ அல்லது $ln\ x$ என எழுதலாம்

$$y = f(x) = \log x \text{ என்க.}$$

$$\text{இப்போது } f(x+\Delta x) = \log(x+\Delta x) \text{ மற்றும்}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \log(x+\Delta x) - \log x$$

$$= \log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+\alpha k)}{\alpha} = k\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+k\alpha)}{k\alpha} = k \text{ என நாம் அறிவோம்}$$

$$\text{எனவே, } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{அதாவது, } \boxed{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$$

கிளைத்தேற்றம் 10.3

$$y = f(x) = \log_a x \text{ எனில், } f'(x) = \frac{1}{(\log a)x} \text{ ஆகும்.}$$

$$f(x) = \log_a x = \log_a e \times \log_e x = (\log_a e)\log x$$

$$\text{எனவே, } \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\log_a e \times \log x)$$

$$= (\log_a e)\frac{d}{dx}(\log x) \qquad \text{(மாறிலிப் பெருக்கல் விதிப்படி)}$$

$$= \log_a e.\frac{1}{x} \quad \text{(அல்லது)} \quad \frac{1}{(\log a)x}$$

(4) படிக்குறிச் சார்பு (அடுக்குச் சார்பின் வகைக்கெழு)

$y = a^x$ என்க.

எனவே, $f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x$

$= a^x(a^{\Delta x} - 1)$ மற்றும்

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \log a$ என அறிவோம்

எனவே, $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$$

$$= a^x \times \log a$$

அல்லது $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a}$$

குறிப்பாக, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \log e$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

(5) முக்கோணவியல் சார்புகளின் வகைக்கெழு

(i) sine சார்பு sin x

$y = f(x) = \sin x$ என்க.

எனவே $f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$ மற்றும்

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

எனவே $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

இதனால், $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= 1 \times \cos x \quad \begin{cases} \cos x \text{ தொடர்ச்சியானது என்பதால்} \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x \end{cases}$$

$$= \cos x$$

அதாவது, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$

(ii) cosine சார்பு, $\cos x$

$y = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ என்க.

எனவே, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$u = x + \dfrac{\pi}{2}$ என்க.

$$\frac{du}{dx} = 1 + 0 = 1$$

எனவே, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\sin u) = \dfrac{d}{dx}(\sin u)\dfrac{du}{dx}$ (இணைப்பு விதிப்படி)

$$= \cos u \times 1 = \cos u = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

அதாவது, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$

(iii) tangent சார்பு, $\tan x$

$y = f(x) = \tan x$ என்க.

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

எனவே $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad \text{(வகுத்தல் விதிப்படி)}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

அதாவது, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$

(iv) Secant சார்பு, $\sec x$

$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$ என்க.

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(\cos x)^{-2}(-\sin x) \quad \text{(இணைப்பு விதிப்படி)}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x.\tan x$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$

(v) Cosecant சார்பு, cosec x

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1} \text{ என்க.}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(\sin x)^{-2}(\cos x) \quad \text{(இணைப்பு விதிப்படி)}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}.\frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x}$

(vi) Cotangent சார்பு, cot x

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ என்க.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

அதாவது, $\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$

(6) நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் கெழுக்கள்
The derivatives of the inverse trigonometric functions

(i) arc sin x அதாவது $\sin^{-1} x$

$$y = f(x) = \sin^{-1} x \text{ என்க.}$$

எனவே $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sin^{-1}(x + \Delta x)$

இதிலிருந்து, $x = \sin y$ மற்றும்

$x + \Delta x = \sin (y + \Delta y)$.

எனவே, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\sin(y+\Delta y) - \sin y} = \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y) - \sin y}{\Delta y}}$$

$\Delta x \to 0$ எனும்போது $\Delta y \to 0$ ஆதலால்

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin(y+\Delta y) - \sin y}{\Delta y}}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

அதாவது, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

(ii) arc cos x அதாவது $\cos^{-1} x$

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ என்ற முற்றொருமையை அறிவோம்

இதிலிருந்து, $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

இதனால், $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) + \dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$

எனவே, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$

அல்லது $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

(iii) arc tan x அதாவது $\tan^{-1} x$

$y = f(x) = \tan^{-1} x$ என்க. … (1)

இதிலிருந்து, $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \tan^{-1}(x + \Delta x)$ … (2)

$x = \tan y$ மற்றும்

$x + \Delta x = \tan(y + \Delta y)$

இதிலிருந்து, $\Delta x = \tan(y + \Delta y) - \tan y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\tan(y+\Delta y) - \tan y}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\tan(y+\Delta y) - \tan y}{\Delta y}}$$

$\Delta x \to 0$ எனும்போது $\Delta y \to 0$ ஆதலால்

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\tan(y+\Delta y)-\tan y}{\Delta y}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\tan y)}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

அதாவது, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

(iv) arc cot x அதாவது $\cot^{-1} x$

$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ என்ற முற்றொருமையை அறிவோம்

இதிலிருந்து, $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x + \cot^{-1} x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

இதிலிருந்து, $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) + \dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = 0$

அதாவது, $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

அதாவது, $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}}$

(v) arc sec x அதாவது $\sec^{-1} x$ **–ன் வகைக்கெழு** $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ **ஆகும்**

(vi) arc cosec x அதாவது $\operatorname{cosec}^{-1} x$ **–ன் வகைக்கெழு** $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ **ஆகும்**

(v) மற்றும் (vi) நிரூபணங்கள் பயிற்சிக்காக ஒதுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 10.7

x-ஐ பொறுத்து வகைக்கெழுவைக் காண்க. :

(i) $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 7$ (ii) $y = e^x + \sin x + 2$

(iii) $y = 4\operatorname{cosec} x - \log x - 2e^x$ (iv) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$ (v) $y = xe^x \log x$

(vi) $y = \dfrac{\cos x}{x^3}$ (vii) $y = \dfrac{\log x}{e^x}$

(viii) $f(x) = |x-4|$ எனில் $f'(3)$ மற்றும் $f'(5)$ ஐ காண்க.

தீர்வு

(i) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 3$ (ii) $\frac{dy}{dx} = e^x + \cos x$

(iii) $\frac{dy}{dx} = -4 \text{ cosec } x.\cot x - \frac{1}{x} - 2e^x$

(iv) $y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = x^2 + x^{-2} - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2x^{-2-1} = 2x - \frac{2}{x^3}$$

(v) $\frac{dy}{dx} = xe^x\left(\frac{1}{x}\right) + e^x.\log x(1) + x\log x(e^x)$

$$= e^x + e^x \log x + xe^x \log x = e^x(1 + \log x + x\log x)$$

(vi) $y = \frac{\cos x}{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(-\sin x) - \cos x(3x^2)}{x^6} = \frac{-x^2(x\sin x + 3\cos x)}{x^6}$$

$$= -\frac{(x\sin x + 3\cos x)}{x^4}$$

(vii) $y = \frac{\log x}{e^x} = e^{-x}.\log x$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\left(\frac{1}{x}\right) + \log x(e^{-x})(-1)$$

$$= e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \log x\right]$$

(viii) $f(x) = |x-4| = \begin{cases} -(x-4) & ; \ x < 4 \\ (x-4) & ; \ x \geq 4 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 \ , & x < 4 \\ +1 \ , & x \geq 4 \end{cases}$$

எனவே, $f'(3) = -1$

$f'(5) = 1$

பயிற்சி 10.2

பின்வரும் சார்புகளைத் தொடர்புடைய சாராமாறிகளைப் பொறுத்து வகையிடுக.

(1) $f(x) = x - 3\sin x$ (2) $y = \sin x + \cos x$

(3) $f(x) = x \sin x$ (4) $y = \cos x - 2\tan x$

(5) $g(t) = t^3\cos t$ (6) $g(t) = 4\sec t + \tan t$

(7) $y = e^x \sin x$

(8) $y = \dfrac{\tan x}{x}$ (9) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(10) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$ (11) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

(12) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$ (13) $y = \tan\theta(\sin\theta + \cos\theta)$

(14) $y = \operatorname{cosec} x \,.\, \cot x$ (15) $y = x\sin x\cos x$

(16) $y = e^{-x}.\log x$ (17) $y = (x^2+5)\ln(1+x)e^{-3x}$

(18) $y = \sin x^\circ$ (19) $y = \log_{10} x$

(20) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ எனில் $f'(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக.

10.4.2 சார்பின் சார்பினது வகைக்கெழு (இணைப்பு விதி) எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 10.8

$F(x) = \sqrt{x^2+1}$ எனில் $F'(x)$ காண்க.

தீர்வு

$$u = g(x) = x^2 + 1 \text{ மற்றும் } f(u) = \sqrt{u}$$

$$F(x) = (fog)(x) = f(g(x))$$

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ மற்றும்}$$

$$g'(x) = 2x, \text{ என்பதனால்}$$

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10.9

வகையிடுக : (i) $y = \sin(x^2)$ (ii) $y = \sin^2 x$

தீர்வு

(i) இங்கு sine சார்பு வெளிப்புறச் சார்பாகவும் வர்க்க சார்பு உட்சார்பாகவும் உள்ளது.

$u = x^2$ என்க.

அதாவது, $y = \sin u$.

எனவே, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \times (2x)$$

$$= \cos(x^2).2x$$

$$= 2x\cos(x^2).$$

(ii) $u = \sin x$

எனவே, $y = u^2$

மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

$= 2u \times \cos x$

$= 2 \sin x \,.\, \cos x$

$= \sin 2x.$

எடுத்துக்காட்டு 10.10

வகையிடுக : $y = (x^3 - 1)^{100}$

தீர்வு

$u = x^3 - 1$ என்க.

$y = u^{100}$

மற்றும் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

$= 100u^{100-1} \times (3x^2 - 0)$

$= 100(x^3 - 1)^{99} \times 3x^2$

$= 300x^2 (x^3 - 1)^{99}$.

எடுத்துக்காட்டு 10.11

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$ எனில், $f'(x)$ -ஐ காண்க.

தீர்வு

முதலில் $f(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{-1}{3}}$ என எழுதுவோம்.

எனவே, $f'(x) = -\dfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{-1}{3}-1} \dfrac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$

$= -\dfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{-4}{3}} \times (2x + 1)$

$= -\dfrac{1}{3}(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{\frac{-4}{3}}$.

எடுத்துக்காட்டு 10.12

$g(t) = \left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$ என்ற சார்பின் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^{9-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \left[\frac{(2t+1)\frac{d}{dt}(t-2)-(t-2)\frac{d}{dt}(2t+1)}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \left[\frac{(2t+1)\times 1-(t-2)\times 2}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \left[\frac{2t+1-2t+4}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.13

$(2x + 1)^5\ (x^3 - x + 1)^4$-ஐ வகையிடுக.

தீர்வு

$y = (2x + 1)^5\ (x^3 - x + 1)^4$ என்க.

$u = 2x + 1\ ;\ v = x^3 - x + 1$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$y = u^5 . v^4$

$$\frac{dy}{dx} = u^5.\frac{d}{dx}(v^4)+v^4\frac{d}{dx}(u^5) \qquad \text{(பெருக்கல் விதிப்படி)}$$

$$= u^5.4v^{4-1}\frac{dv}{dx}+v^4.5u^{5-1}\frac{du}{dx} \qquad \text{(இணைப்பு விதிப்படி)}$$

$$= 4u^5.v^3\times(3x^2-1)+5v^4u^4\times 2$$

$$= 4(2x+1)^5(x^3-x+1)^3(3x^2-1)+10(x^3-x+1)^4(2x+1)^4$$

$$= (2x+1)^4(x^3-x+1)^3\left[4(2x+1)(3x^2-1)+10(x^3-x+1)\right]$$

$$= 2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3(17x^3+6x^2-9x+3).$$

எடுத்துக்காட்டு 10.14

வகையிடுக : $y = e^{\sin x}$.

தீர்வு

$u = \sin x$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{du}\times\frac{du}{dx} = e^u \times \cos x = \cos x\, e^{\sin x}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10.15

வகையிடுக : 2^x.

தீர்வு

$y = 2^x = e^{x\log 2}$ என்க

$u = x(\log 2)$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$y = e^u$ ஆகும்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = e^u \times \log 2 = \log 2\, e^{x\log 2}$$

$$= (\log 2)2^x.$$

a^x –ன் வகைக்கெழுவைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நேரடியாகவும் எழுதலாம்

எடுத்துக்காட்டு 10.16

$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ எனில் y' காண்க.

தீர்வு

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$\frac{1+x}{1-x} = t$ என்க.

எனவே, $y = \tan^{-1}t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(\tan^{-1}t).\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.\frac{(1-x).1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}.\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

பயிற்சி 10.3

கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு வகைக்கெழுக்களைக் காண்க :

(1) $y = (x^2+4x+6)^5$ (2) $y = \tan 3x$ (3) $y = \cos(\tan x)$

(4) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$ (5) $y = e^{\sqrt{x}}$ (6) $y = \sin(e^x)$

(7) $F(x) = (x^3+4x)^7$ (8) $h(t) = \left(t-\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$ (9) $f(t) = \sqrt[3]{1+\tan t}$

(10) $y = \cos(a^3+x^3)$ (11) $y = e^{-mx}$ (12) $y = 4\sec 5x$

(13) $y=(2x-5)^4(8x^2-5)^{-3}$ (14) $y=(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+2}$ (15) $y=xe^{-x^2}$

(16) $s(t)=\sqrt[4]{\dfrac{t^3+1}{t^3-1}}$ (17) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{7-3x}}$ (18) $y=\tan(\cos x)$

(19) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ (20) $y=5^{\frac{-1}{x}}$ (21) $y=\sqrt{1+2\tan x}$

(22) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$ (23) $y=\sin^2(\cos kx)$ (24) $y=(1+\cos^2 x)^6$

(25) $y=\dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$ (26) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ (27) $y=e^{x\cos x}$

(28) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (29) $y=\sin\left(\tan\left(\sqrt{\sin x}\right)\right)$ (30) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

10.4.3 உட்படு சார்புகளை வகையிடல் (Implicit Differentiation)

ஒரு சார்பின் சார்ந்த மாறியின் மூலம் வெளிப்படையாகத் தரப்பட்டு $y = f(x)$ என்ற வடிவில் இருந்தால் அதனை **வெளிப்படு சார்பு** (explicit function) எனக் கூறலாம். எடுத்துக்காட்டாக $y=\dfrac{1}{2}x^3-1$ என்பது ஒரு வெளிப்படு சார்பாகும். அதே சமயம் அதற்குச் சமானமான சமன்பாடாக $2y-x^3+2=0$ என்று x, y ஆகிய மாறிகளை உட்படுத்தி வரையறை செய்தால் அதனை **உட்படு சார்பு** எனலாம் அல்லது y ஆனது x–ஆல் ஆன உட்படு சார்பு எனலாம்.

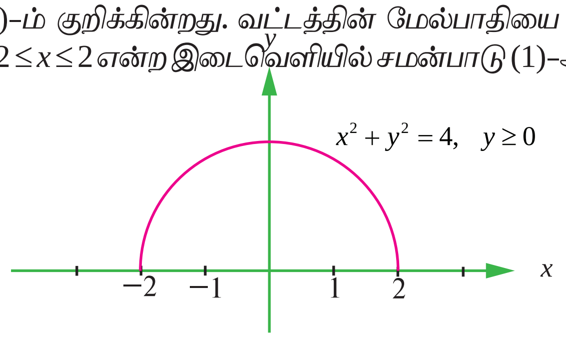
$$x^2+y^2 = 4 \qquad \ldots (1)$$

என்ற சமன்பாடு ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும் ஆரம் 2 ஆகவும் உடைய ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது என்பதை அறிவோம். சமன்பாடு (1) சார்பு அல்ல. ஏனெனில் $-2<x<2$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு x மதிப்பிற்கும் y-க்கு இருமதிப்புகள் இருக்கும். அவை

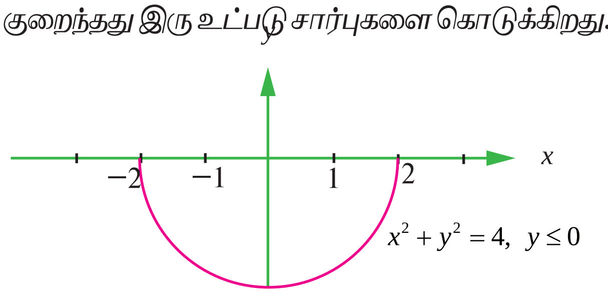
$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2 \qquad \ldots (2)$$

$$g(x) = -\sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2 \qquad \ldots (3)$$

இரு மதிப்புகள் இருக்கும். (1)–ல் குறிப்பிட்டுள்ள வட்டத்தின் மேல் பாதியை (2)–ம், கீழ்ப்பாதியை (3)–ம் குறிக்கின்றது. வட்டத்தின் மேல்பாதியை அல்லது கீழ்ப்பாதியைச் சார்பாகக் கருதலாம். எனவே, $-2\le x\le 2$ என்ற இடைவெளியில் சமன்பாடு (1)–ஆனது குறைந்தது இரு உட்படு சார்புகளை கொடுக்கிறது.



படம் 10.25



படம் 10.26

$x^2+\left[f(x)\right]^2=4$ மற்றும் $x^2+\left[g(x)\right]^2=4$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளும்

$-2\le x\le 2$ இடைவெளியில் முற்றொருமையாகிறது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

பொதுவாக, ஏதோ ஒரு இடைவெளியில் $F(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாடு f சார்பினை ஒரு உட்படு சார்பாக வரையறை செய்தால் $F(x, f(x)) = 0$ ஆனது அந்த இடைவெளியில் முற்றொருமையாக அமையும். f என்ற சார்பின் வரைபடம் $F(x, y) = 0$ சமன்பாட்டின் வரைபடத்தின் ஒரு பகுதியை அல்லது அனைத்தையும் குறிக்கின்றது.

$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$ போன்ற மிகச் சிக்கலான சமன்பாடு x-அச்சில் குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் உட்படு சார்புகளைத் தீர்மானிக்கும். மேலும் y-ஐ x-ஆல் ஆன கோவையில் எழுத இயலாமல் இருக்கலாம். எனினும், சில சமயங்களில் $\frac{dy}{dx}$ -ஐ காண பயன்படுத்தும் முறையினை உட்படு வகையிடல் எனலாம். இம்முறையின்படி சமன்பாட்டின் இருபுறமும் வகையிடல் விதிகளைப் பயன்படுத்தி x-ஐ பொறுத்து வகைக்கெழு கண்டு $\frac{dy}{dx}$ பெறலாம். சமன்பாட்டில் தீர்மானிக்கப்படும் y ஒரு வகைமைச் சார்பாக அமையும்போது சார்பின் சார்புகளுக்கான இணைப்பு விதியினைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணுமாறு காணலாம்.

$$\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

இங்கு n ஒரு முழு எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.17

$x^2 + y^2 = 1$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

சமன்பாட்டின் இருமருங்கும் வகையிடுக.

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.18

$x = 1$ என்ற மதிப்பில் அமையும் புள்ளிகளில், வளைவரை $x^2 + y^2 = 4$ –க்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $x = 1$ எனப் பிரதியிட $y^2 = 3$ அல்லது $y = \pm\sqrt{3}$ எனப் பெறலாம். எனவே, $\left(1, \sqrt{3}\right)$ மற்றும் $\left(1, -\sqrt{3}\right)$–ல் தொடுகோடுகள் அமையும். இரண்டு வெவ்வேறு உட்படு சார்புகளுக்கான வரைபடங்களில் உள்ள புள்ளிகளாக $\left(1, \sqrt{3}\right)$ மற்றும் $\left(1, -\sqrt{3}\right)$

அமைந்தாலும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சரியான சாய்வு கிடைக்கும். எனவே,

$$\left(1,\sqrt{3}\right)\text{ல் } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ மற்றும் } \left(1,-\sqrt{3}\right)\text{ல் } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.19

$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x+1$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

உட்படு வகையிடலின்படி

$$\frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(x^2y^3) - \frac{d}{dx}(y^5) = \frac{d}{dx}(2x+1)$$

இதிலிருந்து, $$4x^3 + x^2\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (2x)y^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2 + 0$$

அதாவது, $$4x^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2$$

எனவே, $$\left(3x^2y^2 - 5y^4\right)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3$$

அல்லது $$\frac{dy}{dx} = \frac{2-4x^3-2xy^3}{3x^2y^2-5y^4}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.20

$\sin y = y\cos 2x$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

$\sin y = y\cos 2x$.

வகையீடு செய்ய, $$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}(y\cos 2x)$$

அதாவது, $$\cos y\frac{dy}{dx} = y(-2\sin 2x) + \cos 2x\frac{dy}{dx}$$

இதிலிருந்து, $$(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y\sin 2x$$

அல்லது $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y\sin 2x}{\cos y - \cos 2x}$$

10.4.4 மடக்கை வகையிடல் (Logarithmic Differentiation)

$y = x^x$ போன்ற சார்பினைத் தவிர, வகையிடல் விதிகளையும், அடிப்படைச் சார்புகளின் வகையிடல் அட்டவணையையும் பயன்படுத்துவதன் மூலம் தொடக்கத்தில் பயன்படுத்தப்படும் எந்தவொரு சார்பிற்கும் எளிதாக வகையிடல் காண இயலும். இத்தகைய சார்புகள் அடுக்கு/படிக்குறி சார்புகளாக குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவற்றில் பொதுவாக அந்த சார்பின் அடிமானமும், படியும் சாரா மாறியைப் பொறுத்ததாக அமையும்.

அடுக்குப் படிக்குறிச் சார்பான $y = x^x$ –க்கு வகையிடல் காண இரு பக்கமும் மடக்கையினை பயன்படுத்த வேண்டும்.

$\log y = x \log x,\ x > 0$ எனக் கிடைக்கும்.

இது ஒரு முற்றொருமையாதலால் இடப்பக்க வகைக்கெழுவும் வலப்பக்க வகைக்கெழுவும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். x–ஐப் பொறுத்து வகையிடலின்போது (இடப்பக்கத்தில் உள்ள சார்பு, சார்பின் சார்பு என்பதை நினைவில் கொள்க)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1$$

எனவே, $$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

$f(x)$ என்ற சார்பினுக்கு மடக்கை கண்டு (e அடிமானம்) பின்னர் வகையிடலைப் பயன்படுத்தும் முறை மடக்கை வகையிடல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

இம்முறையின் மூலம் பெருக்கல், வகுத்தல் அல்லது அடுக்குகள் கொண்ட கடினமான சார்புகளின் வகையீடுகளை மடக்கை வகையிடலைப் பயன்படுத்தி எளிதாகக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.21

$y = \sqrt{x^2+4}\ .\sin^2 x\ .2^x$ எனில், y–ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு

இருபக்கமும் மடக்கையை எடுக்க,

$\log y = \frac{1}{2}\log(x^2+4) + 2\log(\sin x) + x\log(2)$ எனக் கிடைக்கிறது.

இதிலிருந்து $$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} + 2.\frac{\cos x}{\sin x} + \log 2$$

$$= \frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2$$

எனவே, $$y' = \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2\right).$$

எடுத்துக்காட்டு 10.22

வகையிடுக : $y = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

தீர்வு

இருபக்கமும் மடக்கையை எடுக்க,

$$\log y = \frac{3}{4}\log x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 5\log(3x+2)$$

உட்படு வகையிடலின்படி.

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{4x}+\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)}-\frac{5}{3x+2}(3)$$

$$= \frac{3}{4x}+\frac{x}{(x^2+1)}-\frac{15}{3x+2}$$

எனவே, $$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left[\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15}{3x+2}\right]$$

மடக்கை வகையிடலில் படிநிலைகள் (Steps in Logarithmic Differentiation)

(1) $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் இருமருங்கும் இயற்கை மடக்கை எடுத்து மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்தி எளிமையாக்குதல் வேண்டும்.

(2) x-ஐப் பொறுத்து உட்படு வகையிடல் காணவேண்டும்.

(3) y'-க்காகத் தீர்வு காணுதல் வேண்டும்.

பொதுவாக, படிக்குறி மற்றும் அடிமானம் பொறுத்து நான்கு வகைகள் உள்ளன.

(1) $\frac{d}{dx}(a^b)=0$ (a, b ஆகியவை மாறிலிகள்).

(2) $\frac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}\, f'(x)$

(3) $\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\log a)g'(x)$

(4) $\frac{d}{dx}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}+\log f(x).g'(x)\right]$

எடுத்துக்காட்டு 10.23

வகையிடுக : $y = x^{\sqrt{x}}$

தீர்வு

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க :

$$\log y = \sqrt{x}\log x$$

உட்படு வகையிடலின்படி,

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}.\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.\log x$$

$$= \frac{\log x+2}{2\sqrt{x}}$$

எனவே, $$\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x+2}{2\sqrt{x}}\right)$$

10.4.5. பிரதியிடல் முறை (Substitution method)

பிரதியிடல் முறையானது, சில விதமான வகையிடலின் போது குறிப்பாக நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் வகையிடலின்போது மிகவும் பயனுள்ளதாக அமையும்.

$f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ என்ற சார்பினைக் கருதுக.

இந்தச் சார்பிற்கு, சார்பின் சார்பு விதியைப் பயன்படுத்தி $f'(x)$ காணலாம். ஆனால், அது சற்றுக் கடினமானது. அதற்குப் பதிலாகப் பிரதியிடல் முறையினைப் பயன்படுத்தினால் எளிதாக அமையும். அதாவது,

$$x = \tan\theta \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே, } \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta \text{ மற்றும்}$$

$$f(x) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \text{ என எளிதாகக் காணலாம்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.24

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ எனில், y' காண்க.

தீர்வு

$x = \tan\theta$ என்க.

$$\text{எனவே, } \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\theta = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$

$$y = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10.25

$f(x) = \cos^{-1}(4x^3-3x)$ எனில் $f'(x)$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$x = \cos\theta \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே, } 4x^3-3x = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta \text{ மற்றும்}$$

$$f(x) = \cos^{-1}(\cos 3\theta) = 3\theta = 3\cos^{-1}x$$

$$\text{ஆகையால், } f'(x) = 3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10.4.6 துணையலகுச் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்பட்ட மாறிகளை வகையிடல் (Derivatives of variables defined by parametric equations)

$x = f(t), y = g(t)$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கருதுவோம்.

இச்சமன்பாடுகள் x மற்றும் y மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்பு உறவைத் தருகின்றன. $[a, b]$ எனும் ஏதேனும் ஒரு சார்பகத்தில் உள்ள 't' மதிப்பிற்கு x மற்றும் y கண்டறியலாம்.

x மற்றும் y என இரு சார்புகள் தனித்தனியாக 't' எனும் பிறிதொரு மாறி மூலம் வரையறுக்கப்பட்டால் x மற்றும் y-க்கு உள்ள சார்புத் தொடர்பு **துணையலகுத் தொடர்பு** என்றும் பிறிதொரு மாறி **துணையலகு** எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

x மற்றும் y க்கு உள்ள நேரடித் தொடர்பைத் துணையலகு 't' இன்றிக் காண்பது **துணையலகு நீக்கல்** என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, மையம் $(0, 0)$ எனவும். ஆரம் r எனவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$ ஆகும். இந்தச் சமன்பாடு x மற்றும் y இரண்டிற்குமிடையே உள்ள தொடர்பை விவரிக்கிறது. மற்றும் இதன் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் $x = r\cos t$; $y = r\sin t$ எனக் கிடைக்கும். மறுதலையாக t–ஐ நீக்கும்போது $x^2 + y^2 = r^2$ எனப்பெறலாம்.

y -ஐ x -இன் சார்பாகக் கருதினால், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.

x–ஐ y–இன் சார்பாகக் கொண்டால் y–ஐ பொறுத்து x-இன் வகையிடல்

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$ ஆகும்.

வட்டத்தைப் பொறுத்தவரை $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சாய்வாக,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\cot t$$ ஆக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.26

$x = at^2$; $y = 2at,\quad t \neq 0$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

$x = at^2$; $y = 2at$ என்பதால்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10.27

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

இப்போது $\dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$; $\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$

எனவே, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{(1-\cos t)}$

10.4.7 ஒரு சார்பினைப் பொறுத்து மற்றொரு சார்பினை வகையிடல் (Differentiation of one function with respect of another function)

$y = f(x)$ என்ற சார்பு வகைமையானால், x-ஐப் பொறுத்து y-ன் வகைக்கெழு

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

f மற்றும் g ஆகியவை x-ன் வகைமையான சார்புகள் மற்றும் $\dfrac{dg}{dx} = g'(x) \neq 0$ எனில்

$$\frac{df}{dg} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dg}{dx}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.28

$x\log x$-ஐ பொறுத்து x^x-ன் வகையீடு காண்க.

தீர்வு

$$u = x^x,\ v = x\log x$$

$$\log u = x\log x$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{1}{x} + 1.\log x = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u(1+\log x) = x^x(1+\log x)$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \log x$$

$$\frac{d(x^x)}{d(x\log x)} = \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = x^x$$

இங்கு ஒரு சமனிச் சார்பாக இருந்தால் $g(x) = x$ எனவே $\dfrac{df}{dg}$ என்பது $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$ என மாறும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.29

$x^2 + x + 1$-ஐப் பொறுத்து $\tan^{-1}(1+x^2)$-ஐ வகையிடுக.

தீர்வு

$$f(x) = \tan^{-1}(1+x^2) \text{ என்க}$$
$$g(x) = x^2+x+1$$
$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{(x^4+2x^2+2)}$$
$$g'(x) = 2x+1$$
$$\frac{df}{dg} = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x+1} = \frac{2x}{(2x+1)(x^4+2x^2+2)}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.30

$\cos(lx^2+mx+n)$ -ஐ பொறுத்து $\sin(ax^2+bx+c)$ வகையிடுக.

தீர்வு

$$u = \sin(ax^2+bx+c) \text{ மற்றும்}$$
$$v = \cos(lx^2+mx+n) \text{ என்க.}$$
$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$
$$u'(x) = \cos(ax^2+bx+c)(2ax+b)$$
$$v'(x) = -\sin(lx^2+mx+n)(2lx+m)$$
$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{(2ax+b)\cos(ax^2+bx+c)}{-(2lx+m)\sin(lx^2+mx+n)}$$

10.4.8 உயர் வரிசை வகைக்கெழுக்கள் (Higher order Derivatives)

ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகரும் பொருளின் நிலைச்சார்பு (இடப்பெயர்ச்சி) $s = s(t)$ என்க. அதன் முதல் வகைக்கெழு, பொருளின் திசைவேகம் நேரத்தின் சார்பாக $v(t)$ அமையும் என்பது இயற்பியலில் எளிமையாக அறிந்துள்ளோம்.

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} .$$

மேலும், நேரத்தினைப் பொறுத்துத் திசைவேகத்தின் கணநேர வீத மாற்றம் அப்பொருளின் முடுக்கம் $a(t)$ ஆகும். எனவே முடுக்கச் சார்பு ஆனது திசைவேகத்தின் முதல் வகைக்கெழுவாகும் என்பதனால் முடுக்கச் சார்பு, நிலைச்சார்பின் இரண்டாவது வகைக்கெழுவாகும்.

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{d}{dt}(v(t))$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$$

இவ்வாறாக, f என்பது x–ன் வகைமையான சார்பு எனில், அதன் முதல் வகையிடல் $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ என்பது $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடத்தின் தொடுகோட்டின் சாய்வு என மிக எளிய வடிவியல் விளக்கமாக அமைகிறது. f' என்பது x–ன் சார்பாகவும் இருப்பதால், f' –க்கும் வகைமை இருக்க முடியும். அவ்வாறு இருந்தால், $(f')' = f''$ எனக் குறிப்பிடப்பட்டு

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) \\ &= \frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{d^2 y}{dx^2} \text{ என அமைகின்றது} \end{aligned}$$

இதனை மற்றொரு குறியீடாக $D^2 f(x) = D^2 y = y_2 = y''$ என எழுதலாம்.

இரண்டாம் வகைக்கெழு என்பது மாறு வீதத்தின் மாறு வீதமாகக் கருதினாலும் வடிவியல் விளக்கம் எளிதாக இல்லை. இருப்பினும் $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடத்தின் வளை ஆரத்திற்கும். இரண்டாம் வகையிடலுக்கும் நெருங்கியத் தொடர்பு உள்ளது என்பதனை உயர் வகுப்புகளில் காணலாம்.

அதேபோன்று $f''(x)$ கிடைக்கப்பெறினும்,அது வகைமையாகவோ அல்லது வகைமையின்றியோ அமையலாம். வகைமையாக அமைந்தால் f''' **மூன்றாம் வகையிடல்** என்றும்

$$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = y''' = y_3 \text{ எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது}$$

மூன்றாம் வகையீட்டினை இயற்பியல் ரீதியாக, ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகரும் பொருளின் நிலைச்சார்பின் மூலம் விளக்கலாம். $s''' = (s'')' = a'(t)$ என்பதால், நிலைச்சார்பின் மூன்றாம் வகையிடல் என்பது முடுக்கச் சார்பின் வகைக்கெழு ஆகும். மற்றும் அதனை ‘குலுக்கம்’ (jerk) என்றும்

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3} \text{ எனவும் எழுதலாம்.}$$

எனவே, ‘குலுக்கம்’ என்பது முடுக்கத்தில் திடீரென ஏற்படும் மாற்றம் என்பதால் மிகச் சரியாகவே முடுக்கத்தின் மாறு வீதத்திற்கு குலுக்கம் எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ளது. பெரிய குலுக்கம் ஏற்பட்டால் வாகனத்தின் நகர்வில் அதிர்வு ஏற்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.31

$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$ எனில், y', y'' மற்றும் y''' ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 6x^2 - 5x + 3 \text{ மற்றும்} \\ y' &= 3x^2 - 12x - 5 \\ y'' &= 6x - 12 \\ y''' &= 6 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.32

$y = \dfrac{1}{x}$ எனில், y''' காண்க.

தீர்வு

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$$

மற்றும் $$y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.33

$f(x) = x \cos x$ எனில், f'' காண்க.

தீர்வு

$$f(x) = x \cos x.$$

இப்போது $f'(x) = -x \sin x + \cos x$, மற்றும்

$$f''(x) = -(x \cos x + \sin x) - \sin x$$

$$= -x \cos x - 2 \sin x$$

எடுத்துக்காட்டு 10.34

$x^4 + y^4 = 16$ எனில், y'' காண்க.

தீர்வு

$$x^4 + y^4 = 16$$

உட்படு வகைக்கெழுவின்படி $$4x^3 + 4y^3 y' = 0$$

$$y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

y'' கண்டறிய y' மீது வகுத்தல் விதியினைப் பயன்படுத்த வேண்டும். x–ன் சார்பாக y உள்ளது என்பது கவனத்தில் கொள்ளத்தக்கது.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x^3}{y^3}\right) = \frac{-\left[y^3 \frac{d}{dx}(x^3) - x^3 \frac{d}{dx}(y^3)\right]}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{\left[y^3.3x^2 - x^3(3y^2 y')\right]}{y^6} = -\frac{3x^2 y^3 - 3x^3 y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = \frac{-3x^2[x^4 + y^4]}{y^7}$$

$$= \frac{-3x^2(16)}{y^7} = \frac{-48x^2}{y^7}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.35

$x = a\cos t$

$y = a\sin t$ எனில் இரண்டாம் வகையீட்டைக் காண்க.

தீர்வு

x-ஐப் பொறுத்து உட்படு வகைக்கெழுவின்படி,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)\frac{dt}{dx} = -[-\operatorname{cosec}^2 t]\times\frac{1}{x'(t)}$$

$$= \operatorname{cosec}^2 t \times \frac{1}{-a\sin t}$$

$$= -\frac{\cos ec^3 t}{a}$$

எடுத்துக்காட்டு 10.36

$x^2 + y^2 = 4$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2}$ காண்க.

தீர்வு

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= -\frac{y.1 - x.\frac{dy}{dx}}{y^2} \quad \text{(வகுத்தல் விதிப்படி)}$$

$$= -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3}$$

பயிற்சி 10.4

கீழ்க்காண்பவற்றை வகையிடுக (1 – 18) :

(1) $y = x^{\cos x}$

(2) $y = x^{\log x} + (\log x)^x$

(3) $\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$

(4) $x^y = y^x$

(5) $(\cos x)^{\log x}$

(6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(7) $\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(8) $\tan(x + y) + \tan(x - y) = x$

(9) $\cos(xy) = x$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(1 + y\sin(xy))}{x\sin xy}$ எனக்காட்டுக.

(10) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(11) $\tan^{-1}\left(\dfrac{6x}{1-9x^2}\right)$

(12) $\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

(13) $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$

(14) $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$

(15) $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, y = \dfrac{2t}{1+t^2}$

(16) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(17) $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$

(18) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)$

(19) x^2 -ஐ பொறுத்து $\sin x^2$ -ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

(20) $\tan^{-1} x$ -ஐ பொறுத்து $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ -ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

(21) $u = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, v = \tan^{-1} x$ எனில் $\dfrac{du}{dv}$ காண்க.

(22) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ -ஐ பொறுத்து $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ -ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

(23) $y = \sin^{-1} x$ எனில், y'' காண்க.

(24) $y = e^{\tan^{-1} x}$ எனில், $(1+x^2)y'' + (2x-1)y' = 0$ எனக்காட்டுக.

(25) $y = \dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ எனில், $(1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$ எனக்காட்டுக.

(26) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ எனில், $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ எனும்போது $y'' = \dfrac{1}{a}$ என நிரூபிக்க.

(27) $\sin y = x\sin(a+y)$ எனில், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ என நிரூபிக்க. இங்கு $a \neq n\pi$.

(28) $y = (\cos^{-1} x)^2$ எனில், $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 2 = 0$ என நிரூபிக்க. மேலும், $x = 0$ -ன்போது y_2 மதிப்பைக் காண்க.

பயிற்சி 10.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{\pi}\sin x^\circ\right)$

(1) $\dfrac{\pi}{180}\cos x^\circ$ (2) $\dfrac{1}{90}\cos x^\circ$ (3) $\dfrac{\pi}{90}\cos x^\circ$ (4) $\dfrac{2}{\pi}\cos x^\circ$

(2) $y = f(x^2+2)$ மற்றும் $f'(3) = 5$ எனில், $x = 1$ -ல் $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது

(1) 5 (2) 25 (3) 15 (4) 10

(3) $y = \dfrac{1}{4}u^4$, $u = \dfrac{2}{3}x^3 + 5$ எனில், $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது

(1) $\dfrac{1}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (2) $\dfrac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(3) $\dfrac{2}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (4) $-\dfrac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(4) $f(x) = x^2 - 3x$ எனில், $f(x) = f'(x)$ என அமையும் புள்ளிகள்

(1) இரண்டும் மிகை முழு எண்களாகும்

(2) இரண்டும் குறை முழு எண்களாகும்

(3) இரண்டுமே விகிதமுறா எண்களாகும்

(4) ஒன்று விகிதமுறு எண்ணாகவும் மற்றொன்று விகிதமுறா எண்ணாகவும் இருக்கும்

(5) $y = \dfrac{1}{a-z}$ எனில், $\dfrac{dz}{dy}$ -ன் மதிப்பு

(1) $(a-z)^2$ (2) $-(z-a)^2$ (3) $(z+a)^2$ ` (4) $-(z+a)^2$

(6) $y = \cos(\sin x^2)$ எனில், $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ -ல் $\dfrac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு

(1) – 2 (2) 2 (3) $-2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (4) 0

(7) $y = mx + c$ மற்றும் $f(0) = f'(0) = 1$ எனில், $f(2)$ என்பது

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) – 3

(8) $f(x) = x\tan^{-1}x$ எனில், $f'(1)$ என்பது

(1) $1+\dfrac{\pi}{4}$ (2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ (3) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$ (4) 2

(9) $\frac{d}{dx}(e^{x+5\log x})$ என்பது

(1) $e^x.x^4(x+5)$ (2) $e^x.x(x+5)$ (3) $e^x+\frac{5}{x}$ (4) $e^x-\frac{5}{x}$

(10) $x=0$ -ல், $(ax-5)e^{3x}$ –ன் வகைக்கெழு – 13 எனில், 'a'–ன் மதிப்பு

(1) 8 (2) – 2 (3) 5 (4) 2

(11) $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, y=\frac{2t}{1+t^2}$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ என்பது

(1) $-\frac{y}{x}$ (2) $\frac{y}{x}$ (3) $-\frac{x}{y}$ (4) $\frac{x}{y}$

(12) $x=a\sin\theta$ மற்றும் $y=b\cos\theta$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2}$ என்பது

(1) $\frac{a}{b^2}\sec^2\theta$ (2) $-\frac{b}{a}\sec^2\theta$ (3) $-\frac{b}{a^2}\sec^3\theta$ (4) $-\frac{b^2}{a^2}\sec^3\theta$

(13) $\log_x 10$ –ஐ பொறுத்து $\log_{10} x$ –ன் வகைக்கெழு

(1) 1 (2) $-(\log_{10} x)^2$ (3) $(\log_x 10)^2$ ` (4) $\frac{x^2}{100}$

(14) $f(x)=x+2$ எனில், $x=4$ -ல் $f'(f(x))$ -ன் மதிப்பு

(1) 8 (2) 1 (3) 4` (4) 5

(15) $y=\frac{(1-x)^2}{x^2}$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ –ன் மதிப்பு

(1) $\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (2) $-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (3) $-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$ (4) $-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}$

(16) $pv=81$ எனில், $v=9$ -ல் $\frac{dp}{dv}$ -ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) – 1 (3) 2 (4) -2

(17) $f(x)=\begin{cases} x-5 & , x\le 1 \\ 4x^2-9 & , 1<x<2 \\ 3x+4 & , x\ge 2 \end{cases}$ எனில், x = 2–ல் $f(x)$–ன் வலப்பக்க வகைக்கெழு

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(18) $f'(a)$ உள்ளது எனில், $\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ என்பது

(1) $f(a)-af'(a)$ (2) $f'(a)$ (3) $-f'(a)$ (4) $f(a)+af'(a)$

(19) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<2 \\ 2x-1, & x\ge 2 \end{cases}$ எனில், $f'(2)$ என்பது

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) கிடைக்கப்பெறாது

(20) $g(x)=(x^2+2x+1)f(x)$, $f(0)=5$ மற்றும் $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-5}{x}=4$ எனில், $g'(0)$ என்பது

(1) 20 (2) 14 (3) 18 (4) 12

(21) $f(x)=\begin{cases} x+2, & -1<x<3 \\ 5, & x=3 \\ 8-x, & x>3 \end{cases}$, $x=3$ல் $f'(x)$ என்பது

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) கிடைக்கப்பெறாது

(22) $x=-3$-ல் $f(x)=x|x|$-ன் வகையிடலின் மதிப்பு

(1) 6 (2) – 6 (3) கிடைக்கப்பெறாது (4) 0

(23) $f(x)=\begin{cases} 2a-x, & -a<x<a \\ 3x-2a, & x\geq a \end{cases}$ எனில் கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எது மெய்யானது?

(1) $x = a$–ல் $f(x)$ வகைமை இல்லை

(2) $x = a$–ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்று உள்ளது

(3) $\mathbb{R}$ -ல் உள்ள அனைத்து x-க்கும் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது

(4) அனைத்து $x\geq a$ -க்கும் $f(x)$ வகைமையாகிறது

(24) $f(x)=\begin{cases} ax^2-b, & -1<x<1 \\ \dfrac{1}{|x|}, & \text{பிற} \end{cases}$, $x = 1$–ல் வகைமையானது எனில்

(1) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{-3}{2}$ (2) $a=\dfrac{-1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$ (3) $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$ (4) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$

(25) $f(x)=|x-1|+|x-3|+\sin x$ எனும் சார்பு $\mathbb{R}$ -ல் வகைமையாகாத புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 4

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடத்தில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

- வகையிடல் என்பது மாறு வீதம் ஆகும் எல்லை கிடைக்கப்பெறின், $y=f(x)$ எனில், x_0-ல் x-ஐ பொறுத்து y-ன் வகையிடல் என்பது $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. இங்கு எல்லை இருக்க வேண்டும் என்றால், $f'(x_0^+)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0^-)$ என்பது ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.
- $x=x_0$ என்ற புள்ளியில் $y=f(x)$ என்ற சார்பின் வகைக்கெழு
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- $(x, f(x))$ என்ற புள்ளியில் $y = f(x)$ –ன் வகைக்கெழு $y = f(x)$ என்ற வளைவரையில் தொடுகோட்டின் சாய்வு என்பதன் வடிவியல் விளக்கமாகும்.
- $s = f(t)$ –ன் முதல் வகைக்கெழு t-ஐ பொறுத்து இடமாற்றத்தின் மாறு வீதமாகும். அது திசைவேகம் ஆகும். இரண்டாம் வகைக்கெழு முடுக்கமாகும். மூன்றாவது வகைக்கெழு குலுக்கமாகும்.
- $x = x_0$ –ல் $y = f(x)$ தொடர்ச்சியற்று இருந்தால் $x = x_0$ –ல் $f(x)$ வகைமையற்றது.
- $x = x_0$ –ல் $y = f(x)$ வகைமைஇல்லையெனில் $(x_0, f(x_0))$ –ல் $y = f(x)$ என்றவளைவரைக்குத் தொடுகோடு இல்லை என்பதாக பொருள்.
- $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு $x = x_0$ –ல் வளைவரை வடிவம் $(\vee)$ அல்லது $(\wedge)$ வடிவில் இருந்தால் $x = x_0$ –ல் வகைமை இல்லை.
- வகையிடல் என்பது ஒரு செயலே அன்றி விதிகளின் தொகுப்பு எனப் புரிந்து கொள்ளல்.
- வகைமைத் தன்மையானது தொடர்ச்சித் தன்மையைக் கொடுக்கும். ஆனால் தொடர்ச்சித்தன்மையானது வகைமைத்தன்மையைக் கொடுக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.
- வகைமைத்தன்மை வாய்ந்த சார்புகளின் வேறுபாடு, பெருக்கல், வகுத்தல்

(i) $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$

(ii) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx}$

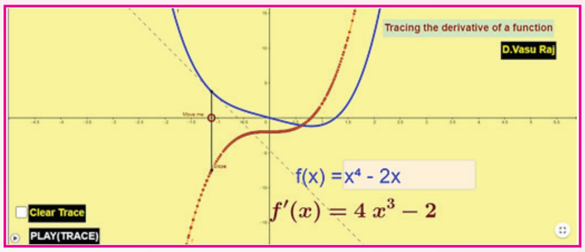
(iii) $\frac{d}{dx}((fog)(x)) = f'(g(x))g'(x)$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ இங்கு $g(x) \neq 0$ ஆகும்.

இணையச் செயல்பாடு 10 (a)

வகை நுண்கணிதம்-வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

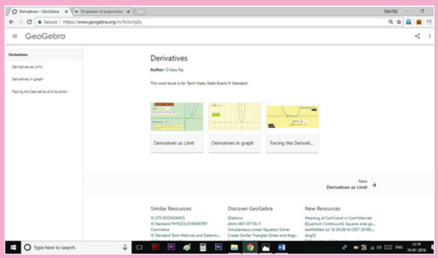


படி – 1

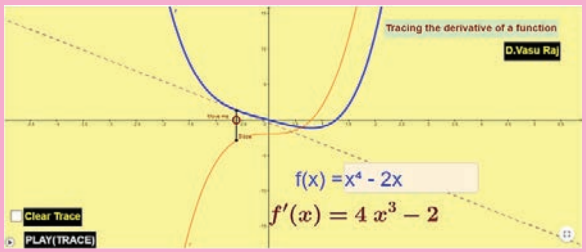
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra –வின் "Derivatives" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பயற்சித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Tracing the derivative of a function" என்ற பயிற்சித் தாளைத் தேர்வு செய்க. நீங்கள் ஏதேனும் சார்பு மதிப்பினை f(x) பெட்டியில் பதியவும். சார்பு நீல நிறத்திலும், வகைகெழு ஆரஞ்சு நிறத்திலும் நீங்கள் காணலாம். Play trace button–ஐச் சொடுக்கி வகைக்கெழுவின் நியமபாதையின் அசைவூட்டத்தைப் பெறலாம் (x, x–ல் சாய்வு). f(x)–ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைகெழு சறிவின் பாதை என்பதை காணலாம்.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

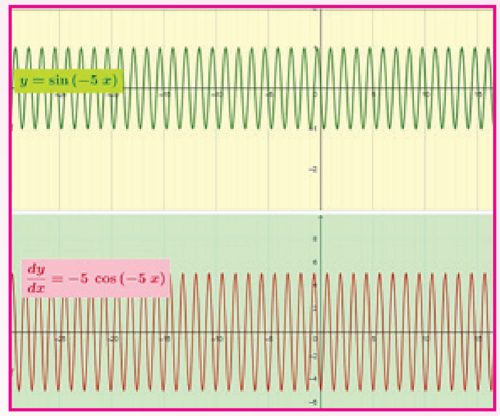
https://ggbm.at/fk3w5g8y

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

இணையச் செயல்பாடு 10 (b)

வகை நுண்கணிதம்-வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

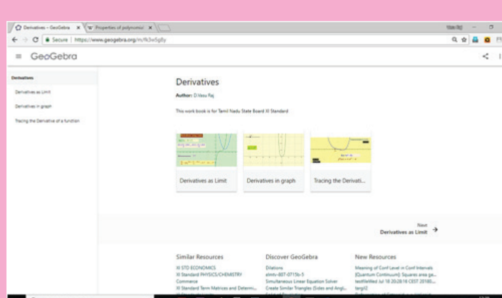


படி – 1

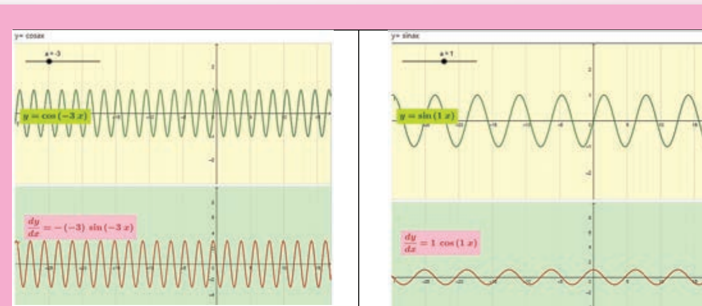
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra –வின் "Derivatives" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Derivatives in graph" என்பதைத் தேர்வு செய்க. சில அடிப்படை செயல்பாடுகளும் பங்குகளும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். நழுவலை நகர்த்தி "a"–ன் மதிப்புகளை மாற்ற முடியும்.மேலும் ஒவ்வொரு செயல்பாடு மற்றும் பங்குகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை உற்றுநோக்குக.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/fk3w5g8y

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

அத்தியாயம் **11**

தொகை நுண்கணிதம்
INTEGRAL CALCULUS

"குறியீடுகள் புதிய கண்டுபிடிப்புகளை எளிமையாக்குகின்றன.
வியத்தகு வகையில் இவை சிந்தனையை எளிமையாக்குகின்றன"
- லிபினிட்ஸ்

11.1 அறிமுகம் (Introduction)


நியூட்டன்


லிபினிட்ஸ்

காட்ஃபிரைட் வில்ஹெல்ம் லிபினிட்ஸ் (1646–1716) மற்றும் சர் ஐசக் நியூட்டன் (1643–1727) ஆகியோர் 17–ஆம் நூற்றாண்டின் மத்தியில் தனித்தனியாக நுண்கணிதத்தை கண்டுபிடித்தனர். தத்துவஞானி, கணிதவியலாளர், அரசியல் ஆலோசகர், மற்றும் தர்க்கவியலாளர் எனப் போற்றப்பட்ட ஜெர்மானிய நாட்டவரான லிபினிட்ஸ், வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் நுண்கணிதத்தைத் தனித்துவமாக கண்டுபிடித்தார். இதே காலக்கட்டத்தில் இங்கிலாந்து நாட்டைச் சார்ந்த சர் ஐசக் நியூட்டன் ஒரு வளைவரையின் கீழ் உள்ள பரப்பினைக் காண நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை உருவாக்கினார். நியூட்டன் கணிதத்தோடு நிற்காமல், ஒளியியல் மற்றும் புவிஈர்ப்பு ஆகியவற்றின் கோட்டுபாடுகளையும் உருவாக்கினார்.

வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் இல்லாமல் இவ்வுலகத்தை நம்மால் கற்பனை கூடச் செய்ய இயலாது. கணிதத்தின் வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் ஆகிய இரண்டு அடிப்படைக் கூறுகளின் பயன்பாடுகளால் இந்த நூற்றாண்டில் அறிவியல் வளர்ச்சி குறிப்பிடத்தக்க அளவில் மேம்பட்டு இருப்பதைக் காணலாம். இயற்பியல், வேதியியல், பொறியியல், வானியல், கனிமவியல், உயிரியல் மற்றும் சமூக அறிவியலில் ஏற்படும் பல்வேறு வகையான பிரச்சனைகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதற்கு மேற்கூறிய இரண்டு அடிப்படைக் கூறுகளின் பயன்பாடுகள் தவிர்க்க முடியாத ஒன்றாகும்.

நுண்கணிதம் கொள்கை அளவில் இருவகை வடிவியல் கணக்குகளைப் பற்றியது.

(i) ஒரு வளைவரையின் தொடுகோட்டின் **சாய்வினை** எல்லை காணும் முறையில் கற்பதை **வகையிடல்** என்கிறோம்.

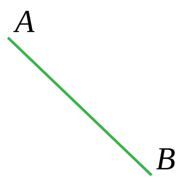
(ii) ஒரு வளைவரையின் கீழ் அமைந்துள்ள பகுதியின் **பரப்பளவினை** எல்லை காணும் முறையில் கற்பதைத் **தொகையிடல்** என்கிறோம்.

நாம் 9 மற்றும் 10 ஆகிய அத்தியாயங்களில் வகை நுண்கணிதத்தைப் படித்துள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் தொகையிடலுக்கான சில அடிப்படை வழிமுறைகளைக் காண்போம்.

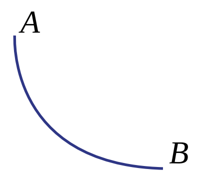
கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ள சில எளிமையான நடைமுறைச் சூழ்நிலைகளைக் கொள்வோம்

சூழ்நிலை 1

A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளுக்கிடையேயான (படம் 11.1(a)), மீச்சிறு தூரம் அவ்விரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டாகும். ஒரு துகளானது A யிலிருந்து B–க்கு (செங்குத்தாக அமையாத) வழுக்கிச் செல்லும்போது எடுத்துக்கொள்ளும் மிகக்குறைந்த நேரம் கொண்ட பாதையைக் காண முற்படுவதாகக் கொள்வோம். பெரும்பாலானோர் மீச்சிறு தூரம் கொண்ட AB என்ற நேர்க்கோட்டு வழியாக வந்தால் (படம் 11.1(a)) எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் மீச்சிறு நேரம் என நம்புகின்றனர்.



A-க்கும் B-க்கும்
குறைந்த தூரம் உடைய பாதை
படம் 11.1 (a)

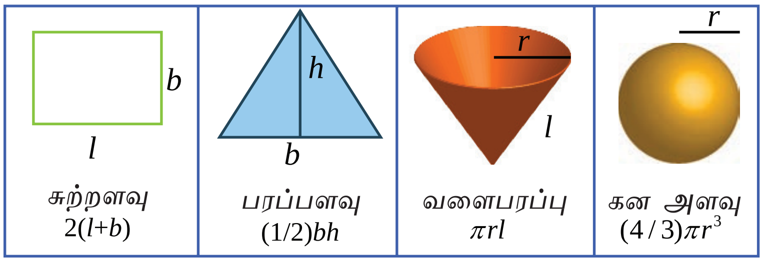


A-க்கும் B-க்கும்
குறைந்த நேரம் உடைய பாதை
படம் 11.1 (b)

ஆனால், A யையும் B யையும் இணைக்கும் நேர்க்கோடு மீச்சிறு நேரம் கொண்ட பாதையாக இருக்காது. ஏனெனில் A க்கு அருகில் அதிக சாய்வு கொண்ட வளைவரையில் (படம் 11.1 (b)) இயங்கும் திசைவேகமானது நேர்க் கோட்டில் (படம் 11.1 (a)) இயங்கும் திசைவேகத்தை விட அதிகமாக இருக்கும். இந்த வளைவரையின் பாதை மிக நீளமானதாக இருந்தபோதிலும், இந்தப் பாதையை அதிவேகமாக மிகக்குறைந்த நேரத்தில் கடக்கலாம். நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தித் இக்கணக்கிற்கான தீர்வு காணலாம் இது 'பிராகிஸ்ட்ஸ்டோக்ரோன் (Brachistochrone)' கணக்கு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

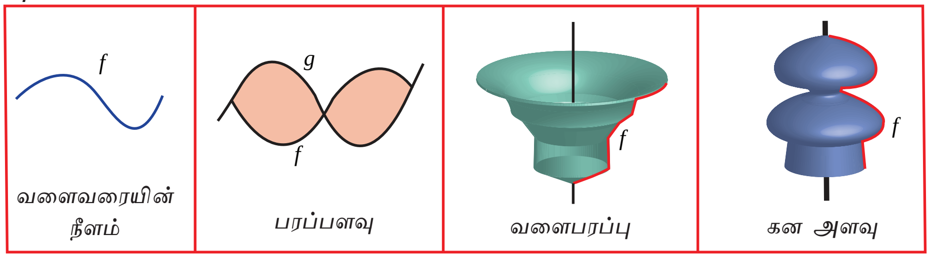
சூழ்நிலை 2

ஆரம்ப வடிவியலில் அறியப்பட்ட சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் ஒழுங்கான வடிவங்களின் அளவீடுகளைக் காண்பதைப் பற்றி ஏற்கனவே நாம் படித்துள்ளோம்.



படம் 11.2 (a)

பின்வரும் வரைபடங்களினால் குறிப்பிடப்பட்ட அளவீடுகளை, சார்புகளைக் கொண்டு எவ்வாறு கணக்கிட முடியும் ?



படம் 11.2 (b)

இந்தக் கணக்குகள் காண்பதற்கு கடினமாக இருந்த போதிலும் நுண்கணிதத் தொகையிடல் மூலம் இவற்றை எளிதாக தீர்க்கலாம்.

சூழ்நிலை 3

மாணவர் ஒருவர் தன் மோட்டார் சைக்கிளில் 24 மீ/வினாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட தருணத்தில் தனக்கு முன்பாக 40 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும் தடுப்பின் மீது மோதலைத் தவிர்க்க வாகனத்தை நிறுத்த வேண்டியுள்ளது. உடனடியாகத் தன்னுடைய வாகனத்தை 8 மீ/வினாடி^{2} எதிர் முடுக்கத்தில் வேகத்தைக் குறைக்கிறார் எனில் வாகனம் தடுப்பின் மீது மோதுவதற்கு முன் நிற்குமா ?

படம் 11.3

நம் அன்றாட வாழ்கையில் இயற்கையாகவே நிகழும் பல்வேறு நிகழ்வுகளை நாம் பார்ப்போம்.

- ♦ எந்த வேகத்தில் மேல் நோக்கி உந்தப்படும் ஒரு செயற்கைகோள் மீண்டும் பூமியை நோக்கித் திரும்பாது?
- ♦ கொடுக்கப்பட்டுள்ள சுற்றளவைக் (P) கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணத்தை உள்ளடக்கிய சிறிய வட்டத்தகட்டின் ஆரம் எவ்வளவு?
- ♦ 2r ஆரம் கொண்ட திண்மக்கோளத்தின், மையத்திலிருந்து r ஆரம் கொண்ட ஒரு துளையினை உருவாக்கினால் வெளியேற்றப்படும் துகளின் கன அளவு எவ்வளவு?
- ♦ கிருமிகளின் வளர்ச்சி விகிதம் அப்போதைய தொகையைப் பொறுத்து மாறுபடுகிறது மற்றும் அதன் வளர்ச்சி ஒரு மணி நேரத்தில் இரு மடங்காகிறது எனில் இரண்டு மணிநேரம் கழித்து அதன் வளர்ச்சி எவ்வளவாக இருக்கும்?

மேற்கூறிய நிகழ்வுகளுக்குத் தொகையிடல் விடையளிக்கிறது.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

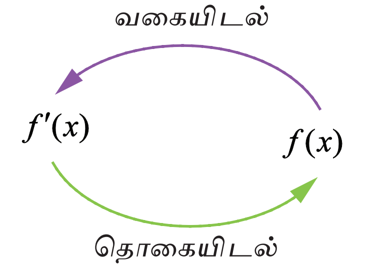
- அறுதியிடப்படாத தொகையிடலின் வரையறையை வகையிடலின் எதிர்ச்செயலாக்கமாக புரிந்துகொள்ளுதல்
- மாறிலியின் மடங்குகள், கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் ஆகிய அடிப்படைச் சார்புகளின் அறுதியிடப்படாத தொகையினைக் கண்டறிதல்
- சேர்ப்புச் சார்புகளின் தொகையினைக் காணப் பொருத்தமான வழி முறைகளைப் பயன்படுத்துதல்
- ஒரு சார்பின் மாறுவீதம் கொடுக்கப்பட்டால் அச்சார்பினைத் தொகையிடல் மூலம் காணல்

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

11.2 நியூட்டன்-லிபினிட்ஸ் தொகையிடல்(Newton-Leibnitz Integral)

தொகையிடல் நுண்கணிதம் முக்கியமாக அறுதியிடப்படாத தொகை (indefinite integral) மற்றும் வரையறுத்த தொகை (definite integral) எனப் பிரிக்கப்படுகிறது. இப்பாடப்பகுதியில் அறுதியிடப்படாத தொகையை அதன் வகையிடலில் இருந்து பெறப்படும் சார்புகளின் மூலமாகப் படிக்கிறோம்.

$(+,-)$, $(\times,\div)$, $\left((\,)^n, \sqrt[n]{\ }\right)$ போன்ற எதிர்மறைச் செயல்முறை ஜோடிகளைப் பற்றி நாம் ஏற்கனவே நன்கு அறிந்துள்ளோம். இதேபோல் தொகையிடலும் வகையிடலும் $\left(d, \int\right)$ கூட ஒன்றுக்கொன்று எதிர்மறைச் செயல்முறைகளின் ஜோடியாகும். வகையிடலின் எதிர்மறைச் செயல்முறையை ‘எதிர் வகையிடல்’ என அழைப்போம்.

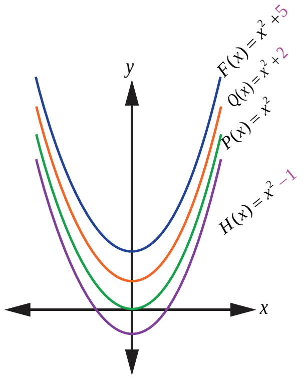


படம் 11.4

வரையறை 11.1

I என்னும் இடைவெளியில் ஒவ்வொரு x-க்கும் $F'(x) = f(x)$ என இருந்தால் $F(x)$ என்பது I -ன் மீதான $f(x)$ -ன் **எதிர்மறை வகையிடல்** (நியூட்டன்–லிபினிட்ஸ் தொகையிடல்) எனப்படும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.1



படம் 11.5

$F(x)=x^2+5$ எனில், $F'(x)=2x$.

$f(x)=2x$, என வரையறுத்தால், $f(x)$ என்பது

$F(x)$-ன் வகைக்கெழு எனவும், $F(x)$ என்பது $f(x)$-ன் எதிர் வகைக்கெழு எனவும் அழைக்கப்படும்.

பின்வரும் அட்டவணையைக் காண்க.

$F(x)$	$F'(x)=f(x)$	$f(x)=2x$ - ன் எதிர் வகையீடு
$P(x)=x^2+0$ $Q(x)=x^2+2$ $H(x)=x^2-1$	$\left.\begin{array}{l}P'(x)=2x\\Q'(x)=2x\\H'(x)=2x\end{array}\right\}\ f(x)=2x$	$F(x)=x^2+?$

$F(x), P(x), Q(x)$ மற்றும் $H(x)$ ஆகியவற்றின் வகையிடல் $f(x)$ எனப் பார்த்தோம். ஆனால் $f(x)=2x$-ன் எதிர் வகையிடல் ஒருமைத்தன்மையற்றது. அதாவது $f(x)$-ன் எதிர் வகையிடல்கள் எண்ணற்ற பல சார்புகளின் தொகுப்பாகும்.

தேற்றம் 11.1

ஒரு இடைவெளி I-ல் $F(x)$ என்பது $f(x)$-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட எதிர் வகையிடல் எனில் I-ல், $f(x)$- ன் ஒவ்வொரு எதிர் வகையிடலும் $\int f(x)dx = F(x)+c$ எனக் கிடைக்கப்பெறும். இங்கு c என்பது தன்னிச்சை மாறிலி (arbitrary constant) மற்றும் $f(x)$-ன் அனைத்து எதிர் வகையிடலையும் c-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் மூலம் காணலாம்.

சார்பு $f(x)$-ஐ **தொகைச் சார்பு** (Integrand) என அழைக்கிறோம்.

dx -ல் உள்ள **x**-ஐ **தொகையிடல் மாறி** அல்லது **தொகையீட்டு மாறி** (Integrator) என அழைக்கலாம். தொகை காணும் முறையைத் **தொகையிடல்** அல்லது **எதிர் வகையிடல்** என அழைக்கலாம்.

Sum என்ற சொல்லின் முதல் எழுத்தான S ஆனது மேலும் கீழுமாக நீட்டப்பட்டு $\int$ என்ற வடிவம் பெற்றுத் தொகையீட்டுக் குறியானது.

வகையிடலை உள்ளடக்கிய கணக்குகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்யக்கூடிய எதிர் வகையீட்டின் தீர்வைக் காண விரும்புகிறோம். இக் குறிப்பிட்ட நிபந்தனையைத் தொடக்க நிபந்தனை அல்லது எல்லை நிபந்தனை என அழைக்கிறோம்.

எடுத்துகாட்டாக, $\frac{dy}{dx}$-ஐ உள்ளடக்கிய சமன்பாட்டில் தொடக்க நிபந்தனைகளாக $x=x_1$ மற்றும் $y=y_1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், அதன் எதிர் வகையிடலைக் கண்டு, அதில் அமைந்துள்ள தன்னிச்சை மாறிலியான c-ஐ $x=x_1$ மற்றும் $y=y_1$ எனப் பிரதியிட்டுக் காணலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.2

$x=2$ எனும்போது $y=10$ என்ற ஆரம்ப நிபந்தனையுடன் கூடிய $\frac{dy}{dx}=2x$ எனும் சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் ஒரு குறிப்பிட்ட எதிர் வகையிடலைக் காண விழைகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின்படி,

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

$$y = \int 2x\,dx$$

$$y = x^2 + c$$

$y = 10$ மற்றும் $x = 2$, என மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்

$$10 = 2^2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 6$$

c = 6 எனப் பிரதியிட $y = x^2 + 6$ என்ற தேவையான எதிர்வகையிடல் சார்பைப் பெறலாம்.

11.3 தொகையிடலின் அடிப்படை விதிகள் (Basic Rules of Integration)

அடிப்படைச் சூத்திரங்கள்:

தொகையிடலானது வகையிடலின் எதிர்மறைச் செயல்முறையானதால், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடிப்படைத் தொகையிடலின் சூத்திரங்களை அதற்கேற்ற வகையிடலின் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி வருவிக்கலாம்.

வகையிடல்	எதிர்வகையிடல்
$\frac{d}{dx}(c) = 0,\quad c$ ஒரு மாறிலி	$\int 0\,dx = c$, c ஒரு மாறிலி
$\frac{d}{dx}(kx) = k,\quad k$ ஒரு மாறிலி	$\int k\,dx = kx + c \quad c$ ஒரு தன்னிச்சை மாறிலி
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$ (அடுக்கு விதி)
$\frac{d}{dx}(\log x) = \left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \mathrm{cosec}^2 x$	$\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(-\text{cosec}x) = \text{cosec}x \cot x$	$\int \text{cosec}x \cot x \, dx = -\text{cosec}x + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

எடுத்துக்காட்டு 11.1

தொகையிடுக :

(i) x^{10} (ii) $\frac{1}{x^{10}}$ (iii) $\sqrt{x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

தீர்வு

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1.$

$n = 10$ எனப்பிரதியிட,

$$\int x^{10} dx = \frac{x^{10+1}}{10+1} + c = \frac{x^{11}}{11} + c$$

(ii) $\int \frac{1}{x^{10}} dx = \int x^{-10} dx = \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = -\frac{1}{9x^9} + c$

(iii) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x} + c$

எடுத்துக்காட்டு 11.2

தொகையிடுக :

(i) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ (ii) $\dfrac{\cot x}{\sin x}$ (iii) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

தீர்வு

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\sin x}dx = \int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x}dx = \int \tan x \sec x\,dx = \sec x + c$

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + c$

எடுத்துக்காட்டு 11.3

தொகையிடுக :

(i) $\dfrac{1}{e^{-x}}$ (ii) $\dfrac{x^2}{x^3}$ (iii) $\dfrac{1}{x^3}$ (iv) $\dfrac{1}{1+x^2}$

தீர்வு

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{-x}}\,dx = \int e^x dx = e^x + c$ (ii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3}dx = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$ (iv) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + c$

பயிற்சி 11.1

கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக :

(1) (i) x^{11} (ii) $\dfrac{1}{x^7}$ (iii) $\sqrt[3]{x^4}$ (iv) $(x^5)^{\frac{1}{8}}$

(2) (i) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (ii) $\dfrac{\tan x}{\cos x}$ (iii) $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ (iv) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(3) (i) 12^3 (ii) $\dfrac{x^{24}}{x^{25}}$ (iii) e^x

(4) (i) $(1+x^2)^{-1}$ (ii) $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

11.4 $\int f(ax+b)dx$ (நேரிய வடிவிலுள்ள தொகைச்சார்பு) வடிவம்

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^{10}}{10}\right] = (x-a)^9 \Rightarrow \int (x-a)^9\,dx = \frac{(x-a)^{10}}{10} + c$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(x+k)] = \cos(x+k) \Rightarrow \int \cos(x+k)dx = \sin(x+k) + c$$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து நேரிய வடிவம் கொண்ட தன்னிச்சை மாறி x உடன் எந்த ஒரு மாறிலியைக் கூட்டினாலும் அல்லது கழித்தாலும் அடிப்படைத் தொகையீட்டுச் சூத்திரத்தில் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படுவதில்லை என்பது தெளிவாகிறது.

ஆனால்,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{l}(e^{lx+m})\right] = e^{lx+m} \Rightarrow \int e^{lx+m}dx = \frac{1}{l}e^{(lx+m)} + c$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right] = \cos(ax+b) \Rightarrow \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$$

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் நாம் அறிவது யாதெனில் மாறி x உடன் ஏதேனும் ஒரு மாறிலியைப் பெருக்கினால் அடிப்படைத் தொகையீட்டு சூத்திரத்தை அதே மாறிலியால் வகுத்துத் தேவையான சார்புக்குரிய தொகையைப் பெற முடியும்.

$$\boxed{\int f(x)dx = g(x)+c \text{ எனில், } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}g(ax+b)+c}$$

மேலுள்ள சூத்திரத்தைப் பிரதியிடல் மூலமும் வருவிக்கலாம் என்பதனைப் பின்னர் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.4

கீழ்காண்பவற்றின் மதிப்பைக் காண்க :

(i) $\int (4x+5)^6\, dx$ (ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\, dx$ (iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx$

தீர்வு

(i) $\int (4x+5)^6\, dx = \frac{1}{4}\frac{(4x+5)^{6+1}}{6+1} = \frac{(4x+5)^7}{28}+c$

(ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\, dx = \int (15-2x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left(\frac{1}{-2}\right)\frac{(15-2x)^{\frac{1}{2}+1}}{(1/2)+1} = -\frac{(15-2x)^{\frac{3}{2}}}{3}+c$

(iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx = \int (3x+7)^{-4}\, dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{-4+1}}{-4+1} = -\frac{1}{9(3x+7)^3}+c$

எடுத்துக்காட்டு 11.5

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\sin(2x+4)$ (ii) $\sec^2(3+4x)$ (iii) $\operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)$

தீர்வு

(i) $\int \sin(2x+4)\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\cos(2x+4)\right)+c = -\frac{1}{2}\cos(2x+4)+c$

(ii) $\int \sec^2(3+4x)\, dx = \frac{1}{4}\tan(3+4x)+c$

(iii) $\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\, dx = \left(\frac{1}{a}\right)\left(-\operatorname{cosec}(ax+b)\right)+c = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b)+c$

எடுத்துக்காட்டு 11.6

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) e^{3x} (ii) e^{5-4x} (iii) $\frac{1}{(3x-2)}$ (iv) $\frac{1}{(5-4x)}$

தீர்வு

(i) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}+c$ (ii) $\int e^{5-4x}\,dx = -\frac{e^{5-4x}}{4}+c$

(iii) $\int \frac{1}{(3x-2)}\,dx = \frac{1}{3}\log|(3x-2)|+c$ (iv) $\int \frac{1}{(5-4x)}\,dx = -\frac{1}{4}\log|(5-4x)|+c$

எடுத்துக்காட்டு 11.7

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\frac{1}{1+(2x)^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$

தீர்வு

(i) $\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+c$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}\,dx = \frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\sin^{-1}(5x)+c$

பயிற்சி 11.2

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) (i) $(x+5)^6$ (ii) $\frac{1}{(2-3x)^4}$ (iii) $\sqrt{3x+2}$

(2) (i) $\sin 3x$ (ii) $\cos(5-11x)$ (iii) $\operatorname{cosec}^2(5x-7)$

(3) (i) e^{3x-6} (ii) e^{8-7x} (iii) $\frac{1}{6-4x}$

(4) (i) $\sec^2\frac{x}{5}$ (ii) $\operatorname{cosec}(5x+3)\cot(5x+3)$ (iii) $\sec(2-15x)\tan(2-15x)$

(5) (i) $\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-81x^2}}$ (iii) $\frac{1}{1+36x^2}$

11.5 தொகையிடலின் பண்புகள்

(1) k ஒரு மாறிலி எனில், $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$ ஆகும்.

(2) $\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

குறிப்பு 11.1

மேலே உள்ள இரண்டு பண்புகளை இணைத்துப் பின்வருமாறு விரிவுபடுத்தலாம்.

$$\int (k_1f_1(x)\pm k_2f_2(x)\pm k_3f_3(x)\pm\cdots\pm k_nf_n(x))\,dx$$

$$= k_1\int f_1(x)dx \pm k_2\int f_2(x)dx \pm k_3\int f_3(x)dx \pm\cdots\pm k_n\int f_n(x)dx.$$

அதாவது முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள சார்புகளின் நேரியல் சேர்க்கையின் தொகையிடல் அவற்றின் தொகையிடலின் நேரியல் சேர்க்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.8

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $5x^4$ (ii) $5x^2-4+\frac{7}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$ (iii) $2\cos x-4\sin x+5\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x$

தீர்வு

(i) $$\int 5x^4dx = 5\int x^4dx = 5\frac{x^{4+1}}{4+1}+c = 5\left(\frac{x^5}{5}\right)+c = x^5+c.$$

(ii) $$\int\left(5x^2-4+\frac{7}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 5\int x^2dx-4\int dx+7\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 5\frac{x^{2+1}}{2+1}-4x+7\log|x|+2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$= \frac{5}{3}x^3-4x+7\log|x|+4\sqrt{x}+c$$

(iii) $$\int(2\cos x-4\sin x+5\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x)dx$$

$$= 2\int\cos x\,dx-4\int\sin x\,dx+5\int\sec^2 x\,dx+\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx$$

$$= 2\sin x+4\cos x+5\tan x-\cot x+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.9

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\frac{12}{(4x-5)^3}+\frac{6}{3x+2}+16e^{4x+3}$ (ii) $\frac{15}{\sqrt{5x-4}}-8\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)$

தீர்வு

(i) $$\int\left(\frac{12}{(4x-5)^3}+\frac{6}{3x+2}+16e^{4x+3}\right)dx$$

$$= 12\int\frac{1}{(4x-5)^3}dx+6\int\frac{1}{3x+2}dx+16\int e^{4x+3}dx$$

$$= 12\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2(4x-5)^2}\right)+6\left(\frac{1}{3}\right)\log|3x+2|+16\left(\frac{1}{4}\right)e^{4x+3}+c$$

$$= -\frac{3}{2(4x-5)^2}+2\log|3x+2|+4e^{4x+3}+c.$$

(ii) $$\int\left(\frac{15}{\sqrt{5x-4}}-8\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)\right)dx$$

$$= 15\int\frac{1}{\sqrt{5x-4}}dx-8\int\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)\,dx$$

$$= 15\left(\frac{1}{5}\right)(2\sqrt{5x-4})-8\left(\frac{1}{4}\right)(-\operatorname{cosec}(4x+2))+c$$

$$= 6\sqrt{5x-4}+2\operatorname{cosec}(4x+2)+c.$$

பயிற்சி 11.3

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $(x+4)^5+\dfrac{5}{(2-5x)^4}-\operatorname{cosec}^2(3x-1)$

(2) $4\cos(5-2x)+9e^{3x-6}+\dfrac{24}{6-4x}$

(3) $\sec^2\dfrac{x}{5}+18\cos 2x+10\sec(5x+3)\tan(5x+3)$

(4) $\dfrac{8}{\sqrt{1-(4x)^2}}+\dfrac{27}{\sqrt{1-9x^2}}-\dfrac{15}{1+25x^2}$

(5) $\dfrac{6}{1+(3x+2)^2}-\dfrac{12}{\sqrt{1-(3-4x)^2}}$

(6) $\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}-4\right)+\dfrac{7}{7x+9}+e^{\frac{x}{5}+3}$

11.6 எளிய பயன்பாடுகள்(Simple applications)

இதுவரை நாம் x-ஐ தொகையீட்டு மாறியாகப் பயன்படுத்தினோம். பல நேரங்களில் தொகையிடலில் வேறுபட்ட மாறியைப் பயன்படுத்துவது அவசியமாக இருக்கும். எடுத்துகாட்டாக இயக்கச் சமன்பாட்டில் சாராமாறியாக உள்ள காலம் t ஆனது தொகையீட்டில் தொகையீட்டு மாறி t ஆக மாறும்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பொருளின் முடுக்கம் தரப்பட்டிருந்தால் அப் பொருளின் நிலை மற்றும் திசைவேகம் காண தொகையிடலை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் என்பதனையும் மற்றும் இதுபோன்ற கணக்குகளையும் விவாதிக்க உள்ளோம். கணித ரீதியாகக் காணும் போது ஒரு சார்பின் வகையிடலில் தொடங்கி அதன் அசல் சார்பை காண்பதாகும். வீதம், வளர்ச்சி, தேய்மானம், இறுதிநிலை, மாற்றம், மாறுபாடுகள், உயர்த்துதல் மற்றும் குறைத்தல் போன்ற பொதுவான சொற்கள் வகையிடுதலைக் குறிக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 11.10

$f'(x)=3x^2-4x+5$ மற்றும் $f(1)=3$, எனில் $f(x)$-ஐக் காண்க.

தீர்வு

$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\big(f(x)\big)=3x^2-4x+5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இருபுறமும் தொகையீடு காண,

$$\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-4x+5)\,dx$$
$$f(x)=x^3-2x^2+5x+c$$

$f(1)=3$ எனும் கொடுக்கப்பட்ட தகவலைப் பயன்படுத்தி, தொகை மாறிலி c –ன் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கலாம்.

$$f(1)=3\Rightarrow\ 3=(1)^3-2(1)^2+5(1)+c\Rightarrow c=-1$$

எனவே, $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$.

எடுத்துக்காட்டு 11.11

ஒரு தொடர்வண்டி மதுரை சந்திப்பிலிருந்து கோயம்புத்தூர் நோக்கி பிற்பகல் 3 மணிக்கு, $v(t)=20t+50$ கிமீ/மணி என்னும் திசை வேகத்தில் புறப்படுகிறது, இங்கு t ஆனது மணிகளில் கணக்கிடப்படுகிறது எனில், மாலை 5 மணிக்கு அத்தொடர் வண்டி எவ்வளவு தூரம் பயணித்திருக்கும்?

தீர்வு

நுண்கணிதப் பயன்பாட்டில், திசை வேகம் $v=\dfrac{ds}{dt}$ என்பது காலத்தை பொறுத்து அதன் நிலையில் மாறும் வீதம் ஆகும். இங்கு s என்பது தொலைவினைக் குறிக்கிறது. தொடர்வண்டியின் திசைவேகம்

$$v(t) = 20t + 50$$

ஆகவே $$\frac{ds}{dt} = 20t + 50$$

தொலைத்தூரச் சார்பு s-ஐ காண்பதற்கு வகையிடல் சார்பைத் தொகையிட வேண்டும்.

அதாவது, $$s = \int (20t + 50)\, dt$$

$$s = 10t^2 + 50t + c$$

காலம் பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் தொடர்வண்டி பயணித்திருக்கும் தூரம் பூஜ்ஜியமாகும். ஆரம்ப கால நிபந்தனை $t = 0$ எனும் போது $s = 0$ எனப் பயன்படுத்தித் தொகை மாறிலி c-ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$\Rightarrow s = 10t^2 + 50t + c \quad \Rightarrow c = 0$$

எனவே, $s = 10t^2 + 50t$

2 மணி நேரத்தில் தொடர் வண்டி பயணித்த தூரம் காண $t = 2$ என $s = 10t^2 + 50t$ -ல் பிரதியிடவேண்டும்.

ஆகவே, $s = 10(2)^2 + 50(2) = 140$ கிமீ. மாலை 5 மணிக்கு அத்தொடர் வண்டி 140 கி.மீ தூரம் பயணித்திருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.12

ஒரு நபரின் உயரம் h செ.மீ மற்றும் எடை w கி.கி. அவரின் எடையின் மாறும் வீதம் உயரத்தைப் பொறுத்துத் தோராயமாக $\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், எடையை உயரத்தின் சார்பாகக் காண்க. மேலும் ஒரு நபரின் உயரம் 150 செ.மீ –ஆக இருக்கும் போது எடையைக் காண்க.

தீர்வு

உயரத்தைப் பொறுத்து எடையின் மாறுவீதம்

$$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$$

$$w = \int 4.364 \times 10^{-5} h^2 \; dh$$

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c$$

உயரம் பூஜ்ஜியம் எனும்போது அந்நபரின் எடை பூஜ்ஜயமாக இருக்கும் என்பது தெளிவு. தொடக்க நிபந்தனை $h = 0$ எனும்போது $w = 0$, என்பதை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால், தொகையீட்டு மாறிலியை c–ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c \Rightarrow c = 0$$

ஒரு நபரின் எடை மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றுக்கிடையேயான தொடர்பானது

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) \text{ ஆகும்}$$

h =150 செ.மீ எனில், $w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{150^3}{3}\right)$

உயரம் h =150 செ.மீ எனும்போது, எடை தோராயமாக $w = 49$ கி.கி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.13

ஒரு மரத்தின் வளர்ச்சி t ஆண்டுகளில் $\frac{18}{\sqrt{t}}$ செ.மீ/ஆண்டு எனும் வீதத்தில் வளர்கிறது. $t = 0$ என இருக்கும்போது உயரம் 5 செ.மீ இருக்கும் என எடுத்துக்கொண்டால்.

(அ) நான்கு ஆண்டிற்குப் பிறகு மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

(ஆ) எத்தனை ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு மரத்தின் உயரம் 149 செ.மீ வளர்ந்து இருக்கும்.

தீர்வு

காலம் t -ஐ பொறுத்து உயரம் h -ன் மாறு வீதம் என்பது காலம் t-ஐ பொறுத்து h -ஐ வகையீடு செய்வதாகும்.

$$\text{எனவே, } \frac{dh}{dt} = \frac{18}{\sqrt{t}} = 18t^{-\frac{1}{2}}$$

எனவே உயரத்திற்கான பொது வடிவம் பெறுவதற்கு மேலே உள்ள சமன்பாட்டைத் தொகையிடவேண்டும்.

$$h = \int 18t^{-\frac{1}{2}}dt = 18(2t^{\frac{1}{2}}) + c = 36\sqrt{t} + c$$

$t = 0$ என இருக்கும்போது உயரம் 5 செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$5 = 0 + c \Rightarrow c = 5$$

$$h = 36\sqrt{t} + 5.$$

(i) நான்கு ஆண்டிற்குப் பிறகு மரத்தின் உயரத்தை நாம் காண வேண்டும்.

$t = 4$ எனில்,

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow h = 36\sqrt{4} + 5 = 77$$

நான்கு ஆண்டிற்குப் பிறகு மரத்தின் உயரம் 77 செ.மீ ஆக இருக்கும்.

(ii) $h = 149$செ.மீ எனில், t -ஐ காண வேண்டும்.

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow 149 = 36\sqrt{t} + 5$$

$$\sqrt{t} = \frac{149 - 5}{36} = 4 \Rightarrow t = 16$$

எனவே உயரம் 149 செ.மீ வளர, மரம் 16 ஆண்டுகள் எடுத்துக்கொள்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.14

மாணவன் ஒருவர் தன் மோட்டார் சைக்கிளில் 24 மீ/வினாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட தருணத்தில் தனக்கு முன்பாக 40 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும் தடுப்பின் மீது மோதலைத் தவிர்க்க வாகனத்தை நிறுத்த வேண்டியுள்ளது. உடனடியாகத் தன்னுடைய வாகனத்தை 8 மீ / வினாடி^{2} எதிர் முடுக்கத்தில் வேகத்தைக் குறைக்கிறார் எனில் வாகனம் தடுப்பின் மீது மோதுவதற்கு முன் நிற்குமா ?

தீர்வு

மோட்டார் சைக்கிளின் திசைவேகம் v எனவும் மற்றும் முடுக்கம் a எனவும் எடுத்து கொள்வோம், s என்பது தூரத்தை குறிக்கிறது. நுண்கணிதத்தில் v -ஐ $v = \frac{ds}{dt}$ எனவும் a-ஐ $a = \frac{dv}{dt}$

எனவும் குறிப்போம். மோட்டார் சைக்கிளின் வேகத்தைக் குறைக்கும் போது அதன் முடுக்கம் மோட்டார் சைக்கிளின் இயக்கத்தின் எதிர் திசையில் செயல்படுகிறது. ஆகையால் முடுக்கத்தைக் குறைக் குறியீட்டுடன் எழுதுவோம்.

மோட்டார் சைக்கிளின் எதிர்முடுக்கம் 8 **மீ / வினாடி^{2}** எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $a = \dfrac{dv}{dt} = -8$ மீ / வினாடி^{2}

$$v = \int a\,dt = \int -8dt = -8t + c_1$$

$$v = -8t + c_1.$$

பிரேக்கைப் பயன்படுத்தும்போது

$t = 0$, மற்றும் $v = 24$ மீ/வி.

$$24 = -8(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = 24$$

எனவே, $v = -8t + 24.$

அதாவது, $\dfrac{ds}{dt} = -8t + 24.$

தூரம் கேட்கப்பட்டுள்ளதால் அதனைக் காண்பதற்காக மேலும் ஒருமுறை தொகையீடு காண வேண்டியது அவசியமாகிறது.

$$s = \int v\,dt = \int (-8t + 24)dt$$

$$s = -4t^2 + 24t + c_2$$

c_2 –ஐ தீர்மானிக்க, பிரேக்கை எங்கே உபயோகிக்கின்றோமோ, அங்கிருந்து நிறுத்தும் தூரம் s அளவிடப்படுகிறது. அதாவது, $t = 0, s = 0$ எனில்

$$s = -4t^2 + 24t + c_2 \Rightarrow 0 = -\,4(0)^2 + 24(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$s = -4t^2 + 24t$$

பிரேக்கைப் பயன்படுத்திய பின்பு மோட்டார் சைக்கிள் நிற்பதற்கான நேரம் அறிந்திருந்தால், நிறுத்துதல் தூரத்தை மதிப்பிடலாம். திசைவேகச் சமன்பாட்டிலிருந்து நேரம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

வாகனம் நிறுத்தப்படும் போது, $v = 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow v = -8t + 24 \quad \Rightarrow 0 = -8t + 24 \quad \Rightarrow t = 3.$

$t = 3$, எனில்,

$$s = -4t^2 + 24t \Rightarrow s = -4(3)^2 + 24(3)$$

$s = 36$ மீட்டர் < 40 மீட்டர்

எனவே வாகனம் தடுப்பிற்கு 4 மீட்டர் முன்பே நிற்கும்.

பயிற்சி 11.4

(1) $f'(x) = 4x - 5$ மற்றும் $f(2) = 1$ எனில், $f(x)$ காண்க.

(2) $f'(x) = 9x^2 - 6x$ மற்றும் $f(0) = -3$ எனில் $f(x)$ காண்க.

(3) $f''(x) = 12x - 6$ மற்றும் $f(1) = 30$ $f'(1) = 5$ எனில் $f(x)$ காண்க.

(4) ஒரு பந்து 39.2 மீ/வினாடி ஆரம்ப திசைவேகத்தில் தரையிலிருந்து மேல்நோக்கி செங்குத்தாக எறியப்படுகிறது. இங்கு முடுக்கத்தை ஈர்ப்பு விசையைப் பொறுத்து மட்டும் கருதும்போது

(அ) எவ்வளவு நேரம் கழித்துப் பந்து தரையை வந்து மோதும்.

(ஆ) எந்த வேகத்தில் பந்தானது தரையை மோதும்.

(இ) பந்தானது எவ்வளவு தூரம் மேல் நோக்கிச் செல்லும் என்பதனைக் காண்க.

(5) ஒருவருக்கு ஏற்பட்ட காயம் ஆனது $-\dfrac{6}{(t+2)^2}$ செமீ^{2}/ நாள், $0 < t \leq 8$, என்ற வீதத்தில் ஞாயிற்றுக்கிழமை முதல் காயத்தின் பரப்பு குறைகிறது. திங்கட்கிழமை அன்று காயப்பகுதியின் பரப்பு 1.4 செமீ^{2} எனில் (இங்கு t என்பது நாட்களைக் குறிக்கிறது)

(அ) ஞாயிற்றுக்கிழமையன்று காயப்பகுதியின் பரப்பளவு எவ்வளவாக இருந்திருக்கும் ?

(ஆ) இதே வீதத்தில் தொடர்ந்து குணமாகிக் கொண்டிருக்கும் போது வியாழக்கிழமையன்று எதிர்பார்க்கும் காயப் பகுதியின் பரப்பு எவ்வளவு?

11.7 தொகை காண வழிமுறைகள்(Methods of Integration)

வகையிடுதலைப் போன்று தொகையிடல் காண்பது அவ்வளவு எளிதானதன்று. ஒரு சார்பினை வகையிடவேண்டுமெனில் அதற்கென்று விதிமுறைகள் மற்றும் செயல்பாடுகள் வகையிடலில் திட்டவட்டமாகவும் தெளிவாகவும் உள்ளன. நாம் $f(x)$ –ன் வகையிடுதலை $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ எனத் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதை அறிந்துள்ளோம். இவ்வரையறையைப் பயன்படுத்தி $\log x$–ன் வகையிடுதலைக் காண முறையான வழிமுறைகள் நமக்குத் தெரியும். ஆனால், $\log x$–ன் தொகையைக் காண முறையான வழிமுறைகள் இல்லை.

வகையிடுதலில், அதன் விதிகளைப் பயன்படுத்தி பல்வேறு சார்புகளின் கூட்டல், பெருக்கல், வகுத்தல், சார்புகளின் சேர்க்கை ஆகியவற்றின் வகையிடுதலைக் காணலாம்.

சார்பின் தொகையிடலைக் காண ஒரு சில தொகையீட்டு விதிகளே உள்ளன. மற்றும் இவ்விதிகளைப் பயன்படுத்தப் பல கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன.

தொகையிடலில் மிகப் பொருத்தமான முறையைத் தேர்வு செய்து, அதனை எளிமையாக எவ்வாறு பயன்படுத்துவது என்பதனைக் கண்டறியும் திறன் பல்வேறு தீவிரப் பயிற்சிகளுக்குப் பிறகே கிடைக்கும்.

தொகையிடுதலில் இரண்டு முக்கிய பண்புகளைப் பற்றி ஏற்கனவே நாம் பார்த்துள்ளோம். தொகையிடுதலில் பின்வரும் நான்கு முக்கிய முறைகள் உள்ளன.

(1) கூட்டல் அல்லது கழித்தலாகப் பிரித்துத் தொகையிடுதல்.

(2) பிரதியிடுதல் முறையில் தொகையிடுதல்.

(3) பகுதித் தொகையிடுதல்.

(4) அடுக்குகளைப் படிப்படியாகச் சுருக்கித் தொகையிடுதல்.

RGTBI

இங்கு மேற்கூறிய முதல் மூன்று முறைகளை நாம் படிப்போம். நான்காவது முறையை மேல் வகுப்பில் படிக்க உள்ளோம்.

11.7.1 பிரித்தல் முறை

சில சமயங்களில் கொடுக்கப்பட்ட சார்பினுக்கு, நேரடியாகத் தொகையிடுதல் காண்பது மிகவும் கடினம். ஆனால் அவற்றைச் சார்புகளின் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாக பிரித்து ஏற்கனவே நமக்குத்

தெரிந்த தொகையிடுதல் வாயிலாகக் காணலாம். எடுத்துகாட்டாக $\left(1-x^3\right)^2$, $\dfrac{x^2-x+1}{x^3}$, $\cos 5x\sin 3x$ $\cos^3 x$, $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$, ஆகியவற்றை நேரடியாகத் தொகையிடுவதற்கான சூத்திரம் கிடையாது. அவற்றைத் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாகப் பிரித்து பிறகு கிடைக்கப்பெறும் தனிப்பட்ட தொகையிடுதல் நமக்கு தெரிந்தவையே. பெரும்பாலான கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடுகள் இயற்கணிதம், முக்கோணவியல் அல்லது அடுக்குவடிவு மற்றும் சில சமயங்களில் இவற்றின் சேர்ப்புகள் ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றினை கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.15

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\left(1-x^3\right)^2$ (ii) $\dfrac{x^2-x+1}{x^3}$

தீர்வு

(i)
$$\int\left(1-x^3\right)^2 dx = \int(1-2x^3+x^6)dx$$
$$= \int dx-2\int x^3dx+\int x^6dx$$
$$= x-\frac{x^4}{2}+\frac{x^7}{7}+c.$$

(ii)
$$\int\frac{x^2-x+1}{x^3}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)dx$$
$$= \int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^3}dx.$$
$$= \log|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.16

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\cos 5x\sin 3x$ (ii) $\cos^3 x$.

தீர்வு

(i)
$$\int\cos 5x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 5x\sin 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\sin 8x-\sin 2x\right)dx$$
$$\int\cos 5x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}\right)+c.$$

(ii)
$$\int\cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int\left(3\cos x+\cos 3x\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(3\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right)+c$$

எடுத்துக்காட்டு 11.17

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}}$ (ii) $e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)$.

தீர்வு

(i)
$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{x}}dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right)dx$$
$$= \int\left(e^{x}-e^{-x}\right)dx = e^{x}+e^{-x}+c.$$

(ii)
$$\int e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)dx = \int\left(e^{5x}-e^{3x}\right)dx = \frac{e^{5x}}{5}-\frac{e^{3x}}{3}+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.18

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$$
$$= \int \sec^2 x dx+\int \operatorname{cosec}^2 x dx$$
$$= \tan x-\cot x+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.19

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\right)dx$$
$$= \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int \tan x\sec x dx-\int \tan^2 x dx$$
$$= \int \tan x\sec x dx-\int (\sec^2 x-1)dx$$
$$= \sec x-\tan x+x+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.20

மதிப்பிடுக: $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx.$

தீர்வு

$$\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int \cos x dx = \sqrt{2}\sin x+c$$

எடுத்துக்காட்டு 11.21

மதிப்பிடுக : $\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}dx = \int \frac{x^2+1-2x}{x(x^2+1)}dx$$

$$= \int\left(\frac{(x^2+1)}{x(x^2+1)} - \frac{2x}{x(x^2+1)}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \log|x| - 2\tan^{-1}x + c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.22

மதிப்பிடுக: $\int (\tan x + \cot x)^2 dx.$

தீர்வு

$$\int (\tan x + \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + 2\tan x \cot x + \cot^2 x)dx$$

$$= \int [(\sec^2 x - 1) + 2 + (\operatorname{cosec}^2 x - 1)]dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)dx$$

$$= \tan x + (-\cot x) + c$$

$$= \tan x - \cot x + c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.23

மதிப்பிடுக : $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \tan^2\frac{x}{2}dx$$

$$= \int\left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)dx = \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - x + c$$

$$= 2\tan\frac{x}{2} - x + c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.24

மதிப்பிடுக: $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx.$

தீர்வு

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{(\cos^2 x + \sin^2 x) + (2\sin x \cos x)}\, dx$$

$$= \int \sqrt{(\cos x + \sin x)^2}\, dx = \int (\cos x + \sin x)dx$$

$$= \sin x - \cos x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 11.25

மதிப்பிடுக: $\int \frac{x^3+2}{x-1}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{x^3+2}{x-1}dx = \int \frac{x^3-1+3}{x-1}dx = \int\left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{3}{x-1}\right)dx$$

$$= \int\left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}\right]dx$$

$$= \int\left(x^2+x+1+\frac{3}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+3\log|(x-1)|+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.26

மதிப்பிடுக: (i) $\int a^x e^x dx$ (ii) $\int e^{x\log 2}e^x\, dx.$

தீர்வு

(i) $$\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\log(ae)}+c$$

(ii) $$\int e^{x\log 2}e^x dx = \int e^{\log 2^x}e^x dx = \int 2^x e^x dx$$

$$= \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\log(2e)}+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.27

மதிப்பிடுக: $\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx.$

தீர்வு

$$\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx = \int (x+2-5)\sqrt{x+2}\, dx$$

$$= \int (x+2)\sqrt{x+2}\, dx - 5\int \sqrt{x+2}\, dx$$

$$= \int (x+2)^{\frac{3}{2}}dx - 5\int (x+2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 5\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.28

மதிப்பிடுக : $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right]dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\,dx = \int \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \int \sqrt{x+1}\,dx - \int \sqrt{x}\,dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] + c.$$

11.7.2 பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல்(Decomposition by Partial Fractions)

தொகையிடுதலில் பகுதி பின்னமாகப் பிரித்துத் தொகையிடுதல் ஒரு முக்கியமான முறையாகும். தொகையிடப்பட வேண்டியவை இயற்கணிதப் பின்ன வடிவில் இருந்தால் அதனை எளிதாகத் தொகையிட முடியாது, தொகையிடல் காண்பதற்கு முன்பு பின்னத்தைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுத வேண்டும். விகிதமுறு சார்பு $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\left(q(x)\neq 0\right)$ படியானது, $p\ (x)\ <\ q\ (x)$-ன் என இருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அதனை வகுத்து அதன்பிறகு பகுதி பின்னமாகப் பிரித்துத் தொகை காண வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.29

மதிப்பிடுக : (i) $\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}\,dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}\,dx.$

தீர்வு

(i) $$\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{13}{x-2}\,dx - \int \frac{10}{x-1}\,dx \quad \text{(பகுதி பின்னங்களாக பிரிக்க)}$$

$$= 13\log|x-2| - 10\log|x-1| + c$$

(ii) $$\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{-2}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx \quad \text{(பகுதி பின்னங்களாக பிரிக்க)}$$

$$= -2\int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -2\log|x+2| - \int (x+2)^{-2}\,dx + 2\log|x+1| + c$$

$$= -2\log|x+2| + \frac{1}{x+2} + 2\log|x+1| + c.$$

பயிற்சி 11.5

x–ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $\dfrac{x^3+4x^2-3x+2}{x^2}$ (2) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ (3) $(2x-5)(36+4x)$

(4) $\cot^2 x+\tan^2 x$ (5) $\dfrac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$ (6) $\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

(7) $\dfrac{3+4\cos x}{\sin^2 x}$ (8) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ (9) $\dfrac{\sin 4x}{\sin x}$

(10) $\cos 3x\cos 2x$ (11) $\sin^2 5x$ (12) $\dfrac{1+\cos 4x}{\cot x-\tan x}$

(13) $e^{x\log a}e^{x}$ (14) $(3x+4)\sqrt{3x+7}$ (15) $\dfrac{8^{1+x}+4^{1-x}}{2^x}$

(16) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}}$ (17) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}$ (18) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}$

(19) $\dfrac{3x-9}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}$ (20) $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$

11.7.3 பிரதியிடல் முறை அல்லது மாறியை மாற்றி அமைக்கும் முறை

தொகையிடலில் பிரதியிடல் முறையானது வகையிடலில் சார்பின் சார்புகளுக்கு வகையிடுதல் போன்றதாகும். பொருத்தமான பிரதியிடலைப் பயன்படுத்தித் தொகையிடலின் மாறியைப் புதிய மாறியாக மாற்றி அமைத்து எளிய முறையில் தொகையிடலாம்.

u ஆனது x–ஆல் ஆன சார்பு எனில், $\dfrac{du}{dx}=u'$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே $\displaystyle\int f(u)u'dx=\int f(u)du$ என எழுதலாம்.

ஆகவே, $\displaystyle\int f[g(x)]g'(x)dx=\int f(u)du$, இங்கு $u=g(x)$

$x=\phi(u)$ அல்லது $u=g(x)$ என்ற பொருத்தமான பிரதியிடலை தேர்வு செய்வதைச் சார்ந்து மேலே சொல்லப்பட்ட முறை எளிதாகிறது.

குறிப்பு 11.2

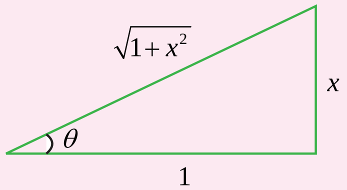
தொகையிடல் மாறியின் பிரதியிடல் முக்கோணவியல் சார்புகளாக இருந்தால் அதன் மறுபிரதியிடலின் மதிப்பைக் காண்பதற்கு மாதிரி வரைப்படத்தை பயன்படுத்தலாம். தொகை மாறி x–ஐ $x=\tan\theta$ எனப் பிரதியிட, தொகையிடலுக்கு பிறகு தீர்வு $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$ எனக் கிடைத்தால்,

$\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+x^2}+\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ என்றாகும்.

$x=\tan\theta$ எனில் படத்திலிருந்து,

$$\operatorname{cosec}\theta=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right),$$

$$\sec\theta=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1}\right)$$



05_11 Integral Calculus.indd 214 30-05-2022 17:35:00

எடுத்துக்காட்டு 11.30

கீழ்காண்பனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (ii) $\int e^{-x^2}x\,dx$ (iii) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ (v) $\int x(a-x)^8\,dx$

தீர்வு

(i) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$1+x^2=u$ எனில் $2x\,dx=du$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

(ii) $\int e^{-x^2}x\,dx$

$x^2=u$ எனில் $2x\,dx=du$

எனவே, $$\int e^{-x^2}x\,dx = \int e^{-u}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-u}du = \frac{1}{2}(-e^{-u})+c = -\frac{1}{2}e^{-u}+c = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c.$$

(iii) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$1+\cos x=u$ எனில் $-\sin x\,dx=du$

எனவே, $$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\log|u|+c = -\log|1+\cos x|+c.$$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$x=\tan u$ எனில் $dx=\sec^2 u\,du$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{\sec^2 u}{1+\tan^2 u}du = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}du = \int du = u+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x+c.$$

(v) $\int x(a-x)^8\,dx$

$u=a-x$ எனில் $du=-dx$

$$\int x(a-x)^8\,dx = \int x(a-x)^8\,dx$$

$$=\int (a-u)(u)^8(-du)$$

$$=\int \left(-a(u)^8+u^9\right)du$$

$$= \int u^9 du - a \int u^8 du$$

$$= \frac{u^{10}}{10} - a\frac{u^9}{9} + c$$

$$\int x(a-x)^8\, dx = \frac{(a-x)^{10}}{10} - \frac{a(a-x)^9}{9} + c.$$

11.7.4 சில முக்கியமான தொகையிடல்கள்

(1) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$$

(2) $$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

நிரூபணம்

(1) $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ என்க.

$f(x) = u$ எனில் $f'(x)dx = du$

எனவே, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c$

ஆகவே, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c.$

(2) $I = \int f'(x)[f(x)]^n dx$ என்க.

$f(x) = u$ எனில் $f'(x)dx = du$

ஆகவே, $I = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

எனவே, $\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c.$

எடுத்துக்காட்டு 11.31

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\int \tan x\, dx$ (ii) $\int \cot x\, dx$ (iii) $\int \operatorname{cosec} x\, dx$ (iv) $\int \sec x\, dx$

தீர்வு

(i) $I = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$\cos x = u$ எனில், $-\sin x\; dx = du$

எனில், $I = \int -\frac{1}{u} du = -\log|u| + c = -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c.$

(ii) $I = \int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ என்க.

$\sin x = u$ எனில், $\cos x\; dx = du$

$I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\sin x| + c.$

(iii) $$I = \int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{\operatorname{cosec}x(\operatorname{cosec}x - \cot x)}{\operatorname{cosec}x - \cot x} dx$$
$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec}x \cot x}{\operatorname{cosec}x - \cot x} dx$$

$\operatorname{cosec} x - \cot x = u$ எனில், $(\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \, \cot x) dx = du$

எனவே, $I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\operatorname{cosec}x - \cot x| + c.$

(iv) $$I = \int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$ என்க.

$\sec x + \tan x = u$ எனில் $(\sec^2 x + \sec x \tan x) dx = du$

ஆகவே, $I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\sec x + \tan x| + c$

எனில், $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + c.$

இவ்வாறாகப் பின்வரும் முக்கியமான முடிவுகளைப் பெறுகிறோம்.

(1)	$\int \tan x \, dx = \log\|\sec x\| + c$
(2)	$\int \cot x \, dx = \log\|\sin x\| + c$
(3)	$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log\|\operatorname{cosec} x - \cot x\| + c$
(4)	$\int \sec x \, dx = \log\|\sec x + \tan x\| + c$

எடுத்துக்காட்டு 11.32

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx$ (ii) $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$ (iii) $\int \frac{1}{x \log x} dx$

(iv) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$ (v) $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

தீர்வு

(i) $$I = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx$$ என்க.

$x^2 + 4x + 6 = u$ எனில் $(2x+4) dx = du$

எனவே, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|x^2 + 4x + 6| + c$

எனவே, $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx = \log|x^2 + 4x + 6| + c.$

(ii) $$I = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$ என்க.

$$e^x - 1 = u \text{ எனில் } e^x dx = du$$

$$\text{ஆகவே, } I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|e^x - 1| + c$$

$$\text{எனவே, } \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \log|e^x - 1| + c.$$

(iii) $$I = \int \frac{1}{x\log x} dx$$

$$\log x = u \text{ எனில் } \frac{1}{x} dx = du$$

$$\text{ஆகவே, } I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\log x| + c$$

$$\text{எனவே, } \int \frac{1}{x\log x} dx = \log|\log x| + c.$$

(iv) $$I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx \text{ என்க}$$

$$\sin x - \cos x = u \text{ எனில் } (\cos x + \sin x)\, dx = du$$

$$\text{ஆகவே, } I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\sin x - \cos x| + c$$

$$\text{எனவே, } \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = \log|\sin x - \cos x| + c$$

(v) $$I = \int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$1 + \sin 2x = u \text{ எனில் } 2\cos 2x\, dx = du$$

$$\text{எனவே, } I = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\log|u| + c = \frac{1}{2}\log|1 + \sin 2x| + c.$$

பயிற்சி 11.6

கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\frac{x^2}{1+x^6}$ (3) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (4) $\frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{10^x + x^{10}}$

(5) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (6) $\frac{\cot x}{\log(\sin x)}$ (7) $\frac{\operatorname{cosec} x}{\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)}$ (8) $\frac{\sin 2x}{a^2 + b^2\sin^2 x}$

(9) $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ (10) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (11) $\frac{1}{x\log x\log(\log x)}$ (12) $\alpha\beta x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}$

(13) $\tan x\sqrt{\sec x}$ (14) $x(1-x)^{17}$ (15) $\sin^5 x\cos^3 x$ (16) $\frac{\cos x}{\cos(x-a)}$

11.7.5 பகுதித் தொகையிடல் (Integration by parts)

தொகைச் சார்பானது இரண்டு சார்புகளின் பெருக்கலாகவோ அல்லது ஒரே ஒரு மடக்கை சார்பாகவோ அல்லது ஒரே ஒரு நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்பாகவோ அல்லது நேரடியாகத் தொகையிட முடியாத சார்பாகவோ இருந்தால் பொதுவாக பகுதித் தொகையிடலை பயன்படுத்தி தொகையைக் காணலாம். இரண்டு சார்புகளுக்கான பெருக்கல் வகையிடல் சூத்திரத்திலிருந்து இந்தப் பயனுள்ள தொகையீட்டு முறையைப் பெறுகிறோம்.

u மற்றும் v ஆகியவை இரண்டு வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில்,

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

தொகையீடு காண,

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$\int udv$ –லிருந்து மற்றொரு தொகையீடு $\int vdu$ வடிவில் கிடைக்கிறது மேலும் $\int udv$ –க்கு இறுதி வடிவம் கிடைக்கப் பெறவில்லை. இது udv என்னும் பெருக்கத்தின் தொகையிடுதலில் ஒரு பகுதியை மட்டும் தீர்க்கிறது. இதனை ஐரோப்பிய நாடுகளில் தொகையிடலின் ஒரு பகுதி என்கிறார்கள். பிற நாடுகளைப் போன்றே நாமும் பகுதித் தொகையிடல் என அழைக்கிறோம்.

u–ன் முறையான தேர்வைப் பொறுத்து இந்த முறை பொருத்தமாகிறது. அதாவது,

(i) $\log x, \tan^{-1} x$ போன்ற தொகைச் சார்புகளை நேரடியாகத் தொகையிட முடியாது. தொகைச் சார்புகளை u எனவும் மற்றதை dv எனவும் கொள்ளவும்.

(ii) தொகையீட்டுச் சார்புகள் இரண்டுமே தொகைச் சார்புகளை உள்ளடக்கி இருந்து மற்றும் அதில் ஒன்று x^n (n ஒரு மிகை முழுவெண்) ஆக இருந்தால் அதனை $u = x^n$ எனக் கொள்ளவும்.

(iii) மற்றைய நிலைகளில் u – ன் தேர்வு நம்முடைய விருப்பத்தைப் பொறுத்தது.

எடுத்துக்காட்டு 11.33

மதிப்பிடுக

(i) $\int xe^x dx$ (ii) $\int x\cos x\, dx$ (iii) $\int \log x\, dx$ (iv) $\int \sin^{-1} x\, dx$

தீர்வு

(i) $I = \int xe^x dx$

இங்கு x ஒரு இயற்கணித சார்பு மற்றும் e^x ஒரு அடுக்குக்குறிச்சார்பு ஆதலால்,

$u = x$ எனில், $du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

அதாவது, $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$

(ii) $I = \int x\cos x\, dx$ என்க.

x ஒரு இயற்கணித சார்பு $\cos x$ ஒரு முக்கோணவியல் சார்பு ஆதலால்,

$u = x$ எனில், $du = dx$

$$dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \sin x$$

பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\, dx = x\sin x + \cos x + c$$

(iii) $I = \int \log x\, dx$ என்க.

$u = \log x$ என்க. $du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int \log x\, dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int \log x\, dx = x\log x - x + c$$

(iv) $I = \int \sin^{-1} x\, dx$ என்க.

$u = \sin^{-1}(x), dv = dx$ என்க.

எனவே, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad v = x$

$$\int \sin^{-1} x\, dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \sin^{-1} x\, dx = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}},$$ இங்கு $t = 1 - x^2$

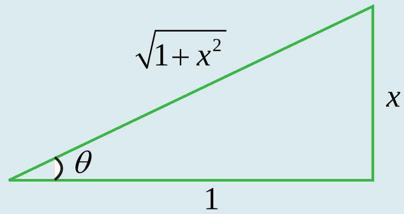
$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{t} + c$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 11.34

மதிப்பிடுக : $\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx$

தீர்வு



$\tan\theta = x$

$\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$

$I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx$ என்க.

$x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\text{எனவே, } I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \tan^{-1}(\tan 2\theta)\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int 2\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\int (\theta)(\sec^2\theta\, d\theta)$$

பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$I = 2\left[\theta\tan\theta - \int \tan\theta\, d\theta\right]$$

$$= 2\left(\theta\tan\theta - \log\left|\sec\theta\right|\right) + c$$

$$\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx = 2x\tan^{-1}x - 2\log\left|\sqrt{1+x^2}\right| + c$$

11.7.6 பகுதித் தொகையிடலுக்கான பெர்னோலியின் சூத்திரம்

u மற்றும் v ஆகியவை x – ன் சார்புகள் எனில் பெர்னோலியின் சூத்திரமானது $\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$ ஆகும்.

இங்கு $u', u'', u''', \ldots$ என்பன u –ன் அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள் ஆகும் மற்றும் $v, v_1, v_2, v_3, \cdots$ என்பன dv –ன் அடுத்தடுத்த தொகையிடல்கள் ஆகும்.

$u = x^n$ (n ஒரு மிகை முழுவெண்) எனக் எடுத்துக்கொள்ளும் போது பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவது எளிதாக இருக்கும் .

பின்வரும் கணக்குகளின் தீர்வு காண்பதற்கு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முறையில் பகுதித் தொகையிடலைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இந்நிலையில் பொதுவாகப் பெர்னோலியின் சூத்திரம் உதவுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.35

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) x^2e^{5x} (ii) $x^3\cos x$ (iii) x^3e^{-x}

தீர்வு

(i) $\int x^2e^{5x}dx.$

$$dv = e^{5x}dx$$
$$u = x^2 \qquad v = \frac{e^{5x}}{5}$$
$$u' = 2x \qquad v_1 = \frac{e^{5x}}{5^2}$$
$$u'' = 2 \qquad v_2 = \frac{e^{5x}}{5^3}$$
$$u''' = 0 \qquad v_3 = \frac{e^{5x}}{5^4}$$

பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^2e^{5x}\,dx = \left(x^2\right)\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) - (2x)\left(\frac{e^{5x}}{5^2}\right) + (2)\left(\frac{e^{5x}}{5^3}\right) - (0)\left(\frac{e^{5x}}{5^4}\right) + 0 + \cdots + 0 + c$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + c.$$

(ii) $\int x^3\cos x\,dx.$

$$dv = \cos x\,dx$$
$$u = x^3, \qquad v = \sin x$$
$$u' = 3x^2, \qquad v_1 = -\cos x$$
$$u'' = 6x, \qquad v_2 = -\sin x$$
$$u''' = 6, \qquad v_3 = \cos x$$

பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^3\cos x\,dx = \left(x^3\right)(\sin x) - \left(3x^2\right)(-\cos x) + (6x)(-\sin x) - (6)(\cos x) + c$$

$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + c.$$

(iii) $\int x^3 e^{-x} dx.$

பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\begin{array}{l} dv = e^{-x}dx \\ u = x^3, \quad v = -e^{-x} \\ u' = 3x^2, \quad v_1 = +e^{-x} \\ u'' = 6x, \quad v_2 = -e^{-x} \\ u''' = 6, \quad v_3 = e^{-x} \end{array}$$

$$\int x^3 e^{-x}\, dx = \left(x^3\right)\left(-e^{-x}\right) - \left(3x^2\right)\left(e^{-x}\right) + \left(6x\right)\left(-e^{-x}\right) - \left(6\right)\left(e^{-x}\right) + c$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + c.$$

பயிற்சி 11.7

பின்வருவனவற்றின் தொகை காண்க.

(1)	(i) $9xe^{3x}$	(ii) $x\sin 3x$	(iii) $25xe^{-5x}$	(iv) $x\sec x\tan x$
(2)	(i) $x\log x$	(ii) $27\ x^2 e^{3x}$	(iii) $x^2\cos x$	(iv) $x^3\sin x$
(3)	(i) $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$	(ii) $x^5 e^{x^2}$	(iii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{8x}{1-16x^2}\right)$	(iv) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

11.7.8 (i) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (ii) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ வடிவங்களின் தொகைக் காணல்

$e^{ax}\sin bx$ மற்றும் $e^{ax}\cos bx$ ஆகிய தொகைச் சார்புகளின் தொகையிடல்கள் தொடர்ந்து செல்வதால், கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளில் தொகையிடலை இருமுறை பயன்படுத்தி, இருபுறமும் ஒரே தொகையாகக் கொண்டு வந்து தீர்வு காண வேண்டும்.

முடிவு 11.1

(i) $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$$

(ii) $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

நிரூபணம் (i)

$I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$ என்க.

$u = \sin bx, \quad du = b\cos bx\,dx$ என்க.

$$dv = e^{ax}dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{ax}}{a}$$

பகுதித் தொகையிடல் முறையை பயன்படுத்த,

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \int \frac{e^{ax}}{a} b\cos bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$u = \cos bx, \quad du = -b\sin bx\,dx$ என்க.

$$dv = e^{ax}\,dx;\ v = \frac{e^{ax}}{a},$$

மீண்டும் பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \int \frac{e^{ax}}{a} b\sin bx\,dx\right]$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}I$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)I = \frac{e^{ax}[a\sin bx - b\cos bx]}{a^2}$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c$$

எனவே, $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c$

இதேபோல், $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c$

$$\boxed{\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c}$$

$$\boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c}$$

நினைவில் கொள்க :

பகுதித் தொகையிடலை பயன்படுத்தும் போது u மற்றும் dv யை அடுத்தடுத்து வரும் தொகையிடல்களில் ஒரே மாதிரியாகத் தேர்வு செய்ய வேண்டும். மேலே குறிப்பிட்ட இரண்டு எடுத்துகாட்டுகளைக் காண்க. ஜோடிகளில் வரக்கூடிய சார்புகளை மாற்றி அமைத்தல் கூடாது.

எடுத்துக்காட்டு 11.36

மதிப்பிடுக .

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ (ii) $\int e^{-5x}\sin 3x\,dx$

தீர்வு

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c$ என்ற சூத்திரத்தில் $a = 3$, $b = 2$

எனப்பிரதியிட

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \left(\frac{e^{3x}}{3^2+2^2}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c$$

$$= \left(\frac{e^{3x}}{13}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c.$$

(ii) $\int e^{-5x}\sin 3x\;dx$

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$ என்ற சூத்திரத்தில் $a = -5$, $b = 3$ எனப்பிரதியிட

$$\int e^{-5x}\sin 3x\;dx = \left(\frac{e^{-5x}}{(-5)^2+3^2}\right)(-5\sin 3x - 3\cos 3x) + c$$

$$\int e^{-5x}\sin 3x\;dx = -\left(\frac{e^{-5x}}{34}\right)(5\sin 3x + 3\cos 3x) + c.$$

பயிற்சி 11.8

x–ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) (i) $e^{ax}\cos bx$ (ii) $e^{2x}\sin x$ (iii) $e^{-x}\cos 2x$

(2) (i) $e^{-3x}\sin 2x$ (ii) $e^{-4x}\sin 2x$ (iii) $e^{-3x}\cos x$

முடிவு 11.2

$$\int e^{x}[f(x) + f'(x)]dx = e^{x}f(x) + c$$

நிரூபணம்

$I = \int e^{x}[f(x) + f'(x)]dx$ என்க.

$$= \int e^{x}f(x)dx + \int e^{x}f'(x)dx$$

முதல் தொகையில் $u = f(x)$; $du = f'(x)\,dx$ எனக் கொள்க.

$$dv = e^{x}\,dx\;; v = e^{x}$$

அதாவது, $I = e^{x}f(x) - \int e^{x}f'(x)dx + \int e^{x}f'(x)dx + c$

எனவே, $I = e^{x}f(x) + c.$

எடுத்துக்காட்டு 11.37

மதிப்பிடுக

(i) $\int e^{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ (ii) $\int e^{x}(\sin x + \cos x)dx$ (iii) $\int e^{x}\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

தீர்வு

(i) $I = \int e^{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ என்க.

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ எனில், } f'(x) = \frac{-1}{x^2} \text{ என்க.}$$

I ஆனது $\int e^x [f(x) + f'(x)]dx$ எனும் வடிவில் உள்ளது.

$$\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = e^x \frac{1}{x} + c.$$

(ii) $$I = \int e^x (\sin x + \cos x) dx \text{ என்க.}$$

$$f(x) = \sin x \text{ எனில், } f'(x) = \cos x$$

I ஆனது $\int e^x [f(x) + f'(x)]dx$ எனும் வடிவில் உள்ளது

$$\int e^x (\sin x + \cos x) dx = e^x \sin x + c.$$

(iii) $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx$

$$I = \int e^x \frac{(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2} dx \text{ என்க.}$$

$$= \int e^x \frac{\left(1+x^2-2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2} dx$$

$$= \int e^x \left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)} - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \right) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)} \text{ எனில் } f'(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$\int e^x \left(f(x) + f'(x) \right) dx = e^x f(x) + c$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx = \int e^x \left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)} - \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \right) dx = e^x \frac{1}{\left(1+x^2\right)} + c.$$

பயிற்சி 11.9

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $e^x (\tan x + \log \sec x)$

(2) $e^x \left(\frac{x-1}{2x^2} \right)$

(3) $e^x \sec x (1 + \tan x)$

(4) $e^x \left(\frac{2 + \sin 2x}{1 + \cos 2x} \right)$

(5) $e^{\tan^{-1} x} \left(\frac{1 + x + x^2}{1 + x^2} \right)$

(6) $\frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$

11.7.9 விகிதமுறு இயற்கணித சார்பின் தொகையிடல்

இப்பிரிவில் விகிதமுறு இயற்கணித சார்புகள் தொகுதி மற்றும் பகுதிகளில் மாறிலிக் குணகத்தையும் x ஆனது முழு எண் அடுக்குகளைப் பெற்றிருக்கும்.

வகை I

$\int \frac{dx}{a^2 \pm x^2}, \int \frac{dx}{x^2 - a^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ எனும் வடிவில் உள்ள தொகைகளைக் காணல்

(i) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$

(ii) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

(iii) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$

நிரூபணம்

(i) $I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ என்க.

$$= \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] dx \quad \text{(பகுதி பின்னங்களாக மாற்ற)}$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\log|a+x| - \log|a-x| \right] + c$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

(ii) $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ என்க.

$$= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx \quad \text{(பகுதி பின்னங்களாக மாற்ற)}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|x-a| - \log|x+a|\right] + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

எனவே, $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(iii) $I = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$ என்க.

$$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$dx = a\sec^2\theta\ d\theta$$

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

எனவே, $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(iv) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$x = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dx = a\cos\theta\ d\theta$$

$$I = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

எனவே, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(v) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ என்க.

$$x = a\sec\theta \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad ; \quad dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \int \sec\theta\, d\theta$$

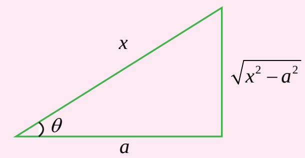
$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1, \text{இங்கு } c_1=c-\log a$$

எனவே, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1$



$\sec\theta=\frac{x}{a}$

$\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

(vi) $I = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ என்க.

$$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dx = a\sec^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int\frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}}d\theta=\int\frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2(\tan^2\theta+1)}}d\theta$$

$$= \int\frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta}d\theta=\int\sec\theta\,d\theta$$

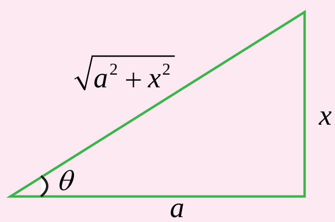
$$= \log|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1, \text{ இங்கு } c_1=c-\log a$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1$$



$\tan\theta=\frac{x}{a}$

$\sec\theta=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$

குறிப்பு: a^2-x^2, a^2+x^2 மற்றும் x^2-a^2 என்ற வடிவங்களுக்கு எளிதாகத் தொகைக் காணப் பயன்படக்கூடிய கீழ்க்காணும் பயனுள்ள பிரதியிடலை நினைவில் கொள்க.

வடிவம்	பிரதியிடல்
a^2-x^2	$x = a\sin\theta$
a^2+x^2	$x = a\tan\theta$
x^2-a^2	$x = a\sec\theta$

எடுத்துக்காட்டு 11.38

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக:

(i) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)^2+1}dx$ (ii) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+5}dx$ (iii) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$ (iv) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx$

தீர்வு

(i) $$I = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1^2}dx$$

$x - 2 = t$ என்க. $\Rightarrow dx = dt$

எனவே, $$I = \int \frac{1}{t^2+1^2}dt = \tan^{-1}(t)+c = \tan^{-1}(x-2)+c$$

(ii) $$I = \int \frac{x^2}{x^2+5}dx$$ என்க.

$$= \int \frac{x^2+5-5}{x^2+5}dx = \int\left(1-\frac{5}{x^2+5}\right)dx = \int dx - \int \frac{5}{x^2+5}dx$$

$$= x - 5\int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}dx$$

$$= x - 5\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$I = x - \sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

(iii) $$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx$$

$2x = t$ என்க. $\Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

எனவே, $$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1^2+t^2}}dt$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right|+c$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right|+c$$

(iv) $$I = \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2-25}}dx$$

$2x = t$ என்க. $\Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

எனவே, $$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-5^2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2-5^2}\right|+c$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2-25}\right|+c$$

வகை II

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ மற்றும் $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **எனும் வடிவில் உள்ள தொகைகளைக் காணல் :**

முதலில் ax^2+bx+c -ஐ இரு வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாகப் பிரித்தெழுதி வகை-I ன் ஏதேனும் ஒரு வடிவத்துக்குக் கொண்டு வந்து தொகையீடு காணலாம். கீழ்காணும் விதியை பயன்படுத்தி ax^2+bx+c -ஐ இரண்டு வர்க்கங்களின் கூடுதலாகவோ அல்லது கழித்தலாகவோ எழுதலாம்.

(1) x^2 -ன் குணகத்தை 1 ஆக மாற்றவும்.

(2) x -ன் குணகத்தை இரண்டால் வகுத்து அதன் வர்க்கத்தினைக் கூட்டியோ அல்லது கழித்தோ முழு வர்க்கமாக மாற்றவும்.

அதாவது, $$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 11.39

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx$

தீர்வு

(i)
$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{1}{x^2-2(1)x+(1)^2+4}dx$$
$$= \int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}dx$$
$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

(ii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-25}}dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-5^2}}dx$$
$$= \log\left|x+6+\sqrt{(x+6)^2-5^2}\right|+c$$

எனவே, $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx = \log\left|x+6+\sqrt{x^2+12x+11}\right|+c$$

(iii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{12-(x^2-4x)}}dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{12-\left\{(x-2)^2-4\right\}}}dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{4^2-(x-2)^2}}dx$$
$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{4}\right)+c$$

பயிற்சி 11.10

x–ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) (i) $\dfrac{1}{4-x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{25-4x^2}$ (iii) $\dfrac{1}{9x^2-4}$

(2) (i) $\dfrac{1}{6x-7-x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{(x+1)^2-25}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}$

(3) (i) $\dfrac{1}{\sqrt{(2+x)^2-1}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{9+8x-x^2}}$

வகை III

$\displaystyle\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ மற்றும் $\displaystyle\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ எனும் வடிவில் உள்ள தொகைகளைக் காணல்.

மேற்கண்ட தொகையை மதிப்பிட, முதலில் நாம் கீழ்கண்டவாறு எழுதவும்

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B$$

$$px+q = A(2ax+b)+B$$

இரு பக்கங்களிலும் x – ன் கெழுக்களையும் மற்றும் மாறிலிகளையும் தனித்தனியே சமப்படுத்தி A மற்றும் B ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட முதல் தொகையைக் கீழ்கண்டவாறு எழுதுக.

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

(முதல் தொகை $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ எனும் வடிவில் உள்ளது)

$$= A\log|ax^2+bx+c| + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

முந்தைய வகைகளைப் பயன்படுத்தி வலதுபுறத்தில் உள்ள முதல் தொகையை மதிப்பிடலாம்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட இரண்டாவது தொகையைக் கீழ்கண்டவாறு எழுதுக.

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

(முதல் தொகை $\displaystyle\int f'(x)[f(x)]^n dx$ எனும் வடிவில் உள்ளது)

$$= A\left(2\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

முந்தைய வகைளைப் பயன்படுத்தி வலதுபுறத்தில் உள்ள இரண்டாவது தொகையை மதிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.40

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ (ii) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ (iii) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ (iv) $\int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

தீர்வு

(i) $I = \int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ என்க.

$$3x+5 = A\frac{d}{dx}(x^2+4x+7)+B$$

$$3x+5 = A(2x+4)+B$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த ,

$$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}; 4A+B=5 \Rightarrow B=-1$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+7}dx$$

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{1}{x^2+4x+7}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| + c - \int \frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+c$$

(ii) $I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ என்க.

$$x+1 = A\frac{d}{dx}(x^2-3x+1)+B$$

$$x+1 = A(2x-3)+B$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த ,

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}; -3A+B=1 \Rightarrow B=\frac{5}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{5}{2}}{x^2-3x+1}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\log\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\log\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right| + c$$

(iii) $I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ என்க.

$$2x+3 = A\frac{d}{dx}(x^2+x+1)+B$$

$$2x + 3 = A(2x + 1) + B$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1; \quad A + B = 3 \Rightarrow B = 2$$

$$I = \int \frac{(2x+1)+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

$$I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right| + c$$

எனவே, $I = 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + c$

(iv) $\mathrm{I} = \int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx$ என்க.

$$5x-7 = A\frac{d}{dx}(3x-x^2-2)+B$$

$$5x - 7 = A(3-2x)+B$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த ,

$$-2A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{2}; 3A + B = -7 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{-5}{2}(3-2x) + \frac{1}{2}}{\sqrt{3x - x^2 + 2}} dx$$

$$I = -\frac{5}{2}\int \frac{3-2x}{\sqrt{3x-x^2+2}} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2+2}} dx$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right) 2\sqrt{3x-x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} dx$$

$$= -5\sqrt{3x-x^2+2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}\right) + c$$

எனவே, $I = -5\sqrt{3x-x^2+2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right) + c$

பயிற்சி 11.11

x–ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) (i) $\frac{2x-3}{x^2+4x-12}$ (ii) $\frac{5x-2}{2+2x+x^2}$ (iii) $\frac{3x+1}{2x^2-2x+3}$

(2) (i) $\frac{2x+1}{\sqrt{9+4x-x^2}}$ (ii) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ (iii) $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

வகை IV

$\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx, \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ எனும் வடிவில் உள்ள தொகைகளைக் காணல்.

முடிவு 11.3

(1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(2) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

(3) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$

நிரூபணம்

(1) $I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ என்க.

$u = \sqrt{a^2-x^2}$ எனில், $du = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

பகுதித் தொகையிடல் முறையை பயன்படுத்த,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow I = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\left(\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{(-a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

எனவே, $$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

இதே போல் மற்ற இரு முடிவுகளையும் நிறுவலாம்.

குறிப்பு 11.3

$x = a\sin\theta$ எனப் பிரதியிட்டும் மேற்கண்ட முடிவுகளை நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.41

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{25x^2-9}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx$ (iv) $\int\sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$

தீர்வு

(i) $I = \sqrt{4-x^2}\,dx$ என்க.

$$= \int\sqrt{2^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2^2-x^2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

எனவே, $$I = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

(ii) $I = \int\sqrt{25x^2-9}\,dx$ என்க.

$$= \int\sqrt{(5x)^2-3^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{(5x)^2-3^2} - \frac{3^2}{2}\log\left|5x+\sqrt{(5x)^2-3^2}\right|\right] + c$$

எனவே, $$I = \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{25x^2-9} - \frac{9}{2}\log\left|5x+\sqrt{25x^2-9}\right|\right] + c$$

(iii) $I = \int \sqrt{x^2+x+1}\, dx$ என்க.

$$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}\log\left|\left[x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]\right|+c$$

எனவே, $I = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c$

(iv) $I = \int \sqrt{(x-3)(5-x)}\, dx$ என்க.

$$= \int \sqrt{8x-x^2-15}\, dx$$

$$= \int \sqrt{1^2-(x-4)^2}\, dx$$

$$= \frac{x-4}{2}\sqrt{1^2-(x-4)^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{1}\right)+c$$

எனவே, $I = \frac{x-4}{2}\sqrt{8x-x^2-15}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-4)+c$

பயிற்சி 11.12

பின்வரும் சார்புகளின் தொகைக் காண்க.

(1) (i) $\sqrt{x^2+2x+10}$ (ii) $\sqrt{x^2-2x-3}$ (iii) $\sqrt{(6-x)(x-4)}$

(2) (i) $\sqrt{9-(2x+5)^2}$ (ii) $\sqrt{81+(2x+1)^2}$ (iii) $\sqrt{(x+1)^2-4}$

பயிற்சி 11.13

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளில் இருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) $\int f(x)dx = g(x)+c$ எனில், $\int f(x)g'(x)dx$ என்பது

(1) $\int (f(x))^2 dx$ (2) $\int f(x)g(x)dx$ (3) $\int f'(x)g(x)dx$ (4) $\int (g(x))^2 dx$

(2) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = k\,(3^{\frac{1}{x}})+c$ எனில், k –ன் மதிப்பு

(1) $\log 3$ (2) $-\log 3$ (3) $-\frac{1}{\log 3}$ (4) $\frac{1}{\log 3}$

(3) $\int f'(x)e^{x^2}dx = (x-1)e^{x^2}+c$ எனில், $f(x)$ என்பது

(1) $2x^3-\frac{x^2}{2}+x+c$ (2) $\frac{x^3}{2}+3x^2+4x+c$ (3) x^3+4x^2+6x+c (4) $\frac{2x^3}{3}-x^2+x+c$

(4) (x, y) என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஒரு வளைவரையின் சாய்வு $\frac{x^2-4}{x^2}$ ஆகும்.

இவ்வளைவரை (2, 7) என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால் , வளைவரையின் சமன்பாடு

(1) $y = x + \frac{4}{x} + 3$ (2) $y = x + \frac{4}{x} + 4$ (3) $y = x^2 + 3x + 4$ (4) $y = x^2 - 3x + 6$

(5) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\, dx =$

(1) $\cot(xe^x) + c$ (2) $\sec(xe^x) + c$ (3) $\tan(xe^x) + c$ (4) $\cos(xe^x) + c$

(6) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}\, dx =$

(1) $\sqrt{\tan x} + c$ (2) $2\sqrt{\tan x} + c$ (3) $\frac{1}{2}\sqrt{\tan x} + c$ (4) $\frac{1}{4}\sqrt{\tan x} + c$

(7) $\int \sin^3 x\, dx =$

(1) $\frac{-3}{4}\cos x - \frac{\cos 3x}{12} + c$ (2) $\frac{3}{4}\cos x + \frac{\cos 3x}{12} + c$

(3) $\frac{-3}{4}\cos x + \frac{\cos 3x}{12} + c$ (4) $\frac{-3}{4}\sin x - \frac{\sin 3x}{12} + c$

(8) $\int \frac{e^{6\log x} - e^{5\log x}}{e^{4\log x} - e^{3\log x}}\, dx =$

(1) $x + c$ (2) $\frac{x^3}{3} + c$ (3) $\frac{3}{x^3} + c$ (4) $\frac{1}{x^2} + c$

(9) $\int \frac{\sec x}{\sqrt{\cos 2x}}\, dx =$

(1) $\tan^{-1}(\sin x) + c$ (2) $2\sin^{-1}(\tan x) + c$ (3) $\tan^{-1}(\cos x) + c$ (4) $\sin^{-1}(\tan x) + c$

(10) $\int \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}\right) dx =$

(1) $x^2 + c$ (2) $2x^2 + c$ (3) $\frac{x^2}{2} + c$ (4) $-\frac{x^2}{2} + c$

(11) $\int 2^{3x+5}\, dx =$

(1) $\frac{3(2^{3x+5})}{\log 2} + c$ (2) $\frac{2^{3x+5}}{2\log(3x+5)} + c$ (3) $\frac{2^{3x+5}}{2\log 3} + c$ (4) $\frac{2^{3x+5}}{3\log 2} + c$

(12) $\int \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}\, dx =$

(1) $\frac{1}{2}\sin 2x + c$ (2) $-\frac{1}{2}\sin 2x + c$ (3) $\frac{1}{2}\cos 2x + c$ (4) $-\frac{1}{2}\cos 2x + c$

(13) $\int \frac{e^x(x^2\tan^{-1}x+\tan^{-1}x+1)}{x^2+1}\,dx =$

(1) $e^x\tan^{-1}(x+1)+c$ (2) $\tan^{-1}(e^x)+c$ (3) $e^x\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}+c$ (4) $e^x\tan^{-1}x+c$

(14) $\int \frac{x^2+\cos^2 x}{x^2+1}\operatorname{cosec}^2 x\,dx =$

(1) $\cot x+\sin^{-1}x+c$ (2) $-\cot x+\tan^{-1}x+c$

(3) $-\tan x+\cot^{-1}x+c$ (4) $-\cot x-\tan^{-1}x+c$

(15) $\int x^2\cos x\,dx =$

(1) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (2) $x^2\sin x-2x\cos x-2\sin x+c$

(3) $-x^2\sin x+2x\cos x+2\sin x+c$ (4) $-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x+c$

(16) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx =$

(1) $\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x+c$ (2) $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$

(3) $\log|x+\sqrt{1-x^2}|-\sqrt{1-x^2}+c$ (4) $\sqrt{1-x^2}+\log|x+\sqrt{1-x^2}|+c$

(17) $\int\frac{dx}{e^x-1} =$

(1) $\log|e^x|-\log|e^x-1|+c$ (2) $\log|e^x|+\log|e^x-1|+c$

(3) $\log|e^x-1|-\log|e^x|+c$ (4) $\log|e^x+1|-\log|e^x|+c$

(18) $\int e^{-4x}\cos x\,dx =$

(1) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x-\sin x]+c$ (2) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x+\sin x]+c$

(3) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x+\sin x]+c$ (4) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x-\sin x]+c$

(19) $\int\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x-1}dx =$

(1) $2\log\left|\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right|+c$ (2) $\log\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|+c$

(3) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x+1}{\tan x-1}\right|+c$ (4) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right|+c$

(20) $\int e^{-7x}\sin 5x\,dx =$

(1) $\frac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x - 5\cos 5x] + c$ (2) $\frac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x + 5\cos 5x] + c$

(3) $\frac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x - 5\cos 5x] + c$ (4) $\frac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x + 5\cos 5x] + c$

(21) $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx =$

(1) $x^2 e^{\frac{x}{2}} - 4xe^{\frac{x}{2}} - 8e^{\frac{x}{2}} + c$ (2) $2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} - 16e^{\frac{x}{2}} + c$

(3) $2x^2 e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 16e^{\frac{x}{2}} + c$ (4) $x^2 \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} - \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{4} + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8} + c$

(22) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx =$

(1) $\sqrt{x^2-1} - 2\log|x + \sqrt{x^2-1}| + c$ (2) $\sin^{-1} x - 2\log|x + \sqrt{x^2-1}| + c$

(3) $2\log|x + \sqrt{x^2-1}| - \sin^{-1} x + c$ (4) $\sqrt{x^2-1} + 2\log|x + \sqrt{x^2-1}| + c$

(23) $\int \frac{1}{x\sqrt{(\log x)^2 - 5}} dx =$

(1) $\log|x + \sqrt{x^2-5}| + c$ (2) $\log|\log x + \sqrt{\log x - 5}| + c$

(3) $\log|\log x + \sqrt{(\log x)^2 - 5}| + c$ (4) $\log|\log x - \sqrt{(\log x)^2 - 5}| + c$

(24) $\int \sin\sqrt{x}\,dx =$

(1) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}\right) + c$ (2) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}\right) + c$

(3) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\right) + c$ (4) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + c$

(25) $\int e^{\sqrt{x}} dx =$

(1) $2\sqrt{x}(1 - e^{\sqrt{x}}) + c$ (2) $2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} - 1) + c$

(3) $2e^{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) + c$ (4) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$

பாடத் தொகுப்பு

வகையிடல்	எதிர்வகையிடல்
$\frac{d}{dx}(c)=0,$ இங்கு c ஒரு மாறிலி	$\int 0\,dx = c$, இங்கு c ஒரு மாறிலி
$\frac{d}{dx}(kx)=k,$ இங்கு k ஒரு மாறிலி	$\int k\,dx = kx + c$ c ஒரு தன்னிச்சை மாறிலி
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1$ (அடுக்குக் விதி)
$\frac{d}{dx}\log x = \left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$

(1) k ஒரு மாறிலி எனில், $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$

(2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

$\int f(x)\ dx = g(x)+c$ எனில், $\int f(ax+b) = \frac{1}{a}g(ax+b)+c$

(1)	$\int \tan x\, dx = \log\lvert\sec x\rvert + c$
(2)	$\int \cot x\, dx = \log\lvert\sin x\rvert + c$
(3)	$\int \text{cosec}x\ dx = \log\lvert\text{cosec}\, x - \cot x\rvert + c$
(4)	$\int \sec x\, dx = \log\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$

பகுதித் தொகையிடலுக்கான பெர்னோலியின் சூத்திரம்

u மற்றும் v ஆகியவை x – ன் சார்புகள் எனில் பெர்னோலியின் சூத்திரமானது

$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$ ஆகும்.

இங்கு $u', u'', u''', \ldots$ என்பன u –ன் அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள் ஆகும் மற்றும் $v, v_1, v_2, v_3, \cdots$ என்பன dv –ன் அடுத்தடுத்த தொகையிடல்கள் ஆகும்

$u = x^n$ (n ஒரு மிகை முழுவெண்) என எடுத்துக்கொள்ளும்போது பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவது எளிதாக இருக்கும்

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

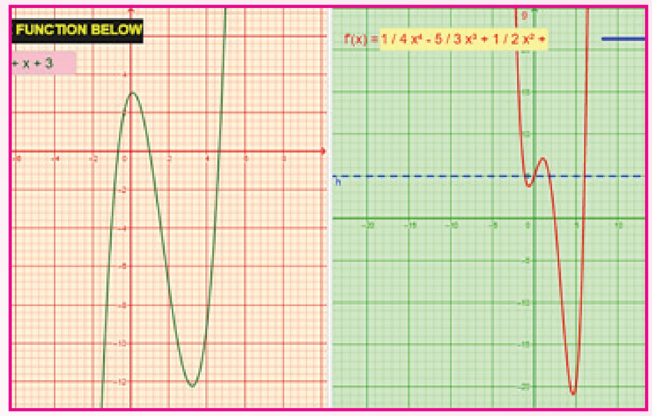
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$$

இணையச் செயல்பாடு 11 (a)

தொகை நுண்கணிதம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில்
கிடைக்கப் பெறுவது

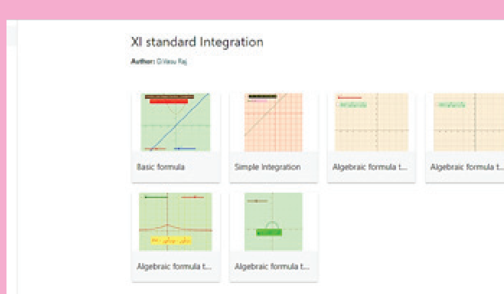


படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "XI standard Integration" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Simple Integration" என்ற பணித்தாளைத் தேர்வு செய்யவும். f(x) என்ற பெட்டியில் எந்த சார்புகளையும் உள்ளீடு செய்யலாம். அவ்வாறு உள்ளீடுசெய்யும் போது f(x)-ற்கான வரைபடம் இடது பக்கத்திலும், தொகைப்படுத்தப்பட்டது வலது பக்கத்திலும்தோன்றும். (குறிப்பு : x^5 என்பதற்கு x^5 என்று உள்ளீடு செய்யவும்). "integration constant" என்னும் நழுவலை நகர்த்தி தொகையீட்டு மாறிலி மதிப்பை மாற்றவும்.



படி – 1

படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/c63hdegc

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

இணையச் செயல்பாடு 11 (b)

தொகை நுண்கணிதம்

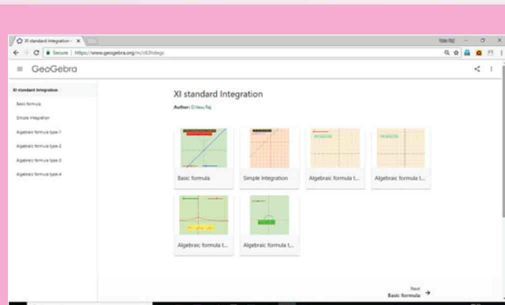
செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

படி – 1

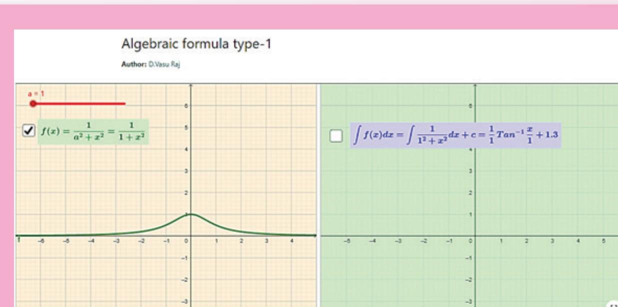
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra–வின்"XI standard Integration" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Algebraic type–1" என்பதைத் தேர்வு செய்க. செயலுக்கான வரைபடம் இடது பக்கத்திலும், தொகைப்படுத்தப்பட்டது வலது பக்கத்திலும்தோன்றும். வரைபடத்தைக்காண இரண்டையும் சொடுக்கவும். நழுவலைநகர்த்தி (a)–ன் மதிப்பினை மாற்ற முடியும். இதே போன்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மற்ற Algebraic type களையும் செய்து மாற்றங்களைஉற்று நோக்குக.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/c63hdegc

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

அத்தியாயம் 12

நிகழ்தகவு கோட்பாடு - ஓர் அறிமுகம்
(INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY)

SQ3TV

வாழ்க்கையில் நிகழும் ஒவ்வொரு நிகழ்வும் நிகழ்தகவைச் சார்ந்தே அமைகின்றது

பியரி சைமன் லாப்லாஸ்

12.1 அறிமுகம் (Introduction)

லாப்லாஸ்
1749-1827

பிளைசி பாஸ்கல் (Blaise Pascal) மற்றும் பியரி டி பெர்மாட் (Pierre de Fermat) ஆகிய இரு புகழ் பெற்ற பிரெஞ்சு கணிதவியலார்களால் உருவாக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு கோட்பாட்டிற்கு 1654–ல் ஒரு சூதாட்ட களத்தில் நிகழ்ந்த விவாதமே மூல காரணமாக அமைந்தது. நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் அடிப்படைக் கொள்கைகளை முதன் முதலில் பாஸ்கல் மற்றும் பெர்மாட் ஆகியோர் வடிவமைத்தனர். லாப்லாஸ் தனது ஆழ்ந்த ஆராய்ச்சிக்குப் பின்னர் 1812 ல் வெளியிட்ட வரலாற்றுச் சிறப்பு மிக்க கட்டுரையின் வாயிலாக நிகழ்தகவு கோட்பாட்டிற்கு அடித்தளம் அமைத்தார். புள்ளியியலில் பேயிஸின் (Bayesian) கோட்பாடு மூலமாக நிகழ்தகவுக்கு விளக்கம் அளித்தவர் லாப்லாஸ் ஆவார்.

தொடக்கத்தில் விளையாட்டுகளின் மூலம் அறியப்பட்ட நிகழ்தகவானது தற்போது பயன்பாட்டுக் கணிதத்தில் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்த பகுதியாக விளங்குகிறது. ஆயுள் காப்பீட்டுப் பிரிமியம் நிர்ணயத்திலிருந்து தேர்தல் கருத்துக்கணிப்பு முடிவுகள் வரை மற்றும் வாயுவினுள் உள்ள மூலக் கூறுகளின் தன்மைகளை அறிய நிகழ்தகவினைப் பயன்படுத்துவதைக் காணலாம்.

பள்ளிப் பாடப் பகுதியில் நிகழ்தகவு சேர்க்கப்பட்டதற்கு அதன் வாழ்வியல் பயன்பாடு ஒரு முக்கிய காரணமாக அமைகின்றது. 'நிகழ்தகவு' எனும் சொல்லானது வாய்ப்பு, நிகழக்கூடியது, ஊகிக்கக் கூடியது, நிகழும் சாத்தியக் கூறு, சாதக அல்லது பாதக விகிதம், இடையூறு, எதிர்பார்ப்பு என்ற பலப் பொருளைத் தருகின்றது.

அன்றாட வாழ்வில் பல தருணங்களில் நமது அனுமானங்கள் நிச்சயமற்றதாக அமைகின்றது. இந்த நிச்சயமற்ற தன்மையை அளக்கும் கணிதப்பிரிவே நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு என அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழக்கூடிய வாய்ப்பின் அளவினைக் கணிப்பது நிகழ்தகவு ஆகும்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

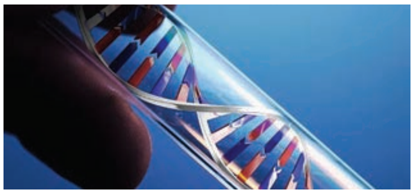
- நிகழ்தகவின் வழக்கமான கோட்பாட்டையும் அடிப்படை அணுகுமுறைகளையும் அறிதல்
- ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- சார்பு நிலை நிகழ்தகவு , சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் பற்றிய கருத்துக்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- பேயிஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தும் முறையினை அறிந்து கொள்ளுதல்
- நடைமுறை வாழ்க்கையில் நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்த அறிந்து கொள்ளுதல் ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

12.2 அடிப்படை வரையறைகள் (Basic definitions)

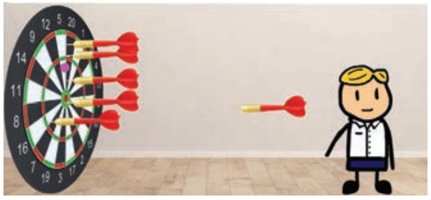
நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டைக் கற்பதற்கு முன்பு நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் அடிக்கடி பயன்படுத்திய சில வரையறைகளை நினைவு கூர்வோம்.

சோதனை

நிர்ணயிக்கப்பட்ட சோதனை | சமவாய்ப்புச் சோதனை



(மரபணு நிர்ணயித்தல்)



(இலக்கைத் தாக்குதல்)

வரையறை 12.1

ஒரு செயல்பாடு வரையறுக்கப்பட்ட முடிவுகளைக் கொண்டிருக்குமேயானால், அச்செயல்பாட்டினைச் சோதனை (experiment) என வரையறுக்கலாம்.

வரையறை 12.2

நிர்ணயிக்கப்பட்ட சோதனை (Deterministic Experiment): ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில், ஒரு சோதனையின் முடிவுகளை முன்கூட்டியே உறுதியாகக் கணிக்க முடியுமாயின், அது நிர்ணயிக்கப்பட்ட சோதனையாகும்.

வரையறை 12.3

சமவாய்ப்புச் சோதனை (Random Experiment or non deterministic) என்பது

(i) ஒரு சோதனையில் கிடைக்கக் கூடிய எல்லாதவிதச் சாத்தியக் கூறுகளை முன்கூட்டியே அறிந்திருக்க முடியும்.

(ii) சோதனைக்கு முன்பே முடிவினைக் கணிக்க இயலாது மற்றும்

(iii) ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் இச்சோதனையை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்த இயலும்.

ஒரு பகடையை "உருட்டுவது", ஒரு நாணயத்தைச் "சுண்டுவது" முதலியன சமவாய்ப்புச் சோதனைக்கு உதாரணங்களாகும்.

வரையறை 12.4

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் கிடைக் கூடிய அடிப்படை நிகழ்வுகளை (முடிவுகளை) மேலும் பிரிக்க இயலாது எனில் அது ஒரு சாதாரண நிகழ்ச்சியாகும் (simple event).

வரையறை 12.5

சமவாய்ப்புச் சோதனையின் எல்லா நிகழ்வுகளையும் கொண்ட கணமானது கூறுவெளி (Sample space) எனப்படும். ஒரு கூறுவெளியின் ஒவ்வொரு நிகழ்வும் சாதாரண நிகழ்வாகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.1

(1) (i) ஒரு பகடையை ஒருமுறை உருட்டிக் கிடைக்கக்கூடிய கூறுவெளியானது

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(ii) ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டினால் கிடைக்கும் கூறுவெளி $S = \{H, T\}$.

(2) (i) தலைவிழும் வரை ஒரு நாணயத்தை எத்தனை முறை சுண்ட வேண்டும் என முன்பே அறிய இயலாது. இச்சோதனையின் கூறுவெளி $S = \{H, TH, TTH, TTTH, ...\}$ என்ற முடிவுறாக் கணம் ஆகும்.

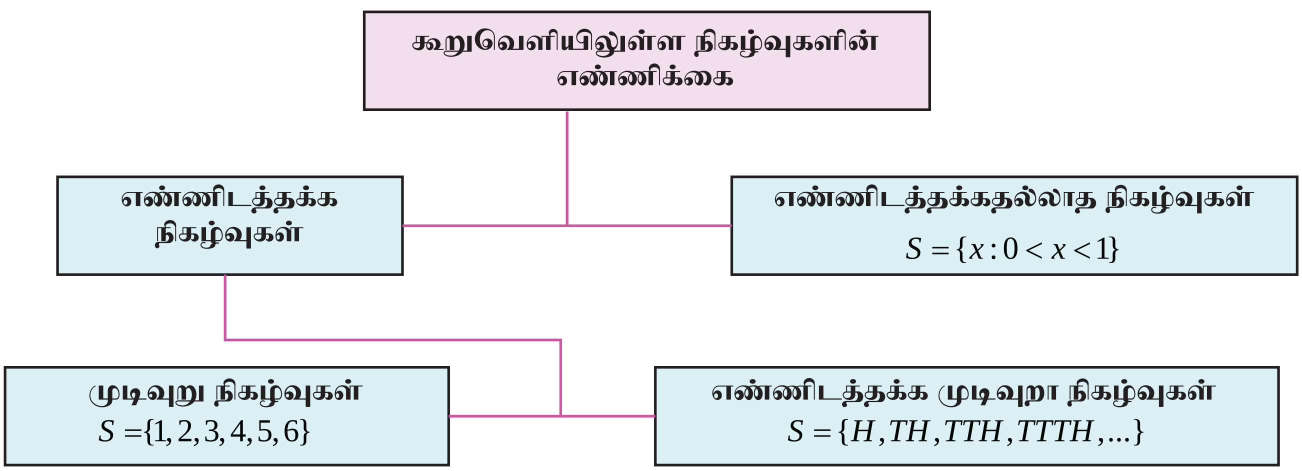
(ii) தொடர்வண்டிப் பயணச்சீட்டு வாங்கப் பயணச்சீட்டு வழங்கும் இடத்தில் காத்திருக்கும் பயணிகளின் எண்ணிக்கைக்குத் தொடர்புடைய கூறுவெளியானது $S = \{0,1,2,...\}$.

(3) (i) சமவாய்ப்பு முறையில் 0-க்கும் 1-க்கும் இடையில் ஒரு எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்க அமையும் சோதனையின் கூறுவெளி $S = \{x: 0 < x < 1\}$.

(ii) ஒரு மின் விளக்கின் ஆயுள் காலத்தைக் காட்டும் (t மணிநேரத்தில்) நிகழ்ச்சியின் கூறுவெளி $S = \{ t: 0 < t < 1000\}$

எடுத்துகாட்டு (2) மற்றும் (3) ல் அமைந்துள்ள இரு வகையான முடிவுறா கணங்களை வேறுபடுத்தும்போது, அதில் ஒன்று மற்றொன்றைவிடக் குறிப்பிடத்தக்க அதிக உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளது என அறியலாம். குறிப்பாக (2) ல் உள்ள கூறுவெளி S-ல் உள்ள உறுப்புகள் எண்ணிடத்தக்கவை. ஆனால் (3) ல் உள்ள கூறுவெளியின் உறுப்புகள் எண்ணிடத்தக்கதல்ல. எண்ணிடத்தக்க மற்றும் முடிவற்ற (countably infinite) கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிட்டு அவைகளை இயல் எண்கள் கணம் N-உடன் ஒன்றுக் கொன்று தொடர்புபடுத்தலாம். ஆனால் எண்ணணிடத்தக்க இயலாத கணங்களை இவ்வாறு தொடர்புபடுத்த இயலாது.

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் ஒரு கூறுவெளியில் உள்ள உறுப்புகள் எண்ணிடத்தக்கவையாக அல்லது எண்ணிடத்தக்கவை அல்லாதவையாக இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது.



12.3 முடிவுறு கூறுவெளி (Finite Sample Space)

இப்பகுதியில் முடிவுறு கூறுப்புள்ளிகள் உடைய கூறுவெளிகளை மட்டுமே காண்போம்.

நிகழ்ச்சிகளின் வகைகள் :

இந்தப் பாட பகுதியில் நாம் அடிக்கடிப் பயன்படுத்தக்கூடிய சில முக்கிய நிகழ்ச்சிகளை (Events) வரையறுப்போம்.

- நிச்சயம் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சி (Sure event or certain event)
- இயலா நிகழ்ச்சி (Impossible event)
- நிரப்பி நிகழ்ச்சி (Complementary event)
- ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி (Mutually exclusive events)
- ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சி (Mutually inclusive event)
- யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive events)
- சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events)
- சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (Independent events) (நிகழ்தகவு கொள்கைகளைப் பற்றி அறிந்த பின் வரையறுக்கப்படும்)

வரையறை 12.6

கூறுவெளியானது முடிவுறு உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் அதன் ஒவ்வொரு உட்கணமும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். அதாவது கூறுவெளியின் அடுக்குக்கணம் $\mathscr{P}(S)$ -இல் உள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். ஒரு நிகழ்வானது கூறுபுள்ளிகளின் தொகுப்பாகும். இந்நிலையில் S ஆனது உறுதியான அல்லது நிச்சயம் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படும். S–இல் உள்ள வெற்றுக் கணம் $\varnothing$ ஆனது இயலா நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படும்.

வரையறை12.7

ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி A–உடன் $\bar{A}$ என்ற மற்றொரு நிகழ்ச்சியைத் தொடர்புபடுத்தலாம். $\bar{A}$ என்பது A ன் நிரப்பியாகும். நிகழ்ச்சி $\bar{A}$ –ஐ, A இல்லா நிகழ்ச்சி எனவும் அழைக்கலாம்..

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.2

கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4\}$–ன் எல்லா உட்கணங்களின் (S–ன் அடுக்குக்கணம்) கணம்,

$$\mathscr{P}(S) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\big\}$$

(i) $\mathscr{P}(S)$–ன் எல்லா உறுப்புகளும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியாகும்.

(ii) $\varnothing$ என்பது இயலா நிகழ்ச்சியாகும்.

(iii) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ என்பவை சாதாரண நிகழ்ச்சிகளாகும்

(iv) $\{1, 2,3,4\}$ என்பது நிச்சயம் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சி (Sure event or certain event) ஆகும்.

வரையறை 12.8

இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் நிகழக்கூடியவையல்ல எனில் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events) ஆகும்.

$A_1, A_2, A_3,..., A_k$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (mutually exclusive) எனில் $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

வரையறை 12.9

இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் நிகழக்கூடியவை எனில் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் (Mutually inclusive events) ஆகும். $A_1, A_2, A_3,..., A_k$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் எனில், $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.3

ஒரு பகடையை உருட்டும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளியானது $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(i) $\{1, 3\}\cap\{2, 4, 5, 6\}=\varnothing$, என்பதால் $\{1,3\}$ மற்றும் $\{2,4,5,6\}$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(ii) $\{1,6,\},\{2,3,5\}$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(iii) $\{2,3,5\},\{5,6\}$ என்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகளாகும் ஏனெனில் $\{2, 3, 5\}\cap\{5, 6\}=\{5\}\neq\varnothing$

வரையறை 12.10

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = S$ எனில் $A_1, A_2, A_3 ,..., A_k$ ஆகியவை யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் என அழைக்கப்படும்.

வரையறை 12.11

(i) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ (ii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup, \cdots, \cup A_k = S$ எனில் $A_1, A_2, A_3 ,..., A_k$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.4

ஒரு பகடையை உருட்டும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளியானது, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

இக்கூறுவெளியில் $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\},\{6\}$ மற்றும் $\{1,5\}$ என்பவை சில நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(i) $\{2, 3\}\cup\{1, 3, 5\}\cup\{4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ (கூறுவெளி), என்பதால் $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\}$ ஆகியவை யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

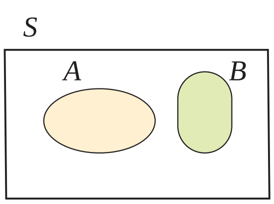
(ii) அதே போன்று $\{2,3\},\{4,6\}$ மற்றும் $\{1,5\}$ ஆகியவையும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(iii) $\{1,3,5\},\{4,6\},\{6\}$ மற்றும் $\{1,5\}$ ஆகியவை யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

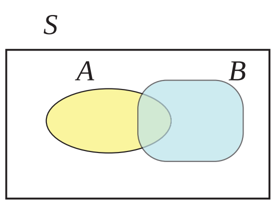
(ஏனெனில் $\{1, 3, 5\}\cup\{4, 6\}\cup\{6\}\cup\{1, 5\} \neq S$).

(iv) $\{2,3\},\{4,6\},$ மற்றும் $\{1,5\}$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும். ஏனெனில் $\{2,3\}\cap\{4,6\} = \varnothing$, $\{2,3\}\cap\{1,5\} = \varnothing$, $\{4,6\}\cap\{1,5\} = \varnothing$ மற்றும் $\{2, 3\}\cup \{4, 6\}\cup \{1, 5\} = S$.

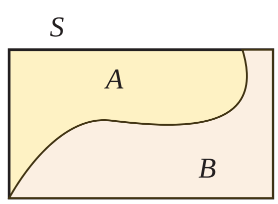
வென்படங்களின் வாயிலாகப் பல்வகை நிகழ்ச்சிகளுடன் கூடிய கூறுவெளிகளைக் கண்டறிவது எளிது என்பதனைக் கீழ்க்காணும் படங்கள் விளக்குகிறது.



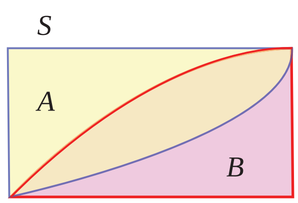
A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்



A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள்



A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள்



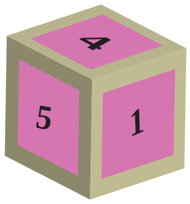
A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கா மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள்

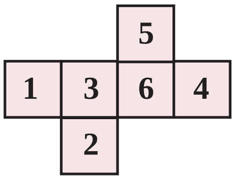
வரையறை 12.12

ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் நிகழும் வாய்ப்பினைச் சமமாக பெற்றிருப்பின் அவை சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events) என அழைக்கப்படும்.

(i) சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு: ஒரு சீரான பகடை உருட்டப்படுகிறது

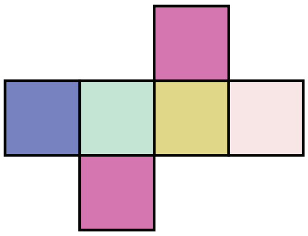
பகடையில் தோன்றும் எண்	1	2	3	4	5	6
நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பு	1	1	1	1	1	1

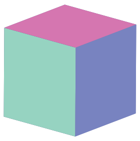




(ii) சமவாய்ப்பில்லாத நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு: படத்தில் காட்டிய ஒரு நிறம் பூசப்பட்ட பகடை உருட்டப்படுகிறது.

பகடையில் தோன்றும் நிறம்					
நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பு	1	1	1	2	1





இதே போல் ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும் போது தலை அல்லது பூ வீழும் நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

கூறுவெளிகளைக் காணும் முறைகள்

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.5

(i) இரு நாணயங்களைச் சுண்டிவிடும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளியானது

$S=\{H,T\}\times\{H,T\}=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ அல்லது $\{HH,HT,TH,TT\}$

(ii) ஒரே சமயத்தில், ஒரு நாணயம் சுண்டப்படுகிறது மற்றும் ஒரு பகடை உருட்டப்படுகிறது எனில் கிடைக்கும் கூறுவெளியானது

$S=\{H,T\}\times\{1,2,3,4,5,6\} = \{H1,H2,H3,H4,H5,H6,T1,T2,T3,T4,T5,T6\}$ அல்லது

$S=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$.

நாணயம் மற்றும் பகடையால் கிடைக்கும் முடிவுகளை (out comes) வரிசை மாற்றியும் கூறுவெளியை எழுதலாம். சில சமவாய்ப்பு சோதனைகளால் கிடைக்கும் கூறுவெளிகள் பின்வரும் அட்டவணையில் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது.

சமவாய்ப்புச் சோதனை	முடிவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை	கூறுவெளி
சீரான ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல்	$2^1=2$	$\{H, T\}$
சீரான இரு நாணயங்களைச் சுண்டுதல்	$2^2=4$	$\{HH, HT, TH, TT\}$
சீரான மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டுதல்	$2^3=8$	$\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$
ஒரு சீரான பகடையை உருட்டுதல்	$6^1=6$	$\{1, 2,3, 4, 5,6\}$
இரு சீரான பகடைகளை உருட்டுதல் அல்லது ஒரு சீரான பகடையை இருமுறை உருட்டுதல்	$6^2=36$	$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$ $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$ $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$ $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$ $(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$ $(6,1), (6,2),(6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$
52 சீட்டுகளைக் கொண்ட ஆட்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒன்றை உருவுதல்	$52^1=52$	Heart ♥ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K சிவப்பு நிறம் Diamond ♦ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K சிவப்பு நிறம் Spade ♠ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K கருப்பு நிறம் Club ♣ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K கருப்பு நிறம்

குறியீடுகள்

A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க.

(i) $A \cup B$ என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டும் நிகழ்வது

(ii) $A \cap B$ என்பது A மற்றும் B ஒரே நேரத்தில் நிகழ்வது.
$A \cap B$ என்பதை AB எனவும் குறிப்பிடலாம்.

(iii) $\bar{A}$ அல்லது A' அல்லது A^c என்பது A நிகழாமையைக் குறிக்கிறது .

(iv) $(A \cap \bar{B})$ என்பது A மட்டும் நிகழ்வதைக் குறிக்கிறது.

முன்னறி நிகழ்தகவு: அனுபவம் அல்லது உற்றுநோக்கல் மூலமாக அல்லாமல் கருத்தியல் முடிவுகள் அல்லது கோட்பாடுகளை உருவாக்குதல் மூலம் பெறப்பட்ட அறிவு

12.4 நிகழ்தகவு (Probability)

12.4.1 நிகழ்தகவின் பழமையான (முன்னறி நிகழ்தகவு) வரையறை (பெர்னோலியின் சமவாய்ப்புக் கொள்கை)

(Classical definition (Apriori) of probability (Bernoulli's principle of equally likely))

முன்வகுப்பில் நிகழ்தகவின் வரையறையைப் பயன்படுத்திக் கணிதத்தில் தீர்வு கண்டோம். இங்கு நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கொள்கைகளின் அணுகுமுறையைப் பற்றி அறிவோம் (பின் நிகழ்தகவு).

பின் நிகழ்தகவு: அனுபவம் அல்லது உற்று நோக்கல் மூலமாக பெறப்பட்ட அறிவு

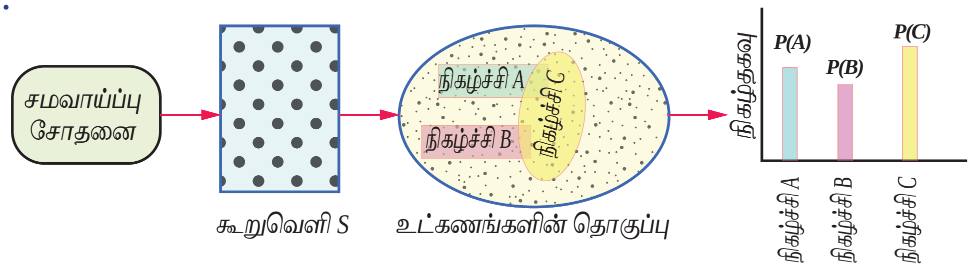
பழமையான கொள்கைகளின் கீழ் வரும் அடிப்படைக் கொள்கையில் எதேச்சையான சோதனையின் விளைவுகள் சமவாய்ப்பில் இருக்கும். ஒரு சோதனையில் யாவுமளாவிய மற்றும் ஒன்றையொன்று விலக்கிய சமவாய்ப்புள்ள முடிவுகள் n எண்ணிக்கையிலும், அவற்றில் m எண்ணிக்கையுள்ள முடிவுகள் A-விற்கு சாதகமாகவும் இருப்பின் A-யினுடைய நிகழ்தகவு $\frac{m}{n}$ ஆகும். அதாவது , $P(A)=\frac{m}{n}$.

வரையறை 12.13

ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி S எனவும் அதன் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி A எனவும் கொள்க. S மற்றும் A –வுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முறையே $n(S)$ மற்றும் $n(A)$ எனில் A –ன் நிகழ்தகவு,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A\text{-க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}{S\text{-ல் உள்ள யாவுமளாவிய முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

ஒவ்வொரு நிகழ்தகவியல் மாதிரிகளை உள்ளடக்கிய செயல்முறை பின்வரும் படத்தில் விளக்கப் பட்டுள்ளன.



நிகழ்தகவின் பழமையான வரையறையானது முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள சாத்தியமான முடிவுகள் (outcomes) கொண்ட சோதனைகளுக்கு மட்டும் பயன்படும் வகையில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் இவ்வரையறையின் மூலம், சோதனைகளின் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகளுடன் தொடர்புடைய மற்றும் சேர்ப்பியலை (combinatorial) முதன்மையாகக் கொண்ட கணக்கீடுகளை மட்டுமே தீர்க்கக் கூடியதாக அமைந்துள்ளது. 'தலை விழும்வரை நாணயத்தை

சுண்டுதல்' போன்ற சில முக்கிய சமவாய்ப்புச் சோதனைகளின் நிகழ்ச்சிகளின் (events) கணம் ஒரு முடிவுறா கணத்தை உருவாக்குவதால் இவ்வரையறையைப் பயன்படுத்த இயலாது.

நிகழ்தகவின் வழக்கமான வரையறைகளின் இத்தகைய வரம்புகள், நிகழ்தகவின் நவீன வரையறையின் பரிணாம வளர்ச்சிக்கு வழிவகுத்தது.


கொல்மோ குரோவ்

ரஷ்யக் கணிதவியலாளரான ஆண்ட்ரே நிக்கோலவிச் கொல்மோ குரோவ் நவீன நிகழ்தகவு கொள்கைக்கு அடித்தளம் அமைத்தார். அவர் ரிச்சார்ட் ஃபான் மைசங் அறிமுகப்படுத்திய கூறுவெளியை அளவை இயலுடன் (measure theory) இணைத்து 1933-ல் நிகழ்தகவு அடிப்படைக் கொள்கையை அறிமுகப்படுத்தினார். நவீன நிகழ்த்தகவுக் கோட்பாட்டினைத் தர்க்க ரீதியாக உருவாக்க இவருடைய நிகழ்தகவுக் கொள்கையே அடிப்படையாக அமைந்தது.

12.4.2 நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கொள்கைகள் (Axioms of probability)

S என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவுற்ற கூறுவெளி. $\mathscr{P}(S)$ என்பது நிகழ்ச்சிகளின் தொகுப்பு எனவும், P என்பது $\mathscr{P}(S)$-ல் வரையறுக்கப்படும் மெய்மதிப்புடைய சார்பு எனவும் கொள்க. $P(A)$ என்பது கீழ்க்காணும் கொள்கைகளை நிறைவு செய்தால், A-வின் நிகழ்தகவு $P(A)$ என அழைக்கப்படுகிறது.

- $[P_1]$ ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி A-க்கு $P(A) \geq 0$ (குறையற்ற எண் கொள்கை) (Non-negativity axiom)
- $[P_2]$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் A மற்றும் B-க்கு
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (கூட்டல் கொள்கை) (Additivity axiom)
- $[P_3]$ நிச்சய நிகழ்ச்சிக்கு, $P(S) = 1$ (சமப்படுத்துதல் கொள்கை) (Normalization axiom)

குறிப்பு 12.1

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

முடிவுறு கூறுவெளிகள் உடைய நிகழ்தகவிற்கான சில தேற்றங்கள் (நிரூபணமின்றி)

கூறு வெளியிலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனில், தேற்றம் 12.1-யைப் பயன்படுத்தலாம். அவ்வாறில்லையெனில் தேற்றம் 12.2 -யைப் பயன்படுத்தலாம்.

தேற்றம் 12.1

S என்ற கூறுவெளியின் ஏதேனும் ஒரு உட்கணம் A என்க. $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ எனில் $P(A)$ என்பது $[P_1], [P_2]$ மற்றும் $[P_3]$ என்ற நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளை நிறைவு செய்யும்.

தேற்றம் 12.2

$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ என்பது ஒரு முடிவுறு கூறுவெளி என்க. கூறுவெளி S-ல் உள்ள ஒவ்வொரு கூறுப்புள்ளி a_i-க்கும் p_i என்ற மெய் எண்ணுடன் தொடர்புபடுத்தி,

பின்வரும் பண்புகளை

(i) ஒவ்வொரு $p_i \geq 0$. (ii) $\sum p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$, நிறைவு செய்தால் p_i என்பது a_i -ன் நிகழ்தகவு என அழைக்கப்படும்.

A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(A)$ ஆனது A–ன் கூறுபுள்ளிகளின் நிகழ்தகவு கூடுதல் என வரையறுக்கப்பட்டால், $P(A)$ என்ற சார்பானது $[P_1],[P_2]$, மற்றும் $[P_3]$ என்ற நிகழ்தகவு கொள்கைகளை நிறைவு செய்யும்.

குறிப்பு: சில சமயங்களில் முடிவுறு கூறுவெளியிலுள்ள கூறுபுள்ளிகளையும் அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளையும் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

நிகழ்ச்சிகள்	a_1 a_2 a_3 ... a_n
நிகழ்தகவு	p_1 p_2 p_3 ... p_n

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.6

(1) $S = \{1,2,3\}$ என்க. $\mathscr{P}(S)$ என்பது S–ன் அடுக்குக்கணம் மற்றும் $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ எனில் $P(\{1\}) = \dfrac{1}{3}$, $P(\{2\}) = \dfrac{1}{3}$ மற்றும் $P(\{3\}) = \dfrac{1}{3}$, ஆகியவை நிகழ்தகவின் அடிப்படை கொள்கைகள் $[P_1],[P_2]$ மற்றும் $[P_3]$–ஐ நிறைவு செய்யும். இங்குச் சோதனையின் எல்லா முடிவுகளும் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

(2) $S = \{1,2,3\}$ என்க. $\mathscr{P}(S)$ என்பது S–ன் அடுக்குக்கணம் ஆகும். A எனும் நிகழ்ச்சியில் உள்ள உறுப்புகளின் நிகழ்தகவின் கூடுதல், நிகழ்தகவு $P(A)$ என வரையறுக்கப்பட்டால்
$P(\{1\}) = \dfrac{1}{2}$, $P(\{2\}) = \dfrac{1}{4}$ மற்றும் $P(\{3\}) = \dfrac{1}{4}$, ஆகியவை நிகழ்தகவின் அடிப்படை கொள்கைகள் $[P_1],[P_2]$ மற்றும் $[P_3]$–ஐ நிறைவு செய்யும்.

(3) $S = \{1,2,3\}$ மற்றும் $\mathscr{P}(S)$ என்பது S–ன் அடுக்குக்கணம் ஆகும். A எனும் நிகழ்ச்சியில் உள்ள உறுப்புகளின் நிகழ்தகவின் கூடுதல், நிகழ்தகவு $P(A)$ என வரையறுக்கப்பட்டால்
$P(\{1\}) = 0$, $P(\{2\}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ எனில் $P(\{3\}) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ஆகியவை நிகழ்தகவின் அடிப்படை கொள்கைகள் $[P_1],[P_2]$ மற்றும் $[P_3]$–ஐ நிறைவு செய்யும்.

(2) மற்றும் (3)–ல் சோதனையின் முடிவுகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

குறிப்பு 12.2

நிகழ்தகவின் மதிப்புகள் விகிதமுறா எண்களாகவும் இருக்கலாம்.

வகுப்பறைச் செயல்பாடு

ஒவ்வொரு மாணவரும் ஒரு நாணயத்தை 10 முறை சுண்டவேண்டும்.

$$p = \frac{\text{கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை}}{10}$$ எனக் கணக்கிடுக.

அனைத்து மாணவர்களும் நாணயத்தை சுண்டும்போது கிடைக்கக்கூடிய தலைகளின் மொத்த எண்ணிக்கையின் விகிதம் காண்க. நாணயத்தைச் சுண்டும் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் போது $p \to \dfrac{1}{2}$ என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12.1

A, *B* மற்றும் *C* என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கிய மூன்று நிகழ்ச்சிகளை மட்டும் கொண்ட ஒரு சோதனையின் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவை நிகழ்தகவிற்கான சாத்தியமானவையா என ஆராய்க.

(i) $P(A)=\frac{4}{7}$, $P(B)=\frac{1}{7}$, $P(C)=\frac{2}{7}$.

(ii) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$, $P(C)=\frac{3}{5}$.

(iii) $P(A)=0.3$, $P(B)=0.9$, $P(C)=-0.2$.

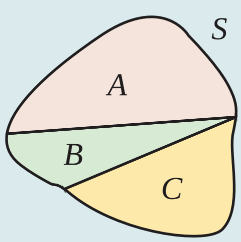
(iv) $P(A)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(B)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(C)=0$.

(v) $P(A)=0.421$, $P(B)=0.527$ $P(C)=0.042$.

தீர்வு

ஒவ்வொரு சோதனையிலும் சரியான மூன்று ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் மட்டுமே உள்ளன. எனவே அவை யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$\Rightarrow S = A\cup B\cup C$$



எனவே நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி

$P(A)\geq 0$, $P(B)\geq 0$, $P(C)\geq 0$ மற்றும்

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=P(S)=1$ ஆகும்

(i) $P(A)=\frac{4}{7}\geq 0$, $P(B)=\frac{1}{7}\geq 0$ மற்றும் $P(C)=\frac{2}{7}\geq 0$

$$P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=1$$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானவையே.

(ii) $P(A)=\frac{2}{5}\geq 0$, $P(B)=\frac{1}{5}\geq 0$ மற்றும் $P(C)=\frac{3}{5}\geq 0$

ஆனால் $P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}>1$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானதல்ல.

(iii) $P(C)=-0.2$ ஒரு குறை எண்ணாயிருப்பதால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானதல்ல

(iv) சாத்தியமானது. ஏனெனில்

$P(A)=\frac{1}{\sqrt{3}}\geq 0$, $P(B)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\geq 0$ மற்றும் $P(C)=0\geq 0$

மேலும் $P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{\sqrt{3}}+1-\frac{1}{\sqrt{3}}+0=1$.

(v) $P(A)=0.421\geq 0$, $P(B)=0.527\geq 0$ மற்றும் $P(C)=0.042\geq 0$

என இருந்தாலும்,

$P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=0.421+0.527+0.042=0.990<1$ என்பதால் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமற்றவை.

எடுத்துக்காட்டு 12.2

முதல் 10 மிகை முழு எண்களில் இருந்து ஒரு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்த எண் (i) இரட்டைப் படை (ii) மூன்றின் மடங்காக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

கூறுவெளி $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $n(S)=10$

A என்பது இரட்டைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது மூன்றின் மடங்கு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$A=\{2, 4, 6, 8, 10\},\quad n(A)=5,$$

$$B=\{3, 6, 9\},\quad n(B)=3$$

P (இரட்டைப்படை எண் கிடைக்க)= $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}.$

P (மூன்றின் மடங்கு கிடைக்க)= $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{3}{10}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.3

மூன்று நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. (i) சரியாக ஒரு தலை (ii) குறைந்தது ஒரு தலை (iii) அதிகபட்சமாக ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

மூன்று நாணயங்களைச் ஒரு முறை சுண்டுவதும் ஒரே நாணயத்தை மூன்று முறைச்சுண்டுவதும் ஒன்றே என்பதைக் கவனிக்கவும். கூறுவெளி $S=\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}$

$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},\ n(S)=8$

A என்பது ஒரு தலை விழும் நிகழ்ச்சி, B என்பது குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை விழும் நிகழ்ச்சி மற்றும் C என்பது அதிகபட்சமாக ஒரு தலை விழும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A=\{HTT, THT, TTH\};\ n(A)=3$

$B=\{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\};\ n(B)=7$

$C=\{TTT, HTT, THT, TTH\};\ n(C)=4.$

எனவே தேவைப்படும் நிகழ்தகவுகள்

(i) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{8}$

(ii) $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{7}{8}$

(iii) $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}.$

குறிப்பு 12.3

கூறுவெளியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மிகவும் சிறிய அளவில் இருந்தால் கூறுவெளியின் உறுப்புகளை விரல் விட்டு எண்ணிவிடலாம். ஆனால் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிக அளவில் இருந்தால் சேர்ப்பியல் (Combinatorices) முறையைப் பயன்படுத்திக் கூறுவெளியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடலாம்.

பின்வரும் கணக்கில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைச் சேர்ப்பியலைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12.4

பத்து நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன (i) சரியாக இரு தலைகள் (ii) அதிகபட்சமாக இரண்டு தலைகள் (*iii*)குறைந்தது இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு

ஒரே நேரத்தில் பத்து நாணயங்களைச் சுண்டுவதும், ஒரே நாணயத்தைப் பத்துமுறை சுண்டுவதும் ஒரே கூறுவெளியைக் கொடுக்கும்.

S என்பது கூறுவெளி என்க

அதாவது $$S=\overbrace{\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}\times\cdots\times\{H,T\}}^{10\text{முறை}}$$

A என்பது சரியாக இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி

B என்பது அதிகபட்சமாக இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி மற்றும்

C என்பது குறைந்தபட்சம் இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

பத்து நாணயங்கள் சுண்டப்படும்போது கூறுவெளியின் உள்ள

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $2^n=2^{10}=1024$

$$n(S)=1024$$

$$n(A)={}^{10}C_2=45$$

$$n(B)={}^{10}C_0+{}^{10}C_1+{}^{10}C_2=1+10+45=56$$

$$n(C)={}^{10}C_2+{}^{10}C_3+{}^{10}C_4+\cdots+{}^{10}C_{10}$$

$$=n(S)-({}^{10}C_0+{}^{10}C_1)=1024-11=1013$$

தேவையான நிகழ்தகவுகள்

(i) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{45}{1024}$

(ii) $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{56}{1024}=\dfrac{7}{128}$

(iii) $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{1013}{1024}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.5

ஒரு சீரான பகடையை ஒரு முறை உருட்டி விடும்போது

(i) இரட்டைப்படை எண் (ii) மூன்றின் மடங்காக கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

S என்பது கூறுவெளி, A என்பது இரட்டைப்படை எண் மற்றும்

B என்பது மூன்றின் மடங்காகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

எனவே

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\Rightarrow n(S)=6$

$A=\{2,4,6\}$ $\Rightarrow n(A)=3$

$B=\{3,6\}$ $\Rightarrow n(B)=2$

தேவையான நிகழ்தகவுகள்.

(i) P (இரட்டைப்படை எண் கிடைக்க) $= P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(ii) P (மூன்றின் மடங்கு கிடைக்க) $= P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.6

ஒரு சோடிப் பகடைகளை உருட்டி விடும்போது அவற்றின் கூட்டுத் தொகை

(i) 7 (ii) 7 அல்லது 9 (iii) 7 அல்லது 12 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

தீர்வு

கூறுவெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \end{aligned}$$

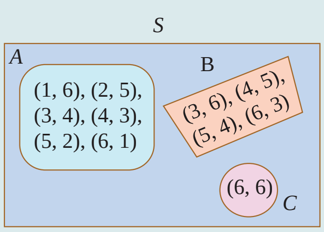
நிகழக்கூடிய மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6^2 = 36 = n(S)$

A என்பது கூடுதல் 7 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி, B என்பது கூடுதல் 9 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி மற்றும் C என்பது கூடுதல் 12 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow n(A) = 6$

$B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \Rightarrow n(B) = 4$

$C = \{(6,6)\} \Rightarrow n(C) = 1$



(i) P (கூடுதல் 7 கிடைக்க) $= P(A)$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) P (7 அல்லது 9 கிடைக்க) $= P(A$ அல்லது $B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B)$$

(A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள், $A \cap B = \varnothing$)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{18}$$

(iii) P (7 அல்லது 12 கிடைக்க) $= P(A$ அல்லது $C) = P(A \cup C)$

$$= P(A) + P(C)$$

(A மற்றும் C ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள்)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.7

நடப்பு ஆண்டுக்கான FIDE சதுரங்கப் போட்டியில் (World Chess Federation) கோப்பையை வென்றிட X, Y மற்றும் Z என்ற மூன்று நபர்கள் போட்டியிடுகின்றனர். X–ன் வெற்றி வாய்ப்பு Y –ன் வெற்றி வாய்ப்பைப் போல 3 மடங்காக இருக்கும். Y–ன் வெற்றி வாய்ப்பு Z–ன் வெற்றி வாய்ப்பைப் போல 2 மடங்காக இருக்கும் எனில் ஒவ்வொருவரும் கோப்பையை வெல்லுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

நடப்பு ஆண்டுக்கான FIDE கோப்பையை X, Y மற்றும் Z வெற்றிபெறும் நிகழ்ச்சிகளை A, B மற்றும் C என்க. X–ன் வெற்றி வாய்ப்பு Y –ன் வெற்றி வாய்ப்பைப் போல 3 மடங்காக இருக்கும். எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே

$$A : B \; :: \; 3 : 1. \qquad (1)$$

Y–ன் வெற்றி வாய்ப்பு Z–ன் வெற்றி வாய்ப்பைப் போல 2 மடங்காக இருக்கும். எனவே

$$B : C :: \; 2 : 1 \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)–லிருந்து

$$A : B : C :: \; 6 : 2 : 1$$

$A = 6k$, $B = 2k$, $C = k$, இங்கு k என்பது ஒரு விகித மாறிலி ஆகும்.

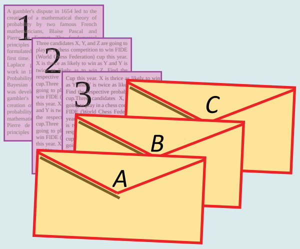
கோப்பையை X வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(A) = \dfrac{6k}{9k} = \dfrac{2}{3}$

கோப்பையை Y வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(B) = \dfrac{2k}{9k} = \dfrac{2}{9}$ மற்றும்

கோப்பையை Z வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(C) = \dfrac{k}{9k} = \dfrac{1}{9}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.8

மூன்று வெவ்வேறு நபர்களுக்கு மூன்று கடிதங்கள் எழுதப்பட்டு மூன்று உறைகளில் வைக்கப்பட்டு அவர்களுக்கான விலாசமும் எழுதப்பட்டுள்ளன. முகவரியைப் பார்க்காமலே கடிதங்களை உறையிலிடும்போது (i) ஒரு கடிதம் சரியான உறையிலிட (ii) எல்லாக் கடிதங்களுமே தவறாக உறையிலிட நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.



தீர்வு

A, B மற்றும் C என்பவை உறைகளைக் குறிக்கும் என்க. 1, 2 மற்றும் 3 ஆனது முறையே A, B மற்றும் C–க்கான கடிதங்களைக் குறிக்கும் என்க.

கடிதங்களை உறைகளில் இடுவதற்கான எல்லா சாத்தியக் கூறுகளும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

முடிவுகள்

உறைகள்	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
A	1	1	2	2	3	3
B	2	3	1	3	1	2
C	3	2	3	1	2	1

c_i என்பது கிடைக்க கூடிய நிகழ்ச்சி என்க.

X என்பது ஒரு கடிதம் மட்டும் சரியான உறையிலிடும் நிகழ்ச்சி என்க.

Y என்பது மூன்று கடிதங்களுமே தவறாக உறையிலிடுவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$S = \{c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6\},\ n(S) = 6$$

$$X = \{c_2, c_3, c_6\}, \qquad n(X) = 3$$
$$Y = \{c_4, c_5\} \qquad n(Y) = 2$$

$$\text{(i)} \quad P(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{(ii)} \quad P(Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 12.9

$\begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$ என்பது M என்ற அணி என்க. சமவாய்ப்பு முறையில் x, y மற்றும் z ன் மதிப்புகள், $\{1, 2, 3\}$ என்ற கணத்திலிருந்து மதிப்புக்களைப் பெறலாம். மேலும் மதிப்புகள் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தலாம் (அதாவது, $x = y = z$) எனில், அணி M ஆனது பூச்சிய கோவை அணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

M என்பது பூச்சிய கோவை அணி எனில் $\begin{vmatrix} x & y \\ z & 1 \end{vmatrix} = 0$. அதாவது, $x - yz = 0$. (x, y, z)-களை தேர்வு செய்யவேண்டிய வாய்ப்புகளுக்கான கணம், $\{(1,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,3), (3,3,1)\} = A$ என்க.

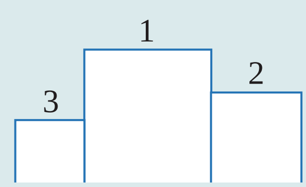
சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை $\qquad n(A) = 5$

மொத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை $\qquad n(S) = 3^3 = 27$

கொடுத்துள்ள அணி பூஜ்ஜியக் கோவை அணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{27}$

எடுத்துக்காட்டு 12.10

ஒரு விளையாட்டுப் போட்டியில் வெற்றி பெறுபவர் ஏறும் வெற்றி மேடையானது படத்தில் உள்ளவாறு மூன்று நிலைகளாக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. சிவப்பு வர்ணம் உட்பட ஆறு வர்ணங்களைக் கொண்டு மூன்று நிலைகளுக்கும் வெவ்வேறான வர்ணங்கள் பூச வேண்டும். சிறிய நிலை மேடைக்கு (3வது நிலை) சிவப்பு வர்ணம் பூசப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



தீர்வு

S என்பது கூறுவெளி என்க.

A என்பது சிறிய நிலை (3 வது நிலை) சிவப்பு வர்ணம் பூசும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$n(S) = 6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$
$$n(A) = 5 \times 4 = 20$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

	6	6	3
$n(S)$	6	5	4
$n(A)$	5	4	சிவப்பு

12.4.3 சாதக மற்றும் சாதகமற்ற விகிதங்கள் (Odds)

புள்ளியியல் மற்றும் நிகழ்தகவில் விகிதங்கள் என்ற சொல் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு நிகழ்ச்சியில் A-க்குச் சாதக மற்றும் அதற்கு பாதகமாக உள்ள நிகழ்வினைத் தொடர்பு படுத்துவது விகிதமாகும். 'a' என்பது ஒரு நிகழ்ச்சி எத்தனை வழிகளில் நிகழ்கிறது மற்றும் 'b' என்பது அதே நிகழ்ச்சி எத்தனை வழிகளில் நடக்க இயலாது என்பதையும் குறிக்கிறது என்க.

06_12 Probability New.indd 258 30-05-2022 15:49:57

A என்ற நிகழ்வில் A நிகழ்வதற்கு சாதகமான விகிதம் $a : b$ மற்றும்

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

மேலும் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குச் சாதகமான விகிதம் $a : b$ என்பதனை அந்நிகழ்ச்சிக்கு பாதகமான விகிதம் $b : a$ என எழுதலாம். ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு p எனில், p க்கு சாதமான விகிதம் $1-p$ ஆகும் மற்றும் $1-p$ –க்கு பாதகமான விகிதம் p ஆகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.7

(i) ஒரு பகடை ஒரு முறை உருட்டப்படுகிறது. கூறுவெளியை S என்க. A என்பது 5 விழும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(S) = 6, \quad n(A) = 1$ மற்றும் $n(\bar{A}) = 5$.

A –க்கு சாதகமான விகிதமானது $1:5$ அல்லது $\frac{1}{5}$, A –க்குச் சாதகமற்ற விகிதம் $5:1$ அல்லது $\frac{5}{1}$,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(A)+n(\bar{A})} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6} = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

(ii) B என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விகிதம் 3:5, எனில் $P(B) = \frac{3}{8}$

(iii) C என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமற்ற விகிதம் 4:11, எனில் $P(C) = \frac{11}{15}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.11

இரண்டு பத்து ரூபாய், 4 நூறு ரூபாய் மற்றும் 6 ஐந்து ரூபாய் தாள்கள் ஒருவர் பாக்கெட்டில் உள்ளது. சமவாய்ப்பு முறையில் 2 தாள்கள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்விரண்டு தாள்கள் நூறு ரூபாய் தாள்களாக இருப்பதற்குச் சாதக விகிதம் மற்றும் அதன் நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

S என்பது கூறுவெளி என்க.

A என்பது 2 நூறு ரூபாய்த் தாள்களை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

எனவே $n(S) = 12c_2 = 66$, $n(A) = 4c_2 = 6$ மற்றும் $n(\bar{A}) = 66 - 6 = 60$

A -விற்கு சாதகமான விகிதம் 6: 60 அதாவது A விற்கு சாதகமான விகிதம் 1: 10, மற்றும் $P(A) = \frac{1}{11}$.

பயிற்சி 12.1

(1) பின்வரும் ஒன்றையொன்று விலக்கிய A, B, C மற்றும் D என்ற நான்கு நிகழ்ச்சிகளை மட்டும் கொண்ட ஒரு சோதனையின் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானவையா எனத் தீர்மானிக்கவும்.

(i) $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.30$, $P(C) = 0.43$, $P(D) = 0.12$

(ii) $P(A) = 0.22$, $P(B) = 0.38$, $P(C) = 0.16$, $P(D) = 0.34$

(iii) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C) = -\frac{1}{5}$, $P(D) = \frac{1}{5}$

(2) இரண்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன.

(அ) ஒரு தலை மற்றும் ஒரு பூ

(ஆ) அதிகபட்சமாக இரு பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(3) ஒரு பெட்டியில் 5 மாம்பழங்களும் 4 ஆப்பிள் பழங்களும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் இரண்டு பழங்கள் எடுக்கப்பட்டால் (i) ஒரு மாம்பழமும் ஒரு ஆப்பிள் பழமும் (ii) இரண்டும் ஒரே வகையைச் சார்ந்ததாகவும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(4) (i) ஒரு சாதாரண வருடத்தில் (ii) ஒரு லீப் வருடத்தில் 53 ஞாயிற்றுக் கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(5) எட்டு நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. (i) சரியாக இரண்டு பூக்கள். (ii) குறைந்தபட்சம் இரண்டு பூக்கள் (iii) அதிகபட்சமாக இரண்டு பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(6) முதல் 100 மிகை முழுக்களிலிருந்து ஒரு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது ஒரு பகா எண் அல்லது 8-இன் மடங்காக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

(7) ஒரு பையில் 7 சிவப்பு மற்றும் 4 கருப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. 3 பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்டால்

(i) எல்லாப் பந்துகளும் சிவப்பு நிறப் பந்துகள்

(ii) ஒரு சிவப்பு மற்றும் இரண்டு கருப்புநிறப் பந்துகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(8) 52 சீட்டுக்களைக் கொண்ட ஒரு கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு உருவப்படுகிறது. அச்சீட்டு

(i) ஒரு ace அல்லது king (ii) 6 அல்லது அதற்கும் குறைவான எண்

(iii) queen அல்லது 9 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(9) ஒரு கிரிக்கெட் சங்கத்தில் 16 உறுப்பினர்கள் உள்ளனர். அவர்களின் 5 பேர் மட்டுமே பந்து விசும் திறம் படைத்தவர்கள். இவர்களுள் 11 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவில் குறைந்தது 3 பந்து விச்சாளர்களாவது இடம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

(10) (i) ஒரு நிகழ்ச்சி A நிகழ சாதக விகிதம் 5 க்கு 7 எனில் $P(A)$-ஐ காண்க

(ii) $P(B)=\dfrac{2}{5}$ எனில் நிகழ்ச்சி B நிகழ சாதகவிகிதத்தைக் காண்க.

12.5 நிகழ்தகவின் சில அடிப்படைத் தேற்றங்கள்

இதுவரை தீர்க்கப்பட்ட கணக்குகள்யாவும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுடன் தொடர்புடையவை. அதாவது $P(A$ அல்லது $B) = P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ என்ற சூத்திரம் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆனால் நிகழ்வுகள் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் எனில் $(A\cap B)$ இருமுறை கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிக்குத் தனிச் சூத்திரம் உள்ளது.

நிகழ்தகவியலில் உள்ள எல்லாத் தேற்றங்களும் நேரடியாகவோ அல்லது மறைமுகமாகவோ, நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கொள்கைகளைப் பயன்படுத்தித் தருவிக்கப்படுகின்றன. நிகழ்தகவின் சில அடிப்படைத் தேற்றங்களை இங்கு தருவிப்போம்.

தேற்றம் 12.3

நடக்க இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு பூச்சியம் ஆகும். அதாவது,

$$\boxed{P(\varnothing)=0}$$

நிரூபணம்

நடக்கவியலா நிகழ்ச்சி $\varnothing$ ல் கூறுபுள்ளி கிடையாது. எனவே, $S\cup\varnothing=S$

$$P(S\cup\varnothing)=P(S)$$

$$P(S)+P(\varnothing)=P(S)$$ (S மற்றும் $\varnothing$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்)

$$P(\varnothing)=0$$

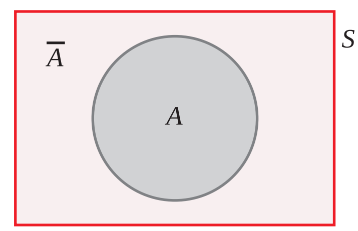
எடுத்துக்காட்டு 12.12

ஒரு பகடையை உருட்டிவிடும்போது 7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி நடக்கவியலா நிகழ்ச்சி ஆகும். எனவே P (7 கிடைக்கப்பெற) = 0.

தேற்றம் 12.4



$\bar{A}$ என்பது A என்ற நிகழ்வின் நிரப்பியானால்,

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

நிரூபணம்

S என்பது கூறுவெளி எனில்

$$A \cup \bar{A} = S$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S)$$

$P(A) + P(\bar{A}) = P(S)$ (ஏனெனில் A மற்றும் $\bar{A}$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுடையதால்)

$$= 1$$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ அல்லது $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ■

எடுத்துக்காட்டு 12.13

ஒன்பது நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படும்போது குறைந்தது இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

S என்பது கூறுவெளி என்க. A என்பது குறைந்தது இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $\bar{A}$ என்பது அதிகபட்சமாக ஒரு தலை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$$n(S) = 2^9 = 512, \quad n(\bar{A}) = 9C_0 + 9C_1 = 1 + 9 = 10$$

$$P(\bar{A}) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$

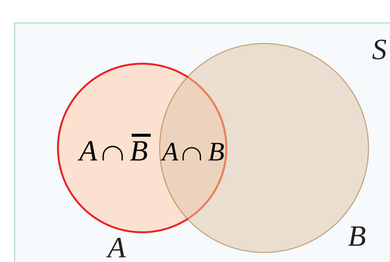
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{256} = \frac{251}{256}$$

$n(A) = \sum_{r=2}^{9} 9C_r$ என கணக்கிடுதலைக் காட்டிலும் $n(\bar{A}) = \sum_{r=0}^{1} 9C_r$ எனக் கணக்கிட எளியது

தேற்றம் 12.5

A, B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் $\bar{B}$ என்பது B –ன் நிரப்பியெனில்

$$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$



நிரூபணம்

படத்திலிருந்து தெளிவாக

$$(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A$$

$$P\left[(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)\right] = P(A)$$

$$P(A\cap\bar{B})+P(A\cap B) = P(A)$$

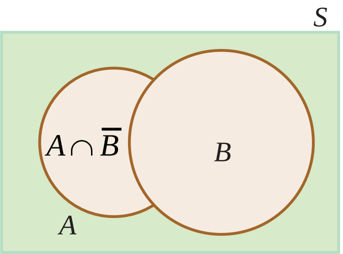
$\left(A\cap\bar{B}\right)$ மற்றும் $A\cap B$ ஒன்றுக்கொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாக இருப்பதால்

$$P(A\cap\bar{B}) = P(A)-P(A\cap B)$$

தேற்றம் 12.6 (நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்)

A, B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$



நிரூபணம்

படத்திலிருந்து,

$$A\cup B = (A\cap\bar{B})\cup B$$

$$P(A\cup B) = P\left[(A\cap\bar{B})\cup B\right]$$

$= P\left(A\cap\bar{B}\right)+P\left(B\right)$ (ஏனெனில் $\left(A\cap\bar{B}\right)$ மற்றும் B ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்)

$$= [P(A)-P(A\cap B)]+P(B)$$

எனவே $P\left(A\cup B\right) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

குறிப்பு 12.4

மேற்கண்ட தேற்றத்தை மூன்று நிகழ்ச்சிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

(i) $P(A\cup B\cup C) = \{P(A)+P(B)+P(C)\}$
$- \{P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)\}+P(A\cap B\cap C)$

(ii) $P(A\cup B\cup C) = 1-P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1-P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$

எடுத்துக்காட்டு 12.14

P(A) = 0.52, P(B) = 0.43, மற்றும் $P(A\cap B) = 0.24$, எனில்

(i) $P(A\cap\bar{B})$ (ii) $P(A\cup B)$ (iii) $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ (iv) $P(\bar{A}\cup\bar{B})$ **காண்க.**

தீர்வு

(i) $P\left(A\cap\bar{B}\right) = P(A)-P(A\cap B)$
$= 0.52-0.24 = 0.28$
$P(A\cap\bar{B}) = 0.28.$

(ii) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$= 0.52+0.43-0.24$
$P(A\cup B) = 0.71.$

(iii) $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B})$ (டி மார்கன் விதிப்படி)
$= 1-P(A\cup B)$
$= 1-0.71 = 0.29.$

(iv) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$ (டி மார்கன் விதிப்படி)

$= 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.24$

$= 0.76.$

எடுத்துக்காட்டு 12.15

போட்டித் தேர்வுகளுக்கு தயாராகும் ஒரு பெண்ணிற்கு மாநில அரசுப் பணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.12, மற்றும் மத்திய அரசு வேலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.25, மற்றும் இரு பணிகளும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.07 எனில் (i) இரண்டில் ஒரு பணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு (ii) ஒரே ஒரு பணி மட்டுமே கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு

I என்பது மாநில அரசு பணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. C என்பது மத்திய அரசு பணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

கொடுக்கப்பட்டவை $P(I) = 0.12$, $P(C) = 0.25$, மற்றும் $P(I \cap C) = 0.07$

(i) P (இரண்டிலொரு பணி கிடைப்பதற்கான) $= P(I$ அல்லது $C) = P(I \cup C)$

$= P(I) + P(C) - P(I \cap C)$

$= 0.12 + 0.25 - 0.07 = 0.30$

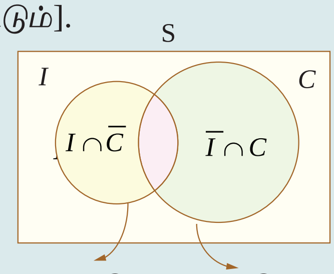
(ii) P(ஒரே ஒரு பணி கிடைப்பதற்கான) $= P[I$ மட்டும் அல்லது C மட்டும்$]$.

$= P(I \cap \overline{C}) + P(\overline{I} \cap C)$

$= \{P(I) - P(I \cap C)\} + \{P(C) - P(I \cap C)\}$

$= \{0.12 - 0.07\} + \{0.25 - 0.07\}$

$= 0.23.$



I மட்டும் C மட்டும்

பயிற்சி 12.2

(1) A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், $P(A) = \frac{3}{8}$ மற்றும் $P(B) = \frac{1}{8}$ எனில்

(i) $P(\overline{A})$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(\overline{A} \cap B)$ (iv) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ காண்க.

(2) A மற்றும் B என்பன ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் நிகழ்ச்சிகள் மற்றும்

$P(A) = 0.35, P(A$ அல்லது $B) = 0.85$, மற்றும் $P(A$ மற்றும் $B) = 0.15$ எனில்

(i) $P(B$ மட்டும்$)$ (ii) $P(\overline{B})$ (iii) $P(A$ மட்டும்$)$ காண்க.

(3) ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படுகிறது. ‘முதல் முறை வீசுவதில் 5 விழுவது’ நிகழ்ச்சி A எனவும் ‘இரண்டாவது முறை வீசுவதில் 5 விழுவது’ B எனக் கொண்டால் $P(A \cup B)$ -ஐ காண்க.

(4) A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0.5, B என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0.3, மற்றும் A-யும் B-யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி எனில் கீழ்க்காணும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A \cap \overline{B})$ (iii) $P(\overline{A} \cap B)$.

(5) ஒரு நகரத்தில் இரு தீயணைக்கும் வண்டிகள் தனித்தனியாகச் செயல்படும் வகையில் உள்ளன. ஒவ்வொரு தீயணைக்கும் வண்டி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.96.

(i) தேவையான பொழுது தீயணைக்கும் வண்டி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ii) தேவையான பொழுது ஒரு தீயணைக்கும் வண்டியும் கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(6) ஒரு தொடர்வண்டி செல்லும் புதிய பாலத்தின் அமைப்பிற்காக விருது கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.48 நேர்த்தியான முறையில் மூலப்பொருட்களைப் பயன்படுத்தியதற்காக விருது கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.36 மற்றும் மேற்கண்ட இரு விருதுகளையும் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 எனில் (i) குறைந்தது ஒரு விருதாவது கிடைப்பதற்கு (ii) ஒரே ஒரு விருது மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் யாவை?

12.6 சார்புநிலை நிகழ்தகவு (நிபந்தனை நிகழ்தகவு) (Conditional Probability)

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.8

சார்புநிலை நிகழ்தகவின் கருத்தாக்கத்தினை அறிந்து கொள்ள முதலில் ஒரு எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம்.

ஒரு சீரான பகடை உருட்டப்படுவதாகக் கொள்வோம். அதன் கூறுவெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. இப்போது நாம் இரு வினாக்களை எழுப்புவோம்.

Q_1 : பகடையில் 2-க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படைஎண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

Q_2 : பகடையில் ஒற்றைப்படை எண் விழுந்திருப்பின், அது 2-க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

நிலை 1

2-க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படை எண்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகள் {3, 5}.

P_1 என்பது 2-க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படை எண்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்க

1	2
$\boxed{3}$	4
$\boxed{5}$	6

$$P_1 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

நிலை 2

இங்கு முதலில் கூறுவெளி S-ஐ ஒற்றைப்படை எண்கள் மட்டுமே கொண்ட ஒரு உட்கணத்திற்குக் கட்டுப்படுத்துகிறோம்.

அதாவது $S_1 = \{1, 3, 5\}$ என்ற உட்கணத்திற்குக் கட்டுப்படுத்துகிறோம். பிறகு 2 -க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு P_2 .

1	2
$\boxed{3}$	4
$\boxed{5}$	6

$$P_2 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{\ 1,\ 3,\ 5\})} = \frac{2}{3}$$

மேற்கண்ட இரண்டு நிலைகளிலும் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றாக இருந்தாலும், அவற்றின் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சியின் முடிவுகள் வெவ்வேறாக இருக்கின்றன. நிலை இரண்டில் கூறுவெளி ஒரு குறிப்பிட்ட நிபந்தனைக்கு உட்படுத்தப்பட்ட பிறகு நிகழ்தகவினைக் கண்டறிகிறோம் . இத்தகைய நிகழ்தகவானது சார்பு நிலை நிகழ்தகவு எனப்படும்.

. இச் சார்பு நிலை நிகழ்தகவானது கூறுவெளிளைப் பயன்படுத்தி

$$P_2 = \frac{\dfrac{n(\{3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}}{\dfrac{n(\{1,3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$ எனக் காணலாம்.

முக்கிய குறிப்பு: நிகழ்தகவிற்கும் சார்புநிலை நிகழ்தகவிற்கும் கூறுவெளி ஒன்றேயாகும்.

வரையறை 12.14

நிகழ்ச்சி A ஏற்கனவே நிகழ்ந்துள்ள நிலையில் A-ன் நிபந்தனையில் B-ன் சார்புநிலை $P\left(B/A\right)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது மற்றும்

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ P(A)\neq 0}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதேபோல் $$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ P(B)\neq 0}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12.16

$P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5$ மற்றும் $P(A\cap B)=0.2$ எனில்

(i) $P(A/B)$ (ii) $P(\overline{A}/B)$ (iii) $P(A/\overline{B})$ காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5,$ மற்றும் $P(A\cap B)=0.2$

(i) $$P(A/B)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0.2}{0.5}=\frac{2}{5}$$

(ii) $$P(\overline{A}/B)=\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P\left(B\right)}$$

$$=\frac{P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$$

$$=\frac{0.5-0.2}{0.5}=\frac{0.3}{0.5}=\frac{3}{5}.$$

(iii) $$P(A/\overline{B})=\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}$$

$$=\frac{P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)}{1-P\left(B\right)}$$

$$=\frac{0.6-0.2}{1-0.5}=\frac{0.4}{0.5}=\frac{4}{5}.$$

குறிப்பு 12.5

$$P(A/B)+P(\overline{A}/B)=1$$

எடுத்துக்காட்டு 12.17

ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும்போது ஒரு ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்கும் எனில் 5 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

கூறுவெளி $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A என்பது ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது 5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{5\}$, மற்றும் $A\cap B=\{5\}$.

எனவே $P(A)=\frac{3}{6}$ மற்றும் $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

P (5 கிடைக்க / ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்க) $= P(B/A)$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$$

$$P(B/A)=\frac{1}{3}.$$

சார்புநிலை நிகழ்தகவினை மாற்றி எழுத நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 12.7

(நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம்)

உடனிகழ்வுகளாக ஏற்படும் A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A\cap B)=P(A/B)P(B) \\ \text{அல்லது} \\ P(A\cap B)=P(B/A)P(A) \end{array}}$$

12.6.1. சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (Independent events)

நடைபெறுவதும் அல்லது நடைபெறாததுமான ஒரு நிகழ்ச்சியானது, நடைபெறும் அல்லது நடைபெறாததுமான மற்ற நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவினைப் பாதிக்காது எனில் இந்நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

வரையறை 12.15

$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$ எனில் A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

குறிப்பு 12.6

(i) இந்த வரையறைக்குச் சமானமாகக் கீழ்க்காண்பனவற்றை கூறலாம்

$$P(A/B) = P(A) \;,\; P(B)>0$$
$$P(B/A) = P(B),\; P(A)>0$$

(1) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \cdots \cdot P(A_n).$$

தேற்றம் 12.8

A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனில்

(i) $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும் .

(ii) A மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும் .

(iii) $\overline{A}$ மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும் .

நிரூபணம்

(i) $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும் என நிறுவுதல்.

A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் என்பதால்

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

$\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் என நிரூபிக்க, கீழ்க்காணும் கூற்றை நிரூபிக்க வேண்டும்.

06_12 Probability New.indd 266 30-05-2022 15:50:57

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}).$$

டி மார்கன் விதிப்படி

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$$
$$= 1 - P\left(A \cup B\right)$$
$$= 1 - \left\{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right\}$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P\left(B\right)$$
$$= \left(1 - P(A)\right)\left(1 - P(B)\right)$$
$$= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

எனவே $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

இதேபோல் (ii) மற்றும் (iii) ஆகியவற்றையும் நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12.18

52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. எடுக்கப்படும் இரு சீட்டுகளும் ஜாக் (Jack)–ஆக இருக்க நிகழ்தகவினை பின்வரும் நிபந்தனைகள் படிக் காண்க.

(i) முதலில் எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக் கட்டில் வைக்கப்படுகிறது.

(ii) முதலில் எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக் கட்டில் வைக்கப்படவில்லை.

தீர்வு

A என்பது முதல் முறை எடுக்கப்படும்போது ஜாக் (Jack) கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது இரண்டாம் முறை எடுக்கப்படும்போது ஜாக் (Jack) கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சி என்க.

நிலை (i)

எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக்கட்டில் வைக்கப்படுகிறது.

$$n(A) = 4 \text{ (Jack)}$$
$$n(B) = 4 \text{ (Jack)}$$
மற்றும் $$n(S) = 52$$

நிகழ்ச்சி A ஆனது B –ன் நிகழ்தகவினைப் பாதிக்காது.

ஆதலால் A –ம் B –ம் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$
$$P(A) = \frac{4}{52},\ P(B) = \frac{4}{52}$$
$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$
$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}$$
$$= \frac{1}{169}.$$

நிலை (ii)

எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக்கட்டில் வைக்கப்படவில்லை.

முதல் முறை எடுக்கும்போது மொத்தம் 52 சீட்டுகளும் அதில் 4 ஜாக் (Jack) சீட்டுகளும் இருக்கும். முதல் சீட்டை மீண்டும் வைக்காமல் இரண்டாம் முறை எடுக்கும்போது மொத்தம் 51 சீட்டுகளில் 3 ஜாக் (Jack) சீட்டுகள் இருக்கும். எனவே முதலில் நடந்த நிகழ்ச்சி A ஆனது, பின் நடக்கும் நிகழ்ச்சி B-ன் நிகழ்தகவினைப் பாதிக்கின்றது. ஆதலால் A, B நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் அல்ல. அவை ஒன்றுக்கொன்று சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாகும்.

எனவே, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A)$

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(B/A) = \frac{3}{51}$$

$$P(A\cap B) = P(A)P(B/A)$$

$$= \frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}$$

$$= \frac{1}{221}\ .$$

எடுத்துக்காட்டு 12.19

ஒரு நாணயம் இருமுறை சுண்டிவிடப்படுகிறது. E என்பது முதல் முறை சுண்டும்போது தலை விழுதல், F என்பது இரண்டாம் முறை சுண்டும்போது தலை விழுதல் என வரையறுக்கப்பட்டால் பின்வரும் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) $P(E\cup F)$ (ii) $P(E/F)$

(iii) $P(\overline{E}/F)$ (iv) E மற்றும் F சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளா?

தீர்வு

கூறுவெளி $S=\{H,T\}\times\{H,T\}$

$$S = \{(H, H),(H, T), (T, H), (T, T)\}$$

மற்றும் $E = \{(H, H), (H,T)\}$

$$F = \{(H, H), (T, H)\}$$

$$E\cup F = \{(H, H),(H, T), (T, H)\}$$

$$E\cap F = \{(H, H)\}$$

(i) $P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F)$ அல்லது $\left(=\dfrac{n(E\cup F)}{n(S)}\right)$

$$= \frac{2}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\ .$$

(ii) $P(E/F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(F)} = \dfrac{(1/4)}{(2/4)} = \dfrac{1}{2}$

(iii) $P(\overline{E}/F) = \dfrac{P(\overline{E}\cap F)}{P(F)}$

$$= \frac{P(F) - P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{(2/4) - (1/4)}{(2/4)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(iv) *E* மற்றும் *F* சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகுமா?

$$P(E \cap F) = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = \frac{2}{4}, \quad P(F) = \frac{2}{4}$$

$$P(E)\,P(F) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F)$$

எனவே *E* மற்றும் *F* சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

குறிப்பு 12.7

நிகழ்ச்சிகளின் சார்பிலாத் தன்மை நிகழ்தகவின் பண்புகளைக் கொண்டது. ஆனால் ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் கணங்களின் பண்புகளைக் கொண்டது. ஆகையால் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளை அவற்றின் நிகழ்தகவுகளின் மூலமும், ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகளை அவற்றின் கணங்களாகக் கொண்டும் கண்டறியலாம்.

தேற்றம் 12.9

A மற்றும் *B* என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளானவை $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ என இருப்பின்

(1) *A* மற்றும் *B* ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவை சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க இயலாது.

(2) *A* மற்றும் *B* சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க இயலாது (நிரூபணம் தேவையில்லை).

எடுத்துக்காட்டு 12.20

A மற்றும் *B* சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$P(A) = 0.4$ மற்றும் $P(A \cup B) = 0.9$. $P(B)$ காண்க

தீர்வு

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) \quad (A \text{ மற்றும் } B \text{ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்})$$

அதாவது, $0.9 = 0.4 + P(B) - (0.4)\,P(B)$

$$0.9 - 0.4 = (1 - 0.4)\,P(B)$$

$$P(B) = \frac{5}{6}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.21

வேகமாக ஊடுருவும் ஓர் எதிரி நாட்டு விமானத்தை ஒரு விமான எதிர்ப்பு துப்பாக்கியின் உதவியால் அதிகபட்சமாக நான்கு முறை மட்டுமே சுட (பயன்படுத்த) முடியும். அந்த விமானத்தை முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது முறையில் சுட்டு வீழ்த்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.2, 0.4, 0.2 மற்றும் 0.1 எனில் அந்த விமானத்தைச் சுட்டு வீழ்த்துதலுக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

H_1, H_2, H_3, H_4 என்பன முறையே விமானத்தை முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது முறையில் துப்பாக்கியால் சுட்டு வீழ்த்தும் நிகழ்ச்சி என்க. $\bar{H}$ என்பது விமானத்தை துப்பாக்கியால் சுட்டு வீழ்த்தாத நிகழ்ச்சியாகும்.

$$P(H_1) = 0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_1) = 1 - P(H_1) = 0.8$$

$$P(H_2) = 0.4 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_2) = 1 - P(H_2) = 0.6$$

$$P(H_3) = 0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_3) = 1 - P(H_3) = 0.8$$

$$P(H_4) = 0.1 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_4) = 1 - P(H_4) = 0.9$$

விமானம் துப்பாக்கியால் சுட்டுவீழ்த்தப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(H) = 1 - P(\bar{H}) = 1 - P(\overline{H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4})$$

$$= 1 - P\left(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3 \cap \bar{H}_4\right)$$

$$= 1 - P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2)P(\bar{H}_3)P(\bar{H}_4)$$

$$= 1 - (0.8)(0.6)(0.8)(0.9) = 1 - 0.3456$$

$$P(H) = 0.6544$$

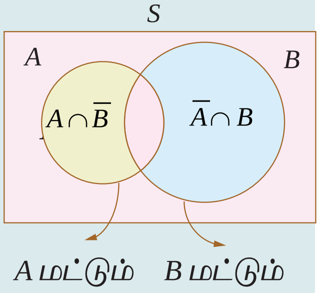
எடுத்துக்காட்டு 12.22

X என்பவர் 70% தருணங்களில் உண்மையே பேசுவர். Y என்பவர் 90% தருணங்களில் உண்மையே பேசுவர் எனில் ஒரே கருத்தை இருவரும் கூறுகையில் ஒருவருக்கொருவர் முரண்பட்ட கருத்தினைத் தெரிவிப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

A என்பது X என்பவர் உண்மை பேசும் நிகழ்ச்சி என்க. B என்பது Y என்பவர் உண்மை பேசும் நிகழ்ச்சி என்க. C என்பது ஒருவருக்கொருவர் முரண்பட்ட கருத்தினைக் கூறும் நிகழ்ச்சி என்க.

$\bar{A}$ என்பது X என்பவர் உண்மை பேசாமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. $\bar{B}$ என்பது Y என்பவர் உண்மை பேசாமலிருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. C = (A உண்மை பேசுவது மற்றும் B உண்மை பேசாதிருப்பது அல்லது B உண்மை பேசுவது மற்றும் A உண்மை பேசாதிருப்பது என்க.)



கொடுக்கப்பட்டவற்றிலிருந்து,

$$P(A) = 0.70 \quad \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.30$$

$$P(B) = 0.90 \quad \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.10$$

$C = [(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)]$ (படத்தைக் காண்க)

$(A \cap \overline{B})$ மற்றும் $(\overline{A} \cap B)$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி,

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$= P(A)\,P(\overline{B}) + P(\overline{A})\,P(B)$$

(A, B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள், மேலும் $A, \overline{B}$ –ம் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்)

$$= (0.70)\ (0.10) + (0.30)\ (0.90)$$

$$= 0.070 + 0.270 = 0.34$$

$$P(C) = 0.34.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.23

ஒரு நகரத்தில் உள்ள பிரதான சாலையில் 4 குறுக்குச் சாலையுடன் போக்குவரத்து சமிக்கைகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு போக்குவரத்துச் சமிக்ஞை திறப்பதற்கு அல்லது மூடுவதற்கான நிகழ்தகவு முறையே 0.4 மற்றும் 0.6 ஆகும்.

(i) முதல் குறுக்குச்சாலையில் ஒரு மகிழுந்தானது நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு.

(ii) முதல் இரண்டு குறுக்குச் சாலையில் ஒரு மகிழுந்தானது நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு.

(iii) மூன்றாவது குறுக்குச் சாலையில் நின்று மற்ற குறுக்குச் சாலைகளில் நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு.

(iv) ஒரு குறுக்குச் சாலையில் நின்று மற்ற குறுக்குச் சாலைகளில் நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு

A_i என்பது போக்குவரத்துச் சமிக்ஞை i வது குறுக்குச் சாலையில் நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. இங்கு $i = 1, 2, 3, 4$.

B_i என்பது போக்குவரத்துச் சமிக்ஞை i வது குறுக்குச் சாலையில் நின்று செல்வதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. இங்கு $i = 1, 2, 3, 4$.

போக்குவரத்துச் சமிக்ஞைகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள். எனவே A_i மற்றும் B_i சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள், இங்கு $i = 1, 2, 3, 4$.

கொடுக்கப்பட்டவற்றிலிருந்து

$$P(A_i) = 0.4,\ i = 1, 2, 3, 4$$

$$P(B_i) = 0.6,\ i = 1, 2, 3, 4$$

(i) முதல் குறுக்குச் சாலையில் ஒரு மகிழுந்து நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு ,

$$P(A_1) = 0.4.$$

(ii) முதல் இரண்டு குறுக்குச் சாலைகளில் ஒரு மகிழுந்து நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 A_2) = (0.4)(0.4) = 0.16$$

(iii) மூன்றாவது குறுக்குச் சாலையில் நின்று மற்ற குறுக்குச் சாலைகளில் ஒரு மகிழுந்து நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4) = P(A_1 A_2 B_3 A_4) = (0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 0.0384$$

(iv) ஒரு குறுக்குச் சாலையில் நின்று மற்ற குறுக்குச் சாலைகளில் ஒரு மகிழுந்து நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(B_1 A_2 A_3 A_4 \cup A_1 B_2 A_3 A_4 \cup A_1 A_2 B_3 A_4 \cup A_1 A_2 A_3 B_4)$

$$= P(B_1 A_2 A_3 A_4) + P(A_1 B_2 A_3 A_4) + P(A_1 A_2 B_3 A_4) + P(A_1 A_2 A_3 B_4)$$

$$= 4(0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 4(0.0384) = 0.1536$$

பயிற்சி 12.3

(1) இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க இயலுமா?

(2) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A\cup B)=0.7, P(A\cap B)=0.2$ மற்றும் $P(B)=0.5$ எனில் A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனக்காட்டுக.

(3) A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகவும் $P(A\cup B)=0.6$, $P(A)=0.2$ எனில் $P(B)$ காண்க.

(4) $P(A)=0.5$, $P(B)=0.8$ மற்றும் $P(B/A)=0.8$, எனில் $P(A/B)$ மற்றும் $P(A\cup B)$.காண்க.

(5) A, B என்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ மற்றும் $A\cup B=S$ (கூறுவெளி) எனில் சார்பு நிலை நிகழ்தகவு காண்க.

(6) கணிதவியலில் ஒரு வினாவானது மூன்று மாணவர்களிடம் தீர்வு காண்பதற்காக கொடுக்கப்படுகிறது. அவர்கள் தனித் தனியே தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{1}{5}$

(i) அந்த வினா தீர்வு கண்டதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ii) சரியாக ஒருவர் மட்டுமே அந்த வினாவிற்குத் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(7) பெட்ரோல் நிரப்பப்பட்ட ஒரு மகிழ்வுந்துக்கு எண்ணெய் மாற்ற நிகழ்தகவு 0.30, எண்ணெய் வடிப்பான் மாற்ற நிகழ்தகவு 0.4 , எண்ணெய் மற்றும் எண்ணெய் வடிப்பான் இரண்டையும் மாற்ற நிகழ்தகவு 0.15.

(i) எண்ணெய் மாற்றப் படவேண்டும் என்றால் ஒரு புதிய எண்ணெய் வடிப்பான் தேவைப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ii) புதிய எண்ணெய் வடிப்பான் தேவைப்பட்டால்,எண்ணெய் மாற்றப்பட வேண்டியதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(8) ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் 3 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு பையில் 4 வெள்ளை மற்றும் 6 கருப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பையிலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது எனில்

(i) இரண்டும் வெள்ளை நிறப்பந்துகள்.

(ii) இரண்டும் கருப்பு நிறப்பந்துகள்.

(iii) ஒரு வெள்ளை மற்றும் ஒரு கருப்புப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் காண்க.

(9) ஒரு வகுப்பில் $\frac{2}{3}$ பங்கு மாணவர்களும், மீதம் மாணவியர்களும் உள்ளனர். ஒரு மாணவி முதல் தரத்தில் தேர்ச்சிப் பெற நிகழ்தகவு 0.85 மற்றும் மாணவர் முதல் தரத்தில் தேர்ச்சிப் பெற நிகழ்தகவு 0.70. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் அவரின் முதல் தரத்தில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(10) $P(A)=0.4$ மற்றும் $P(A\cup B)=0.7$.எனில் $P(B)$-ஐ கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டுக் காண்க.

(i) A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள்.

(ii) A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்.

(iii) $P(A/B)=0.4$ (iv) $P(B/A)=0.5$

(11) சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு வருடம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது

(i) 53 ஞாயிற்றுகளைக் கொண்டதாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு யாது?

(ii) 53 ஞாயிறுகளைக் கொண்ட ஒரு லீப் வருடமாக கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(12) ஒரு இலக்கை குறிபார்த்து சுடும் போது 4 ல் 3 முறை X-ம், 5 இல் 4 முறை Y-ம், 3 ல் 2 முறை Z-ம் சரியாக இலக்கைச் சுடுகின்றனர். மூவரும் அந்த இலக்கைச் சுடும்போது சரியாக இருவர் மட்டுமே சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

12.7 ஒரு நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவு (Total Probability of an event)

தேற்றம் 12.10 (ஒரு நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவு)

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் B என்பது கூறுவெளி S-ல் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி எனில் $P(B)$ என்பது B நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்வு ஆகும்.

$$\boxed{P(B) \;=\; P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+\cdots+P(A_n).P(B/A_n) \;=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).P(B/A_i)}$$

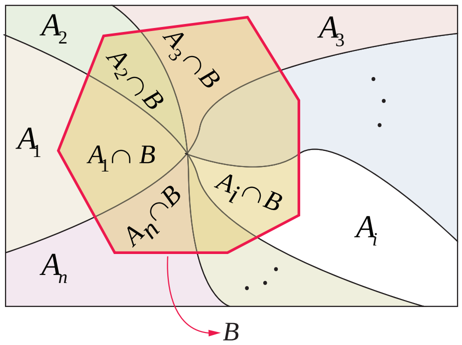
நிரூபணம்

B என்பது கூறுவெளி S -ல் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி.
படத்திலிருந்து

$$B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup(A_3\cap B)\cup\cdots(A_n\cap B).$$

$A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் எனவே

$(A_1\cap B),(A_2\cap B),(A_3\cap B),\cdots,(A_n\cap B)$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.



$$P(B)=P\left[(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup(A_3\cap B)\cup\cdots\cup(A_n\cap B)\right]$$

$$P(B)\;=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$$

$$P(B)\;=\;P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+\cdots+P(A_n).P(B/A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).P(B/A_i)$$

பின்வரும் கணக்குகள் நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவைப் பயன்படுத்தி தீர்க்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 12.24

ஒரு ஜாடியில் 8 சிவப்பு மற்றும் 4 நீல நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு ஜாடியில் 5 சிவப்பு மற்றும் 10 நீல நிறப்பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு ஜாடி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இரு பந்துகளும் சிவப்பு நிறப்பந்துகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

A_1 என்பது ஜாடி $-I$ ஐ தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. மற்றும் A_2 என்பது ஜாடி$-II-$ஐத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது இரண்டு சிவப்பு நிறப்பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. B–ன் கூட்டு நிகழ்தகவினை நாம் காண வேண்டும். அதாவது $P(B)$.

	சிவப்பு பந்து	நீல பந்து	மொத்தம்
ஜாடி - I	8	4	12
ஜாடி - II	5	10	15
மொத்தம்	13	14	27

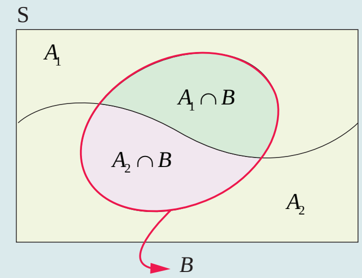
A_1 மற்றும் A_2 என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய, யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் என்பது தெளிவாகத் தெரிகிறது.

$$P(A_1)\;=\;\frac{1}{2}\,,\quad P(B/A_1)=\frac{8c_2}{12c_2}=\frac{14}{33}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_2) = \frac{5c_2}{15c_2} = \frac{2}{21}$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{33} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{21} = \frac{20}{77}.$$

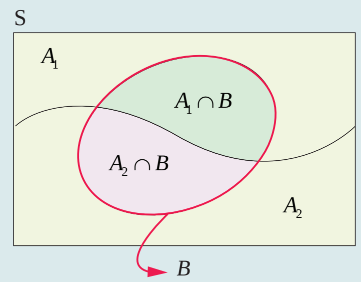


எடுத்துக்காட்டு 12.25

ஒரு தொழிற்சாலையில் இயந்திரங்கள் *I* மற்றும் *II* என இருவகைகள் உள்ளன. இயந்திரம்–*I* தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியில் 40% தயாரிக்கிறது மற்றும் இயந்திரம்–*II* உற்பத்தியில் *60%* தயாரிக்கிறது. மேலும் இயந்திரம்–*I* –ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களில் 4% குறைபாடுள்ளதாகவும் இயந்திரம்–*II*–ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களில் 5% குறைபாடுள்ளதாகவும் இருக்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அப்பொருள் குறைபாடுடன் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

A_1 என்பது இயந்திரம்–*I* ன் உற்பத்தி பொருள்களின் நிகழ்ச்சி என்க. A_2 என்பது இயந்திரம்–*II*ன் உற்பத்தி பொருள்களின் நிகழ்ச்சி என்க. Bஎன்பது குறைபாடுள்ள பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி என்க.



நிகழ்ச்சி *B*-ன் கூட்டு நிகழ்தகவினை நாம் காணவேண்டும். அதாவது, *P*(*B*).

A_1 மற்றும் A_2 என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும். ஆதலால்

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B/A_1) = 0.04$$

$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B/A_2) = 0.05$$

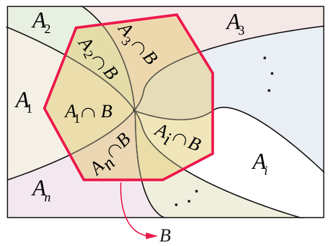
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

$$= (0.40)(0.04) + (0.60)(0.05)$$

$$= 0.046.$$

12.8 பேயீஸ்-ன் தேற்றம் (Bayes' Theorem)

1702-1761



இங்கிலாந்து நாட்டைச் சேர்ந்த தாமஸ் பேயீஸ் என்பவர் புள்ளியியலாளர் மற்றும் தத்துவ ஞானி ஆவார். பேயீஸின் தேற்றமானது, சோதனை நிகழ்வதற்கு முன்பான நிகழ்தகவு மற்றும் நிபந்தனை நிகழ்தகவினைச் சோதனைக்குப்பின் காணவேண்டிய நிபந்தனை நிகழ்தகவுடன் இணைக்கப் பயன்படுகிறது. பல நிகழ்தகவுகளின் புரிதலுக்கு பேயீசியன் நிகழ்தகவு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

தேற்றம் 12.11 (பேயீசியன் தேற்றம்)

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகவும் மேலும் $P(Ai) > 0$, $i = 1,2,3,....n$ மற்றும் B என்பது

ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகவும் மேலும் $P(B) > 0$, எனில்

$$\boxed{P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\, P(B / A_i)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2) + \cdots + P(A_n)\, P(B / A_n)}}$$

நிரூபணம்

B –ன் நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவு விதிப்படி,

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B / A_n)$$

பெருக்கல் தேற்றத்தின்படி $P\left(A_i \cap B\right) = P\left(B/A_i\right)P\left(A_i\right)$

Y3EVO

சார்பு நிலை நிகழ்தகவின் வரையறைப்படி,

$$P(A_i / B) = \frac{P\left(A_i \cap B\right)}{P(B)}$$

$$P(A_i / B) = \frac{P\left(B/A_i\right)P\left(A_i\right)}{P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B / A_n)}$$ (சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி)

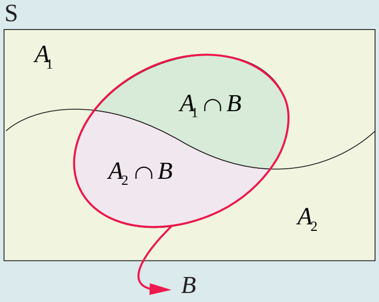
மேலே உள்ள சூத்திரமானது $P(A_i / B)$ மற்றும் $P(B / A_i)$ க்கும் இடையான தொடர்பை வழங்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12.26

ஒருதொழிற்சாலையில் இயந்திரங்கள் I மற்றும் II என இருவகைகள் உள்ளன. இயந்திரம்–I தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியில் 40% தயாரிக்கிறது மற்றும் இயந்திரம்–II உற்பத்தியில் 60% தயாரிக்கிறது. மேலும் இயந்திரம்–I –ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களில் 4% குறைபாடுள்ளதாகவும் இயந்திரம்–II–ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களில் 5% குறைபாடுள்ளதாகவும் இருக்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பின், அப்பொருள் இயந்திரம் II–ல் உற்பத்தி செய்ததற்கான நிகழ்தகவு யாது? (முந்தைய எடுத்துக்காட்டு வினாவுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்.)

தீர்வு

A_1 மற்றும் A_2 முறையே இயந்திரங்கள்–I மற்றும் II மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களின் நிகழ்ச்சி என்க. B என்பது குறைபாடுள்ள ஒரு பொருளை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $P\left(A_2/B\right)$ எனும் நிகழ்தகவைக் காணவேண்டும். A_1, A_2 என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.



பேயீஸின் விதிப்படி $$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)\, P(B / A_2)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2)}$$

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B / A_1) = 0.04$$

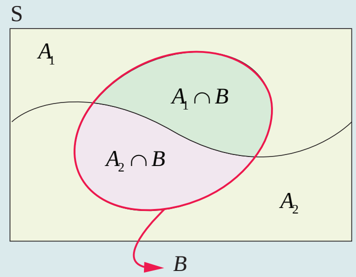
$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B / A_2) = 0.05$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1)\;+P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.60\;)(0.05)}{(0.40)(\,0.04)+(0.60\;)(0.05)} = \frac{15}{23}\;.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.27

கட்டிடம் கட்டும் நிறுவனத்தில் 2 செயற்பொறியாளர்கள் பணியில் அமர்த்தப்பட்டுள்ளனர். நிறுவனத்தின் 60% மற்றும் 40% வேலைகளை முறையே செயற்பொறியாளர்-1 மற்றும் செயற்பொறியாளர்-2 செய்கிறார்கள். முன் அனுபவத்தைப் பொறுத்து செயற்பொறியாளர்-1 மற்றும் செயற்பொறியாளர்-2 வேலை செய்வதில் தவறிழைக்க நிகழ்தகவு முறையே 0.03 மற்றும் 0.04 ஆகும். தற்போது நடைபெறும் கட்டுமானப் பணியில் ஒரு மோசமான (விளைவு) தவறு நிகழ்வதாக கொண்டால் எந்த செயற்பொறியாளர் தவறு இழைத்திருக்கக்கூடும் என்பதை யூகிக்கவும்.



தீர்வு

A_1 என்பது செயற்பொறியாளர்-1-ன் வேலையை குறிக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

A_2 என்பது செயற்பொறியாளர்-2-ன் வேலையை குறிக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது வேலையில் தவறு ஏற்படும் நிகழ்ச்சி என்க.

சார்பு நிலை நிகழ் தகவு $P(A_1/B)$ மற்றும் $P(A_2/B)$ கண்டறிவதன் மூலம் தவறிழைப்பவர்களை ஒப்பிட இயலும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின்படி $P(A_1)\;=0.60,\quad P(B/A_1)=0.03$

$P(A_2)=0.40,\quad P(B/A_2)=0.04$

A_1, A_2 ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாதலால், பேயீஸ்-ன் தேற்றப்படி,

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\,P(B/A_1)}{P(A_1)\,P(B/A_1)\;+P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$= \frac{(0.60\;)(0.03)}{(0.60)(\,0.03)+(0.40\;)(0.04)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{9}{17}.$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1)\;+P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.40\;)(0.04)}{(0.60)(\,0.03)+(0.40\;)(0.04)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{8}{17}.$$

$P(A_1/B)>P(A_2/B)$, என்பதால் செயற்பொறியாளர்-1 தவறிழைத்ததற்கான நிகழ்தகவு செயற்பொறியாளர்-2 தவறிழைத்ததற்கான நிகழ்தகைவ விட அதிகமாக இருப்பதால் வேலையில் ஏற்பட்ட தவறை செயற்பொறியாளர்-1 இழைத்திருக்கக் கூடும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.28

ஓர் அலுவலகத்தில் X, Y மற்றும் Z ஆகியோர் அலுவலகத்தின் தலைமையதிகாரியாக பொறுப்பேற்பதற்கான வாய்ப்புகள் முறையே $4:2:3$ என்றவிகிதத்தில் அமைந்துள்ளன. X, Y மற்றும் Z தலைமையதிகாரிகளாக பொறுப்பேற்பின் போனஸ் திட்டத்தை அமல்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.5 மற்றும் 0.4 ஆகும். அலுவலகத்தில் போனஸ் திட்டம் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டிருப்பின் Z தலைமையதிகாரியாக நியமனம் செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு

A_1, A_2 மற்றும் A_3 என்பவை முறையே X, Y மற்றும் Z ஆகியோர் தலைமையதிகாரியாக நியமனம்பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சிகள் என்க. B என்பது போனஸ்திட்டத்தைஅமல்படுத்துவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

இங்கு நாம் சார்புநிலை நிகழ்தகவு $P(A_3/B)$ -யினைக் காணவேண்டும்.

A_1, A_2 மற்றும் A_3 நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாதலால் பேயீஸ்-ன் தேற்றப்படி

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)\,P(B/A_3)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)}$$

$$P(A_1) = \frac{4}{9}, \quad P(B/A_1) = 0.3$$

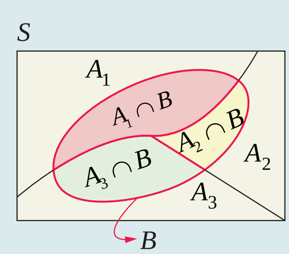
$$P(A_2) = \frac{2}{9}, \quad P(B/A_2) = 0.5$$

$$P(A_3) = \frac{3}{9}, \quad P(B/A_3) = 0.4$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)\,P(B/A_3)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)}$$

$$P(A_3/B) = \frac{\left(\frac{3}{9}\right)(0.4)}{\left(\frac{4}{9}\right)(0.3) + \left(\frac{2}{9}\right)(0.5) + \frac{3}{9}(0.4)}$$

$$= \frac{12}{34} = \frac{6}{17}.$$



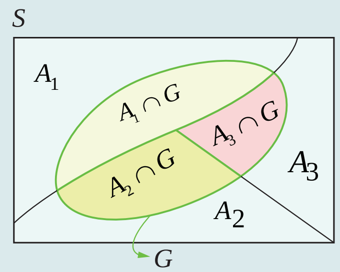
எடுத்துக்காட்டு 12.29

மூன்று வாடகை மகிழுந்து நிறுவனங்களிடமிருந்து, ஆலோசனை தரும் ஒரு நிறுவனம் மகிழுந்துகளை வாடகைக்கு வாங்குகிறது. 50% மகிழுந்துகளை L நிறுவனத்திடமிருந்தும், 30%-ஐ M-யிடமும் மற்றும் 20%-ஐ N நிறுவனங்களிடமிருந்தும் வாங்குகிறது. L நிறுவனத்திடமிருந்து வாங்கிய மகிழுந்துகளில் 90% -ம், M நிறுவனத்திடமிருந்து வாங்கிய மகிழுந்துகளில் 70% -ம் N நிறுவனத்திடமிருந்து வாங்கிய மகிழுந்துகளில் 60% -ம் நல்ல நிலைமையில் உள்ளன எனில்

(i) ஆலோசனை நிறுவனம் வாங்கிய வாடகை மகிழுந்து நல்ல நிலைமையில் உள்ளதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (ii) வாடகைக்கு வாங்கிய மகிழுந்து நல்ல நிலைமையில் உள்ளது எனில் N நிறுவனத்திடமிடமிருந்து பெறப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

L, M மற்றும் N நிறுவனங்களிடமிருந்து மகிழுந்துகளை வாங்கும் நிகழ்ச்சிகள் முறையே A_1, A_2 மற்றும் A_3 என்க.



G என்பது நல்ல நிலைமையில் வாங்கும் வாடகைக் மகிழுந்துக்கான நிகழ்ச்சி என்க.

G-ன் மொத்த நிகழ்தகவு, $P(G)$ மற்றும் A_3-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு G தரப்பட்டால் $P(A_3/G)$ ஆகியவற்றைக் காண வேண்டும்.

$$P(A_1) = 0.50, \quad P(G/A_1) = 0.90$$

$$P(A_2) = 0.30, \quad P(G/A_2) = 0.70$$

$$P(A_3) = 0.20, \quad P(G/A_3) = 0.60.$$

(i) A_1, A_2, A_3 ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாதலால் G-ன் மொத்த நிகழ்தகவு

$$P(G) = P(A_1)\,P(G/A_1) + P(A_2)\,P(G/A_2) + P(A_3)\,P(G/A_3)$$

$$P(G) = (0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)(0.60)$$

$$P(G) = 0.78.$$

(ii) A_3-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு G தரப்பட்டால் $P(A_3/G)$ காணவேண்டும்.

பேயீஸ்–ன் விதிப்படி

$$P(A_3/G) = \frac{P(A_3)\,P(G/A_3)}{P(A_1)\,P(G/A_1) + P(A_2)\,P(G/A_2) + P(A_3)\,P(G/A_3)}$$

$$P(A_3/G) = \frac{(0.20)(0.60)}{(0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)(0.60)}$$

$$= \frac{2}{13}.$$

பயிற்சி 12.4

(1) ஒரு தொழிற்சாலையில் இயந்திரங்கள் I மற்றும் II என இருவகை உள்ளன. இயந்திரம்-I தொழிற்சாலையின்உற்பத்தியில் 60% தயாரிக்கிறது மற்றும் இயந்திரம்-II உற்பத்தியில் 40% தயாரிக்கிறது. மேலும் இயந்திரம்-I -ன் மூலம்உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களில் 2% குறைபாடுள்ளதாகவும் இயந்திரம்-II-ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களில் 4% குறைபாடு உள்ளதாகவும் இருக்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அப்பொருள் குறைபாடுடன் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(2) ஒத்த இரு ஜாடிகளில், ஒன்றில் 6 கருப்பு மற்றும் 4 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு ஜாடியில் 2 கருப்பு மற்றும் 2 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு ஜாடி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது.

(i) அப்பந்து கருப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) எடுக்கப்பட்ட பந்து கருப்பு எனில் முதல் ஜாடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(3) ஒரு PVC பைப் தயாரிக்கும் நிறுவனம் X, Y மற்றும் Z என்ற மூன்று தொழிற்சாலைகள் மூலம் உற்பத்தி செய்கிறது. X, Y மற்றும் Z களின் தினந்தோறும் உற்பத்தி செய்யும் பைப்களின் அளவுகள் முறையே 2000 அலகுகள், 3000 அலகுகள் மற்றும் 5000 அலகுகள் ஆகும். முந்தைய திறனைப் பொறுத்து X, Y மற்றும் Z தொழிற்சாலைகளில் உற்பத்தியாகும் பைப்களின் குறைபாடுகள் முறையே 3%, 4% மற்றும் 2% ஆகும். சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு நாள் உற்பத்தியான பைப்களிலிருந்து ஒரு பைப் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறது.

(i) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பைப் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பைப் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பின் அது தொழிற்சாலை Y-யில் உற்பத்தியானதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(4) ஒரு குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தில் A, B மற்றும் C ஆகியோர் மேலாளர் ஆவதற்கான வாய்ப்புகள் முறையே 5 : 3 : 2 என்ற விகிதத்தில் உள்ளனர். A, B மற்றும் C ஆகியோர் மேலாளர்களாக இருந்தால் அலுவலக உணவகத்தினை மேம்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.4, 0.5 மற்றும் 0.3 ஆகும். அலுவலக உணவகம் மேம்பட வேண்டுமெனில் B என்பவரை மேலாளராக நியமிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(5) திருமணமான ஆண்கள் மற்றும் பெண்கள் பிரதான நேரத்தில் காணும் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைப் பற்றி ஒரு விளம்பர நிறுவனத்தின் நிர்வாகி ஆராய்ந்தபொழுது கடந்த காலப் பதிவுகளின்படி பிரதான நேரத்தில் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காணும் மனைவியர் 60 சதவீதத்தினர் ஆவர். மனைவியர் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காணும் நேரத்தில் 40% கணவர்களும் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காண்கின்றனர். மனைவியர் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காணாத நேரங்களில் 30% கணவர்கள் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காண்கின்றனர் எனில்

(i) பிரதான நேரத்தில் கணவர் தொலைக்காட்சி காணும் நிகழ்தகவு

(ii) கணவர் தொலைக்காட்சி காணும் நேரங்களில் மனைவியும் தொலைக்காட்சி காணும் நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

பயிற்சி 12.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினை கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) மூன்று ஆண்கள், இரு பெண்கள் மற்றும் நான்கு குழந்தைகள் உள்ள ஒரு குழுவிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் நான்கு நபர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றனர். அவர்களில் சரியாக இருவர் மட்டும் குழந்தைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{10}{23}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{10}{21}$

(2) $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ என்ற கணத்திலிருந்து ஒரு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்த எண் 3 அல்லது 4 ஆல் வகுபடுவதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$

(3) $A, B,$ மற்றும் C தனித்தனியாக ஒரே சமயத்தில் ஒரு இலக்கை நோக்கிச் சுடுகின்றனர். அவர்கள் அந்த இலக்கைச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ எனில் A அல்லது B அந்த இலக்கைச் சரியாகச் சுடவும் ஆனால் அந்த இலக்கை C சரியாகச் சுடாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{21}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{9}{64}$ (4) $\frac{7}{8}$

(4) A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில் சரியாக ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவானது

CXKIY

(1) $P(A\cup\overline{B})+P(\overline{A}\cup B)$ (2) $P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$

(3) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (4) $P(A)+P(B)+2P(A\cap B)$

(5) A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{1}{6}$, $P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{4}$ மற்றும் $P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{4}$ எனில் நிகழ்ச்சிகள் A –யும் B –யும்

(1) சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆனால் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் அல்ல

(2) சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆனால் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்ல

(3) சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள்

(4) ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் சார்புள்ள நிகழ்ச்சிகள்

(6) நான்கு குறைபாடுள்ள பொருள்களைக் கொண்ட மொத்தம் 12 பொருள்களிலிருந்து இரு பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அதில் குறைந்தது ஒரு பொருள் குறைபாடு உடையதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{19}{33}$ (2) $\frac{17}{33}$ (3) $\frac{23}{33}$ (4) $\frac{13}{33}$

(7) ஒரு நபரின் கைப்பையில் 3 ஐம்பது ரூபாய் நோட்டுகளும், 4 நூறு ரூபாய் நோட்டுகளும் மற்றும் 6 ஐநூறு ரூபாய் நோட்டுகளும் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து எடுக்கப்படும் இரு நோட்டுகளும் நூறு ரூபாய் நோட்டுகளாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவின் சாதக விகிதமானது.

(1) 1:12 (2) 12:1 (3) 13:1 (4) 1:13

(8) 'ASSISTANT' என்ற சொல்லிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு எழுத்தும் 'STATISTICS'. என்ற சொல்லிலிருந்து சமவாய்ப்பில் ஒரு எழுத்தும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்பொழுது அவ்விரு எழுத்துக்களும் ஒரே எழுத்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{7}{45}$ (2) $\frac{17}{90}$ (3) $\frac{29}{90}$ (4) $\frac{19}{90}$

(9) வரிசை 2 உடைய அணிகள் கணத்தில் அணியின் உறுப்புகள் 0 அல்லது 1 மட்டுமே உள்ளது எனில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு பூச்சியமற்றதாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{3}{16}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{5}{8}$

(10) ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் 3 கருப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. பையிலிருந்து தொடர்ச்சியாக 5 பந்துகளை மீண்டும் வைக்கப்படாமல் எடுக்கும்போது பந்துக்களின் நிறம் மாறி மாறிக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{3}{14}$ (2) $\frac{5}{14}$ (3) $\frac{1}{14}$ (4) $\frac{9}{14}$

(11) A மற்றும் B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகள் $A \subset B$ மற்றும் $P(B) \neq 0,$ என இருப்பின் பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்யானது?

(1) $P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ (2) $P(A/B) < P(A)$

(3) $P(A/B) \geq P(A)$ (4) $P(A/B) > P(B)$

(12) ஒரு பையில் 6 பச்சை,2 வெள்ளை மற்றும் 7கருப்பு நிற பந்துகள் உள்ளன. இரு பந்துகள் ஒரே சமயத்தில் எடுக்கும்போது அவை வெவ்வேறு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{68}{105}$ (2) $\frac{71}{105}$ (3) $\frac{64}{105}$ (4) $\frac{73}{105}$

(13) X மற்றும்Y என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(X/Y) = \frac{1}{2},\ P(Y/X) = \frac{1}{3}$, $P(X \cap Y) = \frac{1}{6}$ எனில் $P(X \cup Y)$ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{2}{3}$

(14) ஒரு ஜாடியில் 5 சிவப்பு மற்றும் 5 கருப்பு நிற பந்துகள் உள்ளன. ஜாடியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அதனையும் அதன் நிறமுள்ள மேலும் இரு பந்துகளும் ஜாடியில் மீண்டும் வைக்கப்படுகின்றன. பின்னர் ஜாடியிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படும்போது அது சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{7}{12}$ (4) $\frac{1}{4}$

(15) ஒன்று முதல் நூறு வரையுள்ள இயல் எண்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு எண் x தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. $\frac{(x-10)(x-50)}{x-30} \geq 0$ என்பதனைப் பூர்த்தி செய்யும் எண்ணைத் தேர்வு செய்யும் நிகழ்ச்சி A எனில், $P(A)$ ஆனது

(1) 0.20 (2) 0.51 (3) 0.71 (4) 0.70

(16) A மற்றும் B என்ற சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A) = 0.35$ மற்றும் $P(A \cup B) = 0.6$, எனில் $P(B)$ ஆனது

(1) $\frac{5}{13}$ (2) $\frac{1}{13}$ (3) $\frac{4}{13}$ (4) $\frac{7}{13}$

(17) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(\overline{A}) = \frac{3}{10}$ மற்றும் $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{2}$, எனில் $P(A \cap B)$ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{5}$

(18) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A) = 0.4, P(B) = 0.8$ மற்றும் $P(B/A) = 0.6$, எனில் $P(\overline{A} \cap B)$ -ன் மதிப்பு

(1) 0.96 (2) 0.24 (3) 0.56 (4) 0.66

(19) A, B மற்றும் C என்ற மூன்று நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று மட்டுமே நிகழக்கூடும். A-க்கு சாதகமற்ற விகிதம் 7 -க்கு 4 மற்றும் B -க்கு சாதகமற்ற விகிதம் 5 -க்கு 3 எனில் C -க்குச் சாதகமற்ற விகிதம்

(1) 23: 65 (2) 65: 23 (3) 23: 88 (4) 88: 23

(20) a மற்றும் b –ன் மதிப்புகள் $\{1,2,3,4\}$ என்ற கணத்தில் திரும்பத் திரும்ப வரும் என்ற வகையில் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் $x^2+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{3}{16}$ (2) $\frac{5}{16}$ (3) $\frac{7}{16}$ (4) $\frac{11}{16}$

(21) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A/B)=\frac{1}{2}$ மற்றும் $P(B/A)=\frac{2}{3}$ எனில் $P(B)$ –ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

(22) ஒரு குறிப்பிட்ட கல்லூரியில் 4% மாணவர்கள் மற்றும் 1% மாணவியர்கள் 1.8 மீட்டர் உயரத்திற்கு மேல் உள்ளனர். மேலும் கல்லூரியில் மொத்த எண்ணிக்கையில் 60% மாணவியர்கள் உள்ளனர். சமவாய்ப்பு முறையில் 1.8 மீ உயரத்திற்கு மேல் ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அவர் மாணவியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{2}{11}$ (2) $\frac{3}{11}$ (3) $\frac{5}{11}$ (4) $\frac{7}{11}$

(23) பத்து நாணயங்களைச் சுண்டும்போது குறைந்தது 8 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்வு

(1) $\frac{7}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{7}{16}$ (4) $\frac{7}{128}$

(24) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு முறையே 0.3 மற்றும் 0.6 ஆகும். A மற்றும் B ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.18 எனில் A அல்லது B நிகழாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) 0.1 (2) 0.72 (3) 0.42 (4) 0.28

(25) ஒரு எண் m ஆனது $m \leq 5$, எனில் இருபடிச் சமன்பாடு $2x^2+2mx+m+1=0$ -ன் மூலங்கள் மெய்யெண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

ஒரு சம வாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி S எனவும் அதன் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி A எனவும் கொள்க.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A\text{-க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}{S\text{-ல் உள்ள யாவுமளாவிய முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

நிகழ்தகவின் கோட்பாடுகள்

S என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவுற்ற கூறுவெளி. A என்பது S–ன் யாதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி. $P(A)$ என்பது A–ன் நிகழ்தகவு எனில் $P(A)$ கீழ்க்காணும் அடிப்படைக் கொள்கைகளை நிறைவு செய்யும்.

(1) $P(A) \geq 0$

(2) A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(3) $P(S) = 1$

இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு பூஜ்ஜியம் ஆகும். $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் B -ன் நிரப்பி $\overline{B}$ எனில்

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

நிகழ்ச்சி A ஏற்கனவே நிகழ்ந்துள்ள நிலையில் A யின் நிபந்தனையில் B -ன் சார்புநிலை நிகழ்தகவு $P\left(B/A\right)$ எனக் குறிக்கப்படின்

$$\boxed{P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0}$$

$$\boxed{P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0}$$

உடனிகழ்வுகளாக ஏற்படும் A மற்றும் B எனும் இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A / B)P(B) \ \text{ or } \ P(A \cap B) = P(B / A)P(A)}$$

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)}$ எனில் A மற்றும் B எனும் இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

கூட்டு நிகழ்தகவு

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ என்பன ஒன்றை ஒன்று விலக்கிய யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் B என்பது S எனும் கூறுவெளியில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனில்

$$\boxed{P(B) = P(A_1).P(B / A_1) + P(A_2).P(B / A_2) + \cdots + P(A_n).P(B / A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B / A_i)}$$

$P(B)$ என்பது நிகழ்ச்சி B -யின் கூட்டு நிகழ் தகவு ஆகும்.

பேயீஸ்-ன் தேற்றம்

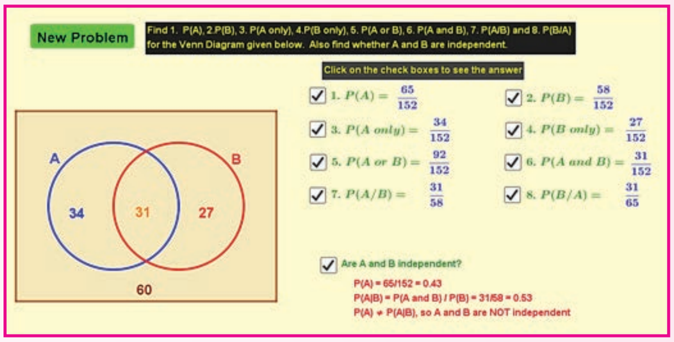
$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ என்ற ஒன்றை ஒன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகவும் மேலும் $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots. n$ எனில் $P(B) > 0$, இருக்கும்படி B என்ற எந்த ஒரு நிகழ்ச்சிக்கும்

$$\boxed{P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\, P(B / A_i)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2) + \ldots + P(A_n)\, P(B / A_n)}}$$

இணையச் செயல்பாடு 12 (a)

நிகழ்தகவு கோட்பாடு-ஓர் அறிமுகம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

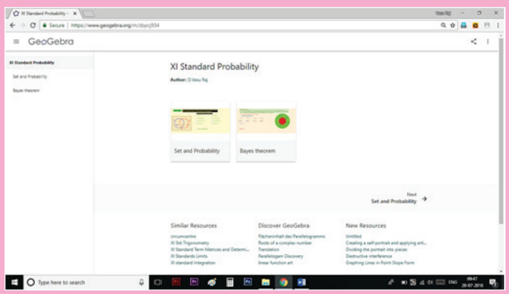


படி – 1

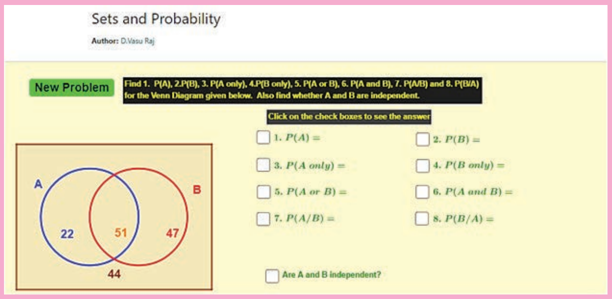
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "XI standard Probability" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Sets and Probability" என்பதைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அதில் "New Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்து,வினாக்களைமாற்ற முடியும். நிகழ்தகவு கணக்குகளைச் செய்து, அதற்கென கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டங்களைச் சொடுக்குக.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

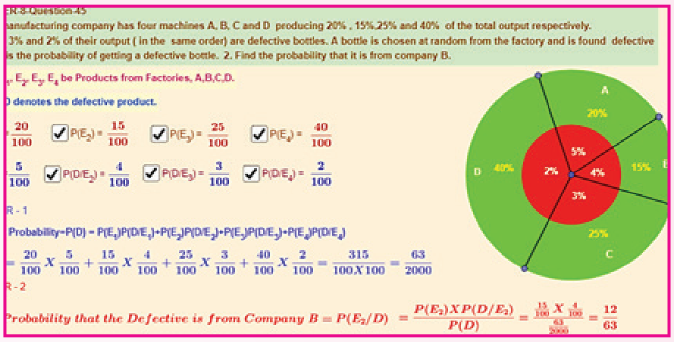
https://ggbm.at/zbpcj934

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

இணையச் செயல்பாடு 12 (b)

நிகழ்தகவு கோட்பாடு-ஓர் அறிமுகம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

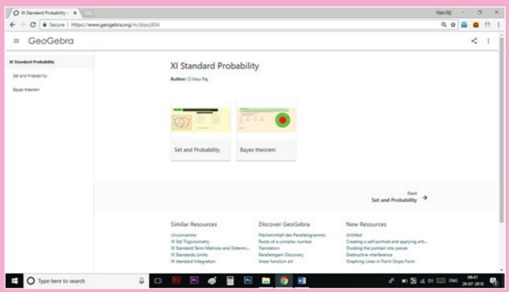


படி – 1

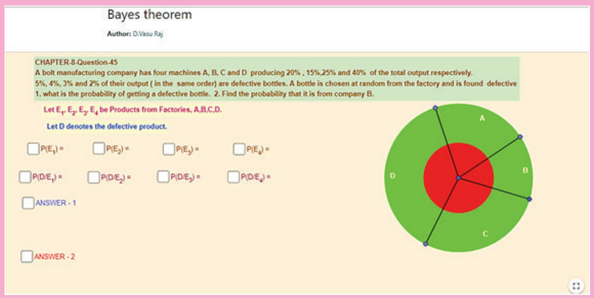
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra–வின் "XI standard Probability" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Bayes Theorem" என்பதைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அதில் ஒரு எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் படிகளின் படி நிகழ்தகவுகளைச் செய்க. உங்கள் விடைகளைச் சரி பார்க்க, அதற்கென கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டங்களைச் சொடுக்குக.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/zbpcj934

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

விடைகள்

பயிற்சி 7.1

(1) (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 9 & 25\\0 & 4 & 16\end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 5 & 9 & 13\\2 & 2 & 6 & 10\\5 & 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$ (2) $\pm\sqrt{2}, -3, \frac{1}{2}, 1-\pi$

(3) 5 (4) $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-15 & 10 & -8\\10 & -5 & 5\end{bmatrix}$, $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-12 & 2 & -16\\8 & -4 & 13\end{bmatrix}$

(5) $A^4 = \begin{bmatrix}1 & 4a\\0 & 1\end{bmatrix}$ (6) (ii) $\alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ (7) $x = 1$

(9) $k = 2$ (12) $-I$ (14) $A = \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}$ (16) 3×4

(18) $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 12\\-5 & 0\end{bmatrix}$ (19) $x=-2,\ y=-1$ (20) (i) $x = 3^{\frac{1}{3}}$ (ii) $p=-2, q=0, r=-3$

(21) $A = \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\1 & 0 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, எதிர் சமச்சீர் (24) பை I - ₹ 180, பை II - ₹ 340, பை III - ₹ 480

பயிற்சி 7.2

(10) 0 (13) 0 (15) (i) 0 (ii) 0 (16) 4

(17) -81 (18) 0 (19) $x = -1, 2$ (21) 7

பயிற்சி 7.3

(3) $x = 0$ (இருமுறை), $x = -(a+b+c)$ (5) $x = 0$ (இருமுறை), $x = -12$

பயிற்சி 7.4

(1) 2.5 ச.அ. (2) $k = -1, 7$

(3) (i) பூஜ்ஜியக்கோவை (ii) பூஜ்ஜியமற்ற கோவை (iii) பூஜ்ஜியக் கோவை

(4) (i) $a = -\frac{6}{7}$ (ii) $b = \frac{49}{8}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) 6

பயிற்சி 7.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	1	1	2	2	2	4	4	2	4	2	4	3	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
3	3	4	1	3	2	3	3	1	2					

பயிற்சி 8.1

(7) மற்ற பக்கங்கள் $\vec{b}-\vec{a}, -\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}$, மற்றொரு மூலை விட்டம் $\vec{b}-2\vec{a}$

பயிற்சி 8.2

(1) (i) திசைக் கொசைன்கள் அல்ல (ii) திசைக் கொசைன்கள் (iii) திசைக்கொசைன்கள் அல்ல

(2) (i) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{19}},\frac{-1}{\sqrt{19}},\frac{3}{\sqrt{19}}\right)$ (iii) (0, 0, 1)

(3) (i) $\left(\frac{3}{\sqrt{89}},\frac{-4}{\sqrt{89}},\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$, $(3,-4,8)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $(3,1,1)$

(iii) (0, 1, 0), (0, 1, 0) (iv) $\left(\frac{5}{\sqrt{2338}},\frac{-3}{\sqrt{2338}},\frac{-48}{\sqrt{2338}}\right)$, $(5,-3-48)$

(v) $\left(\frac{3}{\sqrt{34}},\frac{4}{\sqrt{34}},\frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$, $(3,4,-3)$ (vi) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $(1,0,-1)$

(4) $\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

(5) $a=\pm\frac{1}{2}$ (6) $a=-1,b=2,c=-1$ அல்லது $a=1,b=-2,c=1$ (8) $\lambda=\frac{2}{3}$

(11) (i) $\sqrt{41}$, $\left(\frac{2}{\sqrt{41}},\frac{1}{\sqrt{41}},\frac{-6}{\sqrt{41}}\right)$ (ii) $\sqrt{1123}$, $\left(\frac{-15}{\sqrt{1123}},\frac{27}{\sqrt{1123}},\frac{13}{\sqrt{1123}}\right)$

(12) $\sqrt{44}+\sqrt{218}+\sqrt{110}$ (13) $\frac{1}{\sqrt{398}}(17\hat{i}-3\hat{j}-10\hat{k})$

(14) ஆம் (16) $m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

பயிற்சி 8.3

(1) (i) 9 (ii) 4 (2) (i) $\lambda=\frac{5}{2}$ (ii) $\lambda=-2$ (3) $\theta=\frac{\pi}{4}$

(4) (i) $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-9}{49}\right)$ (ii) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (5) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (8) -55

(11) $5\sqrt{2}$ (12) $\frac{41}{7}$ (13) 5 (14) -42

பயிற்சி 8.4

(1) $\sqrt{507}$ (3) $\frac{\pm 10\sqrt{3}}{\sqrt{35}}(5\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$ (4) $\pm\frac{-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{6}}$

(5) $8\sqrt{3}$ ச.அ. (6) $\frac{1}{2}\sqrt{165}$ ச.அ. (10) $\frac{\pi}{3}$

பயிற்சி 8.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
3	3	4	2	2	3	4	4	2	3	2	1	1	1	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
4	1	4	4	1	3	2	4	3	2					

பயிற்சி 9.1

(1) $\simeq 0.\overline{3}$ (2) $\simeq 0.25$ (3) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.288$ (4) $\simeq -0.25$

(5) $\simeq 1$ (6) $\simeq 0$ (7) 1 (8) 3

(9) 2 (10) 3 (11) எல்லை இல்லை (12) எல்லை இல்லை

(13) 0 (14) 1 (15) எல்லை இல்லை

(16) $x_0 = 4$ தவிர (17) $x_0 = \pi$ தவிர (19) $f(8^-) = f(8^+) = 25$ (20) இயலாது

(21) $f(2)$ பற்றி முடிவு செய்ய இயலாது (22) 6, 6 (23) எல்லை இல்லை

பயிற்சி 9.2

(1) 32 (2) $\dfrac{m}{n}$ (3) 108 (4) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(5) $\dfrac{1}{6}$ (6) $-\dfrac{1}{4}$ (7) 3 (8) 4

(9) $\dfrac{1}{2}$ (10) $-\dfrac{1}{4}$ (11) $-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}$ (12) 0

(13) $x \to 0$ எனில் $f(x) \to -\infty$ (எல்லை இல்லை) (14) $\dfrac{1}{4}$ (15) $\dfrac{1}{4a\sqrt{a-b}}$

பயிற்சி 9.3

(1) (i) $x \to -2^-$ எனில் $f(-2) \to \infty$, $x \to -2^+$ எனில் $f(-2) \to -\infty$

(ii) $x \to \dfrac{\pi^-}{2}$ எனில் $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \to \infty$, $x \to \dfrac{\pi^+}{2}$ எனில் $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \to -\infty$

(2) $x \to 3^-$ எனில் $f(3) \to -\infty$, $x \to 3^+$ எனில் $f(3) \to \infty$

(3) $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to \infty$ (4) 0

(5) $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to \infty$ (6) -1 (7) $\dfrac{1}{4}$

(9) $\dfrac{1}{\alpha}$ (10) 30

பயிற்சி 9.4

(1) e^7 (2) $e^{\frac{1}{3}}$ (3) 1 (4) $\dfrac{1}{e^8}$ (5) e^3

(6) $\dfrac{1}{8}$ (7) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ (8) $\dfrac{2}{5}$ (9) $\begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m > n \\ \alpha \to 0 \text{ எனில் } f(\alpha) \to \infty, & m < n \end{cases}$

(10) $2\cos a$ (11) $\frac{b}{a}$ (12) $\frac{2}{3}$ (13) $\frac{1}{2}$ (14) 2

(15) $\log\frac{2}{3}$ (16) $\log 9$ (17) $\frac{1}{2}$ (18) $\log 3-1$ (19) a

(20 $-\frac{3}{2}$ (21) e^2 (22) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (23) 1 (24) e^2

(25) 2 (26) $\log\frac{a}{b}$ (27) $\frac{1}{2}$ (28) $\frac{1}{2}$

பயிற்சி 9.5

(2) (i) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(ii) $\mathbb{R}$ –ல் தொடர்ச்சியானது

(iii) $x \in \mathbb{R}-(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(iv) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(v) $(0,\infty)$ –ல் தொடர்ச்சியானது

(vi) $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(vii) $x \in \mathbb{R}-\{-4\}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(viii) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(ix) $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(x) $x \in \mathbb{R}-\frac{n\pi}{2}, n \in Z$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(3) (i) $x=3$ –ல் தொடர்ச்சியற்றது

(ii) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(iii) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(iv) $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(4) (i) $x_0=1$ –ல் தொடர்ச்சியானது

(ii) $x_0=3$ –ல் தொடர்ச்சியற்றது

(6) $\alpha=4$

(8) 6

(9) (i) $x=1$ –ல் தொடர்ச்சியற்றது (ii) $x=0$ –ல் தொடர்ச்சியற்றது

(10) $x=0,1,3$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு தொடர்ச்சியானது

(11) (i) $x=-2$-ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-8}{x+2} & , x\neq -2\\ -6 & , x=-2\end{cases}$

(ii) $x=-4$-ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+64}{x+4} & , x\neq -4\\ 48 & , x=-4\end{cases}$

(iii) $x=9$-ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x} & , x\neq 9\\ \dfrac{1}{6} & , x=9\end{cases}$

(12) -2 (13) $f(0)=0$ (14) $f(1)=\dfrac{2}{3}$

பயிற்சி 9.6

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	3	4	1	1	4	2	2	2	3	4	3	4	3	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	1	1	4	2	2	2	2	2	4					

பயிற்சி 10.1

(1) (i) 0 (ii) -4 (iii) $-2x$

(2) (i) $f'(1^-)=-1, f'(1^+)=1,$ வகைமையற்றது

(ii) $x\to 1^-$ எனில் $f'(x)\to-\infty$, வகைமையற்றது

(iii) $f'(1^-)=1, f'(1^+)=2,$ வகைமையற்றது

(3) (i) வகைமையானது (ii) வகைமையற்றது

(iii) வகைமையற்றது (i) வகைமையற்றது

(5) $x=-1$, $x=8$ ஆகியவை கூர்முனைகள்

$x=4$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது,

$x=11$ -ல் செங்குத்துத் தொடுகோடு

(6) மதிப்பு இல்லை

(7) (i) $x=n\pi, n\in Z$ -க்கு வகைமை இல்லை (ii) $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in Z$ -க்கு வகைமை இல்லை

பயிற்சி 10.2

(1) $1-3\cos x$ (2) $\cos x-\sin x$ (3) $x\cos x+\sin x$

(4) $-\sin x - 2\sec^2 x$ (5) $3t^2\cos t - t^3\sin t$ (6) $4\sec t\tan t + \sec^2 t$

(7) $e^x(\cos x + \sin x)$ (8) $\dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$ (9) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

(10) $\dfrac{(1-x)\cos x + (1+x)\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$ (11) $\cos x + \sin x$ (12) $\dfrac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$

(13) $\tan\theta\sec\theta + \cos\theta + \sin\theta$ (14) $-\dfrac{(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x}$ (15) $x\cos 2x + \sin x\cos x$

(16) $e^{-x}\left[\dfrac{1}{x} - \log x\right]$ (17) $e^{-3x}\left[-3(x^2+5)\log(1+x) + \dfrac{x^2+5}{1+x} + 2x\log(1+x)\right]$

(18) $\dfrac{\pi}{180}\cos\dfrac{\pi}{180}x$ (19) $\dfrac{\log_{10} e}{x}$

பயிற்சி 10.3

(1) $5(2x+4)(x^2+4x+6)^4$ (2) $3\sec^2 3x$ (3) $-\sec^2 x\sin(\tan x)$

(4) $x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}$ (5) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ (6) $e^x\cos(e^x)$

(7) $7(3x^2+4)(x^3+4x)^6$ (8) $\dfrac{3}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ (9) $\dfrac{1}{3}\sec^2 t(1+\tan t)^{-\frac{2}{3}}$

(10) $-3x^2\sin(a^3+x^3)$ (11) $-my$ (12) $20\sec 5x\tan 5x$

(13) $\dfrac{8(2x-5)^3}{(8x^2-5)^4}[-4x^2+30x-5]$ (14) $\dfrac{8x^3+14x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$ (15) $e^{-x^2}[1-2x^2]$

(16) $-\dfrac{3t^2}{2(t^3+1)^{\frac{3}{4}}(t^3-1)^{\frac{5}{4}}}$ (17) $\dfrac{14-3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}}$ (18) $-\sin x\sec^2(\cos x)$

(19) $\sin x(1+\sec^2 x)$ (20) $\dfrac{5^{-\frac{1}{x}}(\log 5)}{x^2}$ (21) $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$

(22) $3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$ (23) $-k\sin kx\sin(2\cos kx)$ (24) $-6\sin 2x(1+\cos^2 x)^5$

(25) $\dfrac{3e^{3x}+2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$ (26) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (27) $e^{x\cos x}[\cos x - x\sin x]$

(28) $\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (29) $\dfrac{\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\sec^2\left(\sqrt{\sin x}\right)\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (30) $\dfrac{-2}{1+x^2}$

பயிற்சி 10.4

(1) $x^{\cos x}\left(-\sin x\log x+\frac{\cos x}{x}\right)$ (2) $x^{\log x}\left(\frac{2\log x}{x}\right)+(\log x)^{x}\left[\frac{1}{\log x}+\log(\log x)\right]$

(3) $\frac{y(2x-1)}{x(1+2y)}$ (4) $\frac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$ (5) $(\cos x)^{\log x}\left[\frac{\log(\cos x)}{x}-\tan x\log x\right]$

(6) $-\frac{b^2x}{a^2y}$ (7) $\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+y}{x-y\sqrt{x^2+y^2}}$ (8) $\frac{1-\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}$

(10) $\frac{1}{2}$ (11) $\frac{6}{1+9x^2}$ (12) 1 (13) $-\tan t$

(14) $\tan t$ (15) $\frac{t^2-1}{2t}$ (16) $\frac{2}{1+x^2}$ (17) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

(18) 1 (19) $\cos x^2$ (20) 2 (21) $\frac{1}{2}$

(22) -1 (23) $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

பயிற்சி 10.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	4	3	3	1	4	3	2	1	4	3	3	2	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
2	3	1	4	2	4	1	1	3	2					

பயிற்சி 11.1

(1) (i) $\frac{x^{12}}{12}+c$ (ii) $-\frac{1}{6x^6}+c$ (iii) $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$ (iv) $\frac{8}{13}x^{\frac{13}{8}}+c$

(2) (i) $-\cot x+c$ (ii) $\sec x+c$ (iii) $-\text{cosec}x+c$ (iv) $\tan x+c$

(3) (i) 12^3x+c (ii) $\log|x|+c$ (iii) e^x+c

(4) (i) $\tan^{-1}x+c$ (ii) $\sin^{-1}x+c$

பயிற்சி 11.2

(1) (i) $\frac{(x+5)^7}{7}+c$ (ii) $\frac{1}{9(2-3x)^3}+c$ (iii) $\frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+c$

(2) (i) $\frac{-\cos 3x}{3}+c$ (ii) $-\frac{\sin(5-11x)+c}{11}$ (iii) $-\frac{\cot(5x-7)}{5}+c$

(3) (i) $\frac{1}{3}e^{3x-6}+c$ (ii) $-\frac{e^{8-7x}}{7}+c$ (iii) $-\frac{1}{4}\log|6-4x|+c$

(4) (i) $5\tan\frac{x}{5}+c$ (ii) $-\frac{1}{5}\text{cosec}(5x+3)+c$ (iii) $-\frac{1}{15}\sec(2-15x)+c$

(5) (i) $\frac{1}{4}\sin^{-1}(4x)+c$ (ii) $\frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c$ (iii) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(6x)+c$

பயிற்சி 11.3

(1) $\frac{(x+4)^6}{6}+\frac{1}{3(2-5x)^3}+\frac{\cot(3x-1)}{3}+c$ (2) $-2\sin(5-2x)+3\,e^{3x-6}-6\log|6-4x|+c$

(3) $5\tan\frac{x}{5}+9\sin 2x+2\sec(5x+3)+c$ (4) $2\sin^{-1}(4x)+9\sin^{-1}(3x)-3\tan^{-1}(5x)+c$

(5) $2\tan^{-1}(3x+2)+3\sin^{-1}(3-4x)+c$ (6) $\sin\left(\frac{x}{3}-4\right)+\log|7x+9|+5e^{\frac{x}{5}+3}+c$

பயிற்சி 11.4

(1) $2x^2-5x+3$ (2) $3(x^3-x^2-1)$ (3) $2x^3-3x^2+5x+26$

(4) (i) 8 வினாடிகள் (ii) 39.2 மீ/வினாடி (iii) 78.4 மீ/வினாடி

(5) (i) 2.4 ச.செமீ (ii) 0.4 ச.செமீ

பயிற்சி 11.5

(1) $\frac{x^2}{2}+4x-3\log|x|-\frac{2}{x}+c$ (2) $\frac{x^2}{2}+\log|x|+2x+c$ (3) $\frac{8x^3}{3}+26x^2-180x+c$

(4) $\tan x-\cot x-2x+c$ (5) $2[\sin x+x\cos\alpha]+c$ (6) $-2\text{cosec}2x+c$

(7) $-3\cot x-4\text{cosec}x+c$ (8) $x-\sin x+c$ (9) $2\left[\frac{\sin 3x}{3}+\sin x\right]+c$

(10) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 5x}{5}+\sin x\right]+c$ (11) $\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 10x}{10}\right]+c$ (12) $-\frac{1}{8}\cos 4x+c$

(13) $\frac{(ae)^x}{\log(ae)}+c$ (14) $\frac{2}{15}(3x+7)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(3x+7)^{\frac{3}{2}}+c$

(15) $\frac{2^{2x+2}}{\log 2}-\frac{2^{2-3x}}{3\log 2}+c$ (16) $\frac{2}{21}[(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}]+c$

(17) $2\log|x+3|-\log|x+2|+c$ (18) $\frac{1}{9}\log|(x-1)|-\frac{1}{9}\log|(x+2)|+\frac{1}{3(x+2)}+c$

(19) $\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+3\tan^{-1}x+c$ (20) $\frac{x^2}{2}+3x-\log|x-1|+8\log|x-2|+c$

பயிற்சி 11.6

(1) $\sqrt{1+x^2}+c$ (2) $\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+c$ (3) $\log|e^x+e^{-x}|+c$

(4) $\log|10^x+x^{10}|+c$ (5) $-2\cos\sqrt{x}+c$ (6) $\log|\log(\sin x)|+c$

(7) $\log\left|\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right|+c$ (8) $\frac{1}{b^2}\log|a^2+b^2\sin^2 x|+c$ (9) $\frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}+c$

(10) $(1+\sqrt{x})^2-4(1+\sqrt{x})+2\log|1+\sqrt{x}|+c$ (11) $\log|\log(\log x)|+c$

(12) $-e^{-\beta x^{\alpha}}+c$ (13) $2\sqrt{\sec x}+c$ (14) $\frac{(1-x)^{19}}{19}-\frac{(1-x)^{18}}{18}+c$

(15) $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}+c$ (16) $(x-a)\cos a-\sin a\log|\sec(x-a)|+c$

பயிற்சி 11.7

(1) (i) $e^{3x}[3x-1]+c$ (ii) $-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9}+c$

(iii) $-e^{-5x}[5x+1]+c$ (iv) $x\sec x-\log|\sec x+\tan x|+c$

(2) (i) $\frac{x^2\log|x|}{2}-\frac{x^2}{4}+c$ (ii) $e^{3x}[9x^2-6x+2]+c$

(iii) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (iv) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c$

(3) (i) $-\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}+x+c$ (ii) $\frac{1}{2}e^{x^2}[x^4-2x^2+2]+c$

(iii) $\frac{1}{2}\left[4x\tan^{-1}4x-\log\left|\sqrt{1+16x^2}\right|\right]+c$ (iv) $2\left[x\tan^{-1}x-\log\left|\sqrt{1+x^2}\right|\right]+c$

பயிற்சி 11.8

(1) (i) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]+c$ (ii) $\frac{e^{2x}}{5}[2\sin x-\cos x]+c$

(iii) $\frac{e^{-x}}{5}[2\sin 2x-\cos 2x]+c$

(2) (i) $-\frac{e^{-3x}}{13}[3\sin 2x+2\cos 2x]+c$ (ii) $-\frac{e^{-4x}}{10}[2\sin 2x+\cos 2x]+c$

(iii) $\frac{e^{-3x}}{10}[\sin x-3\cos x]+c$

பயிற்சி 11.9

(1) $e^x\log|\sec x|+c$ (2) $\frac{e^x}{2x}+c$ (3) $e^x\sec x+c$

(4) $e^x\tan x+c$ (5) $xe^{\tan^{-1}x}+c$ (6) $\frac{x}{1+\log|x|}+c$

பயிற்சி 11.10

(1) (i) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{20}\log\left|\frac{5+2x}{5-2x}\right|+c$ (iii) $\frac{1}{12}\log\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+c$

(2) (i) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}-3+x}{\sqrt{2}+3-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x-4}{x+6}\right|+c$ (iii) $\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right|+c$

(3) (i) $\log\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right|+c$ (ii) $\log\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+c$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{5}\right)+c$

பயிற்சி 11.11

(1) (i) $\log|x^2+4x-12|-\frac{7}{8}\log\left|\frac{x-2}{x+6}\right|+c$ (ii) $\frac{5}{2}\log|x^2+2x+2|-7\tan^{-1}(x+1)+c$

(iii) $\frac{3}{4}\log|2x^3-2x+3|+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+c$

(2) (i) $5\sin^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{13}}-2\sqrt{9+4x-x^2}+c$ (ii) $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(iii) $2\sqrt{x^2+4x+1}-\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+c$

பயிற்சி 11.12

(1) (i) $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+10}+\frac{9}{2}\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}\right|+c$

(ii) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-3}-2\log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+c$

(iii) $\frac{x-5}{2}\sqrt{10x-x^2-24}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-5)+c$

(2) (i) $\frac{1}{4}\left[(2x+5)\sqrt{9-(2x+5)^2}+9\sin^{-1}\left(\frac{2x+5}{3}\right)\right]+c$

(ii) $\frac{1}{4}\left[(2x+1)\sqrt{81+(2x+1)^2}+81\log\left|2x+1+\sqrt{81+(2x+1)^2}\right|\right]+c$

(iii) $\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2-4}+2\log\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-4}\right|+c$

பயிற்சி 11.13

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	3	4	1	3	1	3	2	4	3	4	2	4	4	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	3	2	4	1	3	4	3	1	4					

பயிற்சி 12.1

(1) (i) *சாத்தியமானது* (ii) *சாத்தியமற்றது* (iii) *சாத்தியமற்றது*

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 (3) (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{4}{9}$ (4) (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (5) (i) $\frac{7}{64}$ (ii) $\frac{247}{256}$ (iii) $\frac{37}{256}$

(6) $\frac{37}{100}$ (7) (i) $\frac{7}{33}$ (ii) $\frac{14}{55}$ (8) (i) $\frac{2}{13}$ (ii) $\frac{5}{13}$ (iii) $\frac{2}{13}$

(9) $\frac{627}{728}$ (10) (i) $\frac{5}{12}$ (ii) 2 to 3

பயிற்சி 12.2

(1) (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii)) $\frac{1}{8}$ (iv) 1 (2) (i) 0.50 (ii) 0.35 (iii) 0.20

(3) $\frac{11}{36}$ (4) (i) 0.8 (ii) 0.5 (iii) 0.3

(5) (i) 0.9984 (ii) 0.0016 (6) (i) 0.64 (ii) 0.44

பயிற்சி 12.3

(1) *இயலாது* (3) 0.5 (4) (i) 0.5 (ii) 0.9

(5) $\frac{3}{8}$ (6) (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{13}{30}$ (7) (i) 0.5 (ii) 0.375

(8) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{9}{40}$ (iii) $\frac{21}{40}$ (9) 0.75

(10) (i) 0.3 (ii) 0.5 (iii) 0.5 (iv) 0.5 (11) (i) $\frac{5}{28}$ (ii) $\frac{1}{14}$ (12) $\frac{13}{30}$

பயிற்சி 12.4

(1) 0.028 (2) (i) $\frac{11}{20}$ (ii) $\frac{6}{11}$

(3) (i) $\frac{7}{250}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{15}{41}$ (5) (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{2}{3}$

பயிற்சி 12.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
4	3	1	2	2	1	1	4	2	3	3	1	4	2	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	4	3	2	3	2	2	4	4	3					

கலைச்சொற்கள்

அத்தியாயம் 7
அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

அணி	matrix
வரிசை	order
நிரை அணி	row matrix
நிரல் அணி	column matrix
பூஜ்ஜிய அணி	zero matrix
வெற்று அணி	null matrix
சதுர அணி	square matrix
மூலைவிட்ட அணி	diagonal matrix
அலகு அணி	unit matrix
முக்கோண வடிவ அணி	triangular matrix
மேல் முக்கோண வடிவ அணி	upper triangular matrix
கீழ் முக்கோண வடிவ அணி	lower triangular matrix
முதன்மை மூல விட்டம்	principal diagonal
திசையிலி அணி	scalar matrix
உகந்த	conformable
பரிமாற்றுப் பண்பு	commutative property
சேர்ப்புப் பண்பு	associative property
சமனிப் பண்பு	identity property
எதிர்மறைப் பண்பு	inverse property
பங்கீட்டுப் பண்பு	distributive property
சமச்சீர்	symmetric
எதிர் சமச்சீர்	skew-symmetric
அணிக்கோவை	determinant
பூஜ்ஜியக் கோவை அணி	singular matrix
பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி	non-singular matrix

அத்தியாயம் 8
வெக்டர் இயற்கணிதம்

வெக்டர்	vector
தொடக்கப் புள்ளி	initial point
முடிவுப் புள்ளி	terminal point
வெக்டரின் தாங்கி	support of the vector
கட்டிலா வெக்டர்	free vector
அறுதியிட்ட வெக்டர்	localised vector
ஒரே தொடக்கப்புள்ளி வெக்டர்கள்	co-initial vectors
ஒரே முடிவுப்புள்ளி வெக்டர்கள்	co-terminal vectors
ஒரே கோடமை வெக்டர்கள்	collinear vectors
இணை வெக்டர்கள்	parallel vectors
ஒரு தள வெக்டர்கள்	coplanar vectors
சம வெக்டர்கள்	equal vectors
பூஜ்ஜிய வெக்டர்	zero vector
அலகு வெக்டர்	unit vector
ஒரே திசை வெக்டர்கள்	like vectors
எதிர் திசை வெக்டர்கள்	unlike vectors
திசையிலிப் பெருக்கம்	scalar multiplication
நிலை வெக்டர்	position vector
பிரிவு சூத்திரம்	section formula
வெக்டரைக் கூறுகளாகப் பிரித்தல்	resolution of vector
திசைக் கொசைன்கள்	direction cosines
திசை விகிதங்கள்	direction ratios
திசையிலிப் பெருக்கம்	scalar product
வெக்டர் பெருக்கம்	vector product

அத்தியாயம் 9
வகை நுண்கணிதம்
எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை

நுண் கணிதம்	calculus
எல்லை	limit
ஒருபுற எல்லை	one sided limit
இடப்புற எல்லை	left hand limit
வலப்புற எல்லை	right hand limit
முடிவிலா எல்லை	infinite limit
முடிவிலியில் எல்லை	limit at infinity

செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடு	vertical asymptote
கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு	horizontal asymptote
இடையீட்டுத் தேற்றம்	Sandwich theorem
தொடர்ச்சித் தன்மை	continuity
தொடர்ச்சியின்மைத் தன்மை	discontinuity
நீக்கக் கூடிய தொடர்ச்சியின்மை	removable discontinuity
துள்ளல் தொடர்ச்சியின்மை	jump discontinuity

அத்தியாயம் 10
வகை நுண்கணிதம் வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

பகுமுறை சமன்பாடு	analytic equation
வகைக்கெழு	derivative
திசைவேகம்	velocity
முடுக்கம்	acceleration
குலுக்கம்	jerk
தொடுகோட்டுப் பண்பு	tangency
வித்தியாசங்களின் விகிதம்	difference quotient
வெட்டுக்கோடு	secant line
தொடுகோடு	tangent line
வளைவரை சாய்வு	slope of the curve
நேர்கோட்டியக்கம்	rectilinear motion
நிலைச்சார்பு	position function
வகைமை / வகையிடத்தக்க	differentiable
வகையிடல்	differentiation
இடப்புற வகையிடல்	left hand derivative
வலப்புற வகையிடல்	right hand derivative
வகையிடத் தக்கதல்லாத	non-differentiability
வகுத்தல் விதி	quotient rule
பிணைப்பு விதி	chain rule
சார்புகளின் சேர்ப்பு விதி	composite functions rule

சார்பின் சார்பு விதி	function of a function rule
இடைநிலை மாறி	intermediate argument
உள்ளார்ந்த சார்பு வகையிடல்	implicit differentiation
வெளிப்படைச் சார்பு வகையிடல்	explicit differentiation
துணையலகு சார்பு வகையிடல்	parametric differentiation
உயர்வரிசை வகையிடல்	higher order derivative

அத்தியாயம் 11
தொகை நுண்கணிதம்

தொகைச் சார்பு	integrand
தொகை மாறி	integrator
எதிர்மறை வகையிடல்	anti-derivative
எல்லை வரையறுக்கப்படாத தொகை	indefinite integral

அத்தியாயம் 12
நிகழ்தகவு கோட்பாடு - ஓர் அறிமுகம்

சோதனை	experiment
நிர்ணயிக்கப்பட்ட சோதனை	deterministic experiment
சமவாய்ப்பு சோதனை	random experiment
நிகழ்ச்சி	event
நிச்சய நிகழ்ச்சி	sure event or certain event
இயலா நிகழ்ச்சி	impossible event
யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சி	exhaustive event
கூறுவெளி	sample space
ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்	mutually exclusive events
சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள்	equally likely events
சார்புநிலை நிகழ்தகவு	conditional probability
சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்	independent events

மேற்கோள் நூல்கள்

(1) Elements of Linear Algebra– P.M.Cohn , Springer

(2) Theory and Problems of Matrices – Frank Ayres, Schaum's Outline series

(3) Topics in Algebra, I.N. Herstein, Vikas Publishing Company.

(4) Vector Algebra, Schaum's Outline series.

(5) Differential and Integral Calculus, N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.

(6) Elementary Treatise on the Calculus, George A. Gibson, Macmillan & Co. New York.

(7) Elementary Calculus, Vol. I, V.I. Smirnov, Addison – Wesley Publish Company, Inc.

(8) Calculus (Volume 1 and II), Tom. M. Apostol, John Wiley Publications.

(9) Calculus and Analytical Geometry,

George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.

(10) Calculus Early Transcendentals – George B.Thomas JR., Joel Hass, Christopher Heil, Maurice D.Weir, Pearson

(11) Advanced Engineering Mathematics- Erwin Kreyszig – Wiley India(P) Ltd.

(12) Calculus, Robert T.Smith, Roland B.Minton, McGraw Hill Education(India) Private Limited.

(13) Mathematical Analysis, S.C. Malik, Wiley Eastern Ltd.

(14) Methods of Real Analysis, Richard R. Goldberg, Oxford and IBH Publishing Company, New Delhi.

(15) Theory and Problems of Probability, Random Variables and Random Processes, Hwei P. Hsu, Schaum's Outline series

(16) Mathematical Statistics, John E. Freund and Ronald D. Walpole, Prentice Hall of India.

(17) Mathematical Statistics, Saxena and Kapoor

கணிதவியல் – மேல்நிலை முதலாமாண்டு, தொகுதி–II
பாடநூல் உருவாக்கக் குழு

பாட வல்லுநர்கள்

முனைவர் S. பொன்னுசாமி
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
இந்திய தொழில்நுட்ப நிறுவனம், சென்னை.

முனைவர் K. ஸ்ரீனிவாசன்,
இணை பேராசிரியர் மற்றும் துறைத்தலைவர் (ஓய்வு),
கணிதத் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை.

முனைவர் E. சந்திரசேகரன்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
வேல் டெக் இரங்கராஜன் முனைவர் சகுந்தலா அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப ஆராய்ச்சி மற்றும் மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
ஆவடி, சென்னை.

முனைவர் C. செல்வராஜ்,
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

முனைவர் ஃபெல்பின் C. கென்னடி,
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்,
கணிதத் துறை, ஸ்டெல்லா மேரிஸ் கல்லூரி,
சென்னை.

முனைவர் G. பழனி,
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
டாக்டர் அம்பேத்கார் அரசு கலைக் கல்லூரி,
வியாசர்பாடி, சென்னை.

பாட துணை வல்லுநர்கள்

முனைவர் R. வேம்பு,
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
SBK கல்லூரி, அருப்புக்கோட்டை.

முனைவர் D.J. பிரபாகரன்,
உதவிப் பேராசிரியர்
கணிதத் துறை, MIT வளாகம்,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம், சென்னை.

ஆலோசகர்கள்

முனைவர் V. தங்கராஜ்,
முன்னாள் இயக்குநர்,
RIASM, சென்னை பல்கலைக்கழகம்,

முனைவர் M. சந்திரசேகர்,
பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்,
கணிதத் துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் K.C. சிவக்குமார்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
இந்திய தொழில்நுட்ப நிறுவனம்,
சென்னை

முனைவர் L ஜோன்ஸ் டார்ஷியஸ் தாஸ்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் J.R.V. எட்வர்ட்,
முதல்வர்(பொ), கணிதத் துறை,
SCOTT கிறித்துவக் கல்லூரி,
நாகர்கோவில், கன்னியாகுமரி மாவட்டம்.

முனைவர் R. ரூப்குமார்
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
தமிழ்நாடு மத்திய பல்கலைக் கழகம்
திருவாரூர்.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

B. தமிழ்ச்செல்வி,
துணை இயக்குநர், மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை.

பாடநூலாசிரியர்கள்

M. மதிவாணன்,
தலைமையாசிரியர்,
அரசு மாதிரி மேல்நிலைப் பள்ளி,
காரிமங்கலம், தர்மபுரி.

N. கலைச்செல்வம்
முதுகலை ஆசிரியர்
சென்னை பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
நுங்கம்பாக்கம், சென்னை.

A. பாலமுருகன்
முதுகலை ஆசிரியர்
அதியமான் அரசினர் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
தருமபுரி.

கோ. சு. வீரராகவன்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
ஸ்ரீகிருஷ்ணா மெட்ரிக் மேல்நிலைப் பள்ளி,
TVS நகர், கோயம்புத்தூர்.

S. பன்னீர்செல்வம்,
முதுகலை ஆசிரியர் (ஓய்வு),
அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
G.K.M. காலனி, சென்னை.

R.M. மீனாட்சி
முதுகலை ஆசிரியர்
அண்ணா ஆதர்ஷ் மெட்ரிக் மேல்நிலைப் பள்ளி,
அண்ணாநகர், சென்னை.

முனைவர் R. சுவாமிநாதன்
முதல்வர், வித்யாகிரி மேல்நிலைப் பள்ளி
புதுவயல், காரைக்குடி.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

K.P. சுஜாதா,
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசினர் பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
K.V. குப்பம், வேலூர் மாவட்டம்.

பாட ஆய்வாளர்கள்

முனைவர் M. அல்போன்ஸ்,
தலைமையாசிரியர் (ஓய்வு),
அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
சதுரங்கப்பட்டினம், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

G. ராஜேந்திரன்,
தலைமையாசிரியர் (ஓய்வு),
தந்தை பெரியார் அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
புழுதிவாக்கம், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

இணையச் செயல்பாடு ஒருங்கிணைப்பாளர்

D. வாசுராஜ்,
பட்டதாரி ஆசிரியர் (ஓய்வு),
கொசப்பூர், புழல் பிளாக், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

EMIS தொழில்நுட்பக் குழு

இரா.மா.சதீஸ்
மாநில ஒருங்கிணைப்பாளர் தொழில்நுட்பம்,
கல்வி மேலாண்மை தகவல் முறைமை,
ஒருங்கிணைந்த பள்ளிக்கல்வி இயக்ககம்.

இரா. அருண் மாருதி செல்வன்,
தொழில்நுட்ப திட்டபணி ஆலோசகர்,
கல்வி மேலாண்மை தகவல் முறைமை,
ஒருங்கிணைந்த பள்ளிக்கல்வி இயக்ககம்.

க. ப. சத்தியநாராயணா,
தகவல் தொழில்நுட்ப ஆலோசகர்,
கல்வி மேலாண்மை தகவல் முறைமை,
ஒருங்கிணைந்த பள்ளிக்கல்வி இயக்ககம்.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக் குழு

தட்டச்சு, கலை மற்றும் வடிவமைப்பு

S. மனோகரன்
V.V. கிராபிக்ஸ்
பழவந்தாங்கல், சென்னை–114.

தரக் கட்டுப்பாடு

கோபு ராசுவேல்
ராஜேஷ் தங்கப்பன்
ப. அருண் காமராஜ்
ஜெரால்டு வில்சன்
யோகேஷ்

அட்டை வடிவமைப்பு

கதிர் ஆறுமுகம்

ஒருங்கிணைப்பு

ரமேஷ் முனிசாமி

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்: