தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு

கணிதவியல்

தொகுதி–1

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு

முதல் பதிப்பு - 2019

திருத்திய பதிப்பு - 2020, 2022

(புதிய பாடத்திட்டத்தின் கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும் தொகுப்பும்

**மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்**

நூல் அச்சாக்கம்

**தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்**

www.textbooksonline.tn.nic.in

இப்புத்தகத்தினை எவ்வாறு பயன்படுத்த வேண்டும்?

கணிதப் பாடத்தின் வாய்ப்புகள்

- உயர்கல்வி வாய்ப்புகள், படிப்புகள், நிறுவனங்கள் பற்றிய கருத்துகள்
- மாணவர்கள் உயர்கல்வி நிலையை அடையத் தேவையான கல்வி உதவித்தொகை வாய்ப்புகள் பற்றிய வழிகாட்டுதல்கள்

கற்றல் நோக்கங்கள்

- பாடப்பகுதியின் பொதுப்பார்வை
- பாடப்பகுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் கற்றல் அடைவுகள் பற்றிய தெளிவு

- எடுத்துக்காட்டுகளுடன் பாடக் கருத்துகளின் காட்சிப்பதிவுகள்.

ICT

- பாடப்பொருளைக் கற்பதற்கான கவன வீச்சினை அதிகரித்தல்.
- பாடப்பொருளைப் புரிந்துகொண்டு வலுப்படுத்துவதற்குப் பாடப்பொருளைக் காட்சிப்படுத்துதல்
- ஒரு பாடப்பொருளை மற்ற பாடப்பொருள்களோடு இணைத்தல்.
- மின்னியல் திறன்களை வகுப்பறைக் கற்றலுடன் இணைத்து ஆய்வுக் கற்றலினை மாணவருக்கு அளித்தல்.

பாடத் தொகுப்பு

- ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியின் இறுதியிலும் கற்ற பாடப்பொருளை நினைவு கூறுவதற்காகத் தரப்பட்டுள்ள மீள்நோக்கக் குறிப்புகள்

மதிப்பிடுதல்

- மாணவர்கள் கருத்துகளைப் புரிந்து கொண்டதை மதிப்பிடுதல் மற்றும் பயிற்சி கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்கான அறிவை பெறச் செய்தல்

மேற்கோள் நூல்கள்

- மேலும் கற்பதற்கான குறிப்புதவி நூல்களின் பட்டியல்

உயர்நிலைச் சிந்தனைக்கான வாய்ப்புகள்

- JEE, KVPY, Math olympiad, போன்ற போட்டித் தேர்வுகளில் மாணவர்களின்ப ங்கேற்பினை ஊக்கப்படுத்த உயர்நிலைச் சிந்தனைக்கான வினாக்கள் மற்றும் கருத்துகள் இடம் பெற்று இருத்தல்.

கலைச்சொற்கள்

- அடிக்கடிப் பயன்படுத்தப்படும் கணிதக் கலைச்சொற்களும் அவற்றுக்கான தமிழ்ச் சொற்களும்

கணிதம் கற்றல்

பாடப்பொருளினை முழுமையாகப் புரிந்து கொள்வதே சரியான கற்றலாகும். ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியும் அறிமுகம். கற்றல் நோக்கங்கள். பல்வேறு வரையறைகள், தேற்றங்கள், முடிவுகள் மற்றும் எடுத்துக்காட்டுகளுடன் வழங்கப்பட்டுள்ளன. இதனடிப்படையில் விரைவான மற்றும் வலுவான மீள் கற்றலுக்காகக் கணக்குத் தீர்வுகளும், தீர்க்க வேண்டிய கணக்குகளும் அளிக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றை பயிற்சி செய்வதன் மூலமாக ஒருவர் தம் கணிதத் திறனை வளர்த்துக்கொள்ள முடியும். எனவே, மாணவர்களுக்கு அடிப்படைக் கருத்துகளை விளக்கிக் கணக்குகளைச் செய்துகாட்டுவதுடன் அதை அடியொற்றி மாணவர்களுக்கு அடிப்படைக் கருத்துகளை விளக்கிக் கணக்குகளைச் செய்துகாட்டுவதுடன் அதை அடியொற்றி மாணவர்களுக்கு பிற கணக்குகளை தீர்க்க முயல வைப்பதும் ஆசிரியர் பணியாகும். உயர்நிலைக் கணிதத்திற்கான அடித்தளமாக இம்மேல்நிலை இரண்டாமாண்டு திகழ்வதால், இப்பாடப்புத்தகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு பாடக் கருத்திலும் மாணவர்கள் மிக கவனம் செலுத்த வேண்டும்.

பொருளடக்கம்

கணிதவியல்

மின்நூல் **மதிப்பீடு**

மேல்நிலைக் கல்வியினை முடித்த மாணவர்களுக்கான வாய்ப்புகள்

தேர்வுகள்

JEE ஒருங்கிணைந்த நுழைவுத் தேர்வு	
குறிக்கோள்	B. E./B. Tech., B. Arch., B. Planning சேர்க்கை
தகுதி	12ம் வகுப்பு (இயற்பியல், வேதியியல், கணிதம்)
விண்ணப்பிக்கும் வகை	இணையதளம் வாயிலாக
இணையதளம்	http://jeemain.nic.in
JEE Advanced	
குறிக்கோள்	IIT களில் மற்றும் தன்பாத் ISMல் சேர்க்கை
தகுதி	12ம் வகுப்பு (இயற்பியல், வேதியியல், கணிதம்)
விண்ணப்பிக்கும் வகை	இணையதளம் வாயிலாக
இணையதளம்	http://jeeadv.iitd.ac.in/
இந்திய கடல்சார் பல்கலைக் கழகம் – பொது நுழைவுத் தேர்வு	
குறிக்கோள்	கடல்சார் அறிவியல் பட்டயப்படிப்பு (DNS), கடல்சார் அறிவியல் பட்டப்படிப்பு (B.Sc Nautical Science) சேர்க்கை
தகுதி	12ம் வகுப்பு (இயற்பியல், வேதியியல், கணிதம்)
விண்ணப்பிக்கும் வகை	அஞ்சல் வழி
இணையதளம்	https://www.imu.edu.in
இந்திய கடற்படை B.Tech நுழைவு முறை	
குறிக்கோள்	இந்திய கடற்படை B.Tech படிப்பு சேர்க்கை
தகுதி	12ம் வகுப்பு (இயற்பியல், வேதியியல், கணிதம்)
விண்ணப்பிக்கும் வகை	இணையதளம் வாயிலாக
இணையதளம்	https://www.joinindiannavy.gov.in

தேர்வுகள்

இந்திய கடற்படை மாலுமி ஆள்சேர்த்தல்	
குறிக்கோள்	சில்கா (Chilka) INS ல் 24 வார அடிப்படை பயிற்சி முகாமில் சேர்க்கையுடன் துறைசார் பயிற்சி பெறுதல்
தகுதி	12ம் வகுப்பு (இயற்பியல், வேதியியல், கணிதம்)
விண்ணப்பிக்கும் வகை	இணையதளம் வாயிலாக
இணையதளம்	www.nausena-bharti.nic.in/index.php
பாதுகாப்பு இந்தியப் படை தொழில்சார் தேர்வு (TES)	
குறிக்கோள்	Technical Entry to Army
தகுதி	12ம் வகுப்பு (இயற்பியல், வேதியியல், கணிதம்)
விண்ணப்பிக்கும் வகை	இணையதளம் வாயிலாக
இணையதளம்	www.joinindianarmy.nic.in/
இந்திய பாதுகாப்புக் கழகம் மற்றும் கடற்படைக் கழகத் தேர்வு (NDA&INAC)	
குறிக்கோள்	NDA ல் பீரங்கிப்படை, விமானப்படை, கடற்படை ஆகியவற்றில் 4 ஆண்டுகள் B.Tech படிப்பில் சேர்க்கை
தகுதி	12ம் வகுப்பு (இயற்பியல், வேதியியல், கணிதம்)
விண்ணப்பிக்கும் வகை	இணையதளம் வாயிலாக
இணையதளம்	www.upsc.gov.in/

மேல்நிலைக் கல்வியினை முடித்த மாணவர்களுக்கான வாய்ப்புகள்

தேர்வுகள்

- நீங்கள் அறிவியல் வல்லுநராகவோ அல்லது ஆசிரியராகவோ ஆவதற்கு விருப்பப்படின் நீங்கள் விரும்பும் ஏதேனுமொரு அறிவியல் கல்லூரியில் கணிதப் பாடத்தில் நீங்கள் பெற்ற அறிவு, உமது வாழ்வு சிறக்க கண்டிப்பாக மேம்படுத்தும்.
- இந்திய தொழில்நுட்பக் கழகம், இந்திய அறிவியல் கழகம், இந்திய புள்ளியியல் கழகம், அண்ணா பல்கலைக் கழகம் போன்ற உயர்கல்வி நிலையங்கள், மேனிலைக் கல்வி முடித்தவர்களுக்கு கணிதம்/பொறியியல்/புள்ளியியல் / கணினி அறிவியல் பாடப் பிரிவில் முழுமையாக்கப்பட்ட முதுநிலை அறிவியல் பட்டப்படிப்பில் சேர்க்கை தருகின்றன.

  கணிதவியலில் பின்வரும் பட்டப் படிப்புகள் உள்ளன.:

  - மூன்றாண்டு BSc
  - மூன்றாண்டு B. Math
  - நான்காண்டு B. Tech
  - நான்காண்டு முழுமையாக்கிய B.Sc – B.Ed
  - நான்காண்டு BS
  - ஐந்தாண்டு M.Sc / MS

BITSAT
குறிக்கோள் – *BITS* பிலானி, கோவா மற்றும் ஐதராபாத் வளாகங்களில் முழுமையாக்கிய பட்டப்படிப்புகளில் சேர்க்கை
NATA – கட்டிடக் கலை படிப்பிற்கான தேசிய அளவிலான தகுதித்தேர்வு
குறிக்கோள் – B.Arch சேர்க்கை
கிஷோர் வைக்யானிக் ப்ரோட்ஸான் யோஜனா (KVPY)
குறிக்கோள் – *B.Stat (Hons), B.Maths (Hons)* பட்டப்படிப்பில் சேர்க்கை
இந்திய புள்ளியியல் கழகம் (ISI) Admission
குறிக்கோள் – *B.Stat (Hons), B.Maths (Hons)* பட்டப்படிப்பில் சேர்க்கை
சென்னை கணித கழகம் (CMI)
குறிக்கோள் – கணிதம் மற்றும் கணினி அறிவியல் *B.Sc (Hons)* பட்டப் படிப்பு, கணிதம் மற்றும் இயற்பியல் *B.Sc (Hons)* பட்டப் படிப்பு சேர்க்கை

வேலைவாய்ப்புகள்

- *TNPSC, UPSC, BSRB, RSB* போன்ற குழுக்கள் நடத்தும் போட்டித் தேர்வுகளில் பங்குபெற்று வெற்றிபெற போதுமான பகுப்பாய்வு திறமை பெற்றுள்ளீர்.
- பன்னாட்டு நிறுவனங்களில் நேரடியாக பணியில் அமர்த்தப்பட நல்ல வாய்ப்பு பெற்றுள்ளீர்கள்.
- *IIT, IISC, NIT* போன்ற முன்னணி தொழில்நுட்ப நிறுவனங்கள், பல்கலைக்கழகங்கள், பொறியியல் கல்லூரிகள் நடத்தும் தேசிய அளவிலான நுழைவுத் தேர்வில் பங்கு பெற்று *B.E., B.Tech* பட்டம் பெற பொறியியல் பட்டப்படிப்பில் சேர திட்டமிடலாம்.

• இந்திய வனத்துறை சேவை	• ISRO, DRDO, CSIR சோதனைக் கூடங்களில் விஞ்ஞானி பணி
• மத்திய அரசுப் பணியாளர் தேர்வாணையம்	• பணியாளர் தேர்வாணையம்
• இந்திய பாதுகாப்பு சேவை	• பொதுத்துறை வங்கிகளில் பணியாளர்
• வரிவிதிப்பு அலுவலர்	• புள்ளியியல் ஆய்வாளர் பணி
• தமிழ்நாடு அரசுப் பணியாளர் தேர்வாணையம்	• ஆசிரியர் பணி
• ஆசிரியர் பணி	

வேலைவாய்ப்பு மற்றும் கல்வி உதவித்தொகை வாய்ப்புகள்

நிதிசார் உதவிகள்

- இளங்கலை மற்றும் முதுகலை படிப்புகளுக்கான கல்வி உதவித் தொகை
- 10ஆம் வகுப்பு நிறைவில் நடத்தப்படும் தேசியத் திறனறி தேர்வு (NTSE) (XI வகுப்பு முதல் Ph.D வரை)
- அறிவியல் மற்றும் கணிதப்பாட உயர்கல்விக்கான உதவித் தொகைக்கான பன்னாட்டு ஒலிம்பியாட் (International Olympiad)
- **(DST – INSPIRE)** அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்பத் துறை இன்ஸ்பயர் கல்வி உதவித்தொகை (இளங்கலை மற்றும் முதுகலைப் படிப்புகள்)
- அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்பத் துறை இன்ஸ்பயர் **(DST – INSPIRE)** கல்வி உதவித்தொகை (முனைவர் ஆய்வுகள்)
- இந்திராகாந்தி ஒரு பெண் குழந்தைக்கான கல்வி உதவித் தொகை (இளங்கலை மற்றும் முதுகலைப் படிப்புகள்)
- சிறுபான்மையினருக்கான மௌலானா ஆஸாத் கல்வித்தொகை (முனைவர் ஆய்வுப்பணி)
- இவற்றுடன் பட்டியலினத்தோர் /மலை சாதியினர் / உடல் ஊனமுற்றோர் / இதர பிற்பட்ட வகுப்பினருக்கான உதவித்தொகையும் உள்ளன. (பல்கலைக் கழக மானியக்குழு (UGC) மற்றும் அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்பத் துறையின் (DST) இணையதளத்தினைப் பார்த்துத் தெளிவு பெறவும்.
- பல்கலைக்கழக கல்வி உதவித்தொகை.
- தமிழ்நாடு கல்லூரிக் கல்வி உதவித்தொகை

ஆராய்ச்சி நிறுவனங்கள்

நிறுவனத்தின் பெயர்	இணையத்தள முகவரி
இந்திய அறிவியல் நிறுவனம், பெங்களூரு	www.iisc.ac.in
சென்னை கணித நிறுவனம், சென்னை	www.cmi.ac.in
டாடா அடிப்படை ஆராய்ச்சி நிறுவனம், மும்பை	www.tifr.res.in
இந்திய விண்வெளி அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப நிறுவனம், திருவனந்தபுரம்	www.iist.ac.in
தேசிய அறிவியல் கல்வி மற்றும் ஆராய்ச்சி நிறுவனம்	www.niser.ac.in
பிர்லா அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப நிறுவனம், பிலானி	www.bits-pilani.ac.in
இந்திய அறிவியல் கல்வி மற்றும் ஆராய்ச்சி நிறுவனம்	www.iiseradmission.in
அண்ணா பல்கலைக்கழகம்	https://www.annauniv.edu/
இந்தியத் தொழில்நுட்ப நிறுவனங்கள்	www.iitm.ac.in
தேசியத் தொழில்நுட்ப நிறுவனங்கள்	www.nitt.edu
மத்தியப் பல்கலைக்கழகங்கள்	www.cucet.ac.in
மாநிலக் பல்கலைக்கழகங்கள்	www.ugc.ac.in
தமிழ்நாடு வேளாண்மைப் பல்கலைக்கழகம்	tnau.ac.in
இந்தியத் தகவல் தொழில்நுட்பவியல் நிறுவனம்-அலகாபாத் (சேர்க்கைத் தேர்வு)	www.iiit.ac.in
கணித அறிவியல் நிறுவனம், சென்னை	www.imsc.res.in
ஹைதராபாத் மத்திய பல்கலைக்கழகம், ஹைதராபாத்	www.uohyd.ac.in
டெல்லி பல்கலைக்கழகம்,	www.du.ac.in
மும்பை பல்கலைக்கழகம், மும்பை	www.mu.ac.in
சாவித்ரிபாய் பியூல் பூனே பல்கலைக்கழகம், பூனே	www.unipune.ac.in

அத்தியாயம்

1

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

7SXJP

"ஆர்க்கிமிடிஸ், நியூட்டன், காஸ் போன்ற மேன்மைபெற்ற கணிதவியலாளர்கள், கோட்பாடு மற்றும் பயன்பாடுகள் இரண்டினையும் எப்போதும் சம அளவில் இணைத்தே செயல்பட்டனர்"

– பெலிக்ஸ் க்ளைன்

1.1 அறிமுகம் (Introduction)

காா்ல் ப்ரீட்ரிச் காஸ்
(1777-1855)
ஜெர்மானிய, கணித மற்றும் இயற்பியல் மேதை

அன்றாட உலகியல் பிரச்சனைகளின் கணிதவியல் மாதிரிகள், நேரியியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்புகளாக உருவாகின்றன. இவற்றைத் தீர்ப்பதற்கு அணிகள் இன்றியமையாததாகவும் தவிர்க்க முடியாதவைகளாகவும் அமைகின்றன. கணித மேதைகள் காஸ், ஜோர்டன், கேய்லி மற்றும் ஹாமில்டன் போன்றவர்கள் நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கான தீர்வுகளை ஆய்வு செய்வதற்காக அணிகோட்பாடுகளை உருவாக்கினார்கள்.

இப்பாடப்பகுதியில் அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளைப் பயன்படுத்தி நேரியியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கான தீர்வுகளைக் காண சில முறைகளில் குறிப்பாக (i) நேர்மாறு அணிகாணல் முறை, (ii) கிரேமரின் விதி, (iii) காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை (iv) தர முறை ஆகிய நான்கு முறைகளைப் பற்றி பயில இருக்கிறோம். இம்முறைகளை அறிந்து கொள்வதற்கு முன் பின்வருவனவற்றை அறிமுகப்படுத்த உள்ளோம் : (i) அபூச்சியமற்ற கோவை அணியின் நேர்மாறு, (ii) ஓர் அணியின் தரம், (iii) அணியின் நிரை மற்றும் நிரலுக்குரிய தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் மற்றும் (iv) நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்குரிய ஒருங்கமைவுத்தன்மை பற்றியும் அறிந்து கொள்ள உள்ளோம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதியை நிறைவாக கற்றபின் பின்வருவனவற்றை மாணவர்கள் அறிந்திருப்பர்

- நேரியச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குரிய வழிமுறை செய்து காட்டுதல்
  - ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு
  - பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் நேர்மாறு
  - தொடக்கநிலை நிரை மற்றும் நிரல் செயலிகள்
  - ஏறுபடி வடிவம்
  - ஓர் அணியின் தரம்
- நிரை செயலிகள் மூலம் ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணிக்கு நேர்மாறு அணி காணுதல்
- நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளை தீர்ப்பதற்கான நுட்பங்களை எடுத்துக்காட்டுதல்
  - நேர்மாறு அணி காணல் முறை
  - கிராமரின் விதி
  - காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை
- நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் ஒருங்கமைவு தன்மையை ஆராய்தல்
- சமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளை ஆராய்தல்

12th_Maths_TM_Vol1_CH 1_Matrices.indd 1 07-12-2021 13:27:34

1.2 பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a Non-Singular Square Matrix)

ஒரு சதுர அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு பூச்சியமெனில் அவ்வணியினை பூச்சிய கோவை அணி என்றும் மற்றும் ஒரு சதுர அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமற்றதெனில், அவ்வணியினை அபூச்சியமற்ற கோவை அணி என்றும் அழைப்போம் என்பதை நினைவுகூறுவோம். அணிகளின் திசையிலி பெருக்கம், ஓர் அணியை மற்றொரு அணியால் பெருக்குதல் மற்றும் அணிகளின் கூடுதல் பற்றி முன்பே படித்துள்ளோம். ஆனால் ஓர் அணியை மற்றொரு அணியால் வகுப்பதற்கான விதியை உருவாக்க இயலாது. ஏனெனில் அணியானது எண்களால் உருவான ஓர் அமைப்பு மற்றும் அணிக்கு எண் மதிப்பு கிடையாது. A என்ற அணியின் வரிசை n எனில் அவ்வணியானது n நிரைகளும் மற்றும் n நிரல்களும் உடைய அணியாகக் கருதுவோம்.

$x \neq 0$ என்ற மெய்யெண்ணிற்கு $y\left(=\dfrac{1}{x}\right)$ என்ற ஒரு மெய்யெண்ணை $xy = yx = 1$ என்றவாறு காணலாம். y ஆனது x –ன் நேர்மாறு (அல்லது x –ன் தலைகீழி) என அழைக்கப்படும். இதேபோன்று A என்ற ஓர் அணிக்கு B என்ற அணி $AB = BA = I$, எனுமாறு B காண விழைகிறோம். இங்கு I என்பது அலகு அணியாகும். இப்பகுதியில் பூச்சியமற்ற கோவை உடைய சதுர அணிக்கு நேர்மாறு வரையறுத்து அப்பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணிக்கு ஒரே ஒரு நேர்மாறு தான் உண்டு என நிரூபிக்க உள்ளோம். மேலும் நேர்மாறு அணிகளின் பண்புகள் பற்றியும் பயில உள்ளோம். இவற்றைப் படிப்பதற்கு ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி தேவைப்படுகிறது.

1.2.1 ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி (Adjoint of a Square Matrix)

ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி வரையறுப்பதற்கு முன் ஒரு சதுர அணியில் உள்ள உறுப்புகளுக்கும் அதன் இணைக்காரணி உறுப்புகளுக்கும் உள்ள பண்பை நினைவு கூறுவோம். A என்ற சதுர அணியின் வரிசை n என்க. இவ்வணியின் அணிக்கோவையை $|A|$ அல்லது $\det(A)$ என்று குறிப்பிடுவோம். A.–இல் i ஆவது நிறையும் j ஆவது நிரலும் சந்திக்கும் இடத்தில் உள்ள உறுப்பு a_{ij} என்க. i ஆவது நிரையும் j ஆவது நிரலும் நீக்கக் கிடைப்பது $(n-1)$ வரிசையுடைய ஒரு உப அணியாகும். இந்த உபஅணியின் அணிக்கோவை மதிப்பானது a_{ij} –ன் **சிற்றணிக்கோவை**யாகும். இதை M_{ij} எனக்குறிப்பிடுவோம். M_{ij} மற்றும் $(-1)^{i+j}$ –ன் பெருக்கற்பலன் a_{ij} –ன் இணைக்காரணியாகும். இதை A_{ij} என்று குறிப்பிடுவோம். இவ்வாறாக **a_{ij} –ன் இணைக்காரணி $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.**

ஒரு சதுர அணியிலுள்ள உறுப்புகளையும் அவற்றின் இணைகாரணி உறுப்புகளையும் இணைக்கும் ஒரு முக்கிய பண்பானது, அவ்வணியின் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் ஒரு நிரையின் உறுப்புகள் மற்றும் அவற்றின் ஒத்த இணைக் காரணிகளின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதலானது அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பிற்குச் சமமாகும். மேலும் ஏதேனும் ஒரு நிரையின் உறுப்புகள் மற்றும் வேறேதேனும் நிரை உறுப்புகளின் ஒத்த இணைக்காரணிகளின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதல் பூச்சியமாகும். அதாவது,

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

இங்கு $|A|$ என்பது ஒரு சதுர அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பாகும். இதை A –ன் அணிக்கோவை என அழைப்போம். $|A|$ என்பது ஒரு மெய்யெண். இது குறைமதிப்பாகவும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-2) - 1(1-2) + 1(2-2) = -2 + 1 + 0 = -1.$

வரையறை 1.1

A என்பது n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணி என்க. A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு a_{ij} யையும் அதற்கொத்த இணைக்காரணி A_{ij} ஆல் மாற்றக் கிடைப்பது A-ன் இணைக்காரணி அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது. A-ன் இணைக்காரணி அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி A-ன் சேர்ப்பு அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது. இதை adj A எனக்குறிப்பிடுவோம்.

குறிப்பு

இங்கு adj A என்பது n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணி மற்றும் $\text{adj } A = \left[A_{ij}\right]^T = \left[(-1)^{i+j}M_{ij}\right]^T$.

மூன்று வரிசை உடைய ஒரு சதுர அணி A யின் சேர்ப்பு அணியானது,

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

தேற்றம் 1.1

ஒவ்வொரு n வரிசையுடைய சதுர அணி A-விற்கும், $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$.

நிரூபணம்

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ என எடுத்துக்கொள்வோம். இத்தேற்றத்தை ஒரு 3×3 சதுர அணியைக் கொண்டு நிரூபிப்போம். இணைக்காரணிகளின் பண்பின்படி,

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A|, \quad a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0, \quad a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0;$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0, \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0;$$

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0, \quad a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A|.$$

மேலே உள்ள சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$A(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3 \qquad \ldots (1)$$

$$(\text{adj}A)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3, \qquad \ldots (2)$$

இங்கு I_3 என்பது 3 வரிசையுடைய ஒரு அலகு அணி ஆகும்.

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2)-லிருந்து கிடைப்பது, $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$. ■

குறிப்பு

A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியக்கோவை அணி எனில் $|A| = 0$. எனவே

$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = O_n$, இங்கு O_n என்பது n வரிசையுடைய பூச்சிய அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 8(21-16)+6(-18+8)+2(24-14) = 40-60+20 = 0.$$

சேர்ப்பு அணியின் வரையறைப்படி கிடைப்பது

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} (21-16) & -(-18+8) & (24-14) \\ -(-18+8) & (24-4) & -(-32+12) \\ (24-14) & -(-32+12) & (56-36) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}.$$

எனவே,

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & 80-120+40 & 80-120+40 \\ -30+70-40 & -60+140-80 & -60+140-80 \\ 10-40+30 & 20-80+60 & 20-80+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I_3 = |A|I_3,$$

இதேபோல், நமக்குக் கிடைப்பது

$$(\text{adj } A)A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & -30+70-40 & 10-40+30 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I_3 = |A|I_3.$$

எனவே, $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I_3$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

1.2.2 ஒரு சதுர அணியின் நேர்மாறு அணி (Definition of inverse matrix of a square matrix)

ஒரு சதுர அணியின் நேர்மாறு அணியை வரையறுப்போம்.

வரையறை 1.2

A என்பது ஒரு n வரிசையுடைய சதுர அணி என்க. $AB = BA = I_n$ எனுமாறு B என்ற ஒரு சதுர அணி இருப்பின், B ஆனது A-இன் நேர்மாறு அணி எனப்படும்.

தேற்றம் 1.2

ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு இருப்பின் அது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும்.

நிரூபணம்

A என்பது நேர்மாறு காணத்தக்க n வரிசையுடைய ஓர் அணி என்க. முடியுமானால் B மற்றும் C என்ற இரு அணிகள் A-இன் நேர்மாறு எனக்கொள்வோம். வரையறைப்படி $AB = BA = I_n$ மற்றும் $AC = CA = I_n$ ஆகும்.

இச்சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் கிடைப்பது

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

எனவே நேர்மாறு ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும்.

குறியீடு: A-இன் நேர்மாறு A^{-1} எனக்குறிப்பிடப்படுகின்றது.

குறிப்பு

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

தேற்றம் 1.3

A என்பது n வரிசையுடைய சதுர அணி என்க. A^{-1} காண்பதற்குத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையானது, A பூச்சியமற்ற கோவை அணியாக இருக்க வேண்டும்.

நிரூபணம்

A என்ற அணிக்கு A^{-1} காண முடியும் என்க. எனவே $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் விதியைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(I_n) = 1$. எனவே, $|A| = \det(A) \neq 0$.

எனவே A ஆனது பூச்சியமற்றக் கோவை அணியாக இருக்கும்.

மறுதலையாக, A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி என்க. எனவே $|A| \neq 0$.

தேற்றம் 1.1 மூலம் கிடைப்பது $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$.

இச்சமன்பாட்டை $|A|$ ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது, $A\left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right) = \left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)A = I_n$.

இதன் மூலம், $AB = BA = I_n$ எனுமாறு $B = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$ என்ற அணி காண முடிகிறது.

எனவே, A-இன் நேர்மாறு $\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A}$ ஆகும்.

குறிப்புரை

பூச்சியக்கோவை அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு 0. எனவே பூச்சியக் கோவை அணிக்கு நேர்மாறு காண இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்ற பூச்சியமற்றக் கோவை அணிக்கு A^{-1} காண்க.

தீர்வு

முதலில் சேர்ப்பு அணி காண்போம்.

வரையறைப்படி, $\text{adj } A = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

A ஆனது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி, எனவே $|A| = ad - bc \neq 0$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$, என்பதால் $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு காண்க.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ என்க. } |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(7) + (-12) + 3(-1) = -1 \neq 0.$$

எனவே, A^{-1} காண இயலும்.

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -1 \\ 9 & 15 & -1 \\ -10 & -17 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

எனவே, $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{adj} A) = \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 & 10 \\ -12 & -15 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.2.3 நேர்மாறு அணிகளின் பண்புகள் (Properties of inverses of matrices)

நேர்மாறு காணத்தக்க அணிகளின் பண்புகள் சிலவற்றையும் அதில் ஒரு சில பண்புகளையும் நிரூபிக்க உள்ளோம்.

தேற்றம் 1.4

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்

(i) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$ (ii) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ (iii) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$, இங்கு λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி.

நிரூபணம்

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி என்க. எனவே $|A| \neq 0$ மற்றும் A^{-1} காண இயலும். வரையறைப்படி,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n. \qquad \ldots(1)$$

(i) சமன்பாடு (1) மூலம் கிடைப்பது $\left|AA^{-1}\right| = \left|A^{-1}A\right| = \left|I_n\right|$.

அணிக்கோவையின் பெருக்கல் விதியைப் பயன்படுத்த $|A|\left|A^{-1}\right| = \left|I_n\right| = 1$.

எனவே, $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

(ii) சமன்பாடு (1)-இலிருந்து, $\left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = \left(I_n\right)^T$.

நிரை நிரல் அணியின் வரிசைமாற்று விதிப்படி, $\left(A^{-1}\right)^T A^T = A^T\left(A^{-1}\right)^T = I_n$.

எனவே, $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

(iii) λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி ஆதலால் சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = I_n.$$

எனவே, $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

தேற்றம் 1.5 (இடது நீக்கல் விதி)

A, B மற்றும் C என்பன n வரிசையுடைய சதுர அணிகள் என்க. A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி மற்றும் $AB = AC$ எனில், $B = C$.

நிரூபணம்

A ஆனது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி. எனவே A^{-1} காண இயலும் மற்றும் $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. $AB = AC$ -இன் இருபுறமும் முன்புறமாக A^{-1}-ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$. அணிப்பெருக்கலின் சேர்ப்பு மற்றும் அணியின் நேர்மாறு பண்பைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது $B = C$. ■

தேற்றம் 1.6 (வலது நீக்கல் விதி)

A, B மற்றும் C என்பன n வரிசையுடைய சதுர அணிகள் என்க. A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $BA = CA$ எனில், $B = C$.

நிரூபணம்

A ஆனது பூச்சியமற்ற கோவை அணி. எனவே A^{-1} காண இயலும் மற்றும் $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. $BA = CA$ -யின் இருபுறமும் பின்புறமாக A^{-1}-ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது $(BA)A^{-1} = (CA)A^{-1}$. அணிப்பெருக்கலின் சேர்ப்பு மற்றும் அணியின் நேர்மாறு பண்பைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது $B = C$. ■

குறிப்பு

A ஆனது பூச்சியக்கோவை அணி மற்றும் $AB = AC$ அல்லது $BA = CA$, எனில் B -யும் C -யும் சமமாக இருக்க வேண்டியது இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனக்கொள்க.

இங்கு $|A| = 0$ மற்றும் $AB = AC$ ஆனால் $B \neq C$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

தேற்றம் 1.7 (நேர்மாறுகளின் வரிசை மாற்று விதி)

A மற்றும் B என்பன ஒரே வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் AB -யும் பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும் மற்றும் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

நிரூபணம்

A மற்றும் B என்பன n வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் என்க. எனவே $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, எனவே A^{-1} மற்றும் B^{-1} காணமுடியும் மற்றும் அவைகள் n வரிசையுடையனவாக இருக்கும். மேலும் AB மற்றும் $B^{-1}A^{-1}$ -களின் பெருக்கற்பலன்கள் n வரிசையுடையனவாக இருக்கும். அணிக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் விதிப்படி கிடைப்பது $|AB| = |A||B| \neq 0$. எனவே AB -யும் பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும் மற்றும்

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n;$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n.$$

எனவே $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

தேற்றம் 1.8 (இரட்டிப்பு நேர்மாறு விதி)

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் A^{-1}-யும் பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $(A^{-1})^{-1} = A$.

நிரூபணம்

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி என்க. எனவே $|A| \neq 0$ மற்றும் A^{-1} காண இயலும்.

$\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ ஆனது பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும் மற்றும் $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$AA^{-1} = I \Rightarrow \left(AA^{-1}\right)^{-1} = I \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{-1} A^{-1} = I.$ ... (1)

(1)–ன் இருபுறமும் A –ஆல் பின்புறமாக பெருக்கக் கிடைப்பது $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$ ■

தேற்றம் 1.9

A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்

(i) $\left(\text{adj } A\right)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{|A|}A$ (ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj}\left(\text{adj } A\right) = |A|^{n-2} A$ (iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$ λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி

(v) $|\text{adj}(\text{adj}A)| = |A|^{(n-1)^2}$ (vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj}\left(A^T\right)$

நிரூபணம்

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் $|A| \neq 0$. எனவே

(i) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\text{adj } A) \Rightarrow \text{adj } A = |A| A^{-1} \Rightarrow (\text{adj } A)^{-1} = \left(|A| A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A.$

A -விற்கு பதில் A^{-1} -ஐ $\text{adj } A = |A| A^{-1}$ -ல் பிரதியிட, $\text{adj}\left(A^{-1}\right) = \left|A^{-1}\right|\left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A.$

எனவே கிடைப்பது $\left(\text{adj } A\right)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{|A|}A.$

(ii) $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n \Rightarrow \det\left(A(\text{adj } A)\right) = \det\left((\text{adj } A)A\right) = \det\left(|A| I_n\right)$

$$\Rightarrow |A||\text{adj } A| = |A|^n \Rightarrow |\text{adj } A| = |A|^{n-1}.$$

(iii) B என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்

$B(\text{adj } B) = (\text{adj } B)B = |B| I_n$.

$B = \text{adj } A$ எனப்பிரதியிடக் கிடைப்பது, $\left(\text{adj } A\right)\left(\text{adj}\left(\text{adj } A\right)\right) = |\text{adj } A| I_n$.

$|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$ ஆதலால், $\left(\text{adj } A\right)\left(\text{adj}\left(\text{adj } A\right)\right) = |A|^{n-1} I_n$.

இருபுறமும் A ஆல் முன்புறமாக பெருக்கக் கிடைப்பது
$A\left(\left(\text{adj } A\right)\left(\text{adj } \left(\text{adj } A\right)\right)\right) = A\left(|A|^{n-1} I_n\right)$.

அணிப்பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதியைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$\left(A\left(\text{adj } A\right)\right)\left(\text{adj}(\text{adj } A)\right) = A\left(|A|^{n-1} I_n\right)$.

எனவே $\left(|A| I_n\right)\left(\text{adj}\left(\text{adj } A\right)\right) = |A|^{n-1} A$. அதாவது $\text{adj}\left(\text{adj } A\right) = |A|^{n-2} A$.

(iv) A -விற்கு λA என $\text{adj}(A) = |A| A^{-1}$ என்பதில் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$\text{adj}(\lambda A) = |\lambda A|(\lambda A)^{-1} = \lambda^n |A| \dfrac{1}{\lambda} A^{-1} = \lambda^{n-1}|A| A^{-1} = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$.

(v) (iii)–ன்படி $\text{adj}\left(\text{adj } A\right) = |A|^{n-2} A$. இருபுறமும் அணிக்கோவை காணக் கிடைப்பது

$|\text{adj}(\text{adj}A)| = \left||A|^{n-2} A\right| = \left(|A|^{(n-2)}\right)^n |A| = |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2}$.

(vi) A-விற்கு பதில் A^T என $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj } A$ என்பதில் பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$\left(A^T\right)^{-1}=\frac{1}{|A^T|}\text{adj}\left(A^T\right)$. எனவே

$$\text{adj}\left(A^T\right)=|A^T|\left(A^T\right)^{-1}=|A|\left(A^{-1}\right)^T=\left(|A|A^{-1}\right)^T=\left(|A|\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)^T=\left(\text{adj } A\right)^T.$$

குறிப்பு

A என்பது 3 வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் $|A|\neq 0$. தேற்றம் 1.9 (ii)படி கிடைப்பது $|\text{adj}A|=|A|^2$ மற்றும் $|\text{adj } A|$ ஆனது மிகை. எனவே $|A|=\pm\sqrt{|\text{adj } A|}$.

எனவே $A^{-1}=\pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj } A.$

மேலும் தேற்றம் 1.9 (iii) இன் படி கிடைப்பது, $A=\frac{1}{|A|}\text{adj}\left(\text{adj } A\right)$.

எனவே, A ஆனது 3 படி வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை எனில் , $A=\pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}\left(\text{adj } A\right)$.

எடுத்துக்காட்டு 1.4

A என்பது ஒற்றை வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் $|\text{adj } A|$ என்பது மிகை என நிறுவுக.

தீர்வு

A என்பது $2m+1$ வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி என்க. இங்கு $m=0,1,2,\cdots$ எனவே $|A|\neq 0$ மற்றும் தேற்றம் 1.9 (ii) இன் படி கிடைப்பது $|\text{adj } A|=|A|^{(2m+1)-1}=|A|^{2m}$.

$|A|^{2m}$ என்பது எப்பொழுதும் மிகை, எனவே $|\text{adj } A|$ ஆனது மிகை.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$\text{adj}(A)=\begin{bmatrix}7 & 7 & -7\\ -1 & 11 & 7\\ 11 & 5 & 7\end{bmatrix}$ எனில், A-ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$|\text{adj}(A)|=\begin{vmatrix}7 & 7 & -7\\ -1 & 11 & 7\\ 11 & 5 & 7\end{vmatrix}=7(77-35)-7(-7-77)-7(-5-121)=1764>0.$$

எனவே

$$A=\pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}\left(\text{adj } A\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{1764}}\begin{bmatrix}+(77-35) & -(-7-77) & +(-5-121)\\ -(49+35) & +(49+77) & -(35-77)\\ +(49+77) & -(49-7) & +(77+7)\end{bmatrix}^T$$

$$=\pm\frac{1}{42}\begin{bmatrix}42 & 84 & -126\\ -84 & 126 & 42\\ 126 & -42 & 84\end{bmatrix}^T=\pm\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$, எனில் A^{-1}-ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$|\text{adj } A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9\,.$$

எனவே $$A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj}(A)|}}\text{adj}(A) = \pm\frac{1}{\sqrt{9}}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.7

A என்பது சமச்சீர் அணி எனில் adj A சமச்சீர் அணி என நிறுவுக.

தீர்வு

A என்பது சமச்சீர் அணி என்க. எனவே $A^T = A$ மற்றும் தேற்றம் 1.9 (vi) இன் படி கிடைப்பது $\text{adj}\left(A^T\right) = \left(\text{adj } A\right)^T \Rightarrow \text{adj } A = \left(\text{adj } A\right)^T \Rightarrow \text{adj } A$ ஆனது சமச்சீராகும்.

தேற்றம் 1.10

A மற்றும் B என்பன n வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில்

$$\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A).$$

நிரூபணம்

A-விற்கு பதில் AB என $\text{adj}(A) = |A|A^{-1}$-ல் பிரதியிட

$$\text{adj}(AB) = |AB|(AB)^{-1} = \left(|B|B^{-1}\right)\left(|A|A^{-1}\right) = \text{adj}(B)\,\text{adj}(A)\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ எனில் $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ என்ற பண்பை சரிபார்க்க.

தீர்வு

$$|A| = (2)(7)-(9)(1) = 14-9 = 5\,.\text{ எனவே, } A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

$$\text{எனவே, } \left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \ldots (1)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}.\text{ எனவே } \left|A^T\right| = (2)(7)-(1)(9) = 5\,.$$

$$\left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2)–லிருந்து கிடைப்பது, $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$. எனவே கொடுத்துள்ள பண்பு சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$A=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ எனக்கொண்டு $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$$AB = \begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0 & 0+3\\ -2+0 & -3-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -2 & -7\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{(0+6)}\begin{bmatrix}-7 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-7 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix} \qquad \ldots (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(0+3)}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(2-0)}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-7 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}. \qquad \ldots (2)$$

அணிகள் (1) மற்றும் (2) சமம். எனவே $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ எனில், $A^2+xA+yI_2=O_2$ எனுமாறு x மற்றும் y-ஐ காண்க. இதிலிருந்து A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$A^2 = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 27\\ 18 & 31\end{bmatrix},$$

$$A^2+xA+yI_2=O_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}22 & 27\\ 18 & 31\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}22+4x+y & 27+3x\\ 18+2x & 31+5x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

இதிலிருந்து நமக்குக் கிடைப்பவை $22+4x+y=0, 31+5x+y=0, 27+3x=0$ மற்றும் $18+2x=0$.

எனவே $x=-9$ மற்றும் $y=14$. பின்பு நமக்குக் கிடைப்பது $A^2-9A+14I_2=O_2$.

இச்சமன்பாட்டின் இருபுறமும் A^{-1}-ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது $A-9I_2+14A^{-1}=O_2$.

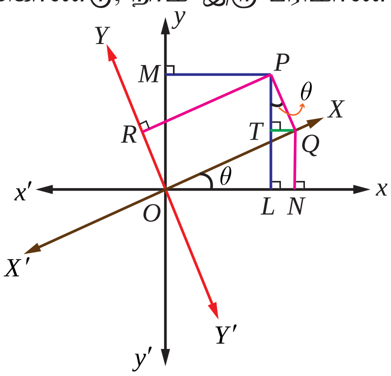
இதிலிருந்து கிடைப்பது

$$A^{-1}=\frac{1}{14}(9I_2-A)=\frac{1}{14}\left(9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}.$$

1.2.4 வடிவக் கணிதத்தில் அணிகளின் பயன்பாடுகள் (Application of matrices to Geometry)

வடிவக் கணிதத்தில், அணிகளின் பயன்பாடுகளில் ஒரு சிறப்பு வகையான பூச்சியமற்றக் கோவை அணிகள் பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. எளிமையைக் கருத்தில் கொண்டு, நாம் இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவக் கணிதத்தை மட்டும் இங்கு கருதுவோம்.

ஆதியை O எனவும் $x'Ox$ மற்றும் $y'Oy$ என்பவற்றை முறையே x-அச்சாகவும் y-அச்சாகவும் கொள்வோம். ஆய தளத்தில் P என்பது (x, y) ஆயத்தொலைவுகளாகக் கொண்ட புள்ளி என்க. x-அச்சையும் y-அச்சையும் ஆதியைப் பொருத்து θ கோணத்திற்கு படத்தில் உள்ளவாறு சுழற்றப்படுகிறது என்க. $X'OX$ மற்றும் $Y'OY$ என்பன முறையே புதிய X-அச்சு மற்றும் Y-அச்சு என்க. (X, Y) என்பது புதிய அச்சில் P-ன் ஆயத்தொலைவுகள் என்க. படம் 1.1–லிருந்து நாம் பெறுவது,



படம் 1.1

$$x = OL = ON - LN = X\cos\theta - QT = X\cos\theta - Y\sin\theta,$$

$$y = PL = PT + TL = QN + PT = X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

இச்சமன்பாடுகள் ஓர் ஆய அச்சுத் தொலைவு முறையினை மற்றொரு ஆய அச்சுத் தொலைவு முறையாக மாற்ற வழி வகுக்கின்றன. மேற்காணும் இரு சமன்பாடுகளை பின்வரும் அணி வடிவமைப்பில் எழுதலாம்.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

$W = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ என்க. பின்பு $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = W\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ மற்றும் $|W| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ஆகும்.

எனவே, W-க்கு நேர்மாறு அணி உள்ளது மற்றும் $W^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. இங்கு $W^{-1} = W^T$ என்றிருப்பதைக் கவனிக்கவும். நேரெதிர் உருமாற்றத்தினைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = W^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}.$$

இவ்வாறாக $X = x\cos\theta - y\sin\theta$, $Y = x\sin\theta + y\cos\theta$

என்ற உருமாற்றத்தினைப் பெறுகிறோம். இந்த உருமாற்றம் **கணினி வரைபட நுட்பத்தில்** பயன்படுத்தப்படுகிறது. இப்பயன்பாட்டினை $W = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ என்ற அணி நிர்ணயிக்கின்றது. அணி W ஆனது $W^{-1} = W^T$; அதாவது $WW^T = W^TW = I$ என்ற சிறப்புப் பண்பினைப் பெற்றுள்ளதை அறிக.

வரையறை 1.3

ஒரு சதுர அணி A-க்கு $AA^T = A^TA = I$ எனில், A ஆனது **செங்குத்து** அணி எனப்படும்.

குறிப்பு

ஒரு அணி A என்பது **செங்குத்து** அணியாக இருப்பதற்குத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாதெனில் A பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகவும் மற்றும் $A^{-1} = A^T$ எனவும் இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ என்பது செங்குத்து அணி என நிறுவுக.

தீர்வு

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. பின்பு, $A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

எனவே

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

இதேபோல் $A^T A = I_2$. எனவே $AA^T = A^T A = I_2 \Rightarrow$ A ஆனது செங்குத்து அணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ என்பது செங்குத்து அணி எனில் a, b மற்றும் c களின் மதிப்பைக் காண்க.

இதிலிருந்து A^{-1}-ஐக் காண்க.

தீர்வு

A என்பது செங்குத்து அணி. எனவே, $AA^T = A^T A = I_3$. எனவே நாம் பெறுவது

$$AA^T = I_3 \Rightarrow \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & b & 2 \\ -3 & -2 & c \\ a & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 45 + a^2 & 6b + 6 + 6a & 12 - 3c + 3a \\ 6b + 6 + 6a & b^2 + 40 & 2b - 2c + 18 \\ 12 - 3c + 3a & 2b - 2c + 18 & c^2 + 13 \end{bmatrix} = 49\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 45 + a^2 = 49 \\ b^2 + 40 = 49 \\ c^2 + 13 = 49 \\ 6b + 6 + 6a = 0 \\ 12 - 3c + 3a = 0 \\ 2b - 2c + 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 4, b^2 = 9, c^2 = 36, \\ a + b = -1, a - c = -4, b - c = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2, b = -3, c = 6 .$$

எனவே நமக்குக் கிடைப்பது, $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^{-1} = A^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

1.2.5 சங்கேத மொழியியலில் அணிகளின் பயன்பாடுகள் (Application of matrices to Cryptography)

பூச்சியமற்ற அணிகளின் ஒரு முக்கியமான பயன்பாடு ***சங்கேத மொழியியலில்*** (Cryptography) உள்ளது. சங்கேத மொழியியல் என்பது இரு நபர்களிடையே மற்றவர்களுக்குப் புரியாத வண்ணம் நடைபெறும் தகவல் பரிமாற்றமாகும். சங்கேத மொழியாக்கமும் மொழி மாற்றமும் என இரு காரணிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டது. ***சங்கேத மொழியாக்கம்*** (Encryption) என்பது அனைவருக்கும் புரியும் மொழியில் உள்ள தகவலை எளிதில் புரியாத வண்ணம் (சங்கேத மொழி) ஆக்குதலாகும். மாறாக, சங்கேத மொழியாக்கப்பட்ட தகவலை மீண்டும் அனைவருக்கும் புரியும் மொழியில் மாற்றுவது ***மொழிமாற்றம்*** (Decryption) ஆகும். சங்கேத மொழியாக்கமும் மற்றும் மொழி மாற்றமும் தகவலை அனுப்புபவருக்கும் பெறுபவருக்கும் இடையே ஒரு இரகசிய முறை தேவைப்படுகிறது. இந்த இரகசிய முறை சங்கேத விளக்கக் குறிப்பு எனப்படும்.

இந்த இரகசியத்தை ***சாவி*** என்பார்கள். தகவலை அனுப்புபவர் சங்கேத மொழியாக்கம் செய்ய பூச்சியமற்ற அணியைப் பயன்படுத்துவது ஒரு முறையாகும். தகவலைப் பெறுபவர் தகவலை மொழிமாற்றம் செய்ய நேர்மாறு அணியைப் பயன்படுத்துகிறார். சங்கேத மொழியாக்கத்திற்குப் பயன்படுத்தப்படும் அணி ***சங்கேத மொழியாக்க அணி*** (Encoding matrix) எனவும் மொழிமாற்றம் செய்யப் பயன்படும் அணி ***சங்கேத மொழி மாற்ற அணி*** (Decoding matrix) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

சங்கேத மொழியாக்கலையும் சங்கேத மொழிமாற்றலையும் விளக்க எடுத்துக்காட்டு ஒன்றினைக் காண்போம். அனுப்புபவரும் பெறுபவரும் மூலத் தகவல்களுக்கு ஆங்கில எழுத்துகள் A to Z மட்டும் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம்.

ஆங்கில எழுத்துகளை முறையே 1-26 எண்களுக்கு ஒதுக்கிடுவதாகவும், வெற்றிடத்தைக் குறிக்க 0 பயன்படுத்துவதாகவும் கொள்க. அனுப்புபவர் தனது சுயவிருப்பத்தின் அடிப்படையில் ஒரு மூவரிசை பூச்சியமற்ற கோவை அணியை பிந்தைய பெருக்கலுக்காக ஒரு சங்கேத மொழி சாவியாக பயன்படுத்துகிறார். அனுப்பியவர் பயன்படுத்திய அவ்வணியின் நேர்மாற்று அணியின் பிந்தையப் பெருக்கலாகப் பெறுபவர் பயன்படுத்துகிறார்.

சங்கேத மொழியாக்குதலுக்காகப் பயன்படுத்தப்படும் அணி

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

அனுப்பப்படும் செய்தி **"WELCOME"** என்க. மூவரிசை கொண்ட பூச்சியமற்ற சதுர அணியைப் பிந்தையப் பெருக்கலுக்காகப் பயன்படுத்தப்படுவதால் அனுப்பப்படும் செய்தி 3 அளவுள்ள துண்டுகளாக **(WEL), (COM), (E)**, என பிரிக்கப்பட்டு 1×3 வரிசையுள்ள நிரையணிகளாக,

[23 5 12],[3 15 13],[5 0 0] என மாற்றப்படுகின்றது.

இறுதியாகப் பெறப்பட்ட நிரையணியில் இரு பூச்சியங்களை நாம் சேர்த்துள்ளதைக் கவனிக்கவும். 5 –ஐ முதல் உறுப்பாகக் கொண்ட ஒரு நிரையணிப் பெறவேண்டும் என்பதே இதன் காரணமாகும்.

ஒவ்வொரு நிரையணியுடன் சங்கேத மொழியாக்கு அணியால் பிந்தையப் பெருக்கல் செய்ய செய்தியினைப் பின்வருமாறு சங்கேத நிரையணிகளாக குறிமாற்றம் நிகழ்கிறது:

சங்கேத மொழியாக்கப்படாத நிரையணி	சங்கேத மொழியாக்கும் அணி		சங்கேத மொழியாக்கப்பட்ட நிரையணி
$\begin{bmatrix}23 & 5 & 12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$	=	$[45 \ -28 \ \ 23]$;
$\begin{bmatrix}3 & 15 & 13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$	=	$[46 \ -18 \ \ 3]$;
$\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$	=	$[5 \ \ -5 \ \ 5]$.

எனவே சங்கேத மொழியாக்கப்பட்ட செய்தி $[45 \ -28 \ \ 23]$ $[46 \ -18 \ \ 3]$ $[5 \ \ -5 \ \ 5]$ ஆகும்.

பெறுபவர் நேர்மாறு சாவியால் (A-ன் நேர்மாறின் பிந்தையப் பெருக்கலால்) சங்கேத மொழிமாற்றம் செய்கின்றார்.

சங்கேத மொழிமாற்றத்திற்கான அணி

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

பெறுபவர் சங்கேத மொழியாக்கப்பட்டச் செய்தியினைப் பின்வருமாறு சங்கேத மொழிமாற்றம் செய்கிறார்:

சங்கேத மொழியாக்கப்பட்ட நிரையணி	மொழி மாற்றத்தின் அணி		சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்யப்பட்ட நிரை
$\begin{bmatrix}45 & -28 & 23\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$	=	$[23 \ \ 5 \ \ 12]$;
$[46 \ -18 \ \ 3]$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix}3 & 15 & 13\end{bmatrix}$;
$[5 \ \ -5 \ \ 5]$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்யப்பட்ட நிரை அணிகளின் வரிசை பின்வருமாறு

$\begin{bmatrix}23 & 5 & 12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 15 & 13\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

எனவே, 1 - 26 க்குச் சரியான ஆங்கில எழுத்துகளால் பொருத்த, பெறுபவர் தாம் பெற்ற சங்கேத செய்தியினை **"WELCOME"** எனப் படிக்கிறார்.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் அணிகளுக்குச் சேர்ப்பு அணி காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

2. பின்வரும் அணிகளுக்கு நேர்மாறு (காண முடியுமெனில்) நேர்மாறு காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

3. $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ எனில், $\left[F(\alpha)\right]^{-1} = F(-\alpha)$ எனக்காட்டுக.

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 3A - 7I_2 = O_2$ எனக்காட்டுக. இதன் மூலம் A^{-1} காண்க.

5. $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ எனில், $A^{-1} = A^T$ என நிறுவுக.

6. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_2$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார்க்க .

8. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் A -ஐ காண்க.

9. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} -ஐ காண்க.

10. $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனில் $\text{adj}(\text{adj}(A))$ -ஐ காண்க.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ எனில் $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ எனக்காட்டுக.

12. $A\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ எனில் A -ஐ காண்க.

13. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ மற்றும் $AXB=C$ எனில் X என்ற அணியைக் காண்க.

14. $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ எனில் $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-3I\right)$ எனக்காட்டுக.

15. $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ என்ற அணியை பிந்தையப் பெருக்கல் சங்கேத மொழியாக்க அணியாகக் கொண்டு $\begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20 & 4\end{bmatrix}$ என்று பெறப்பட்டச் செய்தியை $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ –ன் நேர்மாறு அணியின் பிந்தையப் பெருக்கற் சாவியாகக் கொண்டு சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்க. இங்கு ஆங்கில எழுத்துகள் $A-Z$ –க்கு முறையே எண்கள் 1-26ஐயும், காலியிடத்திற்கு எண் 0ஐயும் பொருத்தி சங்கேத மொழியாக்கம் மற்றும் மொழிமாற்றம் செய்க.

1.3 ஓர் அணியின் மீதான தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் (Elementary Transformations of a Matrix)

தொடக்கநிலை நிரை செயலிகள் மற்றும் தொடக்கநிலை நிரல் செயலிகள் என்றழைக்கப்படும் சில செயலிகள் (operations) மேற்கொள்வதன் மூலம் ஓர் அணியை பிறிதோர் அணியாக மாற்றலாம்.

1.3.1 தொடக்கநிலை நிரை மற்றும் நிரல் செயலிகள் (Elementary row and column operations)

ஓர் அணியில் தொடக்கநிலை நிரை (நிரல்) செயலிகளாவன:

(i) ஏதேனும் இரு நிரைகளை (நிரல்களை) பரிமாற்றம் செய்தல்.

(ii) ஓர் அணியில் உள்ள ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலியால் பெருக்கி அதே நிரையில் திரும்பப் பிரதியிடல்.

(iii) ஓர் அணியில் உள்ள ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடன் ஒரு பூச்சியமற்ற நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒத்த உறுப்பின் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலி பெருக்கற் பலனைக் கூட்டுதல்.

ஒரு அணியின் தொடக்கநிலை நிரை செயலிகள் மற்றும் நிரல் செயலிகளை தொடக்கநிலை உருமாற்றம் என்கிறோம்.

பின்வருவன ஓர் அணியில் நாம் பயன்படுத்தும் தொடக்கநிலை நிரை உருமாற்றங்களின் குறியீடுகள் ஆகும்.

(i) i ஆவது மற்றும் j ஆவது நிரைகளை பரிமாற்றம் செய்யப்படுவதை $R_i \leftrightarrow R_j$ எனக்குறிக்கின்றோம்.

(ii) i ஆவது நிரையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் λ என்ற பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கப்படுவதை $R_i \to \lambda R_i$ என குறிக்கின்றோம்.

(iii) i ஆவது நிரையுடன் j ஆவது நிரையை பூச்சியமற்ற மாறிலி λ –ஆல் பெருக்கிக் கூட்டுவதை $R_i \to R_i + \lambda R_j$ எனக்குறிக்கின்றோம்.

இதேபோன்ற குறியீடுகளைத் தொடக்கநிலை நிரல் மாற்றங்களுக்கும் பயன்படுத்துகிறோம்.

வரையறை 1.4

A, B என்ற இரு ஒரே வரிசையுடைய அணிகளில் ஏதாவது ஓர் அணியை தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் மூலம் மற்ற அணியாகப் பெற முடியுமெனில், Aயும் Bயும் சமான அணிகள் (equivalent matrices) என்றழைக்கப்படும். A ஆனது B –க்குச் சமான அணி என்பதை $A \sim B$ என்று குறியீட்டில் எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -4\end{bmatrix}$ என்ற அணியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

A என்ற அணியில் $R_2 \to R_2 + R_1$ என்ற தொடக்கநிலை நிரை செயலி மூலம் கிடைக்கும் அணியை B என்க. B –ன் இரண்டாவது நிரையானது A –ன் இரண்டாவது மற்றும் முதல் நிரைகளின் கூடுதலாகும்.

எனவே $A \sim B = \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 1 & -1 & -4\end{bmatrix}$.

மேலே உள்ள தொடக்கநிலை நிரை உருமாற்றத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -4\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 1 & -1 & -4\end{bmatrix}.$$

குறிப்பு

கொடுத்துள்ள அணியை தொடக்கநிலை உருமாற்றம் செய்து பெறும் அணியானது கொடுத்துள்ள அணிக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

1.3.2 நிரை-ஏறுபடி வடிவம் (Row-Echelon form)

தொடக்கநிலை நிரை உருமாற்றங்களைப் பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்ட அணியினை நிரை–ஏறுபடி வடிவம் எனும் எளிதான வடிவில் மாற்றம் செய்ய முடியும். இவ்வடிவத்தில் அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியங்களாகப் பெற்ற நிரைகள் இருக்கலாம். அவ்வாறு அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியமாக உள்ள நிரையினை பூச்சிய நிரை என்கிறோம். ஒரு நிரையில் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு பூச்சியமற்றதெனில், அந்நிரையினை அபூச்சிய நிரை (non-zero row) என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக $\begin{bmatrix}6 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ என்ற அணியில் R_1 மற்றும் R_2 அபூச்சிய நிரைகளாகும். R_3 ஆனது பூச்சிய நிரையாகும்.

வரையறை 1.5

E என்ற பூச்சியமற்ற அணியானது ஏறுபடி வடிவில் இருக்க வேண்டுமெனில்,

(i) E –ன் பூச்சிய நிரைகள் அனைத்தும் E –ன் அபூச்சிய நிரைகளுக்கு கீழ் இருக்க வேண்டும்.

(ii) E –ல் ஏதேனும் i ஆவது நிரையில் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது j ஆவது நிரலில் அமைந்தால் i ஆவது நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்குக் கீழ் வரும் j ஆவது நிரலில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியங்களாக இருக்க வேண்டும்.

(iii) i ஆவது நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது $(i+1)$ ஆவது நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு இடதுபுறத்தில் அமைய வேண்டும்.

குறிப்பு

ஓர் அணியில் அனைத்து பூச்சிய நிரைகளும் அணியின் அடிப்பகுதி நிரைகளாக அமைந்து, எந்தவொரு கீழ்வரிசை–நிரையின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது அந்நிரைக்கு மேலாக அமைந்த நிரைகள் ஒவ்வொன்றின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு வலதுபுறமாக அமைந்தால் அவ்வணியானது நிரை–ஏறுபடி வடிவில் இருக்கும்.

பின்வரும் அணிகள் நிரை-ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளன : (i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

அணி (i)-ஐ கருத்தில் கொள்வோம். கடைசி நிரையிலிருந்து ஒவ்வொரு நிரையாக மேல் நிரைக்குச் செல்வோம். மூன்றாவது நிரையானது அபூச்சிய நிரையாகும். இரண்டாவது நிரையில் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது மூன்றாவது நிரலில் அமைந்துள்ளது. மேலும் இந்த உறுப்பானது, முதல் நிரையில் இரண்டாவது நிரலிலுள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு வலதுபுறத்தில் உள்ளது. எனவே இவ்வணியானது ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளது.

அணி (ii)-ஐ கருத்தில் கொள்வோம். கடைசி நிரையிலிருந்து ஒவ்வொரு நிரையாக மேல் நிரைக்குச் செல்வோம். எல்லா நிரைகளும் அபூச்சிய நிரைகளாகும். மூன்றாவது நிரையில் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது நான்காவது நிரலில் உள்ளது. இப்பூச்சியமற்ற உறுப்பானது இரண்டாவது நிரையில் மூன்றாவது நிரலில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு வலதுபுறத்தில் உள்ளது. இரண்டாவது நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சிய உறுப்பானது மூன்றாவது நிரலில் உள்ளது. இப்பூச்சியமற்ற உறுப்பானது முதல் நிரையில் மற்றும் முதல் நிரலில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு வலதுபுறத்தில் உள்ளது. எனவே இது ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளது.

பின்வரும் அணிகள் நிரை-ஏறுபடி வடிவத்தில் இல்லை :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

அணி (i)-ஐ கருதுவோம். மூன்றாவது நிரையில் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது இரண்டாவது நிரலில் உள்ளது மற்றும் இப்பூச்சியமற்ற உறுப்பானது இரண்டாவது நிரையில் மூன்றாவது நிரலில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு இடதுபுறத்தில் உள்ளது. எனவே இந்த அணி ஏறுபடி வடிவத்தில் இல்லை.

அணி (ii)-ஐ கருதுவோம். இரண்டாவது நிரையில் முதல் நிரலில் உள்ள பூச்சியமற்ற உறுப்பானது முதல் நிரையில் இரண்டாவது நிரலில் உள்ள பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு இடதுபுறத்தில் உள்ளது. எனவே இந்த அணி ஏறுபடி வடிவத்தில் இல்லை.

$\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ என்ற அணியை ஏறுபடிவ அணியாக சுருக்கும் முறை

Method to reduce a matrix $\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ to a row-echelon form

படி 1

முதல் நிரையினை ஆய்வு செய்க. முதல் நிரையானது பூச்சிய நிரை எனில் முதல் நிரையை கீழ் உள்ள அபூச்சிய நிரையுடன் இடமாற்ற வேண்டும். $a_{11} \neq 0$ எனில் படி 2-க்குச் செல்ல வேண்டும். அப்படி இல்லையெனில் முதல் நிரையை முதல் நிரலில் பூச்சியமற்ற உறுப்பாக உள்ள கீழ் நிரையுடன் இடமாற்ற வேண்டும். முதல் நிரைக்கு கீழே உள்ள நிரையில், முதல் நிரலில் பூச்சியமற்ற உறுப்பு இல்லை எனில் a_{12} பூச்சியமற்ற உறுப்பா என ஆராய வேண்டும். a_{12} ஆனது பூச்சியமற்ற உறுப்பு எனில் படி 2 -ஐ பயன்படுத்த வேண்டும். அப்படி இல்லையெனில் முதல் நிரையை அதற்கு கீழே உள்ள ஏதேனும் ஒரு நிரலில் உள்ள இரண்டாவது நிரலில் பூச்சியமற்ற உறுப்பாக உள்ள நிரையுடன் இடமாற்ற வேண்டும். முதல் நிரைக்கு கீழே வரும் எந்த ஒரு நிரையிலும் இரண்டாவது நிரலில் பூச்சியமற்ற உறுப்பு இல்லை எனில் a_{13} பூச்சியமற்றதா என ஆராய வேண்டும். இதே முறையைப் பின்பற்றி முதல் நிரையில் பூச்சியமற்ற உறுப்பு கிடைக்கும் வரை தொடர வேண்டும். இம்முறையினை **சுழுமுனையாக்கல்** (pivoting) என்போம். முதல் நிரையில் உள்ள முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பு முதல் **நிரையின் சுழுமுனை** (pivot) எனப்படும்.

படி 2

முதல் நிரையிலுள்ள சுழுமுனைக்குக் கீழ்வரும் அனைத்து உறுப்புகளையும் தொடக்கநிலை உறுமாற்றங்கள் கொண்டு பூச்சியமாக்க வேண்டும்.

படி 3

அடுத்த நிரையினை முதல் நிரையாகக் கொண்டு படி : 1 மற்றும் படி :2 இவற்றை அதன் கீழ் உள்ள நிரைகளைக் கொண்டு செயற்படுத்தவும். அனைத்து நிரைகளும் முடியும் வரை இச்செயல்முறை மீண்டும் மீண்டும் செயற்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை நிரை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றுக.

தீர்வு

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1,} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

குறிப்பு

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 / 8} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

இதுவும் கொடுத்துள்ள அணிக்கு நிரை–ஏறுபடி வடிவமாகும்.எனவே நிரை–ஏறுபடி வடிவமானது ஒருமை தன்மையற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை நிரை–ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றுக.

தீர்வு

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{2}{3}R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 3R_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 48 \end{bmatrix}.$$

■

1.3.3 ஓர் அணியின் தரம் (Rank of a Matrix)

ஓர் அணியின் அணித்தரத்தை வரையறுக்க உபஅணி மற்றும் சிற்றணிக்கோவை பற்றி தெரிந்திருத்தல் அவசியமாகும்.

A என்பது ஏதேனும் ஓர் அணி என்க. இதிலிருந்து சில நிரைகளையும், நிரல்களையும் நீக்குவதால் கிடைக்கும் அணி A-இன் ஓர் உபஅணியாகும். ஓர் அணியே தனக்குத்தானே உபஅணியாகும். ஏனெனில் அவ்வணியிலிருந்து பூச்சிய எண்ணிக்கை நிரைகளையும் மற்றும் பூச்சிய எண்ணிக்கை நிரல்களையும் நீக்குவதால் கிடைக்கப் பெறுவதாகும். ஒரு சதுர உபஅணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு சிற்றணிக்கோவையாகும்.

வரையறை 1.6

ஓர் அணி A-இன் தரம் என்பது அதன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசையாகும். A-இன் தரத்தை $\rho(A)$ எனக்குறிப்பிடுவர். ஒரு பூச்சிய அணியின் தரம் ஆனது பூச்சியம் என வரையறுக்கப்படும்.

குறிப்பு

(i) ஓர் அணியில் குறைந்தது ஒரு பூச்சியமற்ற உறுப்பு இருப்பின் $\rho(A) \geq 1$.

(ii) அலகு அணி I_n -ன் தரம் n ஆகும்.

(iii) A என்ற அணியின் தரம் r எனில் A-ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு r வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையாவது இடம்பெற்றிருத்தல் வேண்டும் மற்றும் A-ன் ஒவ்வொரு $r+1$ வரிசை மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியங்களாகியிருத்தல் வேண்டும்.

(iv) A-ன் வரிசை $m \times n$ எனில் $\rho(A) \leq \min\{m, n\} = m, n$ களில் குறைந்த எண்.

(v) n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு காணத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\rho(A) = n$.

எடுத்துக்காட்டு 1.15

பின்வரும் அணிகளுக்கு அணித்தரம் காண்க : (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

தீர்வு

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ என்க. A ஆனது 3×3 வரிசையுடைய அணி. எனவே $\rho(A) \leq \min\{3, 3\} = 3$.

உச்ச சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 3.

A-விற்கு ஒரே ஒரு 3 வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவைதான் உண்டு. அதன் மதிப்பு

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(6-6) - 2(6-6) + 5(3-3) = 0.$$ எனவே, $\rho(A) < 3$.

அடுத்து 2 வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவை தேர்வு செய்வோம். அதில் ஒரு 2 வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவை $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$. எனவே $\rho(A) = 2$.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்க. A ஆனது 3×4 வரிசையுடைய அணி.

எனவே $\rho(A) \leq \min\{3, 4\} = 3$.

உச்ச சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 3. அவை

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0\,; \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

எனவே, $\rho(A) < 3$ அடுத்து 2–ஆம் வரிசையின் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவை ஏதேனும் ஒன்று A உள்ளதா எனப்பார்ப்போம். இது சாத்தியமாகும்,

ஏனெனில் $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4+9 = 5 \neq 0$.

எனவே, $\rho(A) = 2$.

குறிப்புரை

ஓர் அணியின் வரிசை அதிகமாக இருக்கும் பட்சத்தில், பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவைகளின் உச்ச வரிசை தேடி அணியின் தரம் காண்பது எளிதல்ல. அணித்தரம் காண்பதற்கு வேறு ஒரு எளிமையான முறை உள்ளது. இம்முறையில் அணியின் வரிசை அதிகமாக இருந்தாலும் அணித்தரம் காண்பது எளியது. இம்முறையானது ஒரு அணியின் நிரை–ஏறுபடி வடிவத்திற்கு சமமான அணியின் அணித்தரம் காண்பதாகும். ஓர் அணியானது நிரை–ஏறுபடி வடிவில் இருப்பின் அதன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளுக்கு கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியங்களாகும். (இது $a_{11}, a_{12}, \cdots$ என்ற நிலைகளில் உள்ள மூலைவிட்ட உறுப்புக்களை சேர்க்கும் கோடாகும்).

எனவே ஒரு சிற்றணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியம் அல்லது பூச்சியம் இல்லை எனக் காண்பது எளியது. இதன் மூலம் அணித்தரம் காண்பது எளியது.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

பின்வரும் ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள அணிகளுக்கு அணித்தரம் காண்க :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

தீர்வு

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்க. A –ஆனது 3×3 வரிசையுடைய அணி மற்றும் $\rho(A) \leq 3$

மூன்றாம் வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவை $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(1) = 6 \neq 0$.

எனவே, $\rho(A) = 3$.

எனவே இங்கு மூன்று அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன என்பதைக் கூர்ந்து நோக்குக.

(ii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்க. A ஆனது 3×3 வரிசையுடைய அணி எனவே $\rho(A) \leq 3$.

மூன்றாம் வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவை $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(5)(0) = 0$.

எனவே $\rho(A) \le 2$.

பல இரண்டாம் வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவைகள் உள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) = -10 \ne 0$. எனவே, $\rho(A) = 2$.

இங்கு இரண்டு அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன என்பதை நோக்குக. மூன்றாவது நிரை பூச்சிய நிரையாகும்.

(iii) $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்க. A ஆனது 4×3 வரிசையுடைய அணியாகும் மற்றும் $\rho(A) \le 3$.

அனைத்து மூன்றாம் வரிசையுடைய சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்பு 0 ஆகும். எனவே $\rho(A) < 3$.

கடைசி இரு நிரைகள் பூச்சிய நிரைகளாகும். நிறைய இரண்டாம் வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவைகள் உள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (6)(2) = 12 \ne 0$. எனவே, $\rho(A) = 2$.

இரண்டு அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன என்பதை நோக்குக. மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது நிரைகள் பூச்சிய நிரைகளாகும்.

மேல் உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து, ஏறுபடி வடிவிலுள்ள ஓர் அணியின் அணித்தரமானது அபூச்சிய நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் எனக்காண்கிறோம். இதனைப் பின்வரும் தேற்றமாக நிரூபணமில்லாமல் கூறுவோம். ■

தேற்றம் 1.11

நிரை ஏறுபடி வடிவிலுள்ள ஓர் அணியின் அணித்தரம் அபூச்சிய நிரைகளின் எண்ணிக்கையாகும்.

இதனைப் பின்வரும் தேற்றமாக நிரூபணமில்லாமல் கூறுவோம்.

தேற்றம் 1.12

அபூச்சிய அணியின் தரமானது அதன் ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ள அபூச்சிய நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றி அணித்தரம் காண்க.

தீர்வு

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$$ என்க. தொடக்க நிலை நிரை செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$A\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & -6 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

கடைசி சமான அணி ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளது மற்றும் இரண்டு அபூச்சிய நிரைகளைப் பெற்றுள்ளது. எனவே $\rho(A)=2$.

எடுத்துக்காட்டு 1.18

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & 3\\ -3 & 4 & -2 & -1\\ 6 & 2 & -1 & 7\end{bmatrix}$$ என்ற அணியை ஏறுபடி வடிவில் மாற்றி அணித்தரம் காண்க.

தீர்வு

கொடுத்துள்ள அணியை A என்க. தொடக்க நிலை நிரைச் செயலிகளைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & 3\\ -3 & 4 & -2 & -1\\ 6 & 2 & -1 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to 2R_2}\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & 3\\ -6 & 8 & -4 & -2\\ 6 & 2 & -1 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2+3R_1}\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 8 & 7\\ 0 & 8 & -13 & -2\end{bmatrix}.$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-4R_2}\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 8 & 7\\ 0 & 0 & -45 & -30\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3\div(-15)}\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 8 & 7\\ 0 & 0 & 3 & 2\end{bmatrix}.$$

கடைசி சமான அணியானது நிரை–ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது மற்றும் மூன்று அபூச்சிய நிரைகளை உடையது. எனவே, $\rho(A)=3$.

தொடக்க நிலை நிரைச் செயலிகள் ஓர் அணியின் மீது செயல்படுத்துவது என்பது அந்த அணியை முன்புறமாக ஒரு சிறப்பு வகை (special class) அணிகளால் பெருக்குவதாகும். அந்த அணிகள் தொடக்க நிலை அணிகள் (Elementary matrices) எனப்படும்.

வரையறை 1.7

ஓர் ***அலகு அணியில்*** ஒரே ஒரு தொடக்க நிலை உருமாற்றத்தினால் கிடைக்கும் அணியை தொடக்க நிலை அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்புரை

மூன்று வரிசையுடைய அணிகளுக்கான தொடக்க நிலை அணிகள் எல்லாம் 3 வரிசையுடைய சதுர அணிகளாகும். அவ்வணிகள் ஓர் அலகு அணி I_3-இல் ஒரே ஒரு தொடக்க நிலை நிரை செயலிகளை செயல்படுத்துவதால் கிடைப்பதாகும். கொடுத்துள்ள அணி A-இல் செயல்படுத்தப்படும் ஒவ்வொரு தொடக்க நிலை நிரை செயலிகளும் A-இன் முன்புறமாக தொடக்க நிலை அணியால் பெருக்கக் கிடைப்பதாகும். இதேபோல் A-இல் செயல்படுத்தப்படும் ஒவ்வொரு தொடக்க நிலை நிரல் செயலிகளும் A-இன் பின்புறமாக தொடக்க நிலை அணியால் பெருக்கக் கிடைப்பதாகும். இந்த அத்தியாயத்தில் தொடக்க நிலை நிரைச் செயலிகள் மட்டுமே நாம் பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ ஐக் கருதுக

A-ன் மீது $R_2 \to R_2 + \lambda R_3$ என்ற நிரை உருமாற்றத்தினைச் செயல்படுத்துவோம் என்க. இங்கு $\lambda \neq 0$ என்பது ஒரு மாறிலி. பின்பு கிடைப்பது,

$$A \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{31} & a_{22}+\lambda a_{32} & a_{23}+\lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}. \qquad \ldots.(1)$$

இம்மாற்றத்தினைப் பின்வருமாறு தொடக்கநிலை அணியினைக் கொண்டும் பெறலாம்.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ என்பது தொடக்க நிலை அணி. ஏனெனில், $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

A-யின் முன்புறமாக $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ –ஆல் பெருக்க, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{31} & a_{22}+\lambda a_{32} & a_{23}+\lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}. \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) இவற்றால் $A \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} A$ என அறிகிறோம்.

எனவே, A-ன் மீது $R_2 \to R_2 + \lambda R_3$ என்ற தொடக்கநிலை உருமாற்றத்தால் ஏற்படும் விளைவானது A ஐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ என்ற தொடக்க நிலை அணியால் முன்புறமாகப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் அணியாகும்.

இவ்வாறே, பின்வருவனவற்றைக் காட்ட முடியும்:

(i) $R_2 \leftrightarrow R_3$ என்ற தொடக்க நிலை உருமாற்றம் செயற்படுத்துவதால் ஏற்படும் விளைவானது A-ஐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ என்ற தொடக்கநிலை அணியால் முன்புறமாகப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் அணியாகும்.

(ii) A-ன் மீது $R_2 \to \lambda R_2$ என்ற தொடக்க நிலை உருமாற்றத்தால் ஏற்படும் விளைவானது A-ஐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ என்ற தொடக்க நிலை அணியால் முன்புறமாகப் பெருக்குதால் கிடைக்கும் அணியாகும்.

நிரூபணமின்றி பின்வரும் முடிவைக் கூறுவோம்:

தேற்றம் 1.13

ஒரு வரிசைக்கிரமமான தொடக்கநிலைச் செயலிகளைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியினை ஓர் அலகு அணியாக உருமாற்றம் செய்யலாம்.

மேற்காணும் தேற்றத்தினை விளக்க $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ என்ற அணியினைக் கருதுக.

இங்கு $|A| = 12+3 = 15 \neq 0.$ எனவே A ஆனது பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணியாகும். A-ஐ I_2 –ஆக ஒரு வரிசைக்கிரமமான தொடக்கநிலை நிரை செயலிகளால் மாற்றுவோம்.

முதற்படியாக. A-ன் a_{11} ஐ 1 என மாற்றுவதற்கான நிரை மாற்றிகளைத் தேடுவோம்.

இதற்குத் தேவையான தொடக்கநிலை உருமாற்றம் $R_1 \to \left(\frac{1}{2}\right)R_1$ ஆகும். இதற்கொத்த தொடக்கநிலை அணி $E_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ஆகும்.

பின்பு, நமக்குக் கிடைப்பது, $E_1A = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$

அடுத்தாக E_1A என்ற அணியின் a_{11} -ற்குக் கீழுள்ள அனைத்து உறுப்புகளைப் பூச்சியமாக்குவோம். இந்த விளக்க எடுத்துக்காட்டில் a_{21} என்ற உறுப்பு மட்டுமே உள்ளது. இதற்குத் தேவையான தொடக்க நிலை உருமாற்றம் $R_2 \to R_2 + (-3)R_1$ ஆகும்.

இதற்கொத்த தொடக்க நிலை அணி $E_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ ஆகும்.

பின்பு, நமக்குக் கிடைப்பது $E_2\left(E_1A\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}.$

அடுத்தாக, $E_2\left(E_1A\right)$-இல் உள்ள a_{22} -ஐ 1–ஆக மாற்ற வேண்டும். இதற்குத் தேவையான தொடக்க நிலை உருமாற்றம் $R_2 \to \left(\frac{2}{11}\right)R_2$ ஆகும்.

இதற்கொத்த தொடக்க நிலை அணியானது $E_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{11}\end{bmatrix}$ ஆகும்.

பின்பு நமக்குக் கிடைப்பது $E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

முடிவாக, $E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)$-ன் a_{12}-ஐ பூச்சியமாக்குவோம். இதற்குத் தேவையான தொடக்கநிலை நிரை மாற்றம் $R_1 \to R_1+\left(\frac{1}{2}\right)R_2$ ஆகும். இதற்கொத்த தொடக்கநிலை அணி $E_4=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ஆகும்.

பின்பு, நமக்குக் கிடைப்பது, $E_4\left(E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)\right)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$.

மேல் உள்ள தொடர்ச்சியாக உள்ள தொடக்க நிலை உருமாற்றங்களை பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to\left(\frac{1}{2}\right)R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+(-3)R_1}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(\frac{2}{11}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\left(\frac{1}{2}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.19

$\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ என்பது பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணி எனக்காட்டுக மற்றும் இவ்வணியை தொடக்க நிலை உருமாற்றங்கள் மூலம் அலகு அணியாக மாற்றுக.

தீர்வு

$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ என்க. $|A|=3(0+2)-1(2+5)+4(4-0)=6-7+16=15\neq 0$. எனவே, A ஆனது பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணியாகும்.

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1,\ R_3\to R_3-5R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(-\frac{3}{2}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{3}R_2,\ R_3\to R_3-\frac{1}{3}R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{15}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to\left(-\frac{2}{15}\right)R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{2}R_3,\ R_2\to R_2-\frac{11}{2}R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

1.3.4 காஸ் - ஜோர்டன் முறை (Gauss-Jordan Method)

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவையுடைய மற்றும் n வரிசையுடைய சதுர அணி என்க. B என்பது A-இன் நேர்மாறு என்க. எனவே $AB = BA = I_n$. அலகு அணி I_n, -இன் பண்பின்படி $A = I_nA = AI_n$.

$A = I_nA$ என்பதைக் கருதுவோம் ...(1)

A ஆனது பூச்சியமற்ற கோவை அணி. ஆதலால் சமன்பாடு (1)-இன் இருபுறமும் முன்புறமாக தொடக்க நிலை அணிகளின் ஒழுங்கு வரிசையினைக் கொண்டு (நிரை செயலிகள்) இருபுறமும் முன்புறமாகப் பெருக்கினால் சமன்பாடு (1)-இன் இடதுபுறம் உள்ள A ஆனது அலகு அணி I_n ஆக உருமாறும் மற்றும் அதே தொடக்க நிலை அணிகளின் ஒழுங்கு வரிசை (நிரைச் செயலிகள்) சமன்பாடு (1)-இல் வலதுபுறமுள்ள I_n-ஐ B என்ற அணியாக உருமாற்றும். எனவே சமன்பாடு (1) ஆனது $I_n = BA$ என உருமாறும். எனவே A-இன் நேர்மாறு B ஆகும். அதாவது $A^{-1} = B$.

குறிப்பு

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ என்ற தொடக்க நிலை அணிகள் (நிரைச் செயலிகள்) ஒழுங்கு வரிசை $(E_k \cdots E_2E_1)A = I_n$ என்றவாறு இருப்பின், $A^{-1} = E_k \cdots E_2E_1$ ஆகும்.

தொடக்க நிலைச் செயலிகள் மூலம் A என்ற பூச்சியமற்றக் கோவை அணியை I_n வடிவத்திற்கு உருமாற்றுவது **காஸ்–ஜோர்டன் முறையாகும்.** காஸ்–ஜோர்டன் முறை மூலம் A^{-1} காண படிகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

படி 1

அணி A-இன் வலதுபுறம் அலகு அணி I_n-ஐ சேர்த்து $[A \mid I_n]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை உருவாக்க வேண்டும்.

படி 2

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ என்ற தொடக்க நிலை அணிகள் (நிரைச் செயலிகள்) $(E_k \cdots E_2E_1)A = I_n$ என்றவாறு காண்க.

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ என்பனவற்றை வரிசை மாறாமல் $[A \mid I_n]$ மீது செயல்படுத்துக. பின்பு, $[(E_k \cdots E_2E_1)A \mid (E_k \cdots E_2E_1)I_n]$ எனக் கிடைக்கிறது. அதாவது, $[I_n \mid A^{-1}]$.

எடுத்துக்காட்டு 1.20

$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற பூச்சியமற்றக் கோவை அணிக்கு காஸ்–ஜோர்டன் நீக்கல் முறை மூலம் நேர்மாறு காண்க.

தீர்வு

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியின் மீது காஸ்–ஜோர்டான் முறையினைப் பயன்படுத்த,

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to (-1)R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & (1/5) & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 6R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (6/5) & -1 \\ 0 & 1 & (1/5) & 0 \end{array}\right].$$

எனவே $A^{-1} = \begin{bmatrix} (6/5) & -1 \\ (1/5) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

எடுத்துக்காட்டு 1.21

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு காஸ்–ஜோர்டன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்தி நேர்மாறு காண்க.

தீர்வு

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியின் மீது காஸ்–ஜோர்டான் முறையைப் பயன்படுத்த, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & (1/2) & -(1/2) & -(3/2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

எனவே, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் அணிகளுக்கு சிற்றணிக்கோவையை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. பின்வரும் அணிகளுக்கு ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

3. பின்வரும் அணிகளுக்கு காஸ்–ஜோர்டன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி நேர்மாறு காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 1_Matrices.indd 29 07-12-2021 13:30:49

1.4 அணிகளின் பயன்பாடுகள் : நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கான தீர்வு காணுதல்

(Applications of Matrices: Solving System of Linear Equations)

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் ஒரு முக்கியமான பயன்பாடு யாதெனில் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு தீர்வு காண்பதாகும். உயிரியில், வேதியியல், வணிகவியல், பொருளாதாரம், இயற்பியல் மற்றும் பொறியியல் ஆகியவற்றில் நிகழும் பல நிகழ்வுகள் மாதிரியில் நேரியில் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகள் உருவாகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, சுற்றுக் கோட்பாட்டின் (circuit theory) பகுப்பாய்வு உள்ளீடு–வெளியீடு மாதிரிகளின் பகுப்பாய்வு மற்றும் வேதியியல் எதிர்வினைகள் ஆய்வு செய்வதற்கு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வுகள் தேவைப்படுகின்றன.

1.4.1 நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை அமைத்தல்

(Formation of a System of Linear Equations)

ஒரு எளிய நடைமுறை கணக்கின் கணித மாதிரியை உருவாக்குவதன் மூலம் நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் பொருளை புரிந்து கொள்ளலாம்.

A, B, C என்ற மூன்று நபர்கள் ஒரு சிறப்பங்காடிக்கு ஒரே வணிகச் சின்னம் (brand) உள்ள அரிசி மற்றும் சர்க்கரை வாங்கச் செல்கின்றனர். நபர் A, 5 கிலோகிராம் அரிசி மற்றும் 3 கிலோகிராம் சர்க்கரை வாங்கி ₹ 440 செலுத்துகின்றார். நபர் B, 6 கிலோகிராம் அரிசி மற்றும் 2 கிலோகிராம் சர்க்கரை வாங்கி ₹ 400 செலுத்துகின்றார். நபர் C, 8 கிலோகிராம் அரிசி மற்றும் 5 கிலோகிராம் சர்க்கரை வாங்கி ₹ 720 செலுத்துகின்றார். ஒரு கிலோகிராம் அரிசியின் விலை, ஒரு கிலோகிராம் சர்க்கரையின் விலையைக் கணக்கிடுவதற்கான கணித மாதிரியை உருவாக்குவோம். ஒரு கிலோகிராம் அரிசியின் விலை ₹ x என்க. ஒரு கிலோகிராம் சர்க்கரையின் விலை ₹ y என்க. நபர் A, 5 கிலோகிராம் அரிசி மற்றும் 3 கிலோகிராம் சர்க்கரை வாங்கி ₹ 440 செலுத்தியதால் நமக்குக் $5x+3y=440$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இவ்வாறே நபர் B மற்றும் C இவர்களைக் கொண்டு முறையே $6x+2y=400$ மற்றும் $8x+5y=720$ என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. எனவே x மற்றும் y இவற்றைக் காண்பதற்கான கணிதவியல் மாதிரி

$$5x+3y=440,\ \ 6x+2y=400,\ \ 8x+5y=720.$$

குறிப்பு

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில், ஒரு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் x மற்றும் y -இன் மதிப்புகள் மற்ற இரு சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்ய வேண்டும். வேறு வகையில் கூறுவோமாயின் x மற்றும் y -இன் மதிப்புகள் ஒரே சமயத்தில் அனைத்துச் சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்ய வேண்டும். இந்த x மற்றும் y -இன் மதிப்புகள் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வுகளாகும். இச்சமன்பாடுகள் x மற்றும் y -இல் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகும். எனவே இச்சமன்பாடுகள் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் x மற்றும் y -ல் அமைந்த நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு என அழைக்கப்படும். இவை ஒரே சமயத்தில் (simultaneous) அமைந்த நேரியச் சமன்பாடுகளாகும். தொகுப்பானது மூன்று நேரியச் சமன்பாடுகளையும் x மற்றும் y என்ற இரு மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளைக் கொண்டதாகும். இச்சமன்பாடுகள் இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியலில் நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கின்றன. இப்பகுதியில் அணிகளைக் கொண்டு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளுக்கு தீர்வு காணும் முறையை உருவாக்குவோம்.

1.4.2 நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் அணி வடிவம்

(System of Linear Equations in Matrix Form)

m சமன்பாடுகள் மற்றும் n மாறிகளால் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் வடிவமானது:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

இங்கு $a_{ij}, i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$ என்பவை கெழுக்கள் மற்றும் $b_k, k = 1, 2, \cdots, m$ என்பவை மாறிலிகள். எல்லா b_k –களும் பூச்சியம் எனில் மேல் உள்ள தொகுப்பானது **சமபடித்தான, நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு** (homogenous system of linear equations) எனப்படும். அவ்வாறு இல்லாமல் ஏதேனும் ஒரு b_k ஆனது பூச்சியம் இல்லை எனில் தொகுப்பானது **அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு** (non-hogenous system of linear equations) எனப்படும். $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ முறையே $x_1, x_2, \cdots, x_n$ இவற்றின் மதிப்புகளாக சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு (1)–ல் உள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் நிறைவு செய்தால், $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ என்ற $n-$ வரிசையானது (1)–இன் தீர்வு எனப்படும். இச்சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு (1)–ஐ பின்வருமாறு அணிவடிவில் எழுதலாம்.

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ –ன் கெழுக்களால் $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ என்ற $m \times n$ அணியை உருவாக்குவோம். A –ன் முதல் நிரையானது சமன்பாட்டுத் தொகுப்பில் உள்ள முதல் சமன்பாட்டின் $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ என்ற கெழுக்களால் அமைந்தவை. இதேபோல் மற்ற நிரைகளும் அமைந்துள்ளன. முதல் நிரலில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்து m சமன்பாடுகளின் வரிசைப்படி x_1 கெழுக்களாக அமைந்துள்ளன.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ என்பவை $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ என்ற மாறிகளால் உருவான $n \times 1$ மற்றும் $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$ என்ற மாறிலிகளால் உருவாக்கப்பட்ட $m \times 1$ நிரல் அணிகள் என்க.

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = B.$$

$AX = B$ என்பது அணிகளைக் கொண்ட அணிச்சமன்பாடாகும் மற்றும் இதை நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு (1)–இன் அணி வடிவம் என அழைக்கப்படும். அணி A என்பது தொகுப்பின் **கெழு அணி** எனப்படும். மற்றும் $\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ என்பது தொகுப்பின் **விரிவுபடுத்தப்பட்ட (augmented matrix) அணி** எனப்படும். இந்த விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை $[A \mid B]$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,.

$2x+3y-5z+7=0, 7y+2z-3x=17, 6x-3y-8z+24=0$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் அணி வடிவமானது $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 6 & -3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ -24 \end{bmatrix}$.

1.4.3 நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வுகள் (Solution to a System of Linear equations)

நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வின் இயல்பை பின்வரும் நிலைகளின் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம்:

நிலை (i)

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

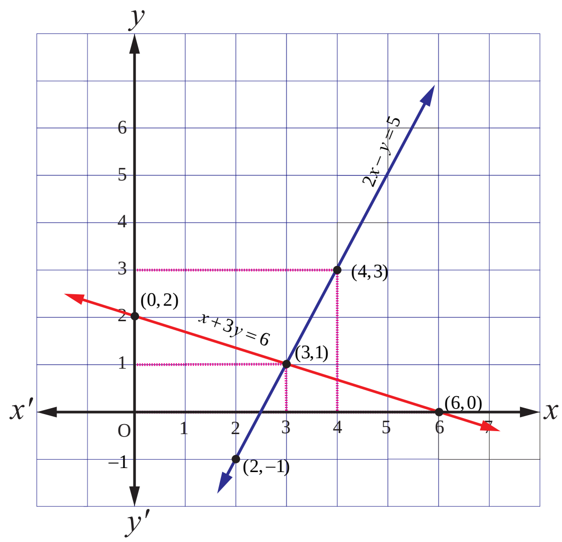
$$2x-y = 5, \quad \ldots (1)$$
$$x+3y = 6. \quad \ldots (2)$$

இந்த இரு சமன்பாடுகள் இருபரிமான பகுமுறை வடிவியலில் இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கின்றன. (படம் 1.2-ஐ பார்க்க). (1)-லிருந்து நாம் பெறுவது

$$x = \frac{5+y}{2}. \quad \ldots (3)$$

(3)-ஐ (2)-ல் பிரதியிட்டுச் சுருக்கக் கிடைப்பது $y=1$.

$y=1$ என (1)-ல் பிரதியிட்டுச் சுருக்கக் கிடைப்பது $x=3$.



படம் 1.2

$x=3$ மற்றும் $y=1$ சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) நிறைவு செய்கின்றன.

அதாவது **(1)–ன் தீர்வானது (2)–க்கும் தீர்வாகிறது.**

எனவே இத்தொகுப்பை ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு $(3,1)$ எனக் கூறுகிறோம்..

புள்ளி $(3,1)$ என்பது கோடுகள் $2x-y=5$ மற்றும் $x+3y=6$ வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியாகும்.

நிலை (ii)

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை கருத்தில் கொள்வோம்.

$$3x+2y = 5, \quad \ldots (1)$$
$$6x+4y = 10 \quad \ldots (2)$$

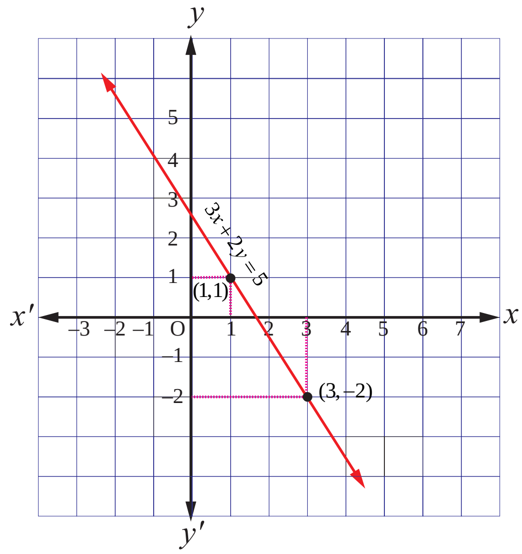
சமன்பாடு (1)-லிருந்து கிடைப்பது

$$x = \frac{5-2y}{3} \quad \ldots (3)$$

(3)-ஐ (2)-ல் பிரதியிட்டுச் சுருக்கினால் நாம் பெறுவது $0=0$.

இதிலிருந்து நாம் அறிவது சமன்பாடு (2) ஆனது சமன்பாடு (1) -ன் தொடக்கநிலை உருமாற்றமாகும். சமன்பாடு (2)-ஐ 2 –ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது சமன்பாடு (1) ஆகும். எனவே ஒரே ஒரு சமன்பாடு (1)-ஐ வைத்துக்கொண்டு x மற்றும் y –க்கு ஒரே ஒரு தீர்வு காண இயலாது.

எனவே $y = t$ என்ற மதிப்பை நாம் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டிய நிர்ப்பந்தத்திற்கு உள்ளாகிறோம். பின்பு $x = \frac{5-2t}{3}$. இங்கு t என்பது ஒரு மெய் எண். சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஒரே ஒரு கோட்டை (ஒன்றின் மீது ஒன்று அமையும் கோடுகள்) இரு பரிமான பகுமுறை வடிவியலில் குறிக்கின்றன.. (படம் 1.3–ஐ பார்க்க). எனவே தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் (1)–ன் தீர்வுகள் (2)–க்கு தீர்வுகளாகும். மற்றும் t எந்த ஒரு மெய்யெண் மதிப்பைப் பெறுவதால் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.



படம் 1.3

நிலை (iii)

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை கருத்தில் கொள்வோம்.

$$4x + y = 6, \quad \dots (1)$$

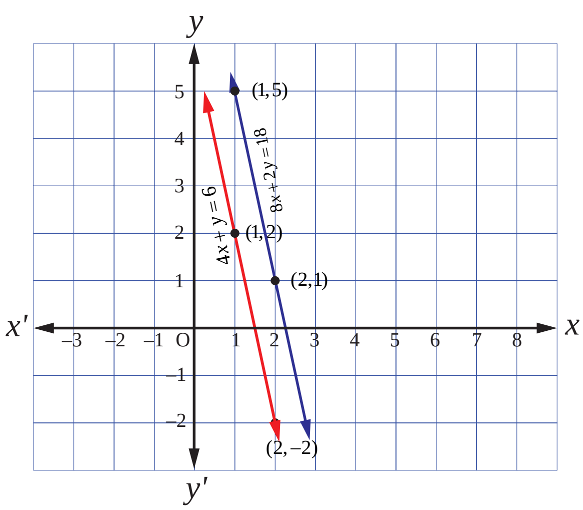
$$8x + 2y = 18. \quad \dots (2)$$

சமன்பாடு (1)–லிருந்து நாம் பெறுவது

$$x = \frac{6-y}{4} \quad \dots (3)$$

(3)–ஐ (2)–ல் பிரதியிட்டுச் சுருக்கக் கிடைப்பது $12 = 18$.

இது ஒரு முரண்பாடான முடிவு ஆகும். இதிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனில் சமன்பாடு (2) ஆனது சமன்பாடு (1) உடன் ஒருங்கமைவற்றது. எனவே (1)–ன் தீர்வுகள் (2)–க்கு தீர்வாகாது.



படம் 1.4

எனவே தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு அற்றது. மற்றும் தொகுப்பிற்கு தீர்வு கிடையாது. இச்சமன்பாடுகள் இருபரிமான பகுமுறை வடிவியலில் இரு இணை நேர்க்கோடுகளை (ஒன்றின் மீது ஒன்று அமையாத) குறிக்கின்றன. (பார்க்க படம் 1.4). ஒன்றின் மீது ஒன்று அமையாத இரு இணைக்கோடுகள் எப்பொழுதும் மெய் புள்ளியில் சந்திப்பது இல்லை என நாம் அறிவோம்.

குறிப்பு

(1) தொகுப்பில் உள்ள ஏதேனும் இரு சமன்பாடுகளை இடம் மாற்றினால் தொகுப்பிற்கான தீர்வுகளில் மாற்றம் ஏற்படாது.

(2) ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் தொகுப்பில் உள்ள ஒரு சமன்பாட்டைப் பெருக்கி மாற்றி அமைத்தால் தொகுப்பிற்கான தீர்வுகளில் மாற்றம் ஏற்படாது.

(3) நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் எந்தவொரு சமன்பாட்டினை, அச்சமன்பாட்டுடனும், அத்தொகுப்பின் பிறிதொரு சமன்பாட்டின் பூச்சியமில்லா எண்ணின் பெருக்கற்பலனைக் கூட்டிப் பிரதியிடல் அத்தொகுப்பின் தீர்வினை மாற்றாது.

வரையறை 1.8

ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது குறைந்தது ஒரு தீர்வு பெற்றிருந்தால், தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுடையது எனப்படும். ஒரு தீர்வு கூட பெறவில்லையெனில் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது எனப்படும்.

குறிப்புரை

நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பில் உள்ள சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கைக்கு மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் எனில் கெழுக்களின் அணி A ஆனது சதுர அணியாக இருக்கும். மேலும் A ஆனது பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகவுமிருப்பின் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்குப் பின்வரும் முறைகளில் ஏதேனும் ஒரு முறையில் தீர்வு காணலாம். (i) நேர்மாறு அணி காணல் முறை, (ii) கிராமரின் விதி, (iii) காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை

1.4.3 (i) நேர்மாறு அணி காணல் முறை (Matrix Inversion Method)

நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பில் உள்ள கெழுக்களின் அணியானது சதுர அணியாகவும் மற்றும் பூச்சியமற்றக் கோவை அணியாகவும் இருப்பின் இம்முறையை பயன்படுத்த இயலும்.

$$AX = B, \qquad \ldots (1)$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். இங்கு A என்பது சதுர மற்றும் பூச்சியமற்றக் கோவை அணியாகும். A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் A^{-1} காண இயலும் மற்றும் $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. (1)-இன் இருபுறமும் முன்புறமாக A^{-1}ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. அதாவது $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$.

எனவே நாம் பெறுவது $X = A^{-1}B$.

எடுத்துக்காட்டு 1.22

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை நேர்மாறு அணி காணல் முறையை பயன்படுத்தி தீர்க்க:

$5x+2y=3,\ 3x+2y=5$.

தீர்வு

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$, இங்கு $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10-6 = 4 \neq 0$. எனவே A^{-1} காண இயலும். மற்றும் $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

$X = A^{-1}B$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{4} \\ \frac{16}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

எனவே தீர்வானது $(x=-1, y=4)$.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை நேர்மாறு அணி காணல் முறையை பயன்படுத்தி தீர்க்க:

$2x_1+3x_2+3x_3=5,\quad x_1-2x_2+x_3=-4,\quad 3x_1-x_2-2x_3=3$.

தீர்வு

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$.

$$\text{இங்கு } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+1)-3(-2-3)+3(-1+6) = 10+15+15 = 40 \neq 0.$$

எனவே A^{-1} காண இயலும் மற்றும்

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} +(4+1) & -(-2-3) & +(-1+6) \\ -(-6+3) & +(-4-9) & -(-2-9) \\ +(3+6) & -(2-3) & +(-4-3) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

எனவே தீர்வானது $(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1)$.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் பெருக்கற்பலன் AB மற்றும் BA காண்க. இதன் மூலம் $x-y+z=4, x-2y-2z=9, 2x+y+3z=1$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+4+8 & 4-8+4 & -4-8+12 \\ -7+1+6 & 7-2+3 & -7-2+9 \\ 5-3-2 & -5+6-1 & 5+6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8I_3$$

$$\text{மற்றும் } BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+7+5 & 4-1-3 & 4-3-1 \\ -4+14-10 & 4-2+6 & 4-6+2 \\ -8-7+15 & 8+1-9 & 8+3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8I_3.$$

எனவே நாம் பெறுவது $AB = BA = 8I_3$. அதாவது, $\left(\frac{1}{8}A\right)B = B\left(\frac{1}{8}A\right) = I_3$. எனவே, $B^{-1} = \frac{1}{8}A$.

கொடுத்துள்ள நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை அணி வடிவில் எழுதக் கிடைப்பது

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ அதாவது, } B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

எனவே, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{8}A\right)\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16+36+4 \\ -28+9+3 \\ 20-27-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

எனவே தீர்வானது $(x = 3, y = -2, z = -1)$.

பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க:
   (i) $2x+5y=-2,\ \ x+2y=-3$ (ii) $2x-y=8,\ \ 3x+2y=-2$
   (iii) $2x+3y-z=9,\ x+y+z=9,\ 3x-y-z=-1$
   (iv) $x+y+z-2=0,\ 6x-4y+5z-31=0,\ 5x+2y+2z=13$
2. $A=\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் பெருக்கற்பலன் AB மற்றும் BA காண்க.
   இதன் மூலம் $x+y+2z=1, 3x+2y+z=7, 2x+y+3z=2$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.
3. ஒருவர் ஒரு குறிப்பிட்ட மாத ஊதியத்தில் ஒரு பணியில் அமர்த்தப்படுகிறார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஒரு நிலையான ஊதிய உயர்வு அவருக்கு வழங்கப்படுகிறது. 3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ₹ 19,800 மற்றும் 9 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ₹ 23,400 எனில் அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் மற்றும் ஆண்டு உயர்வு எவ்வளவு என்பதைக் காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் இக்கணக்கைத் தீர்க்க.)
4. 4 ஆடவரும் 4 மகளிரும் சேர்ந்து ஒரு குறிப்பிட்ட வேலையை 3 நாட்களில் செய்து முடிப்பார்கள். அதே வேலையை 2 ஆடவரும் 5 மகளிரும் சேர்ந்து 4 நாட்களில் முடிப்பார்கள் எனில் அவ்வேலையை ஓர் ஆடவர் மற்றும் ஒரு மகளிர் தனித்தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு எத்தனை நாட்களாகும்?
5. A, B மற்றும் C என்ற பொருட்களின் விலை ஓர் அலகிற்கு முறையே ₹ x, y மற்றும் z ஆகும். P என்பவர் B -ல் 4 அலகுகள் வாங்கி, A -ல் 2 அலகையும் C -ல் 5 அலகையும் விற்கிறார். Q என்பவர் C -ல் 2 அலகுகள் வாங்கி A -ல் 3 அலகுகள் மற்றும் B -ல் 1 அலகையும் விற்கிறார். R என்பவர் A -ல் 1 அலகை வாங்கி, B -ல் 3 அலகையும் C அலகில் ஒரு அலகையும் விற்கிறார். இவ்வணிகத்தில் P, Q மற்றும் R முறையே ₹ 15,000, ₹ 1,000 மற்றும் ₹ 4,000 வருமானம் ஈட்டுகின்றனர் எனில் A, B மற்றும் C பொருட்களின் ஓரலகு விலை எவ்வளவு என்பதைக் காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் இக்கணக்கைத் தீர்க்க.)

1.4.3 (ii) கிராமரின் விதி (Cramer's Rule)

நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பில் உள்ள கெழுக்கள் அணியானது சதுர அணியாகவும் பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணியாகவும் இருந்தால் மட்டுமே இம்முறையை பயன்படுத்த இயலும். இம்முறையை பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் மூலம் விவரிப்போம்.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3,$$

இங்கு கெழுக்கள் அணியானது, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ பூச்சியமற்ற கோவை அணி. எனவே $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$$x_1\Delta = x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_1$$

$$\Delta \neq 0 \text{ ஆதலால், நாம் பெறுவது } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

இதேபோல், நாம் பெறுவது

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \text{ இங்கு } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

இவ்வாறாக, **கிராமரின் விதியானது** $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$

$$\text{இங்கு } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

குறிப்பு

Δ-ல் உள்ள முதல் நிரலில் உள்ள உறுப்புகளான a_{11}, a_{21}, a_{31} களுக்குப் பதில் முறையே b_1, b_2, b_3 களைப் பிரதியிடக் கிடைப்பது Δ_1.

Δ-ல் உள்ள இரண்டாவது நிரலில் உள்ள உறுப்புகளான a_{12}, a_{22}, a_{32} களுக்குப் பதில் முறையே b_1, b_2, b_3 களைப் பிரதியிடக் கிடைப்பது Δ_2 ஆகும்.

Δ-ல் உள்ள மூன்றாவது நிரலில் உள்ள உறுப்புகளான a_{13}, a_{23}, a_{33} களுக்குப் பதில் முறையே b_1, b_2, b_3 களைப் பிரதியிடக் கிடைப்பது Δ_3 ஆகும்.

$\Delta = 0$ எனில் கிராமரின் விதியை பயன்படுத்த இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

$x_1 - x_2 = 3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17, x_2 + 2x_3 = 7$ என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு

பின்வரும் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பை முதலில் காண்போம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 17 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -6, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 24.$$

கிராமரின் விதிப்படி $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1,\ x_3 = \frac{24}{6} = 4.$

எனவே தீர்வானது $(x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 4)$.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

T20 ஆட்டமொன்றில் கடைசி ஓவரில் 1 பந்து மட்டும் வீசப்பட வேண்டிய நிலையில் ஓர் அணியானது 6 ரன்கள் (ஓட்டங்கள்) பெற்றால் மட்டுமே வெற்றி பெறும் நிலையில் இருந்தது. கடைசி பந்து மட்டையருக்கு வீசப்பட்டது. அவர் அதனை மிக உயரம் செல்லுமாறு அடிக்கிறார். பந்தானது செங்குத்து தளத்தில் சென்ற பாதை அத்தளத்தில் $y = ax^2 + bx + c$ என்ற சமன்பாட்டின்படி உள்ளது. பந்தானது $(10,8),(20,16),(40,22)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கிறது எனில் அவ்வணியானது ஆட்டத்தை வென்றதா என்பதை முடிவு செய்யலாமா? உனது விடையினை கிராமர் விதியைக் கொண்டு நியாயப்படுத்துக. (எல்லா தொலைவுகளும் மீட்டர் அளவில் உள்ளன. பந்து சென்ற பாதையின் தளமானது மிகத்தொலைவில் உள்ள எல்லைக் கோட்டினை $(70,0)$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும்)

தீர்வு

$y = ax^2 + bx + c$ என்ற பாதையானது $(10,8),(20,16),(40,22)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது. ஆதலால் $100a + 10b + c = 8, 400a + 20b + c = 16, 1600a + 40b + c = 22$ என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. கிராமரின் விதியை பயன்படுத்த பின்வருவனவற்றைக் காண்போம்.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 1000\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1000[-2+12-16] = -6000,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 16 & 20 & 1 \\ 22 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 20[-8+3+10] = 100,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 100 & 8 & 1 \\ 400 & 16 & 1 \\ 1600 & 22 & 1 \end{vmatrix} = 200\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 16 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 200[-3+48-84] = -7800,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 8 \\ 400 & 20 & 16 \\ 1600 & 40 & 22 \end{vmatrix} = 2000\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 16 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 2000[-10+84-64] = 20000.$$

கிராமரின் விதிப்படி, $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{60}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7800}{6000} = \frac{78}{60} = \frac{13}{10}, c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{20000}{6000} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}.$

எனவே பாதையின் சமன்பாடு $y = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{10}{3}$.

$x = 70$ எனில் $y = 6$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே பந்தானது எல்லைக்கோட்டிற்கு நேர் மேலாக 6 மீ உயரத்தில் செல்கிறது மற்றும் எல்லைக் கோட்டின் அருகில் உள்ள ஆட்டக்காரர் எகிறிக் குதித்துப் பிடிக்க முயன்றாலும் அவரால் அப்பந்தினைப் பிடிக்க இயலாது. எனவே அப்பந்து மிகப்பெரிய 6 ஆகச் சென்றது மற்றும் அவ்வணி ஆட்டத்தினை வென்றது.

பயிற்சி 1.4

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை கிராமரின் விதிப்படி தீர்க்க:
   (i) $5x - 2y + 16 = 0, x + 3y - 7 = 0$
   (ii) $\frac{3}{x} + 2y = 12, \frac{2}{x} + 3y = 13$
   (iii) $3x + 3y - z = 11,\ 2x - y + 2z = 9,\ 4x + 3y + 2z = 25$
   (iv) $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} - 1 = 0, \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} - 2 = 0, \frac{2}{x} - \frac{5}{y} - \frac{4}{z} + 1 = 0$

2. ஒரு போட்டித் தேர்வில் ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கும் ஒரு மதிப்பெண் வழங்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கும் $\frac{1}{4}$ மதிப்பெண் குறைக்கப்படுகிறது. ஒரு மாணவர் 100 கேள்விகளுக்குப் பதிலளித்து 80 மதிப்பெண்கள் பெறுகிறார் எனில் அவர் எத்தனை கேள்விகளுக்குச் சரியாக பதில் அளித்திருப்பார்? (கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி இக்கணக்கைத் தீர்க்கவும்).

3. வேதியாளர் ஒருவரிடம் 50% அமிலத்தன்மை கொண்ட ஒரு கரைசலும் மற்றும் 25% அமிலத்தன்மை கொண்ட மற்றொரு கரைசலும் உள்ளது. அவர் 10 லிட்டர் கரைசலில் 40% அமிலத்தன்மை உள்ளவாறு ஒரு கரைசலை உருவாக்க இருவகைக் கரைசல்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் எத்தனை லிட்டர் சேர்க்க வேண்டும்? (இக்கணக்கை கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க).

4. ஒரு மீன் தொட்டியை பம்பு A மற்றும் பம்பு B என்பன ஒன்றாகச் சேர்ந்து 10 நிமிடங்களில் நீரை நிரப்பும். பம்பு B ஆனது நீரை உள்ளே அல்லது வெளியே ஒரே வேகத்தில் அனுப்ப இயலும். எதிர்பாராதவிதமாக பம்பு B ஆனது நீரை வெளியே அனுப்பினால் தொட்டி நிரம்ப 30 நிமிடங்கள் ஆகும் எனில் ஒவ்வொரு பம்பும் தொட்டியை தனித்தனியாக நிரப்ப எவ்வளவு காலம் எடுத்துக் கொள்ளும்? (கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்கவும்).

5. ஒரு குடும்பத்திலுள்ள மூன்று நபர்கள் இரவு உணவு சாப்பிட ஓர் உணவகத்திற்குச் சென்றனர். இரு தோசைகள், மூன்று இட்லிகள் மற்றும் இரு வடைகளின் விலை ₹ 150. இரு தோசைகள், இரு இட்லிகள் மற்றும் நான்கு வடைகளின் விலை ₹ 200. ஐந்து தோசைகள், நான்கு இட்லிகள் மற்றும் இரண்டு வடைகளின் விலை ₹ 250. அக்குடும்பத்தினரிடம் ₹ 350 இருந்தது மற்றும் அவர்கள் மூன்று தோசைகள், ஆறு இட்லிகள் மற்றும் ஆறு வடைகள் சாப்பிட்டனர். அக்குடும்பத்தினர் சாப்பிட்ட செலவிற்கான தொகையை அவர்களிடமிருந்த பணத்தைக் கொண்டு செலுத்த முடியுமா? (உமது விடையை கிராமரின் விதிக்கொண்டு நிரூபி)

1.4.3 (iii) காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை (Gaussian Elimination Method)

நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பில் உள்ள கெழுக்களின் அணியானது சதுர அணியாக இல்லாவிட்டாலும் இம்முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணலாம். இது நாம் ஏற்கனவே அறிந்துள்ள பிரதியிடல் முறையில் தீர்க்கும் முறையேயாகும். இம்முறையில், நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு உருமாற்றி பின்பு பின்னோக்கிப் பிரதியிடல் முறையில் தீர்வு காண்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.27

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்க :

$4x+3y+6z=25,\ x+5y+7z=13,\ 2x+9y+z=1.$

தீர்வு

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடிவ வடிவத்திற்கு உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 25 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -17 & -22 & -27 \\ 0 & -1 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div (-1)]{R_2 \to R_2 \div (-1),} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to 17R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 199 & 398 \end{array}\right].$$

ஏறுபடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது

$$x+5y+7z = 13, \qquad \ldots (1)$$

$$17y+22z = 27, \qquad \ldots (2)$$

$$199z = 398. \qquad \ldots (3)$$

(3)–லிருந்து நாம் பெறுவது $z=\frac{398}{199}=2$.

$z=2$ என (2) -ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது $y=\frac{27-22\times 2}{17}=\frac{-17}{17}=-1$.

$z=2$ மற்றும் $y=-1$ என (1)–ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது $x=13-5\times(-1)-7\times 2=4$.

எனவே தீர்வானது $(x=4, y=-1, z=2)$.

குறிப்பு: கடைசி சமன்பாட்டிலிருந்து முதல் சமன்பாட்டிற்கு மேலே உள்ள முறையானது **பின்னோக்கி பிரதியிடல் முறை** என அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.28

ஒரு ராக்கெட்டின் மேல் நோக்கிய வேகம் t நேரத்தில் தோராயமாக $v(t)=at^2+bt+c$ என்றவாறு உள்ளது. இங்கு $0 \le t \le 100$ மற்றும் a,b,c என்பன மாறிலிகள். ராக்கெட்டின் வேகம் $t=3, t=6$, மற்றும் $t=9$ வினாடிகளில் முறையே 64, 133, மற்றும் 208 மைல்கள்/வினாடி எனில் $t=15$ வினாடியில் அதன் வேகத்தைக் காண்க. (காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்துக).

தீர்வு

$v(3)=64,\ v(6)=133$ மற்றும் $v(9)=208$. ஆதலால் பின்வரும் நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைப் பெறுகிறோம்.

$$9a+3b+c = 64,$$

$$36a+6b+c = 133,$$

$$81a+9b+c = 208.$$

மேல் உள்ள நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்க உள்ளோம். விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை நிரை–ஏறுபடி வடிவத்திற்கு தொடக்கநிலை நிரை உருமாற்றங்கள் செயல்படுவதன் மூலம் நாம் பெறுவது,

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\36&6&1&133\\81&9&1&208\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1,\,R_3\to R_3-9R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&-6&-3&-123\\0&-18&-8&-368\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2\div(-3),\,R_3\to R_3\div(-2)}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&2&1&41\\0&9&4&184\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&2&1&41\\0&18&8&368\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-9R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&2&1&41\\0&0&-1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to(-1)R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&2&1&41\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

ஏறுபடி வடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகள்

$9a+3b+c=64,\ 2b+c=41,\ c=1.$

பின்னோக்கிப் பிரதியிடல் மூலம் நமக்குக் கிடைப்பது

$$c=1,\ b=\frac{(41-c)}{2}=\frac{(41-1)}{2}=20,\ a=\frac{64-3b-c}{9}=\frac{64-60-1}{9}=\frac{1}{3}.$$

ஆதலால் $v(t)=\frac{1}{3}t^2+20t+1.$

எனவே, $v(15)=\frac{1}{3}(225)+20(15)+1=75+300+1=376$ மைல்கள்/வினாடி.

பயிற்சி 1.5

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்கவும்:

   (i) $2x-2y+3z=2,\quad x+2y-z=3,\quad 3x-y+2z=1$

   (ii) $2x+4y+6z=22,\quad 3x+8y+5z=27,\quad -x+y+2z=2$

2. ax^2+bx+c -ஐ $x+3, x-5$, மற்றும் $x-1$-ஆல் வகுக்கும்போது மீதியானது முறையே 21, 61, மற்றும் 9 எனில் a, b மற்றும் c -ஐக் காண்க. (காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை உபயோகிக்கவும்)

3. ஒரு தொகை ₹ 65,000 ஆண்டிற்கு முறையே 6%, 8% மற்றும் 9% என்ற வட்டி வீதத்தில் மூன்று பத்திரங்களில் முதலீடு செய்யப்படுகிறது. மொத்த ஆண்டு வருமானம் ₹ 4,800. மூன்றாவது பத்திரத்தில் கிடைக்கும் வருமானமானது இரண்டாவது பத்திரத்தில் கிடைக்கும் வருமானத்தை விட ₹ 600 அதிகம் எனில் ஒவ்வொரு பத்திரத்திலும் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகையைக் காண்க. (காஸ் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்துக).

4. ஒரு சிறுவன் $y=ax^2+bx+c$ என்ற பாதையில் $(-6,8), (-2,-12)$, மற்றும் $(3,8)$ எனும் புள்ளிகள் வழியாக செல்கிறான். $P(7,60)$ என்ற புள்ளியில் உள்ள அவனுடைய நண்பனை சந்திக்க விரும்புகிறான். அவன் அவனுடைய நண்பனை சந்திப்பானா? (காஸ் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்துக).

1.5 அணிகளின் பயன்பாடுகள்: நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குரிய ஒருங்கமைவுத் தன்மையைத் தரம் மூலம் காணல்

(Applications of Matrices: Consistency of System of Linear Equations by Rank Method)

பகுதி 1.4.3 இல் நாம் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையைப் பற்றி வரையறுத்துள்ளோம். இப்பாடப்பகுதியில் இதை அணித்தரம் மூலம் ஆராய உள்ளோம். பின்வரும் தேற்றத்தை நிரூபணமின்றி பயிலுவோம்:

தேற்றம் 1.14 (ரூச்சி-கபெல்லி தேற்றம்) (Rouché - Capelli Theorem)

$AX = B$ என்ற அணி வடிவத்திலுள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதற்குப் போதுமான மற்றும் தேவையான நிபந்தனையாதெனில் கெழுக்கள் அணியின் தரமும் மற்றும் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியின் தரமும் சமமாக இருக்க வேண்டும். அதாவது $\rho(A) = \rho([A\,|\,B])$.

மேற்காணும் தேற்றத்தினைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் பயன்படுத்துவோம்.

1.5.1 அசமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாடுகள் (Non-homogeneous Linear Equations)

எடுத்துக்காட்டு 1.29

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதா என ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க:

$x + 2y - z = 3,\ 3x - y + 2z = 1,\ x - 2y + 3z = 3,\ x - y + z + 1 = 0$.

தீர்வு

இங்கு மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$, இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியானது $[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right].$

$[A\,|\,B]$-ல் காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$[A\,|\,B] \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1, \\ R_3 \to R_3 - R_1,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to (-1)R_4]{\substack{R_2 \to (-1)R_2, \\ R_3 \to (-1)R_3,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \to 7R_4 - 3R_2]{R_3 \to 7R_3 - 4R_2,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 \div (-8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A\,|\,B]$-ல் மூன்று அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன.

எனவே, $\rho([A\,|\,B]) = 3$.

A-யின் நிரை-ஏறுபடி வடிவமானது $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. இதில் மூன்று அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன.

எனவே, $\rho(A) = 3$.

எனவே, $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 3$.

ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள அணியிலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது $x + 2y - z = 3,\ 7y - 5z = 8,\ z = 4,\ 0 = 0$.

கடைசி சமன்பாடு $0 = 0$ என்பது அர்த்தமுள்ளது. பின்னோக்கிப் பிரதியிடல் முறையில் நமக்குக் கிடைப்பது

$$\begin{aligned} z &= 4 \\ 7y - 20 &= 8 \quad \Rightarrow \quad y = 4, \\ x &= 3 - 8 + 4 \quad \Rightarrow \quad x = -1. \end{aligned}$$

எனவே தீர்வானது $(x = -1, y = 4, z = 4)$. (இங்கு A-ஆனது சதுர அணியல்ல என்பது குறிப்பிடத்தக்கது)

இங்கு தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது. ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றுள்ளது. ■

எடுத்துக்காட்டு 1.30

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதா என ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க:

$4x - 2y + 6z = 8,\ x + y - 3z = -1,\ 15x - 3y + 9z = 21.$

தீர்வு

மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$.

$$\text{இங்கு } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

$[A \mid B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரை செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 15R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & 18 & 12 \\ 0 & -18 & 54 & 36 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div (-18)]{R_2 \to R_2 \div (-6),} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

எனவே $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 2 < 3$.

ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள அணியிலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது

$$x+y-3z = -1, y-3z = -2, 0 = 0.$$

இதில் கடைசி சமன்பாடு $0 = 0$ வெளிப்படையானது மற்றும் பொருத்தமுடையது.

மேலும் வெளிப்படையற்ற சமன்பாடுகள் இரண்டு உள்ளன. மூன்று தொகுப்பில் மாறிகள் உள்ளன. எனவே மாறிகளில் ஒன்றை நமது விருப்பப்படி நிலை நிறுத்தி மற்ற இரு மாறிகளுக்கான இரு சமன்பாடுகளைப் பெறலாம். எனவே z -ஐ t என்ற மெய்யெண் பெறும் தன்னிச்சை மாறியாகக் கொள்வோம். எனவே நாம் பெறுவது $y = 3t-2,\ x = -1-(3t-2)+3t = 1$. எனவே தீர்வானது $(x = 1, y = 3t-2, z = t)$ ஆகும். இங்கு t என்பது தன்னிச்சை மெய்யெண் ஆகும். மேல் உள்ள தீர்வுக் கணமானது ஒரு சாராமாறி குடும்பத் தீர்வுகள் ஆகும். எனவே கொடுத்துள்ள தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுடையது மற்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும். இந்த எண்ணற்ற தீர்வுகள் ஒரு குடும்பத் தீர்வுகளாகும். ■

குறிப்பு

மேல் உள்ள எடுத்துக்காட்டில் சதுர அணி A யானது பூச்சியக்கோவை அணியாகும். ஆதலால் நேர்மாறு அணி காணல் முறையிலோ அல்லது கிராமர் விதியைப் பயன்படுத்தியோ தொகுப்புகளில் உள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க இயலாது. இருப்பினும் காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்த முடியும் மற்றும் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதா அல்லது ஒருங்கமைவு அற்றதா எனத் தீர்மானிக்கலாம். அடுத்த எடுத்துக்காட்டு மற்ற முறைகள் மீது காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையின் மேலாதிக்கத்தை உறுதிப்படுத்துகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.31

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுதியின் ஒருங்கமைவினைச் சோதிக்கவும், மற்றும் இயலுமாயின் தீர்க்கவும்.

$$x-y+z=-9,\ 2x-2y+2z=-18,\ 3x-3y+3z+27=0.$$

தீர்வு

இங்கு மதிப்பிடப்பட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$, இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{bmatrix}.$$

$[A \mid B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்டஅணியில் தொடக்கநிலை நிரைச் செயலிகளைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & -2 & 2 & -18 \\ 3 & -3 & 3 & -27 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

எனவே $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 1 < 3$.

ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள அணியிலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது $x-y+z=-9,\ \ 0=0,\ \ 0=0.$

முரண்பாடான முடிவுகள் கிடைக்கப் பெறாமையினால், தரப்பட்டத் தொகுப்பு பொருத்தமுடையது. இங்கு ஒரு வெளிப்படையற்ற சமன்பாடு மட்டுமே உள்ளது மற்றும் தொகுப்பிற்கு 3 மாறிகள் உள்ளன.

$y = s, z = t$ என தன்னிச்சையாக எடுத்துக்கொள்ள நமக்குக் கிடைப்பது $x - s + t = -9$; அல்லது $x = -9 + s - t$.

எனவே தீர்வானது $(x = -9+s-t, y = s, z = t)$, இங்கு s மற்றும் t என்பன மெய்யெண் சாராமாறிகள் (parameters)

மேல் உள்ள தீர்வுக்கணம் இரு சாராமாறிக் குடும்பத் தீர்வுகளாக அமைகின்றன.

இங்கு தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளது. இத்தீர்வுகள், இரு சாராமாறிக் குடும்பத் தீர்வுகளாக இருக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1.32

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதா என ஆராய்க.

$x-y+z=-9,\ 2x-y+z=4,\ 3x-y+z=6, 4x-y+2z=7.$

தீர்வு

இங்கு மதிப்பிடப்படவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX=B$, இங்கு

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\3&-1&1\\4&-1&2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-9\\4\\6\\7\end{bmatrix}.$$

$[A\,|\,B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரைச் செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\2&-1&1&4\\3&-1&1&6\\4&-1&2&7\end{array}\right]\xrightarrow[R_4\to R_4-4R_1]{R_2\to R_2-2R_1,\ R_3\to R_3-3R_1,}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&2&-2&33\\0&3&-2&43\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_2]{R_3\to R_3-2R_2,}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&0&0&-11\\0&0&1&-23\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&0&1&-23\\0&0&0&-11\end{array}\right]$$

எனவே $\rho(A)=3$ மற்றும் $\rho([A\,|\,B])=4$. எனவே $\rho(A)\neq\rho([A\,|\,B])$.

ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள அணியிலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது

$x-y+z=-9,\quad y-z=22,\quad z=-23,\quad 0=-11.$

கடைசி சமன்பாடானது முரண்பாடாக உள்ளது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது மற்றும் தொகுப்பிற்கு தீர்வு கிடையாது.

ரூச்சி–கபெல்லி (Rouché - Capelli) தேற்றத்தினால் பின்வரும் விதியைப் பெறுகிறோம்:

- **தொகுப்பில் உள்ள சமன்பாடுகளில் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை n மற்றும் $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=n$, எனில் $AX=B$ என்ற தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு.**
- **$AX=B$ என்ற தொகுப்பில் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை n மற்றும் $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=n-k, k\neq 0$ எனில் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணற்றதீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். இத்தீர்வுகள் $k-$ சாராமாறிக் குடும்பமாக (k-parameter family) இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக தொகுப்பில் உள்ள சமன்பாடுகளில் 3 மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் மற்றும் $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=2$, எனில் தொகுப்பானது எண்ணற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும் மற்றும் இத்தீர்வுகள் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக (one parameter family) இருக்கும். இதேபோல் தொகுப்பில் உள்ள சமன்பாடுகளில் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகவும் மற்றும் $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=1$, எனில் தொகுப்பானது**

ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். இத்தீர்வுகள் இரு சாராமாறிக் குடும்பமாக (two parameter family) இருக்கும்.

- $\rho(A) \neq \rho([A \mid B])$, எனில் $AX = B$ என்ற தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது மற்றும் தொகுப்பிற்குத் தீர்வு கிடையாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.33

$x+y+z=a,\ x+2y+3z=b,\ 3x+5y+7z=c$ என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வுகள் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருப்பதற்கு a, b மற்றும் c-ல் உருவாகும் நிபந்தனையைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$, இங்கு $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

$[A \mid B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரைச் செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 3 & 5 & 7 & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & 2 & 4 & c-3a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & (c-3a)-2(b-a) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & (c-2b-a) \end{array}\right].$$

தொகுப்பின் தீர்வுகள் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருக்க வேண்டுமாயின்,

$\rho(A) = \rho([A, B]) = 2.$ எனவே ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள மூன்றாவது நிரையானது பூச்சிய நிரையாக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, $c - 2b - a = 0 \ \Rightarrow \ c = a + 2b.$ ■

எடுத்துக்காட்டு 1.34

λ, μ-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு

$x+2y+z=7,\ x+y+\lambda z=\mu, x+3y-5z=5$

என்ற சமன்பாடுகள் (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிறாது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும் (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

தீர்வு

மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

தொகுப்பின் அணி வடிவமானது $AX = B$, இங்கு $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ \mu \\ 5 \end{bmatrix}$.

$[A \mid B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரைச் செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&7\\1&1&\lambda&\mu\\1&3&-5&5\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&7\\1&3&-5&5\\1&1&\lambda&\mu\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1,}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&7\\0&1&-6&-2\\0&-1&\lambda-1&\mu-7\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&7\\0&1&-6&-2\\0&0&\lambda-7&\mu-9\end{array}\right].$$

(i) $\lambda=7$ மற்றும் $\mu\neq 9$, எனில் $\rho(A)=2$ மற்றும் $\rho([A|B])=3$ எனவே $\rho(A)\neq\rho([A|B])$ தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது. மேலும் தொகுப்பிற்கு தீர்வு கிடையாது.

(ii) $\lambda\neq 7$ மற்றும் μ ஆனது ஏதாவது ஒரு மெய்யெண் எனில் $\rho(A)=3$ மற்றும் $\rho([A|B])=3$ எனவே $\rho(A)=\rho([A|B])=3=$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

எனவே கொடுத்துள்ள தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வினைப் பெற்றிருக்கும்.

(iii) $\lambda=7$ மற்றும் $\mu=9$, எனில் $\rho(A)=2$ மற்றும் $\rho([A|B])=2$

எனவே $\rho(A)=\rho([A|B])=2<$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

எனவே தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். இத்தீர்வுகள் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பத் தீர்வுகளாக அமைகின்றன. ■

பயிற்சி 1.6

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என்பதை ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க.

   (i) $x-y+2z=2,\quad 2x+y+4z=7,\quad 4x-y+z=4$

   (ii) $3x+y+z=2,\quad x-3y+2z=1,\quad 7x-y+4z=5$

   (iii) $2x+2y+z=5,\quad x-y+z=1,\quad 3x+y+2z=4$

   (iv) $2x-y+z=2,\quad 6x-3y+3z=6,\quad 4x-2y+2z=4$

2. k –ன் எம்மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

   $kx-2y+z=1,\quad x-2ky+z=-2,\quad x-2y+kz=1$

   (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்

   (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

3. λ, μ –இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $2x+3y+5z=9$, $7x+3y-5z=8$, $2x+3y+\lambda z=\mu$, என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது

   (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்

   (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

1.5.2 சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (Homogeneous system of linear equations)

ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

என்பதாகும் என்பதை நினைவுகூர்வோம்.

இங்கு $a_{ij}, i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$ என்பவை மாறிலிகள். இத்தொகுப்பில் உள்ள சமன்பாடுகள் $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ என்ற மதிப்புகளுக்கு நிறைவடைகின்றன. இத்தீர்வை வெளிப்படைத் தீர்வு என்கிறோம். இத்தொகுப்பானது எப்பொழுதும் ஒருங்கமைவு உடையதாகும்.

மேல் உள்ள தொகுப்பை $AX = O_{m\times 1}$, என்ற அணிவடிவில் எழுதலாம். இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, O_{m\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$O_{m\times 1}$-ஐ O என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிப்பிடுகின்றோம். O என்பது பூச்சிய நிரல் அணி என்பதால் $\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) \leq m$ என்பது எப்பொழுதும் மெய்யாக இருக்கும். எனவே சமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது எப்பொழுதும் ஒருங்கமைவு உடையதாகும். $m < n$, எனில் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கைக்கு அதிகமாக இருக்கும். எனவே $\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) < n$. தொகுப்பு (1) ஆனது வெளிப்படையற்ற (non-trivial) தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.

$m = n$, எனில் மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையானது சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம். எனவே, தொகுப்பானது

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

என அமையும். இதில் இரு வகைகள் உள்ளன.

வகை (i)

$\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) = n$, எனில் தொகுப்பு (2) ஆனது **ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.** அத்தீர்வு **வெளிப்படைத் (trivial) தீர்வாகும்.** இங்கு $\rho(A) = n$ என்பதால், $|A| \neq 0$. **எனவே வெளிப்படைத் தீர்விற்கு $|A| \neq 0$.**

வகை (ii)

$\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) < n$, எனில் தொகுப்பு (2) ஆனது **வெளிப்படையற்ற (non-trivial) தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.** இங்கு $\rho(A) < n$ என்பதால், $|A| = 0$. எனவே சமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத்

தொகுப்பானது வெளிப்படையற்ற தீர்வு பெற்றிருந்தால், மற்றும் பெற்றிருந்தால் மட்டுமே அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கும்.

$m > n$, எனில் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையை விட சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும். இந்நிலையில் தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் மூலம் $\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) \le n$ எனப்பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.35

பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்:

$x+2y+3z=0,\; 3x+4y+4z=0,\; 7x+10y+12z=0.$

தீர்வு

இங்கு சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையும், மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கையும் சமம். விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்ற (காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை) கிடைப்பது

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 7 & 10 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 \div (-1)]{R_2 \to R_2 \div (-1),} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 \div (-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

$\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) = 3 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

எனவே தொகுப்பிற்கும் $x = 0,\; y = 0,\; z = 0$ என்ற ஒரே ஒரு வெளிப்படைத் தீர்வு மட்டும்தான் உண்டு.

குறிப்பு

மேல் உள்ள எடுத்துக்காட்டில்

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 1(48-40) - 2(36-28) + 3(30-28) = 8 - 16 + 6 = -2 \ne 0$$ என்பதை நாம் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.36

$x+3y-2z=0,\; 2x-y+4z=0,\; x-11y+14z=0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு

மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்ற (காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை) கிடைப்பது

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -11 & 14 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 \\ 0 & -14 & 16 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 \div (-2)]{R_2 \to R_2 \div (-1),} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) = 2 < 3 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

தொகுப்பானது ஒரு சாராமாறிக் குடும்பத் தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும்.

ஏறுபடி வடிவத்தின் நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடுகளாவன

$x+3y-2z=0, \quad 7y-8z=0, \quad 0=0.$

$z=t$ என்க. இங்கு t என்பது மெய் எண் உடைய தன்னிச்சை மாறி. பின்னோக்கிப் பிரதியிடல் முறையில் கிடைப்பது $z=t,$

$$7y-8t=0 \Rightarrow y=\frac{8t}{7},$$

$$x+3\left(\frac{8t}{7}\right)-2t=0 \Rightarrow x+\frac{24t-14t}{7}=0 \Rightarrow x=-\frac{10t}{7}.$$

எனவே தீர்வானது $\left(x=-\frac{10t}{7}, y=\frac{8t}{7}, z=t\right)$. இங்கு t என்பது ஒரு மெய்யெண். ■

எடுத்துக்காட்டு 1.37

பின்வரும் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்:

$x+y-2z=0, 2x-3y+z=0, 3x-7y+10z=0, 6x-9y+10z=0.$

தீர்வு

இங்கு சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை 4 மற்றும் மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3. விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவிற்கு மாற்றக் கிடைப்பது

$$[A|O]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\2&-3&1&0\\3&-7&10&0\\6&-9&10&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_4\to R_4-6R_1]{R_2\to R_2-2R_1,\ R_3\to R_3-3R_1,}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-5&5&0\\0&-10&16&0\\0&-15&22&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3\div(-2)]{R_2\to R_2\div(-5),}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&-1&0\\0&5&-8&0\\0&-15&22&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+15R_2]{R_3\to R_3-5R_2,}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&-3&0\\0&0&7&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_4\to R_4\div 7]{R_3\to R_3\div(-3),}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_4\to R_4-R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

எனவே $\rho(A)=\rho([A|O])=3=$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை. ஆதலால், தொகுப்பிற்கு வெளிப்படைத் தீர்வு மட்டும்தான் உண்டு. ■

எடுத்துக்காட்டு 1.38

பின்வரும் தொகுப்பானது வெளிப்படையற்ற தீர்வு பெற்றிருக்குமாயின் λ -ன் மதிப்பு காண்க.

$(3\lambda-8)x+3y+3z=0,\ 3x+(3\lambda-8)y+3z=0,\ 3x+3y+(3\lambda-8)z=0$

தீர்வு

தொகுப்பானது வெளிப்படையற்றத் தீர்வு பெற்றிருப்பதால் கெழுக்களின் அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

ஆதலால் நமக்குக் கிடைப்பது

$$\begin{vmatrix}3\lambda-8&3&3\\3&3\lambda-8&3\\3&3&3\lambda-8\end{vmatrix}=0 \text{ அல்லது}$$

$$\begin{vmatrix} 3\lambda-2 & 3\lambda-2 & 3\lambda-2 \\ 3 & 3\lambda-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda-8 \end{vmatrix} = 0 \ (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 \text{ பயன்படுத்த})$$

அல்லது $(3\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3\lambda-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda-8 \end{vmatrix} = 0$ ($(3\lambda-2)$-ஐ பொதுக் காரணியாக R_1லிருந்து வெளியே எடுக்க)

அல்லது $(3\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3\lambda-11 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda-11 \end{vmatrix} = 0$ ($R_2 \to R_2 - 3R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1$ பயன்படுத்த)

அல்லது $(3\lambda-2)(3\lambda-11)^2\ 0$. எனவே $\lambda = \dfrac{2}{3}$ மற்றும் $\lambda = \dfrac{11}{3}$. ■

இப்பொழுது நாம் நேரியச் சமப்படித்தான சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை வேதியியலில் பயன்படுத்த உள்ளோம். வேதியியல் சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களிலும் உள்ள அணுக்களின் எண்ணிக்கையை ஆய்வு செய்வதன் மூலம் வேதியியல் எதிர்வினைச் சமன்பாடுகளைச் சமநிலைப்படுத்துவது பற்றி ஏற்கனவே அறிந்துள்ளோம். இதற்கான ஒரு நேரடி முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு மூலம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.39

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வேதியியல் எதிர்வினைச் சமன்பாட்டை சமநிலைப்படுத்துக:

$C_5H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O.$

(மேற்காணும் எதிர்வினையானது, ஐசோபிரீன் (Isoprene) என்ற கரிம வேதியியல் கூட்டுப் பொருளை எரிப்பதால் நிகழ்வதாகும்).

தீர்வு

நாம் x_1, x_2, x_3 மற்றும் x_4 என்ற மிகை முழுக்களை

$x_1C_5H_8 + x_2O_2 = x_3CO_2 + x_4H_2O$ என அமையுமாறு காண விழைகிறோம். .. (1)

(1)-ன் இடதுபுறத்திலுள்ள கார்பன் அணுக்களின் எண்ணிக்கை (1)-ன் வலதுபுறத்திலுள்ள கார்பன் அணுக்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே,

$5x_1 = x_3 \Rightarrow 5x_1 - x_3 = 0$ ... (2)

என்ற நேரியச் சமப்படித்தான சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். இதேபோல் ஹைட்ரஜன் மற்றும் ஆக்ஸிஜன் அணுக்கள் எண்ணிக்கைகளை ஒப்பிடக் கிடைப்பது,

$8x_1 = 2x_4 \Rightarrow 4x_1 - x_4 = 0,$ ... (3)

$2x_2 = 2x_3 + x_4 \Rightarrow 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0.$ ... (4)

சமன்பாடுகள் (2), (3), மற்றும் (4) என்பன 4 மாறிகளில் ஒரு நேரியச் சமப்படித்தான தொகுப்பை ஏற்படுத்துகின்றன.

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியானது, $[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right].$

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்த,

$$[A\,|\,B]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}4&0&0&-1&0\\5&0&-1&0&0\\0&2&-2&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}4&0&0&-1&0\\0&2&-2&-1&0\\5&0&-1&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to 4R_3-5R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}4&0&0&-1&0\\0&2&-2&-1&0\\0&0&-4&5&0\end{array}\right].$$

எனவே, $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=3<4=$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

ஏறுபடி வடிவத்தில் நமக்குக் கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகள்

$4x_1-x_4=0, 2x_2-2x_3-x_4=0, -4x_3+5x_4=0.$

எனவே ஒரு மாறியை பூச்சியமற்ற மெய் எண் பெறும் தன்னிச்சை மாறியாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$x_4=t, t\neq 0$ என்க. பின்னோக்கிப் பிரதியிடல் முறையில் $x_3=\frac{5t}{4}, x_2=\frac{7t}{4}, x_1=\frac{t}{4}$ எனப் பெறுகிறோம்.

x_1, x_2, x_3 மற்றும் x_4 என்பன மிகை முழுக்கள். எனவே $t=4$ எனத் தேர்வு செய்கிறோம். எனவே, $x_1=1, x_2=7, x_3=5$ மற்றும் $x_4=4$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே சமனாமாக்கப்பட்டச் சமன்பாடு,

$C_5H_8+7O_2\to 5CO_2+4H_2O$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.40

$px+by+cz=0,\ ax+qy+cz=0,\ ax+by+rz=0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு வெளிப்படையற்றத் தீர்வு பெற்றுள்ளது மற்றும் $p\neq a, q\neq b, r\neq c,$ எனில் $\frac{p}{p-a}+\frac{q}{q-b}+\frac{r}{r-c}=2$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$px+by+cz=0, ax+qy+cz=0, ax+by+rz=0$ என்ற தொகுப்பின் சமன்பாடுகள் வெளிப்படையற்றத் தீர்வு பெற்றுள்ளது என்க.

எனவே $\begin{vmatrix}p&b&c\\a&q&c\\a&b&r\end{vmatrix}=0.$ $R_2\to R_2-R_1$ மற்றும் $R_3\to R_3-R_1$ என மேல் உள்ள சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\begin{vmatrix}p&b&c\\a-p&q-b&0\\a-p&0&r-c\end{vmatrix}=0\text{ . அதாவது, }\begin{vmatrix}p&b&c\\-(p-a)&q-b&0\\-(p-a)&0&r-c\end{vmatrix}=0$$

$p \neq a, q \neq b, r \neq c,$ ஆதலால் நாம் பெறுவது, $(p-a)(q-b)(r-c)\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{c}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$

எனவே $\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{c}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

அணிக்கோவையை விரிவுபடுத்தக் கிடைப்பது, $\frac{p}{p-a} + \frac{b}{q-b} + \frac{c}{r-c} = 0.$

அதாவது, $\frac{p}{p-a} + \frac{q-(q-b)}{q-b} + \frac{r-(r-c)}{r-c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2.$

பயிற்சி 1.7

1. பின்வரும் சமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.
   (i) $3x+2y+7z=0, \quad 4x-3y-2z=0, \quad 5x+9y+23z=0$
   (ii) $2x+3y-z=0, \quad x-y-2z=0, \quad 3x+y+3z=0$

2. λ -வின் எம்மதிப்பிற்கு
   $x+y+3z=0,\ 4x+3y+\lambda z=0,\ 2x+y+2z=0$ என்ற தொகுப்பிற்கு
   (i) வெளிப்பைடைத் தீர்வு (ii) வெளிப்படையற்ற தீர்வு கிடைக்கும்

3. காஸ்ஸீயன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி
   $C_2H_6 + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$ என்ற வேதியியல் எதிர்வினைச் சமன்பாட்டை சமநிலைப்படுத்துக.

பயிற்சி 1.8

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகப் பொருத்தமான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்க.

1. $|\text{adj}(\text{adj}\, A)| = |A|^9$ எனில், சதுர அணி A -யின் வரிசையானது
   (1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5

2. A என்ற 3×3 பூச்சியமற்றக் கோவை அணிக்கு $AA^T = A^T A$ மற்றும் $B = A^{-1}A^T$ என்றவாறு இருப்பின், $BB^T =$
   (1) A (2) B (3) I_3 (4) B^T

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \text{adj}\, A$ மற்றும் $C = 3A$ எனில், $\frac{|\text{adj}\, B|}{|C|} =$
   (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 1

4. $A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ எனில், $A =$
   (1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ எனில், $9I_2 - A =$

(1) A^{-1} (2) $\frac{A^{-1}}{2}$ (3) $3A^{-1}$ (4) $2A^{-1}$

6. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ எனில், $|\operatorname{adj}(AB)|=$

(1) -40 (2) -80 (3) -60 (4) -20

7. $P=\begin{bmatrix}1 & x & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$ என்பது 3×3 வரிசையுடைய அணி A-ன் சேர்ப்பு அணி மற்றும் $|A|=4$ எனில், x ஆனது

(1) 15 (2) 12 (3) 14 (4) 11

8. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ மற்றும் $A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ எனில், a_{23}-ன் மதிப்பானது

(1) 0 (2) -2 (3) -3 (4) -1

9. A, B மற்றும் C என்பன நேர்மாறு காணத்தக்கவாறு ஏதேனுமொரு வரிசையில் இருப்பின் பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையல்ல?

(1) $\operatorname{adj} A = |A|\, A^{-1}$ (2) $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} A)(\operatorname{adj} B)$

(3) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ (4) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

10. $(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}12 & -17\\ -19 & 27\end{bmatrix}$ மற்றும் $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ எனில், $B^{-1}=$

(1) $\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 8\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}8 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}8 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

11. $A^T A^{-1}$ ஆனது சமச்சீர் எனில், $A^2 =$

(1) A^{-1} (2) $(A^T)^2$ (3) A^T (4) $(A^{-1})^2$

12. A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி மற்றும் $A^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ எனில், $(A^T)^{-1}=$

(1) $\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}5 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

13. $A=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ x & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ மற்றும் $A^T = A^{-1}$ எனில், x-ன் மதிப்பு

(1) $\frac{-4}{5}$ (2) $\frac{-3}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

14. $A=\begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $AB = I_2$ எனில், $B=$

(1) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A$ (2) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A^T$ (3) $(\cos^2\theta)I$ (4) $\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)A$

15. $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ மற்றும் $A(\text{adj } A)=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ எனில், $k=$

(1) 0 (2) $\sin\theta$ (3) $\cos\theta$ (4) 1

16. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\lambda A^{-1} = A$ எனில், λ –ன் மதிப்பு

(1) 17 (2) 14 (3) 19 (4) 21

17. $\text{adj } A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\text{adj } B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $\text{adj}\,(AB)$ ஆனது

(1) $\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ –ன் அணித்தரம்

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 3

19. $x^a y^b = e^m, x^c y^d = e^n, \Delta_1 = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ எனில், x மற்றும் y –ன் மதிப்புகள் முறையே,

(1) $e^{(\Delta_2/\Delta_1)}, e^{(\Delta_3/\Delta_1)}$ (2) $\log(\Delta_1/\Delta_3), \log(\Delta_2/\Delta_3)$

(3) $\log(\Delta_2/\Delta_1), \log(\Delta_3/\Delta_1)$ (4)) $e^{(\Delta_1/\Delta_3)}, e^{(\Delta_2/\Delta_3)}$

20. பின்வருபனவற்றுள் எவை/எவைகள் உண்மையானவை?

(i) ஒரு சமச்சீர் அணியின் சேர்ப்பு அணி சமச்சீராக இருக்கும்.

(ii) ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் சேர்ப்பு அணி மூலை விட்ட அணியாக இருக்கும்.

(iii) A என்பது n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணி மற்றும் λ என்பது ஒரு திசையிலி எனில் $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^n \text{ adj}(A)$.

(iv) $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A|\,I$

(1) (i) மட்டும் (2) (ii) மற்றும் (iii) (3) (iii) மற்றும் (iv) (4) (i), (ii) மற்றும் (iv)

21. $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])$ எனில், $AX=B$ என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது

(1) ஒருங்கமைவுடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றிருக்கும்
(2) ஒருங்கமைவுடையது
(3) ஒருங்கமைவுடையது மற்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும்
(4) ஒருங்கமைவற்றது

22. $0\le\theta\le\pi$ மற்றும் $x+(\sin\theta)y-(\cos\theta)z=0, (\cos\theta)x-y+z=0, (\sin\theta)x+y-z=0$ மற்றும் தொகுப்பானது வெளிப்படையற்றத் தீர்வு பெற்றிருப்பின், θ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

23. ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியானது $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 6\\ 0 & 0 & \lambda-7 & \mu+5\end{bmatrix}$ மற்றும் தொகுப்பானது எண்ணற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும் எனில்,

(1) $\lambda=7,\mu\ne-5$ (2) $\lambda=-7,\mu=5$ (3) $\lambda\ne7,\mu\ne-5$ (4) $\lambda=7,\mu=-5$

24. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ மற்றும் $4B=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 3 & x\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ என்க. A -ன் நேர்மாறு B எனில், x -ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 1

25. $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, எனில் $\text{adj}(\text{adj}\,A)$ -ன் மதிப்பு

(1) $\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}6 & -6 & 8\\ 4 & -6 & 8\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}-3 & 3 & -4\\ -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}$

பாடச்சுருக்கம்

(1) A என்ற சதுர அணியின் சேர்ப்பு = A -ன் இணைக்காரணி அணியின் நிரை-நிரல் மாற்று அணி.

(2) $A(\text{adj}\,A)=(\text{adj}\,A)A=|A|\,I_n$.

(3) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}\,A$.

(4) (i) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ (ii) $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$ (iii) $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$, λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி

(5) (i) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. (ii) $(A^{-1})^{-1}=A$

(6) A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்

(i) $\left(\text{adj } A\right)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{|A|}A$ (ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) adj $\left(\text{adj } A\right) = |A|^{n-2} A$ (iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$, λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி

(v) $|\text{adj}\,(\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$ (vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj}\left(A^T\right)$

(vii) $\text{adj}(AB) = (\text{adj}\,B)(\text{adj}\,A)$

(7) (i) $A^{-1} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj } A.$ (ii) $A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj }\left(\text{adj } A\right).$

(8) (i) $AA^T = A^T A = I$ எனில், A என்ற அணி செங்குத்து அணியாகும்.

(ii) A என்ற அணி செங்குத்து அணியாக இருப்பதற்குத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனையாதெனில் A பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகவும் மற்றும் $A^{-1} = A^T$ எனவும் இருக்க வேண்டும்.

(9) $AX = B$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை தீர்வு காணும் முறைகள்

(i) நேர்மாறு அணி காணும் முறை $X = A^{-1}B, |A| \neq 0$

(ii) கிராமரின் விதி $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \Delta \neq 0$.

(iii) காஸ்ஸியன் நீக்குதல் முறை

(10) (i) $\rho(A) = \rho([A\,|\,B]) =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை எனில், தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றிருக்கும்.

(ii) $\rho(A) = \rho([A\,|\,B]) <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை எனில் , தொகுப்பானது எண்ணற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும்.

(iii) $\rho(A) \neq \rho([A\,|\,B])$ எனில், தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது மற்றும் தொகுப்பிற்கு தீர்வு கிடையாது.

(11) $AX = 0$ என்ற சமபடித்தான நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது

(i) $|A| \neq 0$ எனில், வெளிப்படைத் தீர்வு பெற்றிருக்கும்

(ii) $|A| = 0$ எனில், வெளிப்படையற்ற தீர்வு பெற்றிருக்கும்

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும். GeoGebra-வின் "12th Standard Mathematics" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடது பக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "Applications of Matrices and Determinants" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க. இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். "Application Matrices-Problem" பயிற்சித்தாளை தேர்வு செய்க.

அத்தியாயம்

2

கலப்பு எண்கள்

இருப்பனவாகவும், இல்லாதனவாகவும் தோன்றும்
இறைவனின் அற்புதமான இருப்பிடமே கற்பனை எண்களாகும்.
- கோட்ஃபிரைட் லைபினிட்ஸ்

இரபேல் பாம்பெலி
(1526-1572)

கலப்பெண்களின் வளர்ச்சிக்கு பல கணித வல்லுநர்கள் தங்களது பங்களிப்பை அளித்துள்ளனர். கலப்பெண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தலை வரையறுத்தவர் இத்தாலிய கணித மேதை இரபேல் பாம்பெலி ஆவார். இவர் தான் முதன் முதலில் கலப்பெண்களின் மீதான இயற்கணிதத்தை வரையறுத்தவர் என கருதப்படுகின்றது. அவரது சாதனைகளை அங்கிகரிக்கும் விதமாக நிலவில் உள்ள ஒரு குழிக்கு பாம்பெலி என பெயரிடப்பட்டுள்ளது.

அன்றாட வாழ்வில் கலப்பெண்கள்

ஒரே நேரத்தில் மாறுபடும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டிருக்கும் ஒரு நிகழ்வில் உதாரணமாக மாறுதிசை மின்னோட்டத்தில் கலப்பெண்களை பயன்படுத்துவது பயனுள்ளதாக உள்ளது. பொறியியலாளர்கள், மருத்துவர்கள், அறிவியலறிஞர்கள், வாகன வடிவமைப்பாளர்கள் மற்றும் பலரும் மின்காந்த சமிக்ஞைகளைப் பயன்படுத்தி அதன் இலக்கை அடைய வலுவான சமிக்ஞைகளை உருவாக்கும் சூழ்நிலைகளில் கலப்பெண்களை பயன்படுத்துகிறார்கள். சமிக்ஞை செயலாக்கம், கட்டுப்பாட்டு கோட்பாடு, மின்காந்தவியல், திரவ இயக்கவியல், குவாண்டம் இயக்கவியல், வரைபடவியல், மற்றும் அதிர்வு பகுப்பாய்வு ஆகிய துறைகளில் கலப்பெண்களின் பயன்பாடு தவிர்க்க இயலாததாகும்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதியை நிறைவாக கற்ற பின்னர்,

- கலப்பெண்களின் மீதான இயற்கணிதம்
- ஆர்கன்ட் தளத்தில் கலப்பெண்களை குறித்தல்
- ஒரு கலப்பெண்ணின் இணைக்கலப்பெண் மற்றும் மட்டு மதிப்பை காணல்
- ஒரு கலப்பெண்ணின் துருவ வடிவம் மற்றும் ஆய்லரின் வடிவைக் காணல்
- டி மாய்வரின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி ஒரு கலப்பெண்ணின் n–ஆம் படிமூலங்களைக் காணல்.

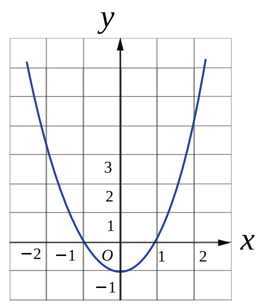
போன்றவற்றை மாணவர்களால் செய்ய இயலும்.

2.1 கலப்பெண்கள் அறிமுகம் (Introduction to Complex Numbers)

கலப்பெண்களை அறிமுகப்படுத்துவதற்கு முன்பாக முதலில் "வர்க்கப்படுத்தும் போது குறை எண் கிடைக்கும் வகையில் ஏதேனும் ஒரு மெய் எண் உள்ளதா?" என்ற கேள்விக்கு விடையளிக்க முயல்வோம். இதற்கு விடையளிக்க கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கருதுக.

சமன்பாடு 1	சமன்பாடு 2
$x^2 - 1 = 0$ $x = \pm\sqrt{1}$ $x = \pm 1$	$x^2 + 1 = 0$ $x = \pm\sqrt{-1}$ $x = \pm ?$

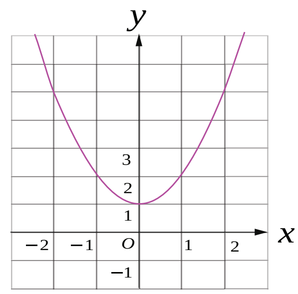
12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 58 07-12-2021 13:36:19



$f(x) = x^2 - 1$

படம் 2.1

சமன்பாடு 1–க்கு $x = -1$ மற்றும் $x = 1$ என்ற இரண்டு மெய் எண் தீர்வுகள் உள்ளன. இச்சமன்பாட்டை தீர்ப்பது என்பதும் $f(x) = x^2 - 1$ என்ற வளைவரையின் x வெட்டுத்துண்டுகளை காண்பதும் ஒன்றுதான் என நமக்குத் தெரியும். இந்த வளைவரை x –அச்சை $(-1, 0)$ மற்றும் $(1, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.



$f(x) = x^2 + 1$

படம் 2.2

இதே வாதத்தின் அடிப்படையில் **சமன்பாடு 2**–க்கு மெய் எண் தீர்வுகள் இல்லை. ஏனெனில், $f(x) = x^2 + 1$ என்ற வளைவரையின் வரைபடத்திலிருந்து, இது x –அச்சை வெட்டாது என்பதனைக் காணலாம்.

இதற்கான காரணம் என்ன வென்றால், ஒரு மெய் எண்ணை வர்க்கப்படுத்தி ஒரு குறை எண்ணைப் பெறுவது என்பது இயலாத காரியமாகும். சமன்பாடு 2 –க்கு தீர்வு இருக்க வேண்டுமானால், வர்க்கப்படுத்தினால் -1 வருமாறு ஒரு கற்பனை எண்ணை உருவாக்க வேண்டும். $\sqrt{-1}$ என்பதைக் கற்பனை அலகு i எனக் குறிப்பிடுகின்றோம். இதிலிருந்து $i^2 = -1$ எனப் பெறலாம். இந்த உண்மையைப் பயன்படுத்தி கற்பனை எண் i –ன் அடுக்குகளின் மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

2.1.1 கற்பனை அலகு i -இன் அடுக்குகள் (Powers of imaginary unit i)

$i^0 = 1,\ i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 i = -i$	$i^4 = i^2 i^2 = 1$
$(i)^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{(i)^2} = -i$	$(i)^{-2} = -1$	$(i)^{-3} = i$	$(i)^{-4} = 1 = i^4$

இதிலிருந்து n –ஒரு முழு எண் எனில், i^n –க்கு நான்கு வெவ்வேறான மதிப்புகள் மட்டுமே உள்ளது என்பதை அறியலாம். இம்மதிப்புகளானது n –ஐ 4–ஆல் வகுப்பதால் கிடைக்கும் மீதிகள் 0, 1, 2, மற்றும் 3 ஆகியவற்றை பொருத்து அமைகின்றது. முழு எண் n ஆனது $n \le -4$ மற்றும் $n \ge 4$, ஆக இருக்கும் போது, வகுத்தல் கொள்கையின்படி $n = 4q + k$, $0 \le k < 4$, இங்கு k மற்றும் q ஆனது ஆகியவை முழு எண்கள். இதிலிருந்து

$$(i)^n = (i)^{4q+k} = (i)^{4q}(i)^k = \left((i)^4\right)^q (i)^k = (1)^q (i)^k = (i)^k$$

எடுத்துக்காட்டு 2.1

கீழ்க்காண்பவைகளை சுருக்குக.

(i) i^7 (ii) i^{1729} (iii) $i^{-1924} + i^{2018}$ (iv) $\sum_{n=1}^{102} i^n$ (v) $i\, i^2\, i^3 \cdots i^{40}$

தீர்வு

(i) $(i)^7 = (i)^{4+3} = (i)^3 = -i$ (ii) $i^{1729} = i^{1728}\, i^1 = i$

(iii) $(i)^{-1924} + (i)^{2018} = (i)^{-1924+0} + (i)^{2016+2} = (i)^0 + (i)^2 = 1 - 1 = 0$

(iv) $\sum_{n=1}^{102} i^n = \left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\left(i^5+i^6+i^7+i^8\right)+\cdots+\left(i^{97}+i^{98}+i^{99}+i^{100}\right)+i^{101}+i^{102}$

$= \left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\cdots+\left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+i^1+i^2$

$= \{i+(-1)+(-i)+1\}+\{i+(-1)+(-i)+1\}+\cdots\ldots+\{i+(-1)+(-i)+1\}+i+(-1)$

$= 0+0+\cdots 0+i-1 = -1+i$ (இது என்ன எண்?)

(v) $i\,i^2\,i^3\cdots i^{40} = i^{1+2+3+\cdots+40} = i^{\frac{40\times 41}{2}} = i^{820} = i^0 = 1.$ ■

முடிவு: i– ன் நான்கு தொடர்ச்சியான அடுக்குகளின் கூடுதல் பூச்சியமாகும். $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$

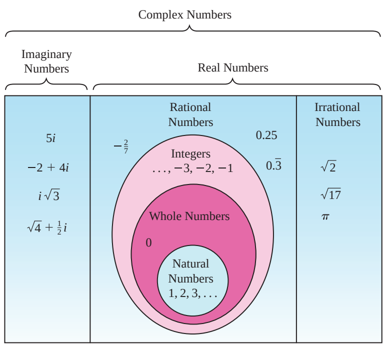
குறிப்பு

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ என்பது a, b ஆகியவற்றில் குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது குறையற்றதாக இருந்தால் மட்டும் உண்மை ஆகும்.

உதாரணமாக, $6 = \sqrt{36} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{(-4)}\sqrt{(-9)} = (2i)(3i) = 6i^2 = -6$ என்ற முரண்பாடானது $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{(-4)}\sqrt{(-9)}$ என எடுத்துக் கொண்டதால் தான் நாம் இவ்வாறான முரண்பாட்டை பெறுகிறோம். எனவே $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ என்பது a, b ஆகியவற்றில் குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது குறையற்றதாக இருந்தால் மட்டுமே உண்மை ஆகும்.

(ii) $y \in \mathbb{R}$ –க்கு $y^2 \geq 0$.

ஆகவே,
$$\sqrt{(-1)(y^2)} = \sqrt{(y^2)(-1)}$$
$$\sqrt{(-1)}\sqrt{(y^2)} = \sqrt{(y^2)}\sqrt{(-1)}$$
$$iy = yi.$$



பயிற்சி 2.1

பின்வருவனவற்றை சுருக்குக :

1. $i^{1947} + i^{1950}$
2. $i^{1948} - i^{-1869}$
3. $\sum_{n=1}^{12} i^n$
4. $i^{59} + \frac{1}{i^{59}}$
5. $i\,i^2 i^3 \cdots i^{2000}$
6. $\sum_{n=1}^{10} i^{n+50}$

2.2 கலப்பு எண்கள் (Complex Numbers)

நாம், $x^2+1=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தொகுப்பில் தீர்வு இல்லை என்பதை கண்டோம். பொதுவாக, மெய் தீர்வுகள் இல்லாத மெய் எண் குணகங்களை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகள் பல உள்ளன. இவ்வாறான பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை உள்ளடக்க மெய் எண் தொகுப்பானது விரிவுபடுத்தப்படுகின்றது. இக்காரணத்திற்காக கணிதவியல் அறிஞர்கள் கலப்பெண்கள் என்ற எண்களின் தொகுப்பை வரையறுக்கத் தூண்டப்பட்டனர்.

இப்பகுதியில் நாம் கீழ்காண்பவைகளை வரையறுப்போம்.

(i) செவ்வக வடிவில் கலப்பெண்கள் (ii) துருவ வடிவம்

(iii) கலப்பெண்களின் மீதான இயற்கணிதச் செயல்பாடுகள்

கலப்பெண்கள் தொகுப்பு என்பது கற்பனை அலகு i கொண்டு விரிவாக்கம் செய்யப்பட்ட மெய் எண் தொகுப்பின் விரிவாக்கமாகும்.

மெய் எண்கள் x மற்றும் y, $i^2=-1$ என்ற பண்பை கொண்ட கற்பனை அலகு i உடன் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் செயலிகளின் துணை கொண்டு $x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணை பெறலாம். இதில் '+' என்ற குறியீட்டை வெக்டர்களின் கூட்டலாக கருத வேண்டும். இதனை அறிமுகப்படுத்தியவர் கார்ல் ப்ரீட்ரிக் காஸ் (1777-1855).

2.2.1 செவ்வக வடிவம் (Rectangular form)

வரையறை 2.1 (ஒரு கலப்பெண்ணின் செவ்வக வடிவம்)

ஒரு கலப்பெண்ணின் செவ்வக வடிவம் என்பது $x+iy$ (அல்லது $x+yi$) ஆகும். இங்கு x மற்றும் y ஆகியவை மெய் எண்களாகும். இதில் x என்பது கலப்பெண்ணின் மெய்ப் பகுதி எனவும் y என்பது கற்பனைப் பகுதி எனவும் அழைக்கப்படுகின்றது.

$x=0$ எனில், கலப்பெண்ணானது முழுவதும் கற்பனை எண் ஆகும். $y=0$ எனில், கலப்பெண்ணானது முழுவதும் மெய் எண் ஆகும். பூஜ்ஜியம் மட்டும் தான் ஒரே நேரத்தில் மெய் எண்ணாகவும் முழுவதும் கற்பனை எண்ணாகவும் இருக்கும். ஒரு கலப்பெண்ணின் திட்ட செவ்வக வடிவம் $x+iy$ -ஐ z எனக்குறிப்பது வழக்கம். மேலும் $x=\text{Re}(z)$ எனவும் $y=\text{Im}(z)$ எனவும் குறிக்கலாம். உதாரணமாக, $\text{Re}(5-i7)=5$ மற்றும் $\text{Im}(5-i7)=-7$ ஆகும்.

$\alpha+i\beta,\ \beta\neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்களை கற்பனை எண்கள் (மெய்யற்ற கலப்பெண்கள்) என்கிறோம்.

இரு கலப்பெண்கள் எந்த நிலையில் சமம் எனலாம் என்பதை பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

வரையறை 2.2

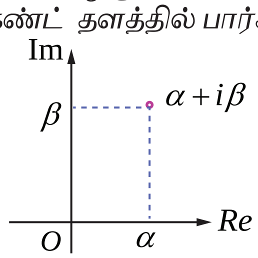
இரண்டு கலப்பெண்கள் $z_1=x_1+iy_1$ மற்றும் $z_2=x_2+iy_2$ ஆகியவை சமமாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\text{Re}(z_1)=\text{Re}(z_2)$ மற்றும் $\text{Im}(z_1)=\text{Im}(z_2)$. அதாவது $x_1=x_2$ மற்றும் $y_1=y_2$.

உதாரணமாக, $\alpha+i\beta=-7+3i$ எனில், $\alpha=-7$ மற்றும் $\beta=3$ ஆகும்.

2.2.2 ஆர்கண்ட் தளம் (Argand plane)

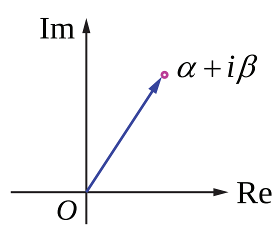
ஒரு கலப்பெண் $z=x+iy$ -ஐ ஒரே ஒரு வழியில் (x,y) என்ற மெய் எண்களின் வரிசை ஜோடிகளாக எழுதலாம். $3-8i$, 6 மற்றும் $-4i$ ஆகிய கலப்பெண்களை முறையே $(3,-8)$, $(6,0)$, மற்றும் $(0,-4)$ என வரிசை ஜோடிகளாக எழுதலாம். இவ்வாறாக $z=x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணை (x,y) என்ற புள்ளியால் ஆய அச்சுத் தளத்தில் தொடர்புபடுத்தலாம். நாம் x அச்சை மெய் அச்சாகவும், y அச்சை கற்பனை அச்சாகவும் கொண்டால் xy -தளத்தை கலப்பெண் தளம் அல்லது ஆர்கண்ட் தளம் என்கிறோம். ஆர்கண்ட் தளம் என்ற பெயரானது சுசர்லாந்தைச் சேர்ந்த கணிதவியலாளர் ஜென் ஆர்கன்ட்(1768 – 1822) என்பவரின் நினைவாக பெயரிடப்பட்டுள்ளது.

ஒரு கலப்பெண்ணானது ஒரு புள்ளியை மட்டுமே குறிப்பது இல்லை, மேலும் ஆதியிலிருந்து அப்புள்ளியை குறிக்கும் நிலை வெக்டராகவும் இதனைப் பார்க்கலாம். அந்த எண், அந்த புள்ளி, மற்றும் அந்த வெக்டர் ஆகியவற்றை அணைத்தையும் z என்ற ஒரே எழுத்தால் குறிக்கலாம். வழக்கமாக இணையான நகர்த்தல் மூலம் வெக்டர்களை எவ்வாறு கையாளுவோமோ அதே போல் இங்கும் செய்யலாம். இப்பாடப்பகுதியில், $\mathbb{C}$ என்பது கலப்பெண்களின் கணத்தைக் குறிக்கின்றது. வரைபடம் வாயிலாக ஒரு கலப்பெண்ணினை $\mathbb{R}^2$ -ல் ஒரு புள்ளியாகவோ அல்லது ஒரு வெக்டராகவோ ஆர்கண்ட் தளத்தில் பார்க்கலாம்.



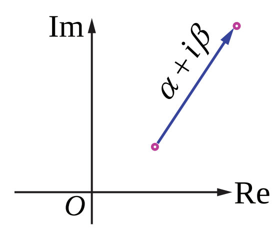
ஒரு புள்ளியாக கலப்பெண்

படம் 2.3



ஆதியிலிருந்து அப்புள்ளியை குறிக்கும் நிலை வெக்டராக கலப்பெண்

படம் 2.4

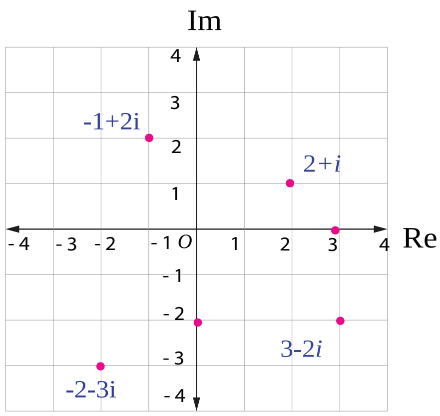


ஒரு வெக்டராக கலப்பெண்

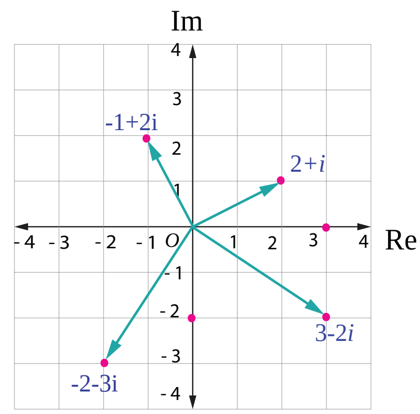
படம் 2.5

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 2.1

$2+i,\ -1+2i,\ 3-2i,\ 0-2i,\ 3+\sqrt{-2},\ -2-3i,\ \cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$, மற்றும் $3+0i$ ஆகியவை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



புள்ளிகளாக கலப்பெண்கள்
படம் 2.6



நிலை வெக்டர்களாக கலப்பெண்கள்
படம் 2.7

2.2.3 கலப்பெண்களின் மீதான இயற்கணிதச் செயல்பாடுகள் (Algebraic operations on complex numbers)

இப்பாடப் பகுதியில், மெய் எண்களின் மீதான பண்புகளை கொண்டு கலப்பெண்களின் இயற்கணித பண்புகளையும் அவற்றின் வடிவியல் அமைப்புகளையும் காண்போம்.

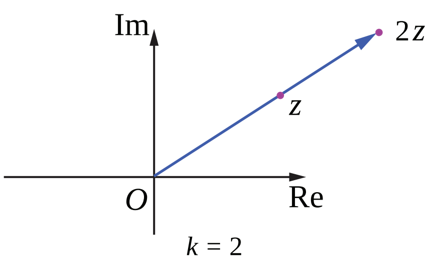
(i) கலப்பெண்ணின் திசையிலிப் பெருக்கம்

$z = x + iy$ மற்றும் $k \in \mathbb{R}$, எனில்

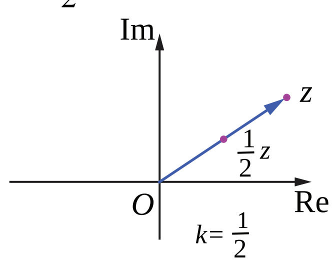
$k\,z = (kx) + (ky)i$ என வரையறுப்போம்.

குறிப்பாக $0\,z = 0$, $1z = z$ மற்றும் $(-1)z = -z$ ஆகும்.

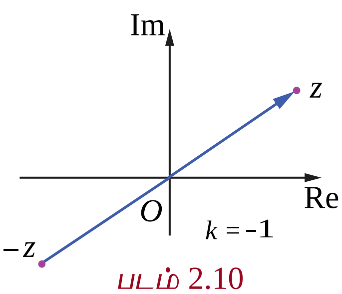
kz–ன் வரைபடங்கள் $k = 2, \frac{1}{2}, -1$ ஆகியவற்றிற்கு கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



படம் 2.8



படம் 2.9



படம் 2.10

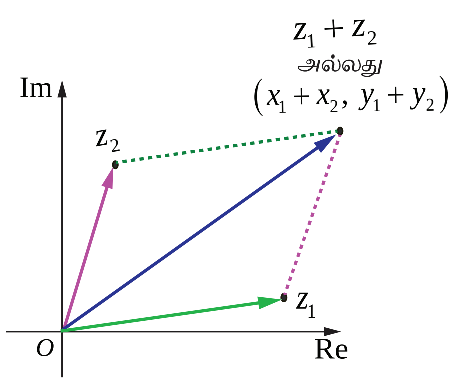
(ii) கலப்பெண்களின் கூட்டல்

$z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$, இங்கு x_1, x_2, y_1, மற்றும் $y_2 \in \mathbb{R}$ எனில்,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

என வரையறுப்போம். ஏற்கனவே நாம் ஒரு வெக்டரை இணையாக நகர்த்துவதால் அதன் எண் மதிப்பும் திசையும் மாறாது எனக் கண்டுள்ளோம். $z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ எனும் போது வெக்டர் கூட்டலின் இணைகரவிதிப்படி அதன் கூடுதல் $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ ஆனது $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ என்ற புள்ளியுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகின்றது. இப்புள்ளியை ஆயத்தொலைகளாகக் கொண்ட வெக்டராகவும் இதனைப் பார்க்கலாம். ஆகவே, z_1, z_2, மற்றும் $z_1 + z_2$ ஆகியவற்றை வரைபடம் வாயிலாக கலப்பெண் தளத்தில் படம் 2.11–ல் உள்ளவாறு காணலாம்.



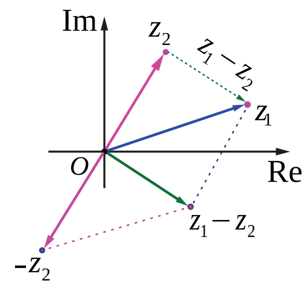
படம் 2.11

(iii) கலப்பெண்களின் கழித்தல்

இதுபோலவே $z_1 - z_2$ என்ற கலப்பெண்ணை ஆதிப்புள்ளியை ஆரம்பப்புள்ளியாகவும் $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$ யை இறுதிப்புள்ளியாகவும் கொண்ட வெக்டராக இதனைப் பார்க்கலாம்.

$$
\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \\
&= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)
\end{aligned}
$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$



படம் 2.12

மிக முக்கியமானது என்னவென்றால் $z_1 - z_2$ என்ற வெக்டரை z_2-ஐ ஆரம்பப் புள்ளியாகவும் z_1-ஐ முடிவுப் புள்ளியாகவும் கொண்ட வெக்டராகவும் இதனைப் பார்க்கலாம் என்பதாகும். இந்த வகையான குறிப்பிடுதலானது எந்த வகையிலும் கழித்தலின் கருத்துருவை மாற்றுவதில்லை. z_1 மற்றும் z_2 -ஐ இணைக்கும் கழித்தல் வெக்டரானது புள்ளிக்கோடுகளால் (பச்சை) காட்டப்பட்டுள்ளது.

(iv) கலப்பெண்களின் பெருக்கல்

z_1 மற்றும் z_2 என்ற கலப்பெண்களின் பெருக்கல் ஆனது

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)
\end{aligned}
$$

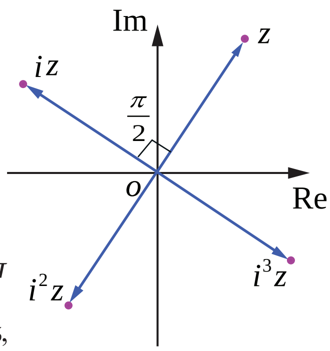
$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

z_1 மற்றும் z_2-ஐப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் கலப்பெண்ணும் ஒரு வெக்டரை குறிப்பதோடு மட்டுமல்லாமல் அவ்வெக்டரானது z_1 மற்றும் z_2 ஆகிய வெக்டர்கள் அமைந்த தளத்திலேயே அமையும் இதிலிருந்து இந்த கலப்பெண்களின் பெருக்கம் வெக்டர் இயற்கணிதத்தில் உள்ள வெக்டர்களின் திசையிலி பெருக்கத்தையோ அல்லது வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கத்தையோ குறிப்பிடுவது அல்ல என அறியலாம்.

மேற்குறிப்பு

கலப்பெண் z ஐ i ஆல் பெருக்குதல்.

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy, \text{ என்க.} \\
iz &= i(x + iy) \\
&= -y + ix.
\end{aligned}
$$



படம் 2.13

கலப்பெண் iz என்பது கலப்பெண் z-ஐ 90° அல்லது $\frac{\pi}{2}$ ரேடியன் கடிகார எதிர்திசையில் ஆதியை பொருத்து சுழற்றுவது ஆகும். பொதுவாக, எந்த கலப்பெண் z-ஐயும் தொடர்ச்சியாக iஆல் பெருக்குவதால் தொடர்ச்சியாக 90° கடிகார எதிர்திசையில் ஆதியை பொருத்து சுழற்றப்படும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 2.2

$z_1 = 6 + 7i$ மற்றும் $z_2 = 3 - 5i$ எனில் $z_1 + z_2$ மற்றும் $z_1 - z_2$ ஆகியவை

(i)
$$
\begin{aligned}
(3 - 5i) + (6 + 7i) &= (3 + 6) + (-5 + 7)i = 9 + 2i \\
(6 + 7i) - (3 - 5i) &= (6 - 3) + (7 - (-5))i = 3 + 12i.
\end{aligned}
$$

$z_1 = 2 + 3i$ மற்றும் $z_2 = 4 + 7i$ எனில் z_1z_2 ஆனது

(ii)
$$
\begin{aligned}
(2 + 3i)(4 + 7i) &= 2\times4 + 2\times7i + 4\times3i + 3\times7i^2 \\
&= 8 + 14i + 12i + 21\times(-1) \\
&= (8 - 21) + (14 + 12)i = -13 + 26i.
\end{aligned}
$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2

$(2+i)x+(1-i)y+2i-3$ மற்றும் $x+(-1+2i)y+1+i$ ஆகிய கலப்பெண்கள் சமம் எனில் x மற்றும் y-ன் மெய்மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$z_1 = (2+i)x+(1-i)y+2i-3 = (2x+y-3)+i(x-y+2) \text{ மற்றும்}$$

$$z_2 = x+(-1+2i)y+1+i = (x-y+1)+i(2y+1) \text{ என்க.}$$

$$z_1 = z_2 \text{ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.}$$

எனவே, $(2x+y-3)+i(x-y+2)=(x-y+1)+i(2y+1)$.

மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த

$$2x+y-3 = x-y+1 \quad \Rightarrow \quad x+2y=4$$

$$x-y+2 = 2y+1 \quad \Rightarrow \quad x-3y=-1$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

$x=2$ மற்றும் $y=1$ எனப்பெறலாம். ■

பயிற்சி 2.2

1. $z=5-2i$ மற்றும் $w=-1+3i$ எனக்கொண்டு கீழ்க்காண்பவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $z+w$ (ii) $z-iw$ (iii) $2z+3w$

   (iv) zw (v) $z^2+2zw+w^2$ (vi) $(z+w)^2$.

2. $z=2+3i$ எனக்கொண்டு கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்க.

   (i) z, iz, மற்றும் $z+iz$ (ii) z, $-iz$, மற்றும் $z-iz$.

3. $(3-i)x-(2-i)y+2i+5$ மற்றும் $2x+(-1+2i)y+3+2i$ ஆகிய கலப்பெண்கள் சமம் எனில் x மற்றும் y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

2.3 கலப்பெண்களின் அடிப்படை இயற்கணிதப் பண்புகள்
(Basic Algebraic Properties of Complex Numbers)

கலப்பெண்களின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் பண்புகள் மெய் எண்களின் பண்புகளைப் போலவே இருக்கும். கீழே சில அடிப்படை இயற்கணித பண்புகளை பட்டியலிட்டுள்ளோம். அவற்றில் சிலவற்றை சரிபார்த்துள்ளோம்.

2.3.1 கலப்பு எண்களின் பண்புகள் (Properties of complex numbers)

கலப்பு எண்கள் கூட்டலைப் பொருத்து கீழ்க்காணும் பண்புகளை நிறைவு செய்யும்.	கலப்பு எண்கள் பெருக்கலைப் பொருத்து கீழ்க்காணும் பண்புகளை நிறைவு செய்யும்.
(i) அடைவுப் பண்பு z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு இவற்றின் கூடுதல் z_1+z_2 -யும் ஒரு கலப்பெண் ஆகும்.	(i) அடைவுப் பண்பு z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுககு இவற்றின் பெருக்கல் $z_1 z_2$ -யும் ஒரு கலப்பெண் ஆகும்.

(ii) **பரிமாற்றுப் பண்பு** z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.	(ii) **பரிமாற்றுப் பண்பு** z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
(iii) **சேர்ப்புப் பண்பு** z_1, z_2, மற்றும் z_3 என்ற ஏதேனும் மூன்று கலப்பெண்களுக்கு $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.	(iii) **சேர்ப்புப் பண்பு** z_1, z_2, மற்றும் z_3 என்ற ஏதேனும் மூன்று கலப்பெண்களுக்கு $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.
(iv) **கூட்டல் சமனி** எந்த ஒரு கலப்பெண் z -க்கும் $0 = 0 + 0i$ என்ற ஒரு கலப்பெண்ணினை $z + 0 = 0 + z = z$ என்றவாறு காணலாம். $0 = 0 + 0i$ என்ற கலப்பெண்ணினை கூட்டல் சமனி என்கிறோம்.	(iv) **பெருக்கல் சமனி** எந்த ஒரு கலப்பெண் z -க்கும் $1 = 1 + 0i$ என்ற ஒரு கலப்பெண்ணினை $z1 = 1z = z$ என்றவாறு காணலாம். $1 = 1 + 0i$ என்ற கலப்பெண்ணினை பெருக்கல் சமனி என்கிறோம்.
(v) **கூட்டல் நேர்மாறு** எந்த ஒரு கலப்பெண் z -க்கும் $-z$ என்ற ஒரு கலப்பெண்ணினை, $z + (-z) = (-z) + z = 0$ என்றவாறு காணலாம். z -ன் கூட்டல் நேர்மாறு $-z$ என்கிறோம்.	(v) **பெருக்கல் நேர்மாறு** எந்த ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற கலப்பெண் z -க்கும் w என்ற ஒரு கலப்பெண்ணினை $zw = wz = 1$ என்றவாறு காணலாம். z -ன் பெருக்கல் நேர்மாறு w ஆகும். w -வை z^{-1} எனக் குறிப்பர்.
(vi) **பங்கீட்டு விதி (கூட்டலின் மேல் பெருக்கலின் பங்கீட்டு விதி)** z_1, z_2, மற்றும் z_3 என்ற ஏதேனும் மூன்று கலப்பெண்களுக்கு $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ மற்றும் $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ ஆகும்.	

இவற்றில் சிலவற்றை கீழே நிறுவுவோம்.

பண்பு

கூட்டலின் பரிமாற்று விதி

ஏதேனும் இரு கலப்பெண்கள் z_1 மற்றும் z_2 -விற்கு $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ என பெறலாம்.

நிரூபணம்

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, இங்கு x_1, x_2, y_1, மற்றும் $y_2 \in \mathbb{R}$ என்க.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) \qquad (\because x_1, x_2, y_1, \text{ மற்றும் } y_2 \in \mathbb{R}) \\ &= (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

■

பண்பு

பெருக்கலுக்கான நேர்மாறுப் பண்பு

பூஜ்ஜியமற்ற எந்த ஒரு கலப்பெண் $z = x + iy$ -க்கும் பெருக்கல் நேர்மாறானது

$\dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ ஆகும்.

நிரூபணம்

பெருக்கல் நேர்மாறு கூட்டல் நேர்மாறைப்போல வெளிப்படையாகக் காண இயலாது.

$z^{-1} = u + iv$ என்பது $z = x + iy$ –ன் நேர்மாறு என்க.

$$zz^{-1} = 1 \text{ என்பதால்}$$
$$(x+iy)(u+iv) = 1$$
$$(xu - yv) + i(xv + uy) = 1 + i0$$

மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த

$$xu - yv = 1 \text{ மற்றும் } xv + uy = 0 .$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை u மற்றும் v –க்குத் தீர்க்க நாம்

$u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ மற்றும் $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ எனப்பெறலாம் ($\because$ z பூஜ்ஜியமற்றது $\Rightarrow x^2 + y^2 > 0$)

$z = x + iy$, எனில் $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ ஆகும்.

($\because z = 0$ எனும்போது z^{-1} வரையறுக்கப்படவில்லை). ■

இதிலிருந்து z என்ற கலப்பெண்ணின் நேர்மாறு z^{-1} –ஐப் பெறலாம். z என்ற கலப்பெண்ணின் நேர்மாறை வசதிக்காக $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ என நாம் பயன்படுத்துகிறோம். z_1 மற்றும் z_2 என்ற இரு கலப்பெண்களில் $z_2 \neq 0$ எனில், z_1 மற்றும் $\dfrac{1}{z_2}$ –ன் பெருக்கற்பலனை $\dfrac{z_1}{z_2}$ என குறிப்பிடுகின்றோம். இதுபோலவே மற்ற பண்புகளையும் நாம் சரிபார்க்கலாம். அடுத்த பாடப் பகுதியில், நாம் ஒரு கலப்பெண்ணின் இணைக் கலப்பெண்ணினை வரையறுப்போம். இது ஒரு கலப்பெண்ணின் நேர்மாறை எளிதாக காண நமக்கு பயன்படும்.

கலப்பு எண்கள் அடுக்குக் குறியீட்டின் விதிகளை நிறைவு செய்யும்

(i) $z^m z^n = z^{m+n}$ (ii) $\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$, $z \neq 0$ (iii) $\left(z^m\right)^n = z^{mn}$ (iv) $\left(z_1 z_2\right)^m = z_1^{\,m} z_2^{\,m}$

பயிற்சி 2.3

1. $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4i$, மற்றும் $z_3 = 5$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

   (i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

2. $z_1 = 3$, $z_2 = -7i$, மற்றும் $z_3 = 5 + 4i$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

   (i) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (ii) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

3. $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -3 - 4i$, மற்றும் $z_3 = 1 + i$ எனில் z_1, z_2 , மற்றும் z_3 ஆகியவற்றின் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் நேர்மாறுகளைக் காண்க.

2.4 ஒரு கலப்பெண்ணின் இணைக் கலப்பெண்
(Conjugate of a Complex Number)

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் ஒரு கலப்பெண்ணின் இணைக் கலப்பெண், அதனை வரைபடத்தில் குறித்தல், மேலும் அதன் பண்புகளைப் பொருத்தமான உதாரணங்களுடன் காண்போம்.

வரையறை 2.3

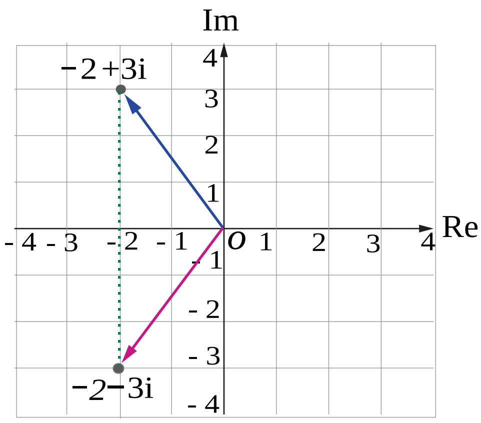
$x + iy$ என்ற கலப்பெண்ணின் இணைக் கலப்பெண் $x - iy$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

z என்ற கலப்பெண்ணின் இணைக்கலப்பெண் $\overline{z}$ என குறிப்பிடப்படுகின்றது. z -ன் இணைக்கலப்பெண்ணை பெறுவதற்கு i -க்குப் பதிலாக $-i$ -ஐ z -ல் பிரதியிட வேண்டும். உதாரணமாக $2-5i$ என்ற கலப்பெண்ணின் இணைக்கலப்பெண் $2+5i$ ஆகும். ஒரு கலப்பெண்ணையும் அதன் இணைக் கலப்பெண்ணையும் பெருக்க ஒரு மெய் எண் கிடைக்கும். உதாரணமாக,

(i) $(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2$ (ii) $(1+3i)(1-3i)=(1)^2-(3i)^2=1+9=10$.

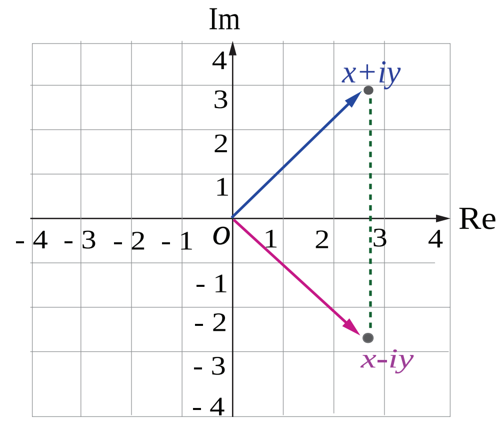
வரைபடத்தின் வாயிலாக ஒரு கலப்பெண் z-ன் இணைக் கலப்பெண்ணினை மெய் அச்சின் மீது z-ன் பிரதிபலிப்பு எனலாம்.

2.4.1 ஒரு கலப்பெண்ணின் இணை எண்ணின் வடிவ கணித விளக்கம் (Geometrical representation of conjugate of a complex number)



ஒரு கலப்பெண்ணின் இணைக் கலப்பெண்

படம் 2.14



ஒரு கலப்பெண்ணின் இணைக் கலப்பெண்

படம் 2.15

குறிப்பு

$x+iy$ மற்றும் $x-iy$ என்ற இரு கலப்பெண்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணை ஆகும். இணை எண்கள் கலப்பெண்களை வகுக்கும் போது பயன்படுகிறது. ஒரு கலப்பெண்ணின் பகுதியில் மெய் எண்ணைப் பெற தொகுதி மற்றும் பகுதிகளை பகுதியில் உள்ள கலப்பெண்ணின் இணை எண்ணால் பெருக்க வேண்டும். இதனை பகுதியில் உள்ள விகிதமுறா மூலத்தை விகிதமுறு எண்ணாக்கும் முறையுடன் ஒப்பிடலாம்.

2.4.2 இணைக் கலப்பெண்களின் பண்புகள் (Properties of Complex Conjugates)

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2\neq 0$

(5) $\text{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

(6) $\text{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{(z^n)}=\left(\overline{z}\right)^n$, இங்கு n ஒரு முழு எண்

(8) z ஒரு மெய் எண் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $z=\overline{z}$

(9) z ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $z=-\overline{z}$

(10) $\overline{\overline{z}}=z$

இவற்றில் சில பண்புகளை நிறுவுவோம்.

பண்பு

ஏதேனும் இரு கலப்பெண்கள் z_1 மற்றும் z_2 -விற்கு $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ என பெறலாம்.

நிரூபணம்

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, மற்றும் x_1, x_2, y_1, மற்றும் $y_2 \in \mathbb{R}$ என்க.

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

இதனை கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான கலப்பெண்களுக்கும் இதனை விரிவுபடுத்தலாம். $\overline{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \cdots + \overline{z_n}$ ■

பண்பு

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ இங்கு x_1, x_2, y_1, மற்றும் $y_2 \in \mathbb{R}$.

நிரூபணம்

$z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ என்க.

ஆகவே, $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

எனவே, $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$,

மேலும் $\overline{z}_1\overline{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

ஆகவே, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$. ■

பண்பு

z ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $z = -\overline{z}$.

நிரூபணம்

$z = x + iy$ என்க. வரையறையின்படி $\overline{z} = x - iy$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} \text{எனவே, } z &= -\overline{z} \\ \Leftrightarrow \quad x + iy &= -(x - iy) \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ z ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண்.

இதுபோலவே, இணைக் கலப்பெண்களின் மற்ற பண்புகளையும் நிறுவலாம். ■

எடுத்துக்காட்டு 2.3

$\dfrac{3+4i}{5-12i}$ –ஐ $x + iy$ வடிவில் எழுதுக. இதிலிருந்து மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளைக் காண்க.

தீர்வு

$\dfrac{3+4i}{5-12i}$ –ன் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளைக் காண இதனை $x + iy$ என செவ்வக வடிவில் எழுத வேண்டும். இந்த பின்னத்தினை சுருக்க தொகுதி மற்றும் பகுதிகளை பகுதியிலுள்ள கலப்பெண்ணின் இணை கலப்பெண்ணால் பெருக்கி பகுதியில் உள்ள i–ஐ நீக்கலாம்.

$$\begin{aligned}\frac{3+4i}{5-12i} &= \frac{(3+4i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)} \\ &= \frac{(15-48)+(20+36)i}{5^2+12^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{-33+56i}{169} = -\frac{33}{169} + i\frac{56}{169}.$$

$$\frac{3+4i}{5-12i} = -\frac{33}{169} + i\frac{56}{169}$$ என்பது $x+iy$ வடிவில் உள்ளது.

ஆகவே மெய்பகுதி $-\frac{33}{169}$ மற்றும் கற்பனை பகுதி $\frac{56}{169}$.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ ஐ செவ்வக வடிவில் சுருக்குக.

தீர்வு

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i,$$

மேலும் $$\frac{1-i}{1+i} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1} = \frac{1}{i} = -i.$$

எனவே, $$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1-i}\right)^3 = i^3 - (-i)^3 = -i - i = -2i.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$ எனில், கலப்பெண் z -ஐ செவ்வக வடிவில் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$$ என்பதால்

$$\Rightarrow 2(z+3) = (1+4i)(z-5i)$$

$$\Rightarrow 2z+6 = (1+4i)z + 20 - 5i$$

$$\Rightarrow (2-1-4i)z = 20-5i-6$$

$$\Rightarrow z = \frac{14-5i}{1-4i} = \frac{(14-5i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{34+51i}{17} = 2+3i.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6

$z_1 = 3-2i$ மற்றும் $z_2 = 6+4i$ எனில் $\frac{z_1}{z_2}$ -ஐ செவ்வக வடிவில் காண்க.

தீர்வு

z_1 மற்றும் z_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை பிரதியிட,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{6+4i} = \frac{3-2i}{6+4i} \times \frac{6-4i}{6-4i}$$

$$= \frac{(18-8)+i(-12-12)}{6^2+4^2} = \frac{10-24i}{52} = \frac{10}{52} - \frac{24i}{52}$$

$$= \frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.7

$z=(2+3i)(1-i)$ எனில் z^{-1} -ஐக் காண்க.

தீர்வு

$$z = (2+3i)(1-i) = (2+3)+(3-2)i = 5+i$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{5+i}\,.$$

தொகுதி மற்றும் பகுதியை பகுதியின் இணை எண்ணால் பெருக்க

$$z^{-1} = \frac{(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{5-i}{5^2+1^2} = \frac{5}{26} - i\frac{1}{26}$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{5}{26} - i\frac{1}{26}\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

நிறுவுக (i) $\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$ ஒரு மெய் எண் மற்றும்

(ii) $\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை எண்

தீர்வு

(i) $$z = \left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10} \text{ என்க.}$$

இதிலிருந்து, $$\bar{z} = \overline{\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}}$$

$$= \overline{\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}}+\overline{\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}} \qquad \left(\because\ \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)$$

$$= \left(\overline{2+i\sqrt{3}}\right)^{10}+\left(\overline{2-i\sqrt{3}}\right)^{10} \qquad \left(\because \overline{\left(z^n\right)}=\left(\bar{z}\right)^n\right)$$

$$= \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10} = z$$

$\bar{z} = z \Rightarrow z$ ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

(ii) $$z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15} \text{ என்க.}$$

இங்கு, $$\frac{19+9i}{5-3i} = \frac{(19+9i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}$$

$$= \frac{(95-27)+i(45+57)}{5^2+3^2} = \frac{68+102i}{34}$$

$$= 2+3i\,. \qquad (1)$$

மற்றும், $$\frac{8+i}{1+2i} = \frac{(8+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{(8+2)+i(1-16)}{1^2+2^2} = \frac{10-15i}{5}$$

$$= 2-3i\,. \qquad (2)$$

இப்பொழுது, $z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$

$\Rightarrow \quad z = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}$. ((1) மற்றும் (2)லிருந்து)

வரையறையிலிருந்து, $\overline{z} = \left(\overline{(2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}}\right)$

$= \left(\overline{2+3i}\right)^{15} - \left(\overline{2-3i}\right)^{15}$ (இணை எண் பண்புகளின்படி)

$= (2-3i)^{15} - (2+3i)^{15} = -\left((2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}\right)$

$\Rightarrow \quad \overline{z} = -z$.

ஆகவே, $z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை எண் ஆகும்.

பயிற்சி 2.4

1. கீழ்காண்பவற்றை செவ்வக வடிவில் எழுதுக:

   (i) $\overline{(5+9i)+(2-4i)}$ (ii) $\frac{10-5i}{6+2i}$ (iii) $\overline{3i}+\frac{1}{2-i}$

2. $z = x+iy$ எனில், கீழ்க்காண்பவைகளின் செவ்வக வடிவினைக் காண்க.

   (i) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ (ii) $\text{Re}(i\overline{z})$ (iii) $\text{Im}(3z+4\overline{z}-4i)$

3. $z_1 = 2-i$ மற்றும் $z_2 = -4+3i$ எனில் z_1z_2 மற்றும் $\frac{z_1}{z_2}$ –ன் நேர்மாறைக் காண்க.

4. கலப்பெண்கள் u, v, மற்றும் w ஆகியவை $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ என்றவாறு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. $v = 3-4i$ மற்றும் $w = 4+3i$ எனில் u –ஐ செவ்வக வடிவில் எழுதுக.

5. கீழ்க்காணும் பண்புகளை நிறுவுக :

   (i) z ஒரு மெய் எண் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $z = \overline{z}$

   (ii) $\text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ மற்றும் $\text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

6. $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ ஆனது n –ன் எந்த மீச்சிறு மிகை முழு எண் மதிப்புகளுக்கு (i) மெய் (ii) முழுவதும் கற்பனை எண்களாக இருக்கும்?

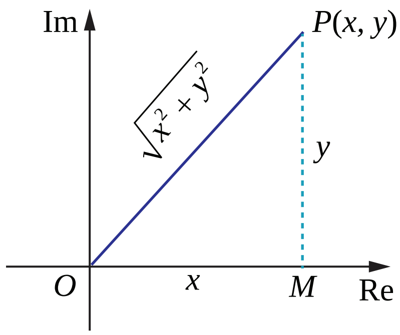
7. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

   (i) $\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10} - \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை

   (ii) $\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ என்பது மெய் எண்.

2.5 ஒரு கலப்பெண்ணின் மட்டு மதிப்பு
(Modulus of a Complex Number)

மெய் எண் நேர்க்கோட்டில் மட்டு மதிப்பு என்பது எவ்வாறு ஆதிக்கும் அந்த எண்ணும் உள்ள தொலைவை குறிக்கிறதோ அதுபோலவே, ஒரு கலப்பெண்ணின் மட்டு என்பது கலப்பெண் தளத்தில் ஆதிக்கும் அந்த எண்ணுக்கும் உள்ள தொலைவை குறிக்கின்றது. ஆதியிலிருந்து ஆரையின் திசையில் $z = x + iy$ -க்கு உள்ள தொலைவு என்பது, ஒரு பக்கம் x மற்றும் மறுபக்கம் y ஆகக் கொண்டு அமைக்கப்படும் செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளத்திற்கு சமமாகும்.



படம் 2.16

வரையறை 2.4

$z = x + iy$ எனில் z -ன் மட்டு மதிப்பினை $|z|$ என குறிப்பிடுகின்றோம். இதனை $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ என வரையறுப்போம்.

உதாரணமாக (i) $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

(ii) $|-12i| = \sqrt{0^2 + (-12)^2} = 12$

(iii) $|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$

குறிப்பு

$z = x + iy$ எனில் $\bar{z} = x - iy$, மேலும் $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = (x)^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

2.5.1 கலப்பெண்ணின் மட்டுக்கான பண்புகள்
(Properties of Modulus of a complex number)

(1) $|z| = |\bar{z}|$

(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (முக்கோணச் சமனிலி)

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

(5) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \ne 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$, இங்கு n ஒரு முழு எண்

(7) $\text{Re}(z) \le |z|$

(8) $\text{Im}(z) \le |z|$

இவற்றில் சில பண்புகளை நாம் நிறுவுவோம்.

பண்பு (முக்கோண சமனிலி - Triangle inequality)

z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ என பெறலாம்.

நிரூபணம்

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \qquad (\because |z|^2 = z\bar{z})$$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \qquad (\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2\bar{z}_2$$

$$= z_1\bar{z}_1 + \left(z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}\right) + z_2\bar{z}_2 \qquad (\because \bar{\bar{z}} = z)$$

$$= |z_1|^2 + 2\,\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \qquad (\because\ 2\,\text{Re}(z) = z + \bar{z})$$

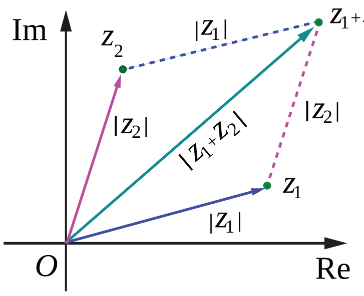
$$\leq |z_1|^2 + 2\left|z_1\overline{z_2}\right| + |z_2|^2 \qquad (\because\ \text{Re}(z) \leq |z|)$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \qquad (\because |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ and } |z| = |\bar{z}|)$$

$$\Rightarrow\ |z_1 + z_2|^2 \leq \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

வடிவக் கணித விளக்கம் (Geometrical interpretation)



படம் 2.17

நாம் இப்பொழுது O, z_1 அல்லது z_2, மற்றும் $z_1 + z_2$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தை கருதுவோம். வடிவியல் வாயிலாக $z_1 + z_2$ உடன் தொடர்புடைய முக்கோணத்தின் பக்கம் மீதமுள்ள இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களின் கூடுதலை விட அதிகமாக இருக்காது என நாம் அறிவோம். இதனால் தான் இந்த பண்பினை "முக்கோண சமனிலி" என்கிறோம். இதனை கணிதத் தொகுத்தறிதலைக் கொண்டு முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான கலப்பெண்களுக்கும் இதனை விரிவுபடுத்தலாம்.

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| \quad \text{இங்கு } n = 2, 3, \cdots.$$

பண்பு z_1 மற்றும் z_2 என்ற கலப்பெண்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் கலப்பெண் தளத்தில் $|z_1 - z_2|$ ஆகும்.

$z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ எனில்

$$|z_1 - z_2| = \left|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i\right|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

மேற்குறிப்பு

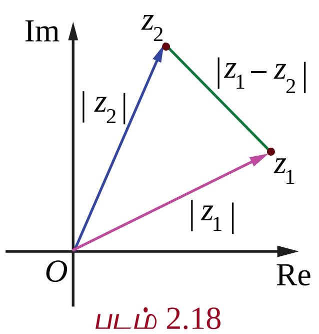
z_1 மற்றும் z_2 என்ற இரு கலப்பெண்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் $|z_1 - z_2|$ ஆகும்.

இதுபோலவே ஆதி, z_1, மற்றும் z_2 ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாக கொண்ட முக்கோணத்தில் மேற்கூறிய வழிமுறையின் படி,

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ மற்றும்}$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$



படம் 2.18

பண்பு பெருக்கலின் எண்ணளவு என்பது எண்ணளவுகளின் பெருக்கல் பலனுக்குச் சமம் ஆகும்

z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரண்டு கலப்பெண்களுக்கு $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ஆகும்.

நிரூபணம்

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) \qquad (\because |z|^2 = z\bar{z})$$

$$= (z_1)(z_2)(\overline{z_1})(\overline{z_2}) \qquad (\because \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2})$$

$$= \left(z_1 \overline{z_1}\right)\left(z_2 \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 |z_2|^2 \qquad (\text{பரிமாற்றுப் பண்புப்படி } z_2 \overline{z_1} = \overline{z_1} z_2)$$

ஆகவே, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

குறிப்பு

கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் இதனை முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான கலப்பெண்களுக்கும் இதனை விரிவுபடுத்தலாம் :

$$|z_1 z_2 z_3 \cdots z_n| = |z_1||z_2||z_3|\cdots|z_n|$$

அதாவது கலப்பெண்களின் பெருக்கற் பலனின் மட்டு மதிப்பு என்பது அக்கலப்பெண்களின் மட்டுகளின் பெருக்கலுக்கு சமம் ஆகும்.

இதுபோலவே கலப்பெண்களின் மட்டுகளின் மீதான மற்ற பண்புகளையும் நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.9

$z_1 = 3+4i,\ z_2 = 5-12i,$ மற்றும் $z_3 = 6+8i$ எனில் $|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_1+z_2|, |z_2-z_3|,$ மற்றும் $|z_1+z_3|$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$|z_1| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$|z_2| = |5-12i| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$$

$$|z_3| = |6+8i| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$$

$$|z_1+z_2| = |(3+4i)+(5-12i)| = |8-8i| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$|z_2-z_3| = |(5-12i)-(6+8i)| = |-1-20i| = \sqrt{401}$$

$$|z_1+z_3| = |(3+4i)+(6+8i)| = |9+12i| = \sqrt{225} = 15$$

எல்லா வகைகளிலும் முக்கோணச் சமனிலி நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளது என்பதைக் காண்க.

$|z_1+z_3| = |z_1| + |z_3| = 15$ (ஏன்?)

எடுத்துக்காட்டு 2.10

கீழ்க்காண்பவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\left|\dfrac{2+i}{-1+2i}\right|$ (ii) $\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right|$ (iii) $\left|\dfrac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right|$

தீர்வு

(i) $$\left|\frac{2+i}{-1+2i}\right| = \frac{|2+i|}{|-1+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = 1. \qquad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\right)$$

(ii) $$\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right| = \left|\overline{(1+i)}\right| |2+3i|\ |4i-3| \qquad \left(\because |z_1 z_2 z_3| = |z_1||z_2||z_3|\right)$$

$$= |1+i|\ |2+3i|\ |-3+4i| \qquad \left(\because |z| = |\overline{z}|\right)$$

$$= \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)\left(\sqrt{(-3)^2+4^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{25}\right) = 5\sqrt{26}.$$

(iii) $$\left|\frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right| = \frac{|i|\ |(2+i)^3|}{|(1+i)^2|} = \frac{1|2+i|^3}{|1+i|^2} = \frac{\left(\sqrt{4+1}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \qquad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.11

$i, -2+i$, மற்றும் 3 ஆகியவற்றில் எந்த கலப்பெண் ஆதியிலிருந்து அதிக தொலைவில் உள்ளது?

தீர்வு

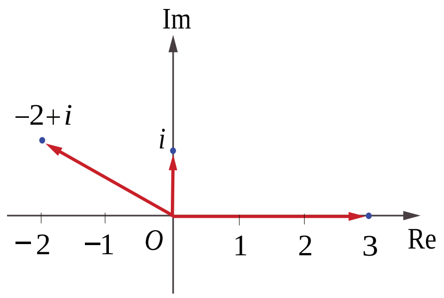
$z = i, -2+i,$ மற்றும் 3 ஆகியவற்றிற்கும் ஆதிக்கும் உள்ள தொலைவுகள்

$$|z| = |i| = 1$$

$$|z| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$|z| = |3| = 3 \text{ ஆகும்.}$$

$1 < \sqrt{5} < 3$ எனவே, ஆதியிலிருந்து அதிக தொலைவில் உள்ள கலப்பெண் 3 ஆகும்.



படம் 2.19

எடுத்துக்காட்டு 2.12

z_1, z_2, மற்றும் z_3 ஆகிய கலப்பெண்கள் $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1 + z_2 + z_3| = 1$ என்றவாறு இருந்தால், $\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right|$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.}$$

$$\text{எனவே, } |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1\overline{z_1} = 1, |z_2|^2 = 1 \Rightarrow z_2\overline{z_2} = 1, \text{ மற்றும் } |z_3|^3 = 1 \Rightarrow z_3\overline{z_3} = 1$$

$$\text{ஆகவே, } \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}, \overline{z_2} = \frac{1}{z_2}, \text{ மற்றும் } \overline{z_3} = \frac{1}{z_3}$$

$$\text{மேலும், } \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right|$$

$$= \left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right| = |z_1 + z_2 + z_3| = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.13

$|z| = 2$ எனில் $3 \le |z+3+4i| \le 7$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு

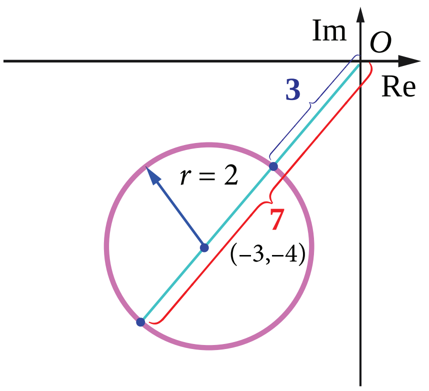
$$|z+3+4i| \le |z| + |3+4i| = 2+5 = 7$$

$$|z+3+4i| \le 7 \qquad (1)$$

$$|z+3+4i| \ge \big||z| - |3+4i|\big| = |2-5| = 3$$

$$|z+3+4i| \ge 3 \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $3 \le |z+3+4i| \le 7$.



படம் 2.20

குறிப்பு

கீழ் மற்றும் மேல் எல்லை மதிப்புகளைக் காண $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ என்ற பண்பை பயன்படுத்த வேண்டும்.

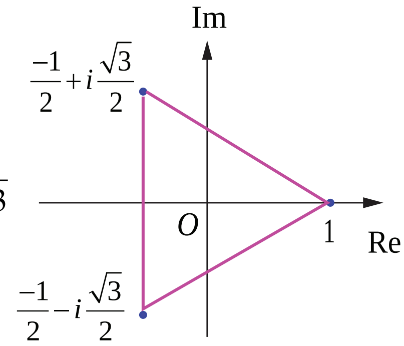
எடுத்துக்காட்டு 2.14

$1,\ \dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, மற்றும் $\dfrac{-1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ என்ற புள்ளிகள் ஒருசமபக்கமுக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு

இதற்கு நாம் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் சமம் என நிறுவினால் போதும்.

$z_1=1,\quad z_2=\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, மற்றும் $z_3=\dfrac{-1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ என்க.



படம் 2.21

முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை காண்போம்

$$|z_1-z_2| = \left|1-\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$|z_2-z_3| = \left|\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$|z_3-z_1| = \left|\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1\right| = \left|\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

பக்கங்களின் நீளங்கள் சமம் எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும். ■

எடுத்துக்காட்டு 2.15

z_1, z_2, மற்றும் z_3 என்ற கலப்பெண்கள் $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$ மற்றும் $z_1+z_2+z_3\neq 0$ எனவும் இருந்தால் $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$ என நிறுவுக.

தீர்வு

கொள்கை $\quad |z_1| = |z_2|=|z_3|=r \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = r^2$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{r^2}{\bar{z}_1},\quad z_2=\frac{r^2}{\bar{z}_2},\quad z_3=\frac{r^2}{\bar{z}_3}$$

ஆகவே, $z_1+z_2+z_3 = \dfrac{r^2}{\bar{z}_1}+\dfrac{r^2}{\bar{z}_2}+\dfrac{r^2}{\bar{z}_3}$

$$= r^2\left(\frac{\bar{z}_2\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3}\right)$$

$$|z_1+z_2+z_3| = |r^2|\left|\frac{\overline{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}}{\overline{z_1z_2z_3}}\right| \qquad (\because \bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2})$$

$$= r^2\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|} \qquad (\because |z|=|\bar{z}| \text{ மற்றும் } |z_1z_2z_3|=|z_1||z_2||z_3|)$$

$$|z_1+z_2+z_3| = r^2\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r^3} = \frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1+z_2+z_3|} = r. \qquad (\text{கொள்கையின்படி } z_1+z_2+z_3 \neq 0)$$

எனவே, $$\left|\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1+z_2+z_3}\right| = r.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.16

$z^2 = \bar{z}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நான்கு மூலங்கள் இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு

கொள்கை $z^2 = \bar{z}$.

$$\Rightarrow |z|^2 = |z|$$

$$\Rightarrow |z|(|z|-1) = 0,$$

$$\Rightarrow |z| = 0, \text{ அல்லது } |z|=1.$$

$|z| = 0 \Rightarrow z=0$ என்பது ஒரு தீர்வு, $|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z}=1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

கொள்கையிலிருந்து $z^2 = \bar{z} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow z^3 = 1$.

இதற்கு 3 பூஜ்ஜியமற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். ஆகவே பூஜ்ஜியத்தையும் சேர்த்து இதற்கு நான்கு தீர்வுகள் இருக்கும்.

2.5.2 ஒரு கலப்பெண்ணின் வர்க்கமூலம் (Square roots of a complex number)

$a+ib$ -ன் வர்க்கமூலம் $x+iy$ என்க.

அதாவது $\sqrt{a+ib} = x+iy$ இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$

$$a+ib = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$$

மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த

$$x^2-y^2 = a \text{ மற்றும் } 2xy = b$$

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2+b^2$$

x^2+y^2 மிகை ஆகையால் $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

$x^2-y^2 = a$ மற்றும் $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ ஆகியவற்றைத் தீர்க்க

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \;;\; y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$ எனப் பெறலாம்.

$2xy = b$ என்பதிலிருந்து b மிகை எண் எனில் x மற்றும் y ஆகியவை ஒரே குறியுடையவையாகவும் மற்றும் b குறை எனில் x மற்றும் y ஆகியவை வெவ்வேறு குறியுடையவையாகவும் இருக்கும்.

ஆகவே $\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$, இங்கு $b \neq 0$. $(\because \mathrm{Re}(z) \leq |z|)$

ஒரு கலப்பெண்ணின் வர்க்கமூலம் காண சூத்திரம்

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right), \text{ இங்கு } z = a+ib \text{ மற்றும் } b \neq 0.$$

குறிப்பு

b குறை எனில், $\dfrac{b}{|b|}=-1$, x மற்றும் y ஆகியவை வெவ்வேறு குறியுடையவை.

b மிகை எனில், $\dfrac{b}{|b|}=1$, x மற்றும் y ஆகியவை ஒரே குறியுடையவை.

எடுத்துக்காட்டு 2.17

$6-8i$ –ன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு

$$|6-8i| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10 \text{ மற்றும்}$$

வர்க்கமூலம் காண சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

$$\sqrt{6-8i} = \pm\left(\sqrt{\frac{10+6}{2}} - i\sqrt{\frac{10-6}{2}}\right) \qquad \left(\because b \text{ குறை, } \frac{b}{|b|}=-1\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{8}-i\sqrt{2}\right)$$

$$= \pm\left(2\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right).$$

பயிற்சி 2.5

1. கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களின் மட்டு மதிப்பினைக் காண்க.
   (i) $\dfrac{2i}{3+4i}$ (ii) $\dfrac{2-i}{1+i}+\dfrac{1-2i}{1-i}$ (iii) $(1-i)^{10}$ (iv) $2i(3-4i)(4-3i)$.
2. z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $|z_1|=|z_2|=1$ மற்றும் $z_1z_2\neq -1$ எனில் $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ஓர் மெய் எண் எனக்காட்டுக.
3. $10-8i$, $11+6i$ ஆகிய புள்ளிகளில் எப்புள்ளி $1+i$ –க்கு மிக அருகாமையில் இருக்கும்?
4. $|z|=3$ எனில் $7\leq|z+6-8i|\leq 13$ எனக்காட்டுக.
5. $|z|=1$ எனில், $2\leq|z^2-3|\leq 4$ எனக்காட்டுக.
6. $|z|=2$ எனில், $8\leq|z+6+8i|\leq 12$ எனக்காட்டுக.
7. z_1, z_2, மற்றும் z_3 என்ற மூன்று கலப்பெண்கள் $|z_1|=1$, $|z_2|=2$, $|z_3|=3$, மற்றும் $|z_1+z_2+z_3|=1$ என்றவாறு உள்ளது எனில் $|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3|=6$ என நிறுவுக.
8. z, iz, மற்றும் $z+iz$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்டு அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 50 சதுர அலகுகள் எனில், $|z|$ –ன் மதிப்பினைக் காண்க.
9. $z^3+2\bar{z}=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஐந்து தீர்வுகள் இருக்கும் என நிறுவுக.
10. கீழ்க்காண்பவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க: (i) $4+3i$ (ii) $-6+8i$ (iii) $-5-12i$.

2.6 கலப்பெண்களின் வடிவியல் மற்றும் நியமப்பாதை

(Geometry and Locus of Complex Numbers)

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் z என்ற கலப்பெண்ணின் வடிவக் கணித விளக்கத்தையும் கார்டீசியன் வடிவில் z -ன் நியமப்பாதையையும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.18

$z = 3+2i$ எனக்கொண்டு z, iz, மற்றும் $z+iz$ ஆகியவற்றை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்க. இக்கலப்பெண்கள் ஓர் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு

கொள்கை: $z = 3+2i$.

ஆகவே, $iz = i(3+2i) = -2+3i$

$z+iz = (3+2i)+i(3+2i) = 1+5i$

z, $z+iz$, மற்றும் iz ஆகியவை முறையே $A, B,$ மற்றும் C என்க.

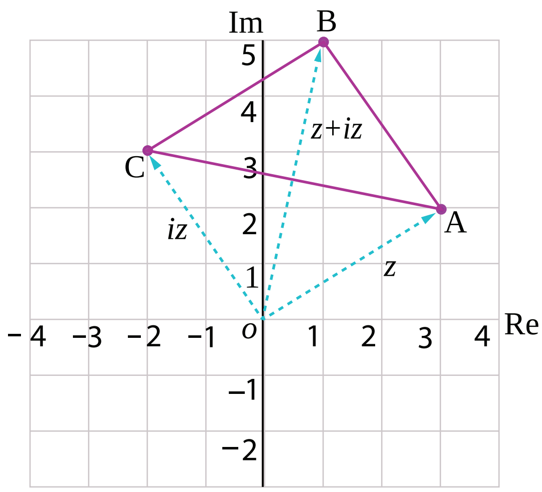
$AB^2 = |(z+iz)-z|^2 = |-2+3i|^2 = 13$

$BC^2 = |iz-(z+iz)|^2 = |-3-2i|^2 = 13$

$CA^2 = |z-iz|^2 = |5-i|^2 = 26$

$AB^2 + BC^2 = CA^2$ மற்றும் $AB = BC$, எனவே,

ΔABC ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணமாகும்.



படம் 2.22

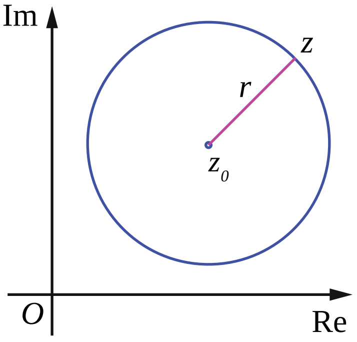
வரையறை 2.5 (வட்டம்)

ஒரு தளத்தில் நிலையான புள்ளிக்கும் நகரும் புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் எப்பொழுதும் மாறிலியாக இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு வட்டம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. நிலையான புள்ளி வட்டத்தின் மையம் மற்றும் மாறிலி தொலைவு வட்டத்தின் ஆரம் ஆகும்.

வட்டத்தின் சமன்பாடு கலப்பெண் வடிவில் (Equation of Complex Form of a Circle)

z -ன் நியமப்பாதை $|z-z_0| = r$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றது. இங்கு z_0 என்பது நிலையான புள்ளி மற்றும் r என்பது மிகை மாறிலி. இச்சமன்பாடு z_0 -லிருந்து z -க்கு r தூரமுள்ள எல்லா கலப்பு எண்களையும் கொண்டிருக்கும்.

எனவே, $|z-z_0| = r$ என்பது கலப்பெண் வடிவில் வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும். (படம் 2.23–ஐ பார்க்க)



படம் 2.23

(i) $|z-z_0| < r$ ஆனது வட்டத்தின் உள்பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது.

(ii) $|z-z_0| > r$ ஆனது வட்டத்தின் வெளிப்பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 2.3

$$|z| = r \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r$$

$\Rightarrow x^2+y^2 = r^2$, என்பது ஆதியை மையமாகவும் r அலகு ஆரம் கொண்ட வட்டத்தைக் குறிக்கிறது.

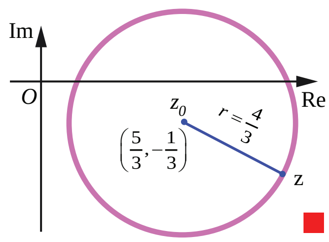
எடுத்துக்காட்டு 2.19

$|3z-5+i|=4$ என்ற சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிக்கிறது எனக்காட்டுக. மேலும் இதன் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$|3z-5+i|=4$ என்ற சமன்பாட்டை $3\left|z-\frac{5-i}{3}\right| = 4 \Rightarrow \left|z-\left(\frac{5}{3}-\frac{i}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$ என எழுதலாம்.

இது $|z-z_0|=r$ என்ற வடிவில் உள்ளது. ஆகவே இது வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது. இதன் மையம் மற்றும் ஆரம் ஆகியவை முறையே $\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$ மற்றும் $\frac{4}{3}$ ஆகும்.



படம் 2.24

எடுத்துக்காட்டு 2.20

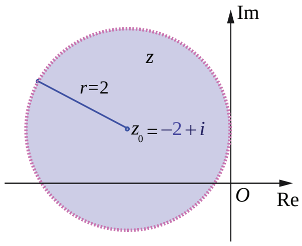
$|z+2-i|<2$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் உள்பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கும் என காட்டுக. அவ்வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$|z+2-i|=2$ என்ற சமன்பாட்டை கருதுக. இதனை

$|z-(-2+i)|=2$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாடு $z_0=-2+i$ மற்றும் ஆரம் $r=2$ உள்ள வட்டத்தைக் குறிக்கிறது. ஆகவே $|z+2-i|<2$ என்பது மையம் $-2+i$ மற்றும் ஆரம் 2 உள்ள வட்டத்தின் உள்பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கிறது.



படம் 2.25

எடுத்துக்காட்டு 2.21

பின்வரும் சமன்பாடுகளில் z –ன் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க.

(i) $|z|=|z-i|$ (ii) $|2z-3-i|=3$

தீர்வு

(i)
$$|z| = |z-i|$$
$$\Rightarrow |x+iy| = |x+iy-i|$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$
$$\Rightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2-2y+1$$
$$\Rightarrow 2y-1 = 0.$$

(ii)
$$|2z-3-i| = 3$$
$$|2(x+iy)-3-i| = 3.$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,
$$|(2x-3)+(2y-1)i|^2 = 9$$
$$\Rightarrow (2x-3)^2+(2y-1)^2 = 9$$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2-12x-4y+1=0$, என்பது கார்ட்டீசியன் வடிவில் z –ன் நியமப்பாதை ஆகும்.

பயிற்சி 2.6

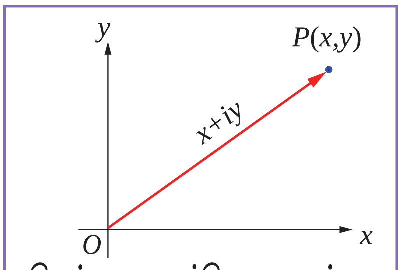
1. $z = x+iy$ என்றஏதேனும்ஒருகலப்பெண் $\left|\dfrac{z-4i}{z+4i}\right| = 1$ எனுமாறுஅமைந்தால் z –ன் நியமப்பாதை மெய் அச்சு எனக் காட்டுக.
2. $z = x+iy$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண் $\text{Im}\left(\dfrac{2z+1}{iz+1}\right) = 0$ எனுமாறு அமைந்தால் z –ன் நியமப்பாதை $2x^2+2y^2+x-2y=0$ எனக்காட்டுக.
3. பின்வரும் சமன்பாடுகளில் $z = x+iy$ –ன் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க.
   (i) $\left[\text{Re}(iz)\right]^2 = 3$ (ii) $\text{Im}[(1-i)z+1] = 0$ (iii) $|z+i| = |z-1|$ (iv) $\bar{z} = z^{-1}$.
4. பின்வரும் சமன்பாடுகள் வட்டத்தை குறிக்கிறது என காட்டுக. மேலும் இதன் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.
   (i) $|z-2-i| = 3$ (ii) $|2z+2-4i| = 2$ (iii) $|3z-6+12i| = 8$.
5. பின்வரும் சமன்பாடுகளில் $z = x+iy$ –ன் நியமப்பாதையை கார்டீசியன் வடிவில் காண்க.
   (i) $|z-4| = 16$ (ii) $|z-4|^2 - |z-1|^2 = 16$.

2.7 கலப்பு எண்களின் துருவ வடிவம் மற்றும் ஆய்லர் வடிவம் (Polar and Euler form of a Complex Number)

கலப்பெண்களை கூட்டும்போதும் கழிக்கும் போதும் நாம் கலப்பெண்களின் **செவ்வக ஆயத்தொலைகளை** பயன்படுத்துகிறோம். ஏனெனில் இங்கு மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ மட்டுமே செய்கிறோம். கலப்பெண்களின் பெருக்கும்போது அல்லது கலப்பெண்களின் அடுக்குகளை காணும் போது **துருவ வடிவத்தை** பயன்படுத்துகிறோம். ஏனெனில் இது செவ்வக ஆயத்தொலை முறையினைவிட துருவ வடிவில் எளிதாகக் காணலாம்.

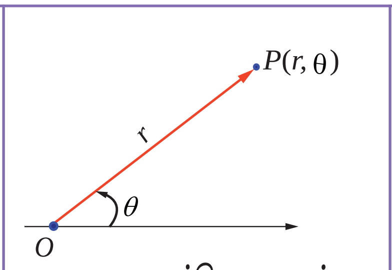
2.7.1 ஒரு கலப்பெண்ணின் துருவ வடிவம் (Polar form of a complex number)

துருவ ஆயத்தொலை வடிவம் என்பது ஆதியிலிருந்து $z = x+iy$ என்ற புள்ளிவரை உள்ள வெக்டரை அதன் எண் மதிப்பு மற்றும் திசையினை கொண்டு வகைப்படுத்தும் மற்றொரு வடிவம் ஆகும். துருவ ஆயத்தொலை முறையில் O என்ற நிலையான புள்ளியை துருவப் புள்ளி எனவும் துருவ புள்ளியிலிருந்து ஆரம்பிக்கும் கிடைமட்ட அரை கோட்டினை ஆரம்பக் கோடு (துருவ அச்சு) எனவும் அழைக்கின்றோம். r என்பது துருவப் புள்ளியிலிருந்து P உள்ள தூரம் மற்றும் θ என்பது ஆரம்பக் கோட்டிலிருந்து OP–ன் திசையில் கடிகார எதிர்திசையில் அளக்கப்பட்ட சாய்வுக் கோணம் எனவும் கொண்டால், (r,θ) வரிசையிட்ட ஜோடியினை P–ன் துருவ ஆயத்தொலைகள் எனலாம். துருவ ஆயத் தொலை முறையை செவ்வக ஆயத்தொலை முறையுடன் ஒன்றின் மேல் ஒன்றாக படத்தில் காட்டியவாறு வைத்தால்



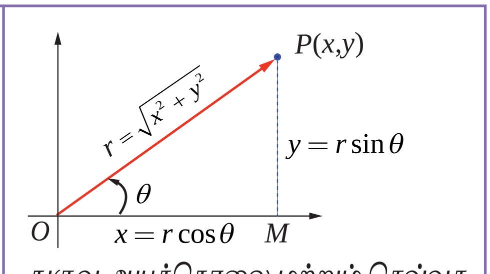
செவ்வக ஆயத்தொலைகள்

படம் 2.26



துருவ ஆயத்தொலைகள்

படம் 2.27



துருவ ஆயத்தொலை மற்றும் செவ்வக ஆயத்தொலை முறைகளை ஒன்றின் மேல் ஒன்றாக அமைத்தல்

படம் 2.28

$$x = r\cos\theta \qquad \text{...(1)}$$

$$y = r\sin\theta \text{ எனப்பெறலாம்.} \qquad \text{...(2)}$$

எந்த ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற கலப்பெண் $z = x+iy$ –யையும் $z = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$ என எழுதலாம்.

வரையறை 2.6

r மற்றும் θ ஆகியவை $P(x, y)$ என்ற பூஜ்ஜியமற்ற கலப்பெண் $z = x + iy$ -ன் துருவ ஆயத்தொலைகள் என்க. P என்ற புள்ளியின் துருவ அல்லது முக்கோண வடிவம் என்பது

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

துருவ வடிவினை வசதிக்காக நாம் $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,cis\,\theta$ என எழுதலாம்.

இதில் r என்பது கலப்பெண் z -ன் எண்ணளவு அல்லது மட்டு மதிப்பு ஆகும். θ என்பது கலப்பெண் z -ன் வீச்சு ஆகும். இதனை $\theta = \arg(z)$ எனக்குறிப்போம்.

(i) $z = 0$ -வுக்கு வீச்சு θ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே துருவ ஆயத்தொலை முறையில் $z \neq 0$ என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

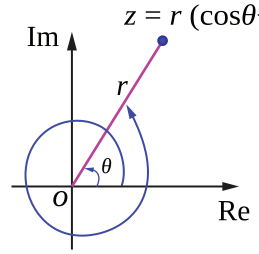
(ii) $z = x + iy$ என்ற கலப்பெண்ணின் துருவ வடிவம் (r, θ) எனில் இதன் இணை கலப்பெண் $\bar{z} = x - iy$ -ன் துருவ வடிவம் $(r, -\theta)$ ஆகும்.

(1) மற்றும் (2)-ஐ வர்க்கப்படுத்தி கூட்டி வர்க்கமூலம் காண r கிடைக்கிறது $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(2)-ஐ (1)-ஆல் வகுக்க, $\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

நிலை (i)

z-ஐ வெக்டராகக் கருதும்போது மெய் எண் θ என்பது z ஆனது மிகை மெய் அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைரேடியனில் குறிக்கும். கோணம் θ -விற்கு குறைமதிப்புகளையும் சேர்த்து முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான மதிப்புகள் 2π -ன் முழு எண் மடங்குகளாகஇருக்கும்.இம்மதிப்புகளை $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ என்றசமன்பாட்டினைக் கொண்டு தீர்மானிக்கலாம். இந்த θ -ன் ஒவ்வொரு மதிப்புகளையும் z-ன் வீச்சுகள் என்கிறோம். மேலும் θ -வின் எந்த ஒரு மதிப்புடனும் 2π -ன் மடங்குகளை கூட்டுவதன் மூலம் θ -வின் எல்லா மதிப்புகளையும் அடங்கிய கணத்தைப் பெறலாம். இதனை arg z எனக்குறிப்பிடுகிறோம். arg z-ன் முதன்மை வீச்சினை Arg z எனக்குறிப்பிடுகிறோம்.



படம் 2.29

நிலை (ii)

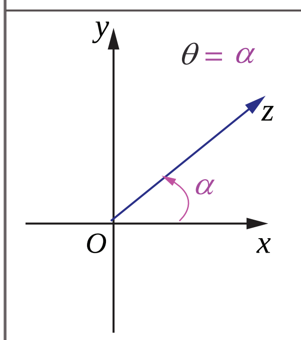
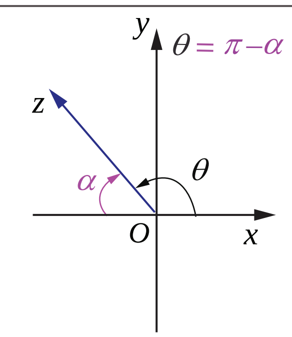
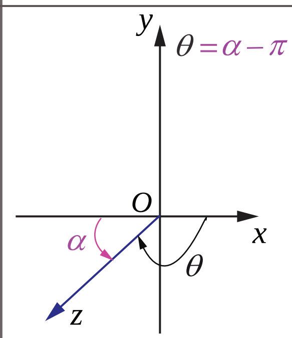
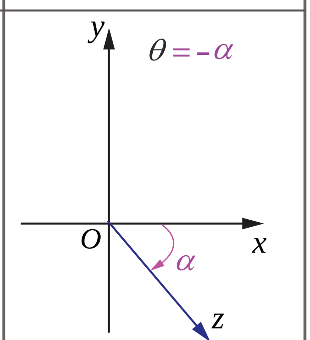
$-\pi < \theta \leq \pi$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு θ விற்கு ஒரே ஒரு மதிப்புதான் இருக்கும். இந்த மதிப்பினை z-ன் முதன்மை வீச்சு என்கிறோம். இதனை Arg z என குறிப்பர்.

இங்கு $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$ அல்லது $-\pi < \theta \leq \pi$

இந்த முதன்மை வீச்சு $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$ அல்லது $-\pi < \theta \leq \pi$

என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு ஒருமைத்தன்மையுடன் காணலாம்.

ஒரு கலப்பெண்ணின் முதன்மை வீச்சு

I - ஆம் கால் பகுதியில்	II - ஆம் கால் பகுதியில்	III - ஆம் கால் பகுதியில்	IV - ஆம் கால் பகுதியில்
			
$\theta = \alpha$	$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \alpha - \pi$	$\theta = -\alpha$

படம் 2.30 படம் 2.31 படம் 2.32 படம் 2.33

இங்கு Arg z -ல் உள்ள A என்பது என்பது மிக முக்கியம் ஏனெனில் இதுவே முதன்மை வீச்சிற்கும் பொதுவான வீச்சிற்கும் உள்ள வித்தியாசத்தை குறிக்கப் பயன்படுகின்றது.

முதன்மை வீச்சு θ-வை காண பொதுவாக நாம் $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ -ஐ கணக்கிட்டு கலப்பெண் எந்த கால்பகுதியில் அமைகின்றதோஅதற்கேற்றார்போல் α உடன் π -ஐ கூட்டியோ அல்லது கழித்தோ பெறலாம்.

$$\boxed{\arg z = Arg\ z + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.}$$

வீச்சின் பண்புகள்

(1) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

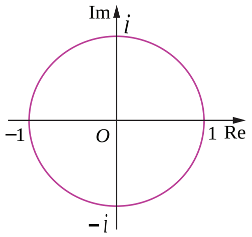
(2) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

(3) $\arg(z^n) = n \arg z$

(4) $\cos\theta + i\sin\theta$ -ன் மற்றொரு வடிவம் $\cos(2k\pi+\theta) + i\sin(2k\pi+\theta),\ k \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

$1, i, -1$, மற்றும் $-i$ ஆகியவற்றின் முதன்மை வீச்சுகள் மற்றும் பொது வீச்சுகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது:-

z	1	i	-1	$-i$
$Arg(z)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$
$\arg z$	$2n\pi$	$2n\pi + \frac{\pi}{2}$	$2n\pi + \pi$	$2n\pi - \frac{\pi}{2}$



படம் 2.34

விளக்க எடுத்துக்காட்டு

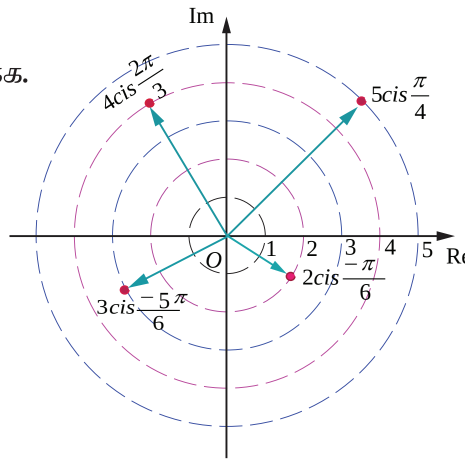
கலப்பெண் தளத்தில் கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களைக் குறிக்க.

(i) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(ii) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(iii) $3\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$

(iv) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.



படம் 2.35

2.7.2 கலப்பெண்ணின் ஆய்லரின் வடிவம் (Euler's Form of the complex number)

ஆய்லரின் சூத்திரம் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ஆய்லரின் சூத்திரத்திலிருந்து துருவ வடிவத்தை $z = re^{i\theta}$ எனப் பெறலாம்.

குறிப்பு

கலப்பெண்களின் பெருக்கம் அல்லது கலப்பெண்களின் அடுக்குகளை காணும் போது துருவ வடிவத்தை நாம் பயன்படுத்துகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.22

பின்வரும் கலப்பெண்களுக்கு மட்டு மற்றும் முதன்மை வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

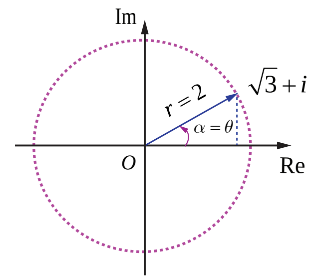
(i) $\sqrt{3}+i$ (ii) $-\sqrt{3}+i$ (iii) $-\sqrt{3}-i$ (iv) $\sqrt{3}-i$

தீர்வு

(i) $\sqrt{3}+i$

$$\text{மட்டு} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



படம் 2.36

$\sqrt{3}+i$ என்ற கலப்பெண்ணானது முதல் கால் பகுதியில் அமைவதால் முதன்மை வீச்சு

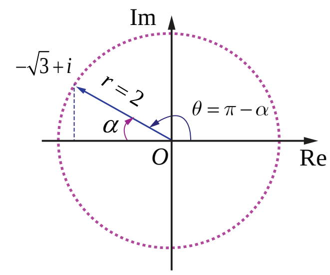
$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

ஆகவே, $\sqrt{3}+i$ -ன் மட்டு மற்றும் முதன்மை வீச்சு முறையே 2 மற்றும் $\frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

(ii) $-\sqrt{3}+i$

மட்டு $= 2$ மற்றும்

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



படம் 2.37

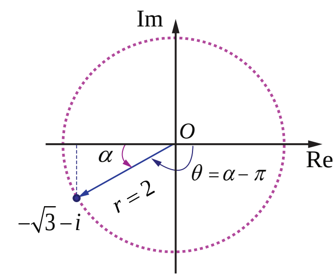
$-\sqrt{3}+i$ என்ற கலப்பெண்ணானது இரண்டாம் கால்பகுதியில் அமைவதால் முதன்மை வீச்சு

$$\theta = \pi-\alpha = \pi-\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

ஆகவே, $-\sqrt{3}+i$ -ன் மட்டு மற்றும் முதன்மை வீச்சு முறையே 2 மற்றும் $\frac{5\pi}{6}$ ஆகும்.

(iii) $-\sqrt{3}-i$

$$r = 2 \text{ மற்றும் } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$



படம் 2.38

$-\sqrt{3}-i$ என்ற கலப்பெண்ணானது மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமைவதால் முதன்மை வீச்சு

$$\theta = \alpha-\pi = \frac{\pi}{6}-\pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

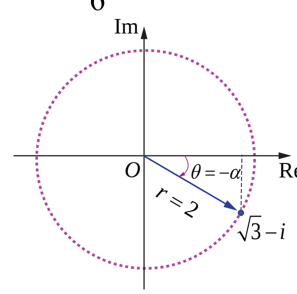
ஆகவே, $-\sqrt{3}-i$ -ன் மட்டு மற்றும் முதன்மை வீச்சு முறையே 2 மற்றும் $-\frac{5\pi}{6}$ ஆகும்.

(iv) $\sqrt{3}-i$

$$r = 2 \text{ மற்றும் } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

$\sqrt{3}-i$ என்ற கலப்பெண்ணானது நான்காம் கால்பகுதியில் அமைவதால் முதன்மை வீச்சு

$$\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{6}$$



படம் 2.39

ஆகவே, $\sqrt{3}-i$ -ன் மட்டு மற்றும் முதன்மை வீச்சு முறையே 2 மற்றும் $-\dfrac{\pi}{6}$ ஆகும்.

இந்த நான்கிலும் மட்டு மதிப்புகள் சமம் ஆனால் அதன் வீச்சானது அக்கலப்பெண் அமையும் கால்பகுதியை பொருத்து அமைகின்றது. ■

எடுத்துக்காட்டு 2.23

(i) $-1-i$ (ii) $1+i\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண்களை துருவ வடிவில் காண்க.

தீர்வு

(i) $-1-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ மற்றும்}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} \text{ என கிடைக்கிறது.}$$

$-1-i$ என்ற கலப்பெண் மூன்றாம் கால்பகுதியில் அமைவதால் அதன் முதன்மை வீச்சு,

$$\theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

எனவே, $$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}\cdot$$

குறிப்பு

k -ன் பல்வேறு மதிப்புகளைப் பொருத்து நமக்கு பல்வேறு மாறுபட்ட துருவ வடிவங்கள் கிடைக்கும்.

(ii) $1+i\sqrt{3}$

$$r = |z| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ஆகவே $$\arg(z) = \frac{\pi}{3}.$$

எனவே, $1+i\sqrt{3}$ -ன் துருவ வடிவம்

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

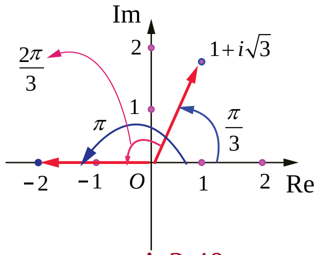
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 2.24

$z = \dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ எனில் முதன்மை வீச்சு $Arg\, z$ -ஐ காண்க.

தீர்வு



படம் 2.40

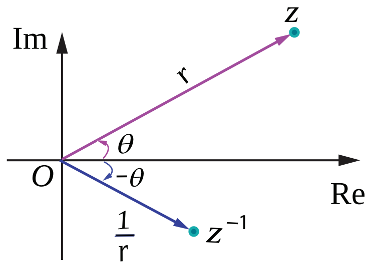
$$\begin{aligned}\arg z &= \arg\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}\\ &= \arg(-2)-\arg\left(1+i\sqrt{3}\right) \quad \left(\because \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1 - \arg z_2\right)\\ &=\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\\ &= \pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

இதிலிருந்து $\frac{2\pi}{3}$ என்பது $\arg z$ -ன் மதிப்புகளில் ஒன்று. $\frac{2\pi}{3}$ ஆனது $-\pi$ மற்றும் π -க்கு இடையில் அமைவதால் முதன்மை வீச்சு $\text{Arg}\, z = \frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

துருவ வடிவின் பண்புகள் (Properties of polar form)

பண்பு 1 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, எனில் $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ ஆகும்.

தீர்வு



படம் 2.41

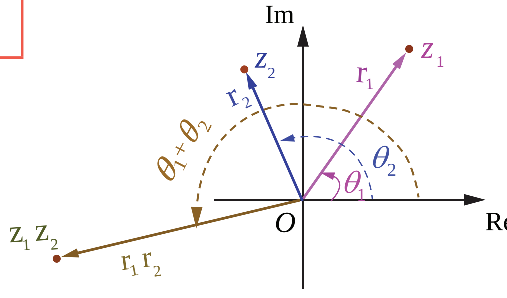
$$\begin{aligned}z^{-1} &= \frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\ &= \frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}\\ &= \frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\\ z^{-1} &= \frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta).\end{aligned}$$

பண்பு 2

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ மற்றும் $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

எனில், $z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$.

தீர்வு



படம் 2.42

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ மற்றும்}$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$\Rightarrow z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \left(\left(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \right) + i\left(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1 \right) \right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2 \right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2 \right) \right).$$

குறிப்பு

$$\arg\left(z_1 z_2 \right) = \theta_1 + \theta_2 = \arg\left(z_1 \right) + \arg\left(z_2 \right).$$

பண்பு 3

$z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ *மற்றும்* $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ *எனில்,* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right].$

தீர்வு

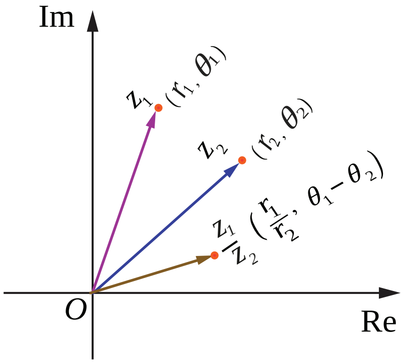
z_1 மற்றும் z_2 வின் துருவ வடிவங்களைப் பயன்படுத்த

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)}$$

$$= \frac{r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\right)}{r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)\left(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\right)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1\right)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right).$$



படம் 2.43

குறிப்பு

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg\left(z_1\right) - \arg\left(z_2\right).$$

எடுத்துக்காட்டு 2.25

$\dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot 6\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$ என்ற பெருக்கத்தின் மதிப்பினை செவ்வக வடிவில் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)(6)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{9i}{2}.$$

இது செவ்வக வடிவில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2.26

$$\frac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)}$$ என்ற வகுத்தலின் மதிப்பினை செவ்வக வடிவில் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4} - \left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{4} - \left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

இது செவ்வக வடிவில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2.27

$z = x + iy$ மற்றும் $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ எனில், $x^2 + y^2 = 1$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு

இப்பொழுது, $$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} = \frac{\left[(x-1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}{\left[(x+1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z-1}{z+1} = \frac{(x^2+y^2-1)+i(2y)}{(x+1)^2+y^2}.$$

கொள்கை $$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2y}{x^2+y^2-1} = \tan\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

பயிற்சி 2.7

1. கீழ்காணும் கலப்பெண்களின் துருவ வடிவினைக் காண்க.

   (i) $2+i2\sqrt{3}$ (ii) $3-i\sqrt{3}$ (iii) $-2-i2$ (iv) $\dfrac{i-1}{\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}}$.

2. பின்வருவனவற்றை செவ்வக வடிவில் எழுதுக.

   (i) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ (ii) $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

3. $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)\cdots(x_n+iy_n)=a+ib$ எனில்,

   (i) $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)(x_3^2+y_3^2)\cdots(x_n^2+y_n^2)=a^2+b^2$

   (ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{y_r}{x_r}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ எனக்காட்டுக.

4. $\dfrac{1+z}{1-z}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, எனில், $z=i\tan\theta$ என நிறுவுக.

5. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$, எனில்,

   (i) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ மற்றும்

   (ii) $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ என நிறுவுக.

6. $z=x+iy$ மற்றும் $\arg\left(\dfrac{z-i}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ எனில், $x^2+y^2+3x-3y+2=0$ எனக்காட்டுக.

டி மாய்வர்
1667–1754

2.8 டி மாய்வரின் தேற்றமும் அதன் பயன்பாடுகளும் (de Moivre's Theorem and its Applications)

ஆபரகாம் டி மாய்வர் (1667–1754) என்ற கணிதவியல் அறிஞர் முக்கோணவியலில் கலப்பு எண்களைப் பயன்படுத்தினார்.

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ எனும் சூத்திரம் அவரது பெயரால் அறியப்படுகின்றது.

முக்கோணவியலை வடிவியலின் ஆதிக்கத்தில் இருந்து மீட்டெடுத்து பகுப்பாய்விற்குள் கொண்டு செல்ல அவர் பெயரால் வழங்கும் இச்சூத்திரமே தூண்டுகோலாக அமைந்தது.

2.8.1 டி மாய்வரின் தேற்றம் (de Moivre's Theorem)

டி மாய்வரின் தேற்றம்

கொடுக்கப்பட்ட கலப்பெண் $\cos\theta+i\sin\theta$ மற்றும் n என்ற முழு எண்ணிற்கு

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

கிளைத்தேற்றம்

(1) $(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$ (2) $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$

(3) $(\cos\theta-i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta+i\sin n\theta$ (4) $\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta-i\sin\theta)$.

நாம் இப்பொழுது டிமாய்வரின் தேற்றத்தை கலப்பெண்களை சுருக்குதல் மற்றும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் போன்றவற்றிற்கு பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.28

$z=(\cos\theta+i\sin\theta)$ எனில், $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ மற்றும் $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$z=(\cos\theta+i\sin\theta)$ என்க.

டி மாய்வரின் தேற்றப்படி

$$z^n = (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

$$\frac{1}{z^n} = z^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

ஆகவே, $$z^n+\frac{1}{z^n} = (\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

$$z^n+\frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta\,.$$

இதுபோலவே,

$$z^n-\frac{1}{z^n} = (\cos n\theta+i\sin n\theta)-(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

$$z^n-\frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta\,.$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 2.29

சுருக்குக $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^{18}$.

தீர்வு

$\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6} = i\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ ஆக எழுதலாம்.

இருபுறமும் 18–ன் அடுக்கிற்கு உயர்த்த,

$$\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18} = (i)^{18}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{18}$$

$$= (-1)\left(\cos\frac{18\pi}{6}-i\sin\frac{18\pi}{6}\right)$$

$$= -(\cos 3\pi-i\sin 3\pi)=1+0i$$

ஆகவே, $$\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18} = 1.$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 2.30

சுருக்குக $\left(\dfrac{1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta}\right)^{30}$.

தீர்வு

$z = \cos 2\theta+i\sin 2\theta$ என்க.

$|z| = |z|^2=z\bar{z}=1$ என்பதிலிருந்து $\bar{z}=\dfrac{1}{z}=\cos 2\theta-i\sin 2\theta$ என பெறலாம்.

ஆகவே, $\dfrac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta} = \dfrac{1+z}{1+\dfrac{1}{z}} = \dfrac{(1+z)z}{z+1} = z$.

எனவே, $\left(\dfrac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta}\right)^{30} = z^{30} = \left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right)^{30}$

$= \cos 60\theta + i\sin 60\theta$.

எடுத்துக்காட்டு 2.31

சுருக்குக (i) $(1+i)^{18}$ (ii) $(-\sqrt{3}+3i)^{31}$.

தீர்வு

(i) $(1+i)^{18}$

$1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க.

$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$,

$\theta = \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ ($\because$ $1+i$ ஆனது முதலாம் கால் பகுதியில் உள்ளதால்)

ஆகவே, $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

இருபுறமும் 18–ன் அடுக்கிற்கு உயர்த்த,

$$(1+i)^{18} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{18} = \sqrt{2}^{18}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{18}.$$

டி மாய்வரின் தேற்றப்படி,

$$(1+i)^{18} = 2^9\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}\right)$$

$$= 2^9\left(\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^9\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{18} = 2^9(i) = 512i.$$

(ii) $(-\sqrt{3}+3i)^{31}$

$-\sqrt{3}+3i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க.

$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

$\alpha = \tan^{-1}\left|\dfrac{3}{-\sqrt{3}}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$,

$\theta = \pi - \alpha = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ ($\because$ $-\sqrt{3}+3i$ ஆனது II–ஆம் கால் பகுதியில் உள்ளதால்)

ஆகவே, $-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

இருபுறமும் 31–ன் அடுக்கிற்கு உயர்த்த,

$$
\begin{aligned}
(-\sqrt{3}+3i)^{31} &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{31} \\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\left(20\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(20\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

2.8.2 ஒரு கலப்பெண்ணின் n-ஆம் படிமூலங்களைக் காணல் (Finding n^{th} roots of a complex number)

கலப்பெண்களின் மூலங்களைக் காண டி மாய்வரின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். n ஒரு முழு எண் மற்றும் ω ஒரு கலப்பெண் ஆனது z-ன் n-ஆம் படிமூலம் $z^{1/n}$ எனக்கொண்டால்

$\omega^n = z$ எனப்பெறலாம். ...(1)

$$\omega = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

மேலும் $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)),\ k\in\mathbb{Z}$ என்க.

z-ன் n–ஆம் படிமூலம் w எனில்

$$\omega^n = z$$

$$\Rightarrow \quad \rho^n(\cos\phi+i\sin\phi)^n = r(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)),\ k\in\mathbb{Z}$$

டி மாய்வரின் தேற்றப்படி,

$$\rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi) = r(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)),\ k\in\mathbb{Z}$$

மட்டுக்களையும் வீச்சுகளையும் சமப்படுத்த

$\rho^n = r$ மற்றும் $n\phi = \theta + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ எனப்பெறலாம்.

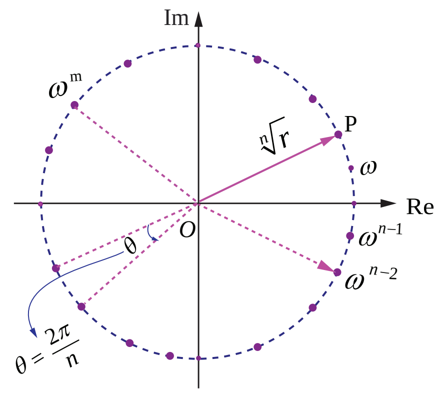
$\rho = r^{1/n}$ மற்றும் $\phi = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z}$.

ஆகவே. ω-ன் மதிப்புகள் $r^{1/n}\left(\cos\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

k-விற்கு எண்ணிக்கையற்ற மதிப்புகள் இருந்தாலும் ω-விற்கு வெவ்வேறான மதிப்புகளைப் பெற $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$ எனப்பிரதியிட வேண்டும். $k=n,n+1,n+2,\ldots$ என பிரதியிட்டால் கிடைத்த மூலங்களே (சுற்றுவட்ட முறையில்) சீரான இடைவெளியில் கிடைக்கும். ஆகவே $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ என்ற கலப்பெண்ணின் n–ஆம் படிமூலங்கள்

$$\boxed{z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,3,\ldots,n-1\,.}$$

ஒரு கலப்பெண்ணின் n –ஆம் மூலத்தினை $\omega = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$, எனக்கொள்வதன் மூலமும் படத்தில் காட்டியுள்ளது போன்ற ஒரு அழகிய வடிவியல் விளக்கத்தினைப் பெறலாம். இந்த n மூலங்களுக்கும், $|\omega| = \sqrt[n]{r}$ அதாவது மட்டு மதிப்பு $\sqrt[n]{r}$ எனவே இவை ஆதியை மையமாக $\sqrt[n]{r}$ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மீது அமையும். மேலும் இந்த n மூலங்களில் அடுத்தடுத்த மூலங்களின் வீச்சுகள் $\dfrac{2\pi}{n}$ என்ற வித்தியாசத்தில் வேறுபடுவதால் இந்த n மூலங்களும் வட்டத்தின் மேல் சீரான இடைவெளிகளில் அமையும்.



ஒரு கலப்பெண்ணின்
n–ஆம் படிமூலங்கள்
படம் 2.44

மேற்குறிப்பு

(1) டி மாய்வர் தேற்றத்தின் பொது வடிவம் (General form of de Moivre's Theorem)

x ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் $\cos x\theta + i\sin x\theta$ என்பது $(\cos\theta + i\sin\theta)^x$ –ன் மதிப்புகளில் ஒன்றாகும்.

(2) அலகு வட்டத்தின் துருவ வடிவம் (Polar form of unit circle)

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே, } |z|^2 = |\cos\theta + i\sin\theta|^2 \text{ எனப்பெறலாம்.}$$

$$\Rightarrow \quad |x+iy|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$

எனவே, $|z| = 1$ ஆனது ஆதியை மையமாகக் கொண்ட அலகு வட்டத்தை (ஓரலகு வட்டத்தை) குறிக்கிறது.

2.8.3 ஒன்றின் n-ஆம் படிமூலங்கள் (The n^{th} roots of unity)

$z^n = 1$, n ஒரு முழு எண், என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளே ஒன்றின் n –ஆம் படிமூலங்கள் ஆகும்.

$z = 1$ என்ற சமன்பாட்டை துருவ வடிவில் $z = \cos(0+2k\pi) + i\sin(0+2k\pi) = e^{i2k\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

டி மாய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஒன்றின் n –ஆம் படிமூலங்களை பின்வருமாறு காணலாம்:

$$z = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1 \cdot \qquad \ldots (1)$$

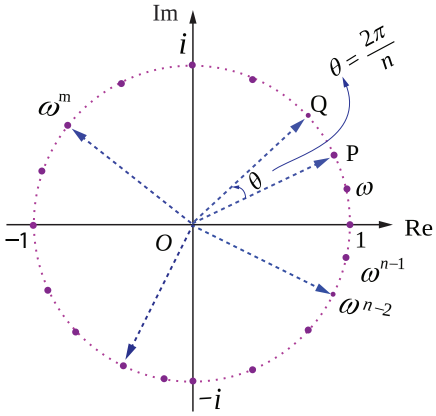
கொடுக்கப்பட்ட மிகை முழு எண் n -க்கு, z என்பது ஒன்றின் n –ஆம் படி மூலமாக இருக்குமெனில் $z^n = 1$ என இருக்க வேண்டும்.

இதனை ω என்ற கலப்பெண்ணின் மூலம் குறித்தால்,

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi i}{n} + i\sin\frac{2\pi i}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = 1 \text{ எனப்பெறலாம்.}$$

ஆகவே ஒன்றின் n-ஆம் படிமூலங்களில் ஒன்று ω ஆகும். சமன்பாடு (1)-லிருந்து $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ ஆகியவை ஒன்றின் n-ஆம் படிமூலங்கள் ஆகும். $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ என்ற இந்த கலப்பெண்கள் கலப்பெண் தளத்தில் n பக்கங்களை உடைய சீரான பலகோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகளாக ஓரலகு வட்டத்தின் மீது படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு அமையும். இந்த எல்லா n-ஆம் படிமூலங்களின் மட்டு மதிப்புகளும் 1 எனவே இவை ஆதியை மையமாகவும் ஆரம் 1 கொண்ட வட்டத்தின் மீது அமையும். மேலும் இந்த n மூலங்களில் அடுத்தடுத்த மூலங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோண வித்தியாசம் $\dfrac{2\pi}{n}$. எனவே, n மூலங்களும் வட்டத்தின் மீது சீரான இடைவெளி விட்டு அமையும்.



ஒன்றின் n–ஆம் படிமூலங்கள்
படம் 2.45

ஒன்றின் n-ஆம் படிமூலங்கள் $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ ஆகியவை ω-வை பொது விகிதமாகக் கொண்ட பெருக்குத் தொடரை அமைக்கிறது.

ஆகவே $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$ இங்கு $\omega^n = 1$ மற்றும் $\omega \neq 1$.

> ஒன்றின் n–ஆம் படிமூலங்கள் அனைத்தின் கூட்டுத்தொகை
> $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = 0$ ஆகும்.

ஒன்றின் n–ஆம் படிமூலங்கள் அனைத்தின் பெருக்குத் தொகை

$$1\omega\omega^2\cdots\omega^{n-1} = \omega^{0+1+2+3+\cdots+(n-1)} = \omega^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$= \left(\omega^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} = \left(e^{i2\pi}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

> ஒன்றின் n–ஆம் படிமூலங்கள் அனைத்தின் பெருக்குத்தொகை
> $1\omega\omega^2\cdots\omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$ ஆகும்.

$|\omega| = 1$, எனவே $\omega\bar{\omega} = |\omega|^2 = 1$; ஆகையால், $\bar{\omega} = \omega^{-1} \Rightarrow (\bar{\omega})^k = \omega^{-k}$, $0 \le k \le n-1$

$$\omega^{n-k} = \omega^n\omega^{-k} = \omega^{-k} = (\bar{\omega})^k, \; 0 \le k \le n-1$$

ஆகவே, $\boxed{\omega^{n-k} = \omega^{-k} = \left(\bar{\omega}\right)^k, \; 0 \le k \le n-1.}$

குறிப்பு

(1) ஒன்றின் n-ஆம் படிமூலங்கள் அனைத்தும் பெருக்குத் தொடரை அமைக்கின்றது.

(2) ஒன்றின் n-ஆம் படிமூலங்கள் அனைத்தின் கூட்டுத்தொகை பூஜ்ஜியமாகும்.

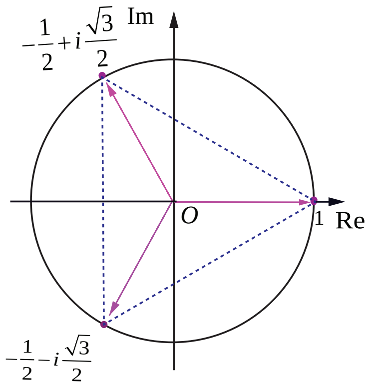
(3) ஒன்றின் n-ஆம் படிமூலங்கள் அனைத்தின் பெருக்குத்தொகை $(-1)^{n-1}$ ஆகும்.

(4) ஒன்றின் n-ஆம் படிமூலங்கள் அனைத்தும் ஆதியை மையமாகவும் ஆரம் 1 கொண்ட வட்டத்தின் மீது அமைவதுடன் வட்டத்தை n சமபாகங்களாகப் பிரிக்கின்றது. மேலும் இவை n பக்கங்கள் கொண்ட பலகோணத்தை அமைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2.32

ஒன்றின் மூன்றாம் படிமூலங்களைக் காண்க.

தீர்வு



ஒன்றின் மூன்றாம் படிமூலங்கள்
படம் 2.46

நாம் $1^{\frac{1}{3}}$ ஐ காணவேண்டும். $z = 1^{\frac{1}{3}}$ எனில், $z^3 = 1$ ஆகும்.

$z^3 = 1$ என்ற சமன்பாட்டை துருவ வடிவில் எழுத

$$z^3 = \cos(0+2k\pi) + i\sin(0+2k\pi) = e^{i2k\pi},\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

எனவே, $z = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k = 0, 1, 2.$

$k = 0,1,2$ எனப்பிரதியிட

$k = 0, \quad z = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$

$k = 1, \quad z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$k = 2, \quad z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

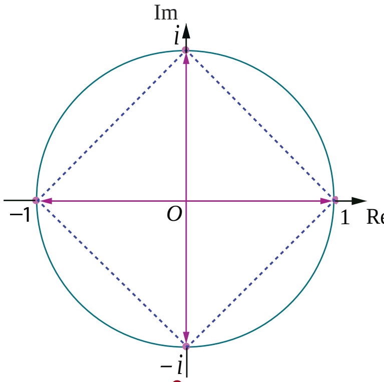
ஆகவே, ஒன்றின் மூன்றாம் படிமூலங்கள்

$$1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1, \omega, \text{ மற்றும் } \omega^2, \text{ இங்கு } \omega = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.33

ஒன்றின் நான்காம் படிமூலங்களைக் காண்க.

தீர்வு



ஒன்றின் நான்காம் படிமூலங்கள்
படம் 2.47

நாம் $1^{\frac{1}{4}}$ ஐ காண வேண்டும். $z = 1^{\frac{1}{4}}$ எனில் $z^4 = 1$ ஆகும்.

$z^4 = 1$ என்ற சமன்பாட்டை துருவ வடிவில் எழுத,

$$z = \cos(0+2k\pi) + i\sin(0+2k\pi) = e^{i2k\pi}, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

எனவே, $z = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{4}},\ k = 0,1,2,3.$

$k = 0,1,2,3$ எனப்பிரதியிட

$k = 0, \quad z = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$

$k = 1, \quad z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i.$

$k=2,\qquad z = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$

$k=3,\qquad z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i.$

ஒன்றின் நான்காம் படிமூலங்கள் $1, i, -1, -i \;\Rightarrow\; 1, \omega, \omega^2$, மற்றும் ω^3, இங்கு $\omega = e^{i\frac{2\pi}{4}} = i$. ■

குறிப்பு

(i) இப்பாடப்பகுதியில் ω என்பது ஒன்றின் n –ஆம்படிமூலத்தைகுறிப்பிடப்பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. எனவே ω ஆனது n -ஐப் பொருத்து எவ்வாறு அமைகின்றது என்பது அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

n–ன் மதிப்புகள்	2	3	4	5	$\cdots$	k
ω –ன் மதிப்புகள்	$e^{i\frac{2\pi}{2}}$	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{i\frac{2\pi}{4}}$	$e^{i\frac{2\pi}{5}}$	$\cdots$	$e^{i\frac{2\pi}{k}}$

(ii) $z e^{i\theta}$ என்பது z –ஐ ஆதியை பொறுத்து θ கோணம் கடிகார எதிர்திசையில் சுற்றுவது ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.34

$z^3 + 8i = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. இங்கு $z \in \mathbb{C}$.

தீர்வு

$z^3 + 8i = 0$ என்க.

$$\Rightarrow \quad z^3 = -8i$$

$$= 8(-i) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$ எனவே,

$$z = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{-\pi + 4k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi + 4k\pi}{6}\right)\right),\; k = 0,1,2.$$

$k = 0,1,2$ எனப் பிரதியிட

$$k=0,\qquad z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i.$$

$$k=1,\qquad z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 = 2(0+i) = 0 + 2i = 2i.$$

$$k=2,\qquad z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i.$$

z -ன் மதிப்புகள் $\sqrt{3} - i,\ 2i,$ மற்றும் $-\sqrt{3} - i$. ■

எடுத்துக்காட்டு 2.35

$\sqrt{3}+i$ –ன் எல்லா மூன்றாம் படிமூலங்களையும் காண்க.

தீர்வு

நாம் $\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$ –ன் மதிப்புகளை காண வேண்டும். $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$ எனில்

$$z^3 = \sqrt{3}+i = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ ஆகும்.}$$

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \text{ மற்றும் } \alpha = \theta = \frac{\pi}{6} \quad (\because \sqrt{3}+i \text{ I கால்பகுதியில் அமைவதால்})$$

$$\text{ஆகவே, } z^3 = \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+12k\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+12k\pi}{18}\right)\right), k = 0,1,2.$$

$k=0,1,2$ எனப்பிரதியிட,

$$k=0, \quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right);$$

$$k=1, \quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right);$$

$$k=2, \quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right) = 2^{\frac{1}{3}}\left(-\cos\frac{7\pi}{18} - i\sin\frac{7\pi}{18}\right).$$

எடுத்துக்காட்டு 2.36

z_1, z_2, மற்றும் z_3 ஆகியவை $|z|=2$ என்ற வட்டத்தின் மீதமைந்த சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் என்க. மேலும் $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ எனில், z_2 மற்றும் z_3–ஐக் காண்க.

தீர்வு

$|z|=2$ என்பது $(0,0)$ –வை மையமாகவும். 2 ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தைக் குறிக்கும். A, B, மற்றும் C ஆகியவை முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என்க. z_1, z_2 மற்றும் z_3 ஆகியவை $|z|=2$ என்ற வட்டத்தின் மீதமைந்த சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள். எனவே, AB, BC, மற்றும் CA என்ற பக்கங்கள் ஆதியை பொருத்து (முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம்) $\frac{2\pi}{3}$ ரேடியன்கள் (120°) கோண இடைவெளி விட்டு அமையும். ($ze^{i\theta}$ என்பது z -ஐ ஆதியைப் பொருத்து θ கோணம் கடிகார எதிர்திசையில் சுற்றுவது ஆகும்)

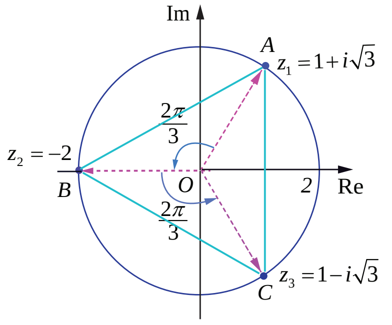
ஆகவே, z_1 -ஐ முறையே $\frac{2\pi}{3}$ மற்றும் $\frac{4\pi}{3}$ கோணங்கள் சுற்றுவதால் z_2 மற்றும் z_3 ஆகியவற்றை பெறலாம்.

$$\overrightarrow{OA} = z_1 = 1+i\sqrt{3} \text{ என்க.}$$

$$\overrightarrow{OB} = z_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(1+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2;$$



படம் 2.48

$$\overrightarrow{OC} = z_1 e^{i\frac{4\pi}{3}} = z_2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

ஆகவே, $z_2 = -2$, and $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

பயிற்சி 2.8

1. $\omega \neq 1$ என்பது ஒன்றின் மூன்றாம் படிமூலம் எனில் $\dfrac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2} + \dfrac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2} = -1$ என நிறுவுக.

2. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^5 = -\sqrt{3}$ எனக்காட்டுக.

3. $\left(\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}}{1+\sin\frac{\pi}{10}-i\cos\frac{\pi}{10}}\right)^{10}$ –ன் மதிப்பு காண்க.

4. $2\cos\alpha = x + \dfrac{1}{x}$ மற்றும் $2\cos\beta = y + \dfrac{1}{y}$, எனக் கொண்டு. கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

   (i) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\cos(\alpha-\beta)$ (ii) $xy - \dfrac{1}{xy} = 2i\sin(\alpha+\beta)$

   (iii) $\dfrac{x^m}{y^n} - \dfrac{y^n}{x^m} = 2i\sin(m\alpha - n\beta)$ (iv) $x^m y^n + \dfrac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)$.

5. $z^3 + 27 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

6. $\omega \neq 1$ என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் எனில் $(z-1)^3 + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$ எனக்காட்டுக.

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{9} + i\sin\frac{2k\pi}{9}\right)$–ன் மதிப்பு காண்க.

8. $\omega \neq 1$ என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

   (i) $(1-\omega+\omega^2)^6 + (1+\omega-\omega^2)^6 = 128.$

   (ii) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\cdots(1+\omega^{2^{11}}) = 1.$

9. $z = 2-2i$ எனில், ஆதியைப் பொருத்து z -ஐ θ ரேடியன்கள் கடிகார திசைக்கு எதிர் திசையில் சுழற்றினால் z –ன் மதிப்பை கீழ்க்காணும் θ மதிப்புகளுக்கு காண்க.

   (i) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (ii) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ (iii) $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

பயிற்சி 2.9

சரியான அல்லது மிகப்பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$ -ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) i

B54G0

2. $\sum_{n=1}^{13}(i^n + i^{n-1})$ -ன் மதிப்பு

(1) $1+i$ (2) i (3) 1 (4) 0

3. iz, மற்றும் $z+iz$ என்ற கலப்பெண்கள் ஆர்கண்ட் தளத்தில் உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

(1) $\frac{1}{2}|z|^2$ (2) $|z|^2$ (3) $\frac{3}{2}|z|^2$ (4) $2|z|^2$

4. ஒரு கலப்பெண்ணின் இணை கலப்பெண் $\frac{1}{i-2}$ எனில், அந்த கலப்பெண்

(1) $\frac{1}{i+2}$ (2) $\frac{-1}{i+2}$ (3) $\frac{-1}{i-2}$ (4) $\frac{1}{i-2}$

5. $z = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^3 (3i+4)^2}{(8+6i)^2}$ எனில், $|z|$-ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

6. z எனும் பூஜ்ஜியமற்ற கலப்பெண்ணிற்கு $2iz^2 = \bar{z}$ எனில், $|z|$-ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3

7. $|z-2+i| \le 2$ எனில், $|z|$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு

(1) $\sqrt{3}-2$ (2) $\sqrt{3}+2$ (3) $\sqrt{5}-2$ (4) $\sqrt{5}+2$

8. $\left|z-\frac{3}{z}\right| = 2$ எனில், $|z|$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 5

9. $|z| = 1$ எனில், $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ -ன் மதிப்பு

(1) z (2) $\bar{z}$ (3) $\frac{1}{z}$ (4) 1

10. $|z| - z = 1+2i$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

(1) $\frac{3}{2}-2i$ (2) $-\frac{3}{2}+2i$ (3) $2-\frac{3}{2}i$ (4) $2+\frac{3}{2}i$

11. $|z_1| = 1,\ |z_2| = 2,\ |z_3| = 3$, மற்றும் $|9z_1z_2 + 4z_1z_3 + z_2z_3| = 12$ எனில், $|z_1+z_2+z_3|$-ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

12. z என்ற கலப்பெண்ணானது $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ஆகவும் $z + \frac{1}{z} \in R$ எனவும் இருந்தால், $|z|$−ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

13. $z_1, z_2,$ மற்றும் z_3 என்ற கலப்பெண்கள் $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ எனவும் $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ஆகவும் இருந்தால், $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ −ன் மதிப்பு

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

14. $\frac{z-1}{z+1}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை எனில், $|z|$−ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3

15. $z = x + iy$ என்ற கலப்பெண்ணிற்கு $|z+2| = |z-2|$ எனில், z−ன் நியமப்பாதை

(1) மெய் அச்சு (2) கற்பனை அச்சு (3) நீள்வட்டம் (4) வட்டம்

16. $\frac{3}{-1+i}$ என்ற கலப்பெண்ணின் முதன்மை வீச்சு

(1) $\frac{-5\pi}{6}$ (2) $\frac{-2\pi}{3}$ (3) $\frac{-3\pi}{4}$ (4) $\frac{-\pi}{2}$

17. $\left(\sin 40^\circ + i\cos 40^\circ\right)^5$ −ன் முதன்மை வீச்சு

(1) -110° (2) -70° (3) 70° (4) 110°

18. $(1+i)(1+2i)(1+3i)\cdots(1+ni) = x + iy$ எனில், $2.5.10\cdots\left(1+n^2\right)$ −ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) i (3) $x^2 + y^2$ (4) $1 + n^2$

19. $\omega \neq 1$ என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் மற்றும் $(1+\omega)^7 = A + B\omega$ எனில், (A, B) என்பது

(1) (1,0) (2) (−1,1) (3) (0,1) (4) (1,1)

20. $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{4i\left(1-i\sqrt{3}\right)}$ என்ற கலப்பெண்ணின் முதன்மை வீச்சு

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

21. $x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், $\alpha^{2020} + \beta^{2020}$ −ன் மதிப்பு

(1) −2 (2) −1 (3) 1 (4) 2

22. $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ −ன் எல்லா நான்கு மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகை

(1) −2 (2) −1 (3) 1 (4) 2

23. $\omega \neq 1$ என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் மற்றும் $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\omega^2 - 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^7 \end{vmatrix} = 3k$ எனில், k−ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) −1 (3) $\sqrt{3}i$ (4) $-\sqrt{3}i$

24. $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ –ன் மதிப்பு

(1) $cis\dfrac{2\pi}{3}$ (2) $cis\dfrac{4\pi}{3}$ (3) $-cis\dfrac{2\pi}{3}$ (4) $-cis\dfrac{4\pi}{3}$

25. $\omega = cis\dfrac{2\pi}{3}$ எனில் $\begin{vmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வெவ்வேறான மூலங்களின் எண்ணிக்கை.

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

பாடச்சுருக்கம்

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றவைகள்

ஒரு கலப்பெண்ணின் செவ்வக வடிவம் என்பது $x+iy$ (அல்லது $x+yi$) ஆகும். இங்கு x மற்றும் y ஆகியவை மெய் எண்களாகும்.

இரண்டு கலப்பெண்கள் $z_1 = x_1 + iy_1$ மற்றும் $z_2 = x_2 + iy_2$ ஆகியவை சமமாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ மற்றும் $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$. அதாவது $x_1 = x_2$ மற்றும் $y_1 = y_2$.

$x+iy$ என்ற கலப்பெண்ணின் இணைக் கலப்பெண் $x-iy$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது

இணைக் கலப்பெண்களின் பண்புகள்

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$

(5) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$

(6) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$, இங்கு n ஒரு முழு எண்

(8) z ஒரு மெய் எண் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $z = \overline{z}$

(9) z ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $z = -\overline{z}$

(10) $\overline{\overline{z}} = z$

$z = x+iy$ எனில் z –ன் மட்டு மதிப்பினை $|z|$ என குறிப்பிடுகின்றோம். இதனை $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ என வரையறுப்போம்.

கலப்பெண்ணின் மட்டுக்கான பண்புகள்

(1) $|z| = |\overline{z}|$

(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (முக்கோணச் சமனிலி)

(5) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$, இங்கு n ஒரு முழு எண்

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

(7) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$

(8) $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$

ஒரு கலப்பெண்ணின் வர்க்கமூலம் காண சூத்திரம்

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right), \text{ இங்கு } z = a+ib \text{ மற்றும் } b \neq 0.$$

r மற்றும் θ ஆகியவை $P(x,y)$ என்ற பூஜ்ஜியமற்ற கலப்பெண் $z = x+iy$ –ன் துருவ ஆயத்தொலைகள் என்க. P என்ற புள்ளியின் துருவ அல்லது முக்கோண வடிவம் என்பது

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

துருவ வடிவின் பண்புகள்

பண்பு 1

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, எனில் $z^{-1} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ ஆகும்.

பண்பு 2

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ மற்றும் $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ எனில்,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right).$$

பண்பு 3

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ மற்றும் $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ எனில்,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right].$$

டி மாய்வரின் தேற்றம்

(a) **கொடுக்கப்பட்ட கலப்பெண் $\cos\theta + i\sin\theta$ மற்றும் n என்ற முழு எண்ணிற்கு $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.**

(b) x ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் $\cos x\theta + i\sin x\theta$ என்பது $(\cos\theta + i\sin\theta)^x$ –ன் மதிப்புகளில் ஒன்றாகும்.

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0,1,2,3,\ldots,n-1.$$

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும். GeoGebra–வின் "12th Standard Mathematics" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடது பக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "Complex Numbers" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க. இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். "Functions Identification" பயிற்சித்தாளை தேர்வு செய்க.

அத்தியாயம்

3

சமன்பாட்டியல்

O42C0

"சமன்பாட்டின் அழகை இரசிக்க முற்படும் ஒருவர் உண்மையிலேயே நுண்ணறிவோடு இரசிக்க முற்பட்டால் மிகவும் சரியான கோணத்தில்தான் இரசிக்கிறார் எனலாம்."

- பால் டிராக்

3.1 அறிமுகம் (Introduction)

இயற்கணித சமன்பாடுகளின் தீர்வைக் காண்பது கணிதத்தின் மிகப் பழமையான சவால்களில் ஒன்றாகும். அதிலும் குறிப்பாக பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் கண்டறிய முயல்வதுதான் எனலாம். ஏறத்தாழ கி.மு(பொஆ.மு) *2000* ஆண்டு கால கட்டத்தைச் சார்ந்த சுமேரியர்கள் மற்றும் பாபிலோனியர்களில் ஆரம்பித்து, உலக நாடுகளின் பல்வேறு பகுதிகளான எகிப்து,கிரேக்கம்,இந்தியா,சீன மற்றும் அரபு நாடுகளைச் சார்ந்த கணிதவியலாளர்கள் மற்றும் தத்துவ அறிஞர்கள் அனைவரும் பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண விழைந்தனர்.

ஏபெல்
(1802-1829)

பண்டைய காலத்தில் கணிதவியலாளர்கள் கணக்குகளையும் அதன் தீர்வு முறைகளையும் முழுவதும் வார்த்தைகளால் வடித்தனர். பொது வழிமுறைகளைத் தவிர்த்து குறிப்பிட்ட தீர்வு அமையும் கணக்குகளில் ஆர்வம் செலுத்தினர். குறை எண்களைக் கொண்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கானத் தீர்வினை பிரம்மகுப்தர்தான் முதல்முறையாகக் கண்டறிந்தார். பல்லுறுப்புக் கோவைகளினை ஆராய்ந்த கணிதவியலாளர்களில் சிலர் யூக்லிட், டையோபான்டஸ், பிரம்மகுப்தர், உமர்கய்யாம், ஃபிபனோசி, டெஸ்கார்டே மற்றும் ரூபினி ஆகியோராவர். ஐந்தாம்படி சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண இயற்கணித முறையில் சூத்திரமுறை ஏதுமில்லை என்பதை நிரூபிக்க புரிந்து கொள்ள சிரமப்படும் வகையில் மிகநீண்ட வாதங்களை முன்வைத்து நிரூபித்தார். இறுதியாக 1823 ஆண்டில் நார்வேஜியன் கணிதவியலாளரான ஏபெல் அதனை எளிய முறையில் நிரூபித்தார்.

ஒரு உற்பத்தி நிறுவனம் தன் தயாரிப்புகளை செவ்வக வடிவான பெட்டிகளில் அடைக்க விரும்புகின்றது. அந்த நிறுவனம் அகலத்தை விட ஆறு மடங்காக நீளம் அமையுமாறும் அடிமான நீளம் மற்றும் அகலத்தின் கூட்டுச் சராசரியாக உயரம் அமையுமாறு பெட்டிகள் தயாரிக்கப் பட திட்டமிடுகின்றது. எனவே அந்த நிறுவனம் வரையறுக்கப்பட்ட கனஅளவு கொண்ட பெட்டியின் பல்வேறு பக்க அளவுகளின் சாத்தியக் கூறுகள் பற்றி அறிய விரும்புகின்றது.

அடிமானத்தின் அகலம் x எனவும், நீளம் $x+6$ எனவும் மற்றும் உயரம் $x+3$ எனவும் கணக்கிடப்பட்டால் பெட்டியின் கன அளவு $x(x+3)(x+6)$ என அமையும். கன அளவு 2618 ச.அடியாகக் கொண்டால் $x^3+9x^2+18x=2618$ என அமையும். இச்சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கும் வகையில் x –ன் மதிப்பு அமைந்தால் தேவையான அளவுகளுடன் பெட்டி அமையும்.

ஒரு வட்டமும் ஒரு நேர்க்கோடும் இரு புள்ளிகளுக்கு மேல் வெட்டிக் கொள்ளாது என நாம் அறிவோம். இதனை எங்ஙனம் நிரூபிப்பது? இத்தகைய கூற்றுகளை நிரூபிக்க கணிதச் சமன்பாடுகள் உதவுகின்றன. xy தளத்தில் ஆதிபுள்ளியை மையமாகவும் r ஐ ஆரமாகவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு , $x^2+y^2=r^2$ என அமையும். மேலும் இதே தளத்தில் அமைந்த ஒரு நேர்க்கோட்டின்

சமன்பாடு $ax+by+c=0$ என அறிவோம். இவ்வட்டமும் நேர்க்கோடும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் இரு சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யும். வேறு வகையில் சொல்வதென்றால்,

$$x^2+y^2=r^2 \text{ மற்றும் } ax+by+c=0$$

ஆகிய உடன்நிகழ் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளே வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளைத் தரும். மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்விலிருந்துதான் அவை ஒன்றையொன்று தொடுகிறதா, இரு புள்ளிகளில் மட்டும் வெட்டுகின்றதா அல்லது வெட்டிக் கொள்வதே இல்லையா என நாம் தீர்மானிக்க இயலும்.

பண்டைய காலத்தில் குறிப்பிட்ட சில வடிவ உருவமைப்பு கணக்குகளில் கவராயமும், வரைகோலும் (அலகுகள் குறிப்பிடாத நேர் முனை) மட்டுமே பயன்படுத்தி வடிவத்தை உருவமைக்கும் கணக்குகள் உண்டு. சான்றாக, ஒரு சீரான அறுகோணம் மற்றும் 17 பக்கம் கொண்ட பலகோணமும் இத்தகைய முறையில் உருவமைக்கலாம், ஆனால் ஒரு எழுகோணத்தையோ அல்லது 18 பக்கம் கொண்ட பலகோணத்தையோ இவ்வாறு உருவாக்க இயலாது. குறிப்பாக கீழ்க்காணும் மூன்று பிரபலமான கணக்குகளில் கவராயம் மற்றும் வரைகோல் ஆகிய இரண்டை மட்டும் பயன்படுத்தி உருவாக்க இயலாது. அம்மூன்று பின்வருமாறு:

- ஒரு கோணத்தை முக்கூறாக்குதல் (கொடுக்கப்பட்ட கோணத்தை மூன்று சமகோணங்களாக பிரித்தல்)
- வட்டத்தை சதுரமாக்கல் (கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் பரப்பளவுக்குச் சம பரப்பளவுள்ள ஒரு சதுரத்தினை உருவாக்குதல், இதற்கு கணிதமேதை இராமாநுஜனின் கைப்பிரதியில் தோயாத்தீர்வு கொடுத்துள்ளார்)
- கன சதுரத்தை இரட்டிப்பாக்கல் (கொடுக்கப்பட்ட கனசதுரத்தின் கன அளவுக்கு இரு மடங்கு இணையாக ஒரு கனசதுரத்தினை உருவாக்குதல்)

இத்தகைய பண்டைய கணக்குகளுக்கான தீர்வுகள் இவற்றை பல்லுறுப்பு கோவைக் கணக்குகளாக மாற்றிய பிறகே கண்டறிய இயன்றது; உண்மையில் **இத்தகைய வடிவமைப்புகளை உருவாக்க இயலாது.** ஒரு செயலைச் செய்ய இயலுமா அல்லது இயலாதா என நிரூபிக்க கணிதம் துணை புரிகின்றது.

நடைமுறை வாழ்வியல் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண வேண்டும் எனில், அவற்றினை கணிதவியலாளர்கள் கணக்காக மாற்றி, அறிந்த கணித முறைகளைப் பயன்படுத்தி கணிதத் தீர்வு எட்டியவுடன் மீண்டும் நடைமுறை வாழ்க்கைக்கு ஏற்ற வகையில் தீர்வினைத் தருவர். இத்தகைய மாற்றங்களுக்கு உட்படும் பல்வேறு வாழ்வியல் பிரச்சினைகள் கணிதத்தில் சமன்பாடுகளாகின்றன. ஒரு பெட்டியின் அளவுகளைப் பற்றித் தீர்மானிக்கும்போதும், குறிப்பிட்ட வடிவியல் முடிவுகளை நிரூபிக்கும்போதும்,சில வடிவமைப்புகளை உருவாக்க இயலாது என நிரூபிக்கும்போதும் அவை கணித சமன்பாடுகளாகின்றன.

இந்த அத்தியாயத்தில் சமன்பாடுகளின் சில கோட்பாடுகளைப் பற்றியும் குறிப்பாக பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளைப் பற்றியும் அவற்றின் தீர்வுகளைப் பற்றியும் கற்போம். மேலும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் சில பண்புகளைப் பற்றியும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூலங்களிலிருந்து பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளாக உருவாக்குதல், அடிப்படை இயற்கணித தேற்றம் அறிதல், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மூலங்களில் மிகை மற்றும் குறை மூலங்களின் எண்ணிக்கை காணல் முதலியன கற்போம். இவற்றின் வாயிலாக குறிப்பிட்ட சிலவகை பல்லுறுப்புச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுத் தன்மையைக் காண்பது நமது இலக்காகும். சில பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக மாற்ற இயலாத சமன்பாடுகளுக்கானத் தீர்வினை பல்லுறுப்பு சமன்பாடுகளின் வாயிலாக கண்டறிய உதவும் சில வழிமுறைகளைப் பற்றியும் கற்போம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- மூலங்களின் மீது கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு உயர்படி சமன்பாடுகளை உருவாக்கல்.
- உயர்படிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க புதிய வழிமுறைகளை அறிந்து கொளல்.
- தீர்வுகளில் சில விகிதமுறா எண்களாகவும் அல்லது சில மெய்யற்ற எண்களாகவும் அமையும் உயர்படிச் சமன்பாடுகளை தீர்க்கும் வழிமுறை காணல்.
- தலைகீழ் சமன்பாடுகளைக் கண்டறிந்து அவற்றின் தீர்வு காணுதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைச்சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் மிகை மற்றும் குறை மூலங்களின் எண்ணிக்கையை டெகார்டே விதி மூலம் காணுதல்.

3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் அடிப்படைக் கூறுகள் (Basics of Polynomial Equations)

3.2.1 பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் வகைகள் (Different types of Polynomial Equations)

எந்தவொரு குறையற்ற முழு எண் n –க்கு, x எனும் **ஒற்றை மாறியில்** n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையானது,

$$P \equiv P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{ஆகும்.} \qquad \ldots (1)$$

இங்கு $a_r \in \mathbb{C}$ ஆகியவை மாறிலிகளாகவும், $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ எனவும், இங்கு $a_n \neq 0$ ஆகும். x எனும் மாறி மெய்யெண் அல்லது கலப்பெண்ணாக இருக்கலாம்.

P எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் அனைத்து கெழுக்களும் மெய்யெண்கள் எனில், இதனை "$\mathbb{R}$ –ன் மீதான பல்லுறுப்புக்கோவை P" என்போம். இதே போன்று, "$\mathbb{C}$ –ன் மீதான பல்லுறுப்புக்கோவை P" எனவும், "$\mathbb{Q}$ –ன் மீதான பல்லுறுப்புக்கோவை P" எனவும், "$\mathbb{Z}$ –ன் மீதான பல்லுறுப்புக்கோவை P" எனவும் கலைச்சொற்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

P எனும் சார்பு, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ என வரையறுக்கப்பட்டு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு என வழங்கப்படுகிறது.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \ldots (2)$$

என்பது **பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு** என அழைக்கப்படுகின்றது.

ஏதேனும் சில $c \in \mathbb{C}$ –க்கு $a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = 0$ எனில், c என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை (1)–ன் ஒரு **பூச்சியமாக்கி** எனவும், பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு (2)–ன் ஒரு **மூலம்** அல்லது **தீர்வு** எனவும் அழைக்கப்படுகின்றது.

c என்பது x எனும் ஒரு மாறி உள்ள சமன்பாட்டின் மூலம் எனில், "$x = c$ ஒரு மூலம்" என எழுதுவோம். a_r எனும் மாறிலிகள் கெழுக்கள் எனப்படுகின்றது. a_n எனும் கெழு தலைமைக் கெழு எனவும், $a_n x_n$ என்பது தலைமை உறுப்பு அல்லது முதன்மை உறுப்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. கெழுக்கள் மெய்யெண்ணாகவோ அல்லது கலப்பெண்ணாகவோ இருக்கலாம். இதில் விதிக்கப்படும் ஒரே நிபந்தனை என்பது தலைமை கெழு பூச்சியமற்ற எண்ணாக இருக்கவேண்டும். தலைமைக் கெழு 1 என இருக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவை தலை ஒற்றை பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

குறிப்புரை

கீழ்க்காணும் கூற்றுக்களைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்

- x –ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சார்புகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன.
- ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற மாறிலியும் பூச்சியத்தை படியாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.
- 0 எனும் மாறிலியும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாகும், இது **பூச்சிய பல்லுறுப்புக் கோவை** எனப்படுகிறது. இதன் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.
- பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி ஒரு குறையற்ற முழு எண்ணாக இருக்கும்.
- தலைமை கெழு பூச்சியம் கொண்ட ஒரே பல்லுறுப்புக்கோவை பூச்சிய பல்லுறுப்புக்கோவை மட்டுமே ஆகும்.
- படி இரண்டு உடைய பல்லுறுப்புக்கோவை **இருபடிப் பல்லுறுப்புக்கோவை** எனப்படும்.
- படி மூன்று உடைய பல்லுறுப்புக்கோவை **முப்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை** எனப்படும்,
- படி நான்கு உடைய பல்லுறுப்புக்கோவை **நாற்படிப் பல்லுறுப்புக்கோவை** எனப்படும்,

ஒரு மாறி x-ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையை, x – ன் படி இறங்குவரிசையில் அமையுமாறு எழுதுவது வழக்கம். அதாவது மிக உயர்ந்த படி கொண்ட உறுப்பில் தொடங்கி மாறிலி உறுப்பு கடைசி உறுப்பாக இருக்குமாறு எழுதுவது வழக்கம்.

சான்றாக, $2x+3y+4z=5$ மற்றும் $6x^2+7x^2y^3+8z=9$ ஆகியவை x, y, z என்ற மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகள் ஆகும்; $x^2-4x+5=0$ என்பது x எனும் ஒரு மாறி கொண்ட சமன்பாடு ஆகும். முந்தைய வகுப்புகளில் முக்கோணவியல் சமன்பாடுகள், நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்புகள், மற்றும் சில பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றிற்கு தீர்வு கண்டோம்.

x^2-5x+6 எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியமாக்கி 3 எனவும் மற்றும் $x^2-5x+6=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலம் அல்லது தீர்வு 3 எனவும் அறிவோம். மேலும் $\cos(x)=\sin(x)$ மற்றும் $\cos(x)+\sin(x)=1$ ஆகியன x எனும் ஒரு மாறி கொண்ட சமன்பாடுகளாகும். இருப்பினும், $\cos(x)-\sin(x)$ மற்றும் $\cos(x)+\sin(x)-1$ ஆகியன பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகாது. எனவே $\cos(x)=\sin(x)$ மற்றும் $\cos(x)+\sin(x)=1$ ஆகியன "பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளாகாது". இப்பாடப்பகுதியில் "பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி மட்டுமே கவனத்தில் கொள்கிறோம். மேலும், ஒரே ஒரு மாறி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு மூலம் தீர்வு காணக்கூடிய சமன்பாடுகளை மட்டுமே கருத்தில் கொள்வோம்.

> $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ என்பது $\mathbb{R}$ -ல் உள்ள முற்றொருமையாகும். அதே சமயத்தில் $\sin(x)+\cos(x)=1$ மற்றும் $\sin^3(x)+\cos^3(x)=1$ ஆகியன சமன்பாடுகளாகும்.

முக்கியமாக, பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கெழுக்கள் மெய்யெண்களாகவோ அல்லது கலப்பெண்களாகவோ இருந்தாலும் அடுக்குக் குறி குறையற்ற முழுக்களாகத்தான் இருக்க வேண்டும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. உதாரணமாக, $3x^{-2}+1$ மற்றும் $5x^{\frac{1}{2}}+1$ ஆகியன

பல்லுறுப்புக்கோவைகளாகாது. பல்லுறுப்புக்கோவைகளைப் பற்றியும், பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளைப் பற்றியும் குறிப்பாக இருபடிச் சமன்பாடுகளைப் பற்றியும் முன்னரே கற்றுள்ளோம். இப்பாடப்பகுதியில் அவற்றைப்பற்றி சுருக்கமான ஒரு மீள்பார்வையுடன் மேலும் சில கருத்துக்களையும் காண்போம்.

3.2.2 இருபடிச் சமன்பாடுகள் (Quadratic Equations)

இருபடிச் சமன்பாடான $ax^2+bx+c=0$-ல், b^2-4ac என்பது பண்புகாட்டி என அழைக்கப்பட்டு Δ எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றது. ax^2+bx+c எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ மற்றும் $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ என்பன $ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்களாகும் என நாமறிவோம். இவ்விரு மூலங்களையும் ஒருங்கே $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு $a\neq 0$ எனக் குறிப்பிடுவது தேவையற்றது. ஏனெனில் ax^2+bx+c என்பது இருபடி சமன்பாடு எனக் கூறுவதிலிருந்தே $a\neq 0$ என்பது தெளிவாகிறது.

மூலங்கள் சமமாக இருக்கத் தேவையானதும், மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\Delta=0$ ஆகும் எனக் கற்றறிந்துள்ளோம். a,b,c என்பன மெய் எனில்

- $\Delta>0$ என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே மூலங்கள் மெய்யாகவும் மற்றும் வெவ்வேறாகவும் இருக்கும்.
- $\Delta<0$ என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய் தீர்வுகள் இருக்காது.

3.3 வியட்டாவின் சூத்திரங்கள் மற்றும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல்

(Vieta's Formulae and Formation of Polynomial Equations)

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் கெழுக்கள் அவற்றின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் மூலங்களின் பெருக்கல் இவற்றை தொடர்புபடுத்தும் சூத்திரமே வியட்டாவின் சூத்திரமாகும். பல்லுறுப்புக் கோவையில் பிரெஞ்சு கணிதவியலாளரான வியட்டாவின் பங்கு நவீன இயற்கணிதத்திற்கு வழிகோலியது.

3.3.1 இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரங்கள்

(Vieta's formula for Quadratic Equations)

IA2J1

$ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β என்க. பின்னர்,

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a(\alpha\beta).$$

ஒத்த அடுக்குகளின் கெழுக்களை ஒப்பிடும்போது, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ மற்றும் $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ என கிடைக்கின்றது. எனவே α மற்றும் β ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ஆகும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$$x^2 - (\text{மூலங்களின் கூடுதல்})\, x + (\text{மூலங்களின் பெருக்கல்}) = 0. \qquad \ldots (1)$$

குறிப்பு

மேற்கண்ட கூற்றில், ஒருமைச் சொல்லான 'ஒரு' பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. உண்மையில் $P(x)=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில் c எனும் பூச்சியமற்ற மாறிலிக்கு, $cP(x)$ என்பதும் α மற்றும் β ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

கெழுக்களுக்கும் மூலங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்புகளைப் பயன்படுத்தி முந்தைய வகுப்புகளில் α மற்றும் β மூலங்களாக உடைய இருபடிச்சமன்பாட்டை உருவாக்கினோம். உண்மையில் அத்தகைய சமன்பாட்டில் ஒன்றுதான் சமன்பாடு (1)-ல் தரப்பட்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக, 3 மற்றும் 4 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு இருபடிச்சமன்பாடு $x^2-7x+12=0$ ஆகும்.

மேலும் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்களின் சார்புகளை மூலங்களாகக் கொண்ட புதிய பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டை உருவாக்கலாம். இந்த முறையில் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணாமலேயே புதிய பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை உருவாக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைச்சமன்பாட்டின் மூலங்களுடன் 2-ஐ கூட்டுவதன் மூலம் புதிய பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டை பின்வருமாறு உருவாக்குவோம். (பார்க்க எடுத்துக்காட்டு 3.1).

எடுத்துக்காட்டு 3.1

$17x^2+43x-73=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், α மற்றும் β எனில் $\alpha+2$ மற்றும் $\beta+2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு இருபடிச்சமன்பாட்டை உருவாக்கவும்.

தீர்வு

$17x^2+43x-73=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், α மற்றும் β என்பதால், $\alpha+\beta=-\frac{43}{17}$ மற்றும் $\alpha\beta=-\frac{73}{17}$ ஆகும்.

தேவையான இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha+2$ மற்றும் $\beta+2$ ஆகும். எனவே,

$$\text{மூலங்களின் கூடுதல்} = \alpha+\beta+4 = \frac{-43}{17}+4 = \frac{25}{17}$$

$$\text{மூலங்களின் பெருக்கல்} = \alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4 = \frac{-73}{17}+2\left(\frac{-43}{17}\right)+4 = \frac{-91}{17}.$$

எனவே, தேவையான இருபடிச் சமன்பாடு $x^2-\frac{25}{17}x-\frac{91}{17}=0$ ஆகும். இச்சமன்பாட்டை 17-ஆல் பெருக்க, $\alpha+2$ மற்றும் $\beta+2$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட $17x^2-25x-91=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. ■

எடுத்துக்காட்டு 3.2

$2x^2-7x+13=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில் α^2 மற்றும் β^2 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்கவும்.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β என்பதால், $\alpha+\beta=\frac{7}{2}$ மற்றும் $\alpha\beta=\frac{13}{2}$ ஆகும்.

எனவே, தேவையான இருபடிச் சமன்பாட்டை பெற,

$$\text{மூலங்களின் கூடுதல்} = \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{-3}{4}.$$

$$\text{மூலங்களின் பெருக்கல்} = \alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\frac{169}{4}$$

எனவே, தேவையான இருபடிச் சமன்பாடு $x^2+\frac{3}{4}x+\frac{169}{4}=0$ எனக்கிடைக்கிறது.

$$4x^2+3x+169 = 0$$

இதுவே α^2 மற்றும் β^2 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடாகும் ■

குறிப்புரை

எடுத்துக்காட்டு 3.1 மற்றும் 3.2–லிருந்து $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha\beta$ மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் தொகையைக் கணித்தோம். இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கலைக் கொண்டு தேவையான இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கலை கணக்கிட்டுத் தேவையான இருபடிச்சமன்பாட்டை உருவாக்க இயலும். இங்கு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு காணவில்லை என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டை உருவாக்கும் பணி முடிவடைந்த பின்னர் கூட α மற்றும் β மதிப்பு நமக்குத் தெரிவதில்லை.

3.3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கான வியட்டாவின் சூத்திரங்கள் (Vieta's formula for Polynomial Equations)

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகள் பற்றி அறிந்ததை மேலும் உயர் படி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு நீட்டிக்கலாம். இப்பாடப்பகுதியில் உயர்படி பல்லுறுப்பு கோவைகளின் பூச்சியங்களாக்கிகளுக்கும் அதன் கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பினைப் பற்றி கற்போம். பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களாக்கிகளைப் பற்றி சில தகவல்கள் தெரிந்திருந்தால் உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவைகளை உருவாக்குவது எப்படி என்பதைப் பற்றிக் கற்போம். இப்பாடப்பகுதியில் n படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களாக்கிகளையோ அல்லது n படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்களையோ பயன்படுத்துவோம்.

3.3.2 (a) அடிப்படை இயற்கணிதத் தேற்றம் (The Fundamental Theorem of Algebra)

P(x)=0 எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் a எனில் (x-a) என்பது P(x) –ன் ஒரு காரணியாகும். எனவே P(x) –ன் படி ≥ 1 ஆகும். a மற்றும் b என்பவை P(x)=0 –ன் மூலங்கள் எனில், (x-a)(x-b) என்பது P(x) –ன் ஒரு காரணியாகும். ஆகையால், P(x) –ன் படி ≥ 2 எனக் கூறலாம். இவ்வாறே, P(x)=0 –க்கு n மூலங்கள் இருந்தால், அதன் படி n ஆகவோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்டோ இருக்கவேண்டும். அதாவது, ***n* படி உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்கள் *n*–க்கு மேற்பட்டு இருக்காது.**

முந்தைய வகுப்புகளில் "மடங்கெண்" பற்றி கற்றதை நினைவில் கொள்வோம். P எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு $(x-a)^k$ என்பது ஒரு காரணியாகவும் $(x-a)^{k+1}$ காரணியாக இல்லாமலும் அமைந்தால், a எனும் மூலத்தின் மடங்கெண் k என்று அழைக்கப்படும். உதாரணமாக $x^2-6x+9=0$ மற்றும் $x^3-7x^2+159x-9=0$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கு 3 எனும் மூலத்தின் மடங்கெண் 2 ஆகும். இங்கு கலப்பெண்களை நாம் கெழுக்களாகப் பயன்படுத்தவில்லை என்றாலும் $x^2-(4+2i)x+3+4i$ மற்றும் $x^4-8x^3+26x^2-40x+25=0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கு $2+i$ எனும் மூலத்தின் மடங்கெண் 2 ஆகும். ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் a எனும் மூலத்தின் மடங்கெண் 1 என்றால், a என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டின் எளிய மூலம் என அழைக்கப்படும்.

$P(x)=0$ –க்கு மடங்கெண்ணையும் சேர்த்து n மூலங்கள் இருந்தால், அப்போதும் கூட படி n –க்குச் சமமாகவோ அல்லது அதைவிட அதிகமாகவேதான் இருக்கும் எனக் காண்கிறோம். வேறு வார்த்தைகளில் சொல்வதென்றால் "n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின்

மூலங்களுடன் மடங்கெண்ணையும் சேர்த்து கணக்கிட்டாலும் அச்சமன்பாட்டிற்கு n மூலங்களுக்கு மேல் இராது" எனலாம்.

சமன்பாட்டியலிலேயே மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தேற்றங்களில் ஒன்று அடிப்படை இயற்கணிதத் தேற்றமாகும். அதன் நிரூபணம் இந்நூலின் பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது என்பதால் தேற்றத்தின் கூற்று நிரூபணமின்றித் தரப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 3.1 (அடிப்படை இயற்கணிதத் தேற்றம்) (The Fundamental Theorem of Algebra)

படி $n \geq 1$ என உள்ள ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கும் குறைந்தபட்சம் ஒரு மூலமாவது $\mathbb{C}$ –ல் இருக்கும்.

இத்தேற்றத்தின் கூற்று மூலமாக n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு மூலங்களின் மடங்கெண்ணையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டு குறைந்தபட்சம் n மூலங்கள் $\mathbb{C}$ –ல் இருக்கும் என நிரூபிக்க இயலும். நமது விவாதத்தில் இந்த கூற்றையும் தொகுத்துக் கூறினால்

n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு $\mathbb{C}$ –ல் சரியாக n மூலங்கள் அவற்றின் மடங்கெண்ணையும் கருத்தில் கொள்ளப்பட்டு அமையும்.

சில நூலாசிரியர்கள் மேற்கண்ட கூற்றைத்தான் அடிப்படை இயற்கணித தேற்றம் எனக் குறிப்பிடுவர்.

3.3.2 (b) வியட்டாவின் சூத்திரம் (Vieta's Formula)

(i) முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம் (Vieta's Formula for Polynomial equation of degree 3)

இனி இது போன்ற தொடர்புகளை உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். கீழ்க்காணும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டை கருதுவோம்.

$$ax^3+bx^2+cx+d = 0.$$

அடிப்படை இயற்கணிதத் தேற்றத்தின்படி இதற்கு மூன்று மூலங்கள் உண்டு. அவை α , β மற்றும் γ என்க. எனவே,

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

வலப்பக்கத்தை விரிவுபடுத்தி பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$ax^3+bx^2+cx+d = ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a(\alpha\beta\gamma).$$

ஒத்த அடுக்குகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{-b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a} \text{ மற்றும் } \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} \text{ எனப் பெறலாம்.}$$

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 3 என்பதால், $a \neq 0$ என்றிருக்கவேண்டும். இதனால் a –ஆல் வகுப்பது அர்த்தமுள்ளதாகும். ஒற்றை முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவையின் மூலங்கள் முறையே α, β மற்றும் γ எனில்,

$$\begin{aligned} x^2\text{–ன் கெழு} &= -(\alpha+\beta+\gamma), \\ x\text{–ன் கெழு} &= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \text{ மற்றும்} \\ \text{மாறிலி உறுப்பு} &= -\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

(ii) படி $n > 3$ உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம் (Vieta's Formula for Polynomial equation of degree $n > 3$)

மேற்க்கண்ட தொடர்புகள் n உயர்படி ஒற்றை பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்க்கும் மெய்யாகும். ஒரு n படி உள்ள தலைஒற்றை பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ எனில்,

x^{n-1} –ன் கெழு	=	$\sum_1$	=	$-\sum \alpha_1$
x^{n-2} –ன் கெழு	=	$\sum_2$	=	$\sum \alpha_1\alpha_2$
x^{n-3} –ன் கெழு	=	$\sum_3$	=	$-\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3$
x –ன் கெழு	=	$\sum_{n-1}$	=	$(-1)^{n-1}\sum \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$
x^0 –ன் கெழு = மாறிலி	=	$\sum_n$	=	$(-1)^n \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$

இங்கு $\sum \alpha_1$ என்பது அனைத்து மூலங்களின் கூடுதல், $\sum \alpha_1\alpha_2$ என்பது அனைத்து மூலங்களையும் இரண்டிரண்டு மூலங்களாக எடுத்துக்கொண்டு பெருக்கிக் கிடைக்கும் மதிப்புகளின் கூட்டல் பலன், $\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ என்பது அனைத்து மூலங்களையும் மும்மூன்றாக பெருக்கிக் கிடைக்கும் மதிப்புகளின் கூட்டல் பலன், எனத் தொடர்ச்சியாக இவ்வண்ணமே குறிப்பிட்டுச் சொல்லிக் கொண்டே போகலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $\alpha, \beta, \gamma,$ மற்றும் δ என்பன நாற்படி (சதுர்) பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\sum \alpha_1$ என்பதை $\sum \alpha$ என்றும், $\sum \alpha_1\alpha_2$ என்பதை $\sum \alpha\beta$ எனவும் எழுதலாம் ஆகவே,

$$\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$$

$$\sum \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta$$

$$\sum \alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta$$

மூலங்கள் வெளிப்படையான எண் வடிவத்தில் இருந்தாலும் இத்தகைய குறியீடுகளை வசதிக்காக பயன்படுத்துகிறோம்.

அதிக மடங்கெண் கொண்ட மூலங்களைக் கையாளும்போது கவனம் தேவை. உதாரணமாக ஒரு முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 1, 2, 2, எனில், $\sum \alpha = 5$ மற்றும் $\sum \alpha\beta = (1\times 2) + (1\times 2) + (2\times 2) = 8$.

மேற்கண்ட விவாதத்திலிருந்து, ஒரு தலைஒற்றை பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு மூலங்களின் கூட்டற்பலன் என்பது x^{n-1} –ன் குணகத்தை (-1) –ஆல் பெருக்க கிடைக்கும் பெருக்கல்தொகையாகும். மேலும், மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் என்பது மாறிலி உறுப்பை $(-1)^n$ –ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

α, β, γ என்பவை $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருந்தால், கெழுக்களின் அடிப்படையில் $\Sigma \frac{1}{\beta\gamma}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α , β , மற்றும் γ என்பதால்,

$$\sum\nolimits_1 \quad \alpha + \beta + \gamma = -p \text{ மற்றும் } \sum\nolimits_3 \quad \alpha\beta\gamma = -r .$$

எனவே,

$$\sum \frac{1}{\beta\gamma} = \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-p}{-r} = \frac{p}{r} .$$ ■

3.3.2 (c) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களை வைத்து பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல் (Formation of Polynomial Equations with given Roots)

இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் தெரிந்திருக்குமானால், அதன் சமன்பாட்டை அமைத்தோம். இப்பொழுது, மூலங்களை அறிந்திருந்தால் உயர்படி சமன்பாடுகளை எங்ஙனம் உருவாக்குவது என்பது பற்றி கற்போம். $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்ற மூலங்களை உடைய ஒரு n படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டை எவ்வாறு காண்பது? காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டை எழுதுவது ஒரு வழி ஆகும். அதாவது, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என மூலங்களையுடைய ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆனால் இவ்வாறு ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டை எழுதுவது வழக்கமல்ல. திட்ட வடிவத்தில் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டை எழுத அதிக கணக்கீடுகள் தேவை. ஆனால் கெழுக்களுக்கும் மூலங்களுக்கும் உள்ளத் தொடர்பினைப் பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டை நேரடியாக நம்மால் எளிதாக எழுதிவிட இயலும். மேலும் முழுவதுமாக ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டை உருவாக்காமலேயே எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட அடுக்குள்ள x –ன் கெழுவையும் எழுதிவிட இயலும்.

மூலங்கள் α, β மற்றும் γ உடைய ஒரு முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு

$$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ மூலங்களாகக் கொண்ட n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டை

$$x^n - \left(\sum \alpha_1\right)x^{n-1} + \left(\sum \alpha_1\alpha_2\right)x^{n-2} - \left(\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = 0 \text{ என எழுதலாம்.}$$

இங்கு, $\sum \alpha_1, \sum \alpha_1\alpha_2, \sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$ ஆகியன முன்னரே வரையறுக்கப்பட்டவையாகும்.

உதாரணமாக, $1, -2$ மற்றும் 3 ஆகிய மூலங்களைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு

$$x^3 - (1-2+3)x^2 + (1\times(-2) + (-2)\times 3 + 3\times 1)x - 1\times(-2)\times 3 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இதனைச் சுருக்கும்போது $x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$ என்றாகும். (x-1)(x+2)(x-3) = 0 என்பதன் விரிவாக்கமே $x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$ என சரிபார்ப்பது ஆர்வமளிக்கக் கூடியதாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 3.4

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ –ன் மூலங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் காண்க. இங்கு $a \neq 0$ ஆகும்.

தீர்வு

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ –ன் மூலங்கள் α, β, γ மற்றும் δ என்க. எனவே,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \alpha+\beta+\gamma+\delta = -\frac{b}{a}, \\
\Sigma_2 &= \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta = \frac{c}{a}, \\
\Sigma_3 &= \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta = -\frac{d}{a}, \\
\Sigma_4 &= \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}.
\end{aligned}$$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ –ன் மதிப்பைக் காணவேண்டுமெனில்,

$$(a+b+c+d)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

எனும் முற்றொருமையினைப் பயன்படுத்த வேண்டும். எனவே,

$$\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 &= (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta) \\
&= \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right) \\
&= \frac{b^2-2ac}{a^2}.
\end{aligned}$$

■

எடுத்துக்காட்டு 3.5

$x^3+ax^2+bx+c=0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $p:q:r$ எனும் விகிதத்தில் அமைய நிபந்தனையைக் காண்க.

தீர்வு

மூலங்கள் $p:q:r$ எனும் விகிதத்தில் இருப்பதால், மூலங்களை, $p\lambda, q\lambda$ மற்றும் $r\lambda$ எனக் கொள்க. இனி,

$$\Sigma_1 = p\lambda+q\lambda+r\lambda = -a, \qquad \ldots.(1)$$

$$\Sigma_2 = (p\lambda)(q\lambda)+(q\lambda)(r\lambda)+(r\lambda)(p\lambda) = b, \qquad \ldots.(2)$$

$$\Sigma_3 = (p\lambda)(q\lambda)(r\lambda) = -c, \qquad \ldots.(3)$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{p+q+r} \qquad \ldots.(4)$$

$$(3) \Rightarrow \lambda^3 = -\frac{c}{pqr} \qquad \ldots..(5)$$

(4)–ஐ (5)–ல் பிரதியிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\left(-\frac{a}{p+q+r}\right)^3 = -\frac{c}{pqr} \Rightarrow pqra^3 = c(p+q+r)^3.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 3.6

$x^3+ax^2+bx+c=0$ எனும் முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

தீர்வு

$x^3+ax^2+bx+c=0$ எனும் முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α,β மற்றும் γ என்க. எனவே,

$$\sum_1 = \alpha+\beta+\gamma = -a\,, \qquad \ldots(1)$$

$$\sum_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b\,, \qquad \ldots(2)$$

$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma = -c\,. \qquad \ldots(3)$$

$\alpha^2,\beta^2,$ மற்றும் γ^2 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்க வேண்டும்.

(1), (2) மற்றும் (3) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி, பின்வருவனவற்றைக் கண்டறிவோம் :

$$\sum_1 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = (-a)^2-2(b) = a^2-2b\,,$$

$$\sum_2 = \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2((\alpha\beta)(\beta\gamma)+(\beta\gamma)(\gamma\alpha)+(\gamma\alpha)(\alpha\beta))$$

$$= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha) = (b)^2-2(-c)(-a) = b^2-2ca$$

$$\sum_3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-c)^2 = c^2\,.$$

எனவே, தேவையான சமன்பாடு,

$$x^3-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)x^2+\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0.$$

$x^3-\left(a^2-2b\right)x^2+\left(b^2-2ca\right)x-c^2=0$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 3.7

p என்பது ஒரு மெய்யெண் எனில், $4x^2+4px+p+2=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையை p -ன் அடிப்படையில் ஆராய்க.

தீர்வு

பண்புகாட்டி $\Delta=(4p)^2-4(4)(p+2)=16(p^2-p-2)=16(p+1)(p-2)$ ஆகும்.

எனவே,

$-1<p<2$ எனில், $\Delta<0$

$p=-1$ அல்லது $p=2$ எனில், $\Delta=0$

$-\infty<p<-1$ அல்லது $2<p<\infty$ எனில், $\Delta>0$

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு,

$-1<p<2$ எனில், கலப்பெண் மூலங்களைப் பெற்றிருக்கும் ;

$p=-1$ அல்லது $p=2$ எனில், சமமான மெய்யெண் மூலங்களைப் பெற்றிருக்கும் ;

$-\infty<p<-1$ அல்லது $2<p<\infty$ எனில், வெவ்வேறான மெய்யெண் மூலங்களைப் பெற்றிருக்கும். ■

பயிற்சி 3.1

1. ஒரு கனச் சதுரப் பெட்டியின் பக்கங்களை 1, 2, 3 அலகுகள் அதிகரிப்பதால் கனச்சதுரப் பெட்டியின் கொள்ளளவைவிட 52 கன அலகுகள் அதிகமுள்ள கனச் செவ்வகம் கிடைக்கிறது எனில், கன செவ்வகத்தின் கொள்ளளவைக் காண்க.
2. கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைக் கொண்டு முப்படி சமன்பாடுகளை உருவாக்குக

   (i) $1, 2$, மற்றும் 3 (ii) $1, 1$, மற்றும் -2 (iii) $2, \frac{1}{2}$ மற்றும் 1

3. $x^3+2x^2+3x+4=0$ எனும் முப்படி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β மற்றும் γ எனில் கீழ்க்காணும் மூலங்களைக் கொண்டு முப்படி சமன்பாடுகளை உருவாக்குக.

   (i) 2α, 2β மற்றும் 2γ (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ மற்றும் $\frac{1}{\gamma}$ (iii) $-\alpha, -\beta$ மற்றும் $-\gamma$

4. $3x^3-16x^2+23x-6=0$ எனும் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களின் பெருக்கல் 1 எனில் சமன்பாட்டினைத் தீர்க்க.

5. $2x^4-8x^3+6x^2-3=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் காண்க.

6. $x^3-9x^2+14x+24=0$ எனும் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்கள் $3:2$ என்ற விகிதத்தில் அமைந்தால், சமன்பாட்டை தீர்க்க.

7. α, β மற்றும் γ ஆகியன $ax^3+bx^2+cx+d=0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருப்பின், கெழுக்கள் வாயிலாக $\sum \frac{\alpha}{\beta\gamma}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

8. α, β, γ மற்றும் δ ஆகியன $2x^4+5x^3-7x^2+8=0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ மற்றும் $\alpha\beta\gamma\delta$ ஆகியவற்றினை மூலங்களாகவும் முழு எண்களை கெழுக்களாகவும் கொண்ட ஓர் இருபடி சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. $lx^2+nx+n=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் p மற்றும் q எனில், $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$ எனக் காட்டுக.

10. $x^2+px+q=0$ மற்றும் $x^2+p'x+q'=0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரு பொதுவான மூலம் இருப்பின், அம் மூலம் $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ அல்லது $\frac{q-q'}{p'-p}$ ஆகும் எனக்காட்டுக.

11. 12 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு மரம் இரு பகுதிகளாக முறிந்துள்ளது. முறிந்த இடம் வரை இருக்கும் கீழ்ப்பகுதி, உடைப்பின் மேற்பகுதியின் நீளத்தின் கனமூலம் ஆகும். இந்தத் தகவலை கீழ்ப்பகுதியின் நீளம் காணும் வகையில் கணிதவியல் கணக்காக மாற்றுக.

3.4 பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் கெழுக்களின் பண்புகள் மற்றும் மூலங்களின் பண்புகள் (Nature of Roots and Nature of Coefficients of Polynomial Equations)

3.4.1 கற்பனை மூலங்கள் (Imaginary Roots)

மெய்யெண் கெழுக்களுடைய ஒரு இருபடி சமன்பாட்டிற்க்கு $\alpha+i\beta$ என்பது ஒரு மூலம் எனில், $\alpha-i\beta$ என்பதும் ஒரு மூலமாகும். இப்பாடப்பகுதியில் உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கும் இது பொருந்தும் என்பதை நிரூபிப்போம்.

இனி சமன்பாட்டியியலிலுள்ள மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தேற்றங்களில் ஒன்றை நிரூபிப்போம்.

தேற்றம் 3.2 இணைக் கலப்பெண் மூலத் தேற்றம் (Complex Conjugate Root Theorem)

மெய்யெண் கெழுக்களுடைய ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு z_0 ஒரு கலப்பெண் மூலம் எனில், அதன் இணைக் கலப்பெண் அதாவது, $\overline{z_0}$ -ம் மூலமாக இருக்கும்.

நிரூபணம்

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ என்பது மெய்யெண் கெழுக்களுடைய ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு என்க. இப்பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு z_0 என்பது ஒரு மூலம் என்க. எனவே, $P\left(z_0\right)=0$ ஆகும். இனி

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{z_0}\right) &= a_n\overline{z}_0^{\,n}+a_{n-1}\overline{z}_0^{\,n-1}+\cdots+a_1\overline{z}_0+a_0\\
&= a_n\overline{z_0^{\,n}}+a_{n-1}\overline{z_0^{\,n-1}}+\cdots+a_1\overline{z_0}+a_0\\
&= \overline{a_n}\,\overline{z_0^{\,n}}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{\,n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{z_0}+\overline{a_0}
\end{aligned}$$

(அனைத்து r –க்கும் a_r என்பது மெய்யெண் என்பதால் $a_r=\overline{a_r}$)

$$\begin{aligned}
&= \overline{a_nz_0^{\,n}}+\overline{a_{n-1}z_0^{\,n-1}}+\cdots+\overline{a_1z_0}+\overline{a_0}\\
&= \overline{a_nz_0^{\,n}+a_{n-1}z_0^{\,n-1}+\cdots+a_1z_0+a_0}=\overline{P(z_0)}=\overline{0}=0.
\end{aligned}$$

அதாவது $P(\overline{z_0})=0$; இதிலிருந்து எப்போதெல்லாம் z_0 மூலமாக இருக்கிறதோ, அப்போதெல்லாம் அதன் இணைக் கலப்பெண் $\overline{z_0}$ மூலமாக இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. ■

எவரேனும் 2 ஒரு கலப்பெண்ணாகுமா என வினவினால், "ஆம்" எனும் விடையளிக்க சில மாணவர்கள் தயங்குவார்கள். ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண் என்பதால் ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் ஒரு கலப்பெண் ஆகும். எனவே மெய் எண் இல்லாத ஒரு கலப்பெண்ணை அதாவது $\beta\neq 0$ எனும்படி உள்ள $\alpha+i\beta$ எனும் அமைப்பில் உள்ள எண்களைக் குறிப்பிட "மெய்யற்ற கலப்பெண்" எனத் தெளிவாக குறிப்பிடுவோம். சில நூலாசிரியர்கள் இத்தகைய எண்ணைக் கற்பனை எண் எனக் குறிப்பிடுவதுண்டு.

குறிப்புரை 1

$z_0=\alpha+i\beta$ என்க. இங்கு $\beta\neq 0$ ஆகும். எனவே $\overline{z_0}=\alpha-i\beta$ ஆகும். $P(x)=0$ எனும் மெய்யெண் கெழுக்கள் உடைய பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $\alpha+i\beta$ எனில், இணைக் கலப்பெண் மூலத்தேற்றத்தின்படி $\alpha-i\beta$ என்பதும் $P(x)=0$ -ன் ஒரு மூலமாகும். வழக்கமாக மேற்கண்ட வாக்கியத்தினை **'கலப்பெண் மூலங்கள் சோடி மூலங்களாகத்தான் அமையும்'** என்பர். ஆனால் உண்மையில் **பல்லுறுப்புக்கோவையின் கெழுக்கள் மெய்யெண்களாக இருப்பின், மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்கள் இணைக்கலப்பெண் சோடி மூலங்களாக அமையும் எனப் பொருள் கொள்ள வேண்டும்.**

குறிப்புரை 2

இதிலிருந்து எந்தவொரு ஒற்றை எண்படி மெய்யெண் கெழுக்களுடைய பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கும் குறைந்தபட்சம் ஒரு மெய்யெண் மூலம் இருக்கும்; உண்மையில் மெய்யெண் கெழுக்களுடைய ஒற்றையெண்படி பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை எண்ணாகத்தான் இருக்கும். அதேபோன்று மெய்யெண் கெழுக்களுடைய இரட்டையெண்படி பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படை எண்ணாகத்தான் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

$2-\sqrt{3}\,i$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் மெய்யெண் கெழுக்களுடைய தலைஒற்றைப் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு

மெய்யெண் கெழுக்களுடைய தேவையான பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $2-\sqrt{3}\,i$ என்பதால், $2+\sqrt{3}\,i$ என்பதும் ஒரு மூலமாகும். எனவே, மூலங்களின் கூடுதல் 4 மற்றும் மூலங்களின் பெருக்கல்தொகை 7 ஆகும். ஆகையால் $x^2-4x+7=0$ என்பது ஒரு மெய்யெண் கெழுக்களுடைய தேவைப்படும் தலைஒற்றைப் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடாகும். ■

3.4.2 விகிதமுறா எண் மூலங்கள் (Irrational Roots)

$ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் விகிதமுறா எண்களாகத்தான் இருக்கவேண்டும் எனும் வரம்புக்கு உட்படுத்தினால் சில ஆர்வமூட்டும் முடிவுகளைப் பெறலாம். a, b மற்றும் c என விகிதமுறு எண்களுடைய ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$ என்க. வழக்கம்போல் $\Delta = b^2-4ac$ எனவும் r_1 மற்றும் r_2 ஆகியன மூலங்களாகவும் கொள்க. இச்சமயத்தில் $\Delta = 0$ எனில் $r_1 = r_2$ ஆகும். இந்த மூலம் மெய்யெண்ணாக மட்டுமல்ல. உண்மையில் இது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

Δ ஒரு மிகை எண் எனில் $\mathbb{R}$ –ல் $\sqrt{\Delta}$ எவ்வித ஐயத்திற்கும் இடமின்றி இருக்கும். மேலும் இரு வேறுபட்ட மெய்யெண் மதிப்புகளையும் பெறலாம்.

ஆனால் $\sqrt{\Delta}$ என்பது a, b மற்றும் c–ன் Δ–ன் குறிப்பிட்ட சில மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே விகிதமுறு எண்ணாக அமையும். பிற மதிப்புகளுக்கு விகிதமுறா எண்ணாக அமையும்.

$\sqrt{\Delta}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் r_1 மற்றும் r_2 ஆகிய இரண்டுமே விகிதமுறு மதிப்பாக அமையும்.

$\sqrt{\Delta}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் எனில் r_1 மற்றும் r_2 ஆகிய இரண்டுமே விகிதமுறா மதிப்பாக அமையும்.

இத்தருணத்தில் $\Delta > 0$ எனில் எச்சமயங்களில், $\sqrt{\Delta}$ என்பது விகிதமுறு மதிப்பாகவோ அன்றி விகிதமுறா மதிப்பாகவோ அமையும் என ஒரு வினா நம்முன் எழுகிறது அன்றோ? இதற்கு விடை காண வேண்டுமாயின், கெழுக்கள் விகிதமுறு எண்களாக இருப்பதால் Δ என்பதும் விகிதமுறு எண்ணாகத்தான் இருக்கும் என்பது கவனிக்கத் தக்கது. எனவே (m,n) என்பது m மற்றும் n –ன் மீப்பெரு வகுத்தி என்பதைக் குறிக்கும். $(m,n)=1$ எனுமாறு m மற்றும் n என சில மிகை முழுக்களுக்கு $\Delta = \frac{m}{n}$ அமையும். இப்போது $\sqrt{\Delta}$ விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க m மற்றும் n முழுவர்க்கங்களாக இருக்க வேண்டும். இதன் மறுதலையும் உண்மை என அறியலாம். மேலும் $\sqrt{\Delta}$ விகிதமுறா எண்ணாக இருக்க m மற்றும் n முழு வர்க்கமல்லாமல் இருக்க வேண்டும் என அறியலாம். இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

p மற்றும் q என்பவை விகிதமுறு எண்களாகவும் $\sqrt{q}$ என்பது விகிதமுறா எண்ணாகவும் அமைந்த $p+\sqrt{q}$ எனும் விகிதமுறா எண் வகை நமக்கு முன்னரே பரிச்சயமானதாகும். இத்தகு எண்களை முருடு என அழைக்கிறோம். கலப்பெண் மூலங்களைப் போன்றே, ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் மூலம் $p+\sqrt{q}$ எனில் $p-\sqrt{q}$ என்பதும் அதே பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு அனைத்து கெழுக்களும் விகிதமுறு எண்களாக இருக்கும்பட்சத்தில், ஒரு மூலமாக அமையும். கலப்பெண் மூலங்களை நிரூபிக்கப் பயன்படுத்திய அதே வழிமுறையை இங்கு பயன்படுத்தி இக்கூற்று எந்தவொரு படி பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கும் பொருந்தும் என நிரூபிக்க இயலும் என்றாலும் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மட்டும் தேற்றம் 3.3 வாயிலாக நிரூபிப்போம்.

தேற்றத்தை நிரூபிக்கும் முன்னர் நாம் பின்வரும் கருத்துக்களை நினைவுகூர வேண்டியது அவசியமாகும். a மற்றும் b என்பன விகிதமுறு எண்களாகவும் c என்பது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகவும் அமைந்து $a+bc$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் என அமையவேண்டுமானால் உறுதியாக b என்பது பூச்சியமாகத்தான் இருக்க வேண்டும்; மேலும் $a+bc=0$ எனில் a மற்றும் b இரண்டுமே

பூச்சியமாகத்தான் இருக்க வேண்டும். சான்றாக, $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ எனில் b என்பது பூச்சியமாகத்தான் இருக்க வேண்டும். தவிர, $a+b\sqrt{2}=0$ எனில் $a=b=0$ ஆகும். இனி ஒரு பொதுவான முடிவைக் கூறி நிறுவுவோம்.

தேற்றம் 3.3

p மற்றும் q என்பவை விகிதமுறு எண்களாகவும் $\sqrt{q}$ என்பது விகிதமுறா எண் எனவும் கொள்க. அனைத்து கெழுக்களும் விகிதமுறு எண்களாக இருக்கும் ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $p+\sqrt{q}$ எனில் $p-\sqrt{q}$ என்பதும் அதே இருபடி சமன்பாட்டின் மூலமாக அமையும்.

நிரூபணம்

இருபடிச்சமன்பாட்டினை ஓர் தலைஒற்றை பல்லுறுப்புக்கோவையாகக் கருதி இத்தேற்றத்தை நிறுவுவோம். இதே போன்று, பிற பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கும் நிறுவலாம்.

p மற்றும் q என்பவை விகிதமுறு எண்களாகவும் $\sqrt{q}$ என்பது விகிதமுறா எண் எனவும் கொள்க. $x^2+bx+c=0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு $p+\sqrt{q}$ என்பது ஒரு மூலம் என்க. இங்கு b மற்றும் c விகிதமுறு எண்களாகும்.

α என்பது மற்றொரு மூலம் என்க. மூலங்களின் கூட்டல்தொகையைக் கணக்கிடும்போது,

$$\alpha+p+\sqrt{q} = -b$$

எனவே $\alpha+\sqrt{q}=-b-p\in\mathbb{Q}$. மேலும், $-b-p$ என்பதை s என்க. எனவே, $\alpha+\sqrt{q}=s$ ஆகும்.

இதிலிருந்து

$$\alpha=s-\sqrt{q} \text{ ஆகும்.}$$

மூலங்களின் பெருக்கல்தொகையைக் கணக்கிடும்போது,

$$(s-\sqrt{q})(p+\sqrt{q})=c$$

எனவே $(sp-q)+(s-p)\sqrt{q}=c\in\mathbb{Q}$. எனவே, $s-p=0$. இதிலிருந்து, $s=p$ ஆகும். ஆகையால், $\alpha=p-\sqrt{q}$. எனவே மற்ற மூலம் $p-\sqrt{q}$ ஆகும். ■

குறிப்புரை

தேற்றம் 3.3–ன் கூற்று காண எளியதாகத் தோன்றினாலும் புரிந்து கொள்வது கடினம். மேற்கண்ட தேற்றத்தின் கூற்றினைச் சுருக்கி "**விகிதமுறு கெழுக்களைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் விகிதமுறா மூலங்கள் ஜோடியாகத்தான் நிகழும்**" என்பது தவறு. ஏனெனில், x^3-2 எனும் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு விகிதமுறா எண் மூலம், அதாவது $\sqrt[3]{2}$ உள்ளது. நிச்சயமாகவே மற்ற இரு மூலங்களும் மெய்யற்ற கலப்பெண் எண்களாக அமைகின்றது. (அவை யாவை?).

எடுத்துக்காட்டு 3.9

$2-\sqrt{3}$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

$2-\sqrt{3}$ என்பது ஒரு மூலம் என்பதாலும் மற்றும் கெழுக்கள் விகிதமுறு எண்களாக இருப்பதாலும், $2+\sqrt{3}$ என்பதும் ஒரு மூலமாகும்.

$$x^2-(\text{மூலங்களின் கூடுதல்})\ x+\text{மூலங்களின் பெருக்கல்தொகை}=0$$

என்பது நமக்குத் தேவையான பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாடாகும். எனவே,

$$x^2-4x+1=0$$

என்பது நமக்குத் தேவையானப் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாடாகும். ■

குறிப்பு

இங்கு வினாவில் "விகிதமுறு கெழுக்கள்" எனும் சொற்றொடர் அத்தியாவசியமானது. இல்லையெனில், $x-(2-\sqrt{3})=0$ என்பது $2-\sqrt{3}$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடாக உள்ளது. ஆனால் இதற்கு $2+\sqrt{3}$ மூலமல்ல. கீழ்க்காணும் தேற்றம் நிரூபணம் இன்றி தரப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 3.4

p மற்றும் q ஆகியவை விகிதமுறு எண்களாகவும் $\sqrt{p}$ மற்றும் $\sqrt{q}$ ஆகியவை விகிதமுறா எண்களாகவும் அமைகிறது என்க. மேலும் $\sqrt{p}$ மற்றும் $\sqrt{q}$ ஆகிய இவற்றுள் ஒன்று மற்றொன்றின் விகிதமுறு மடங்காக இன்றி அமைகிறது என்க. $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ என்பது விகிதமுறு எண்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம் எனில், $\sqrt{p}-\sqrt{q}, -\sqrt{p}+\sqrt{q}$ மற்றும் $-\sqrt{p}-\sqrt{q}$ ஆகியவையும் அதே பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்களாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ -ஐ ஒரு மூலமாகவும் முழுக்களை கெழுக்களாகவும் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ என்பது ஒரு மூலம் என்பதால் $x-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ என்பது ஒரு காரணியாகும். வெளிப்புறமுள்ள வர்க்கமூலத்தை நீக்க $x+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ என்பதை மற்றொரு காரணியாக எடுத்துக்கொண்டு இவை இரண்டையும் பெருக்க, $\left(x+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right) = x^2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ எனப்பெறுகிறோம்.

இருப்பினும் நாம் இன்னும் இலக்கை அடையவில்லை. எனவே, $x^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ என்பதை மற்றொரு காரணியாகக் கொண்டு இரண்டையும் பெருக்கினால் $\left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = x^4-\frac{2}{3}$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே, தேவையானப் பண்புகளுடைய பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $3x^4-2=0$ ஆகும். ■

இனி சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் கண்டறிய முயலாமல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மை காண்போம். இக்கருத்து $\Delta = b^2 - 4ac$ -ன் குறைத் தன்மை, பூச்சியத்திற்கு சமத் தன்மை, மிகைத் தன்மை ஆகியவற்றிலிருந்து பெறப்படுகிறது.

3.4.3 விகிதமுறு மூலங்கள் (Rational Roots)

ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் அனைத்தும் முழுக்கள் எனில் Δ -ம் ஒரு முழு எண், மேலும் அது மிகை எண் எனில் $\sqrt{\Delta}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக அமைய Δ ஒரு முழு வர்க்கமாக இருக்க வேண்டும். இதன் மறுதலையும் உண்மை. வேறுவகையில் கூறுவதனால் முழு எண்களைக் கெழுக்களாக கொண்ட $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனில் $ax^2 + bx + c = 0$ ஒரு முழுவர்க்கமாகும். மறுதலையாக Δ ஒரு முழு வர்க்கம் எனில் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாகும்.

விகிதமுறு எண்களை கெழுக்களாக உள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகள் நாம் ஆராய்ந்த அனைத்தும் முழு எண்களை கெழுக்களாக உள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்தும். உண்மையில் விகிதமுறு எண்களை கெழுக்களாகக் கொண்டுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டினை, கெழுக்களின் விகுதிகளின் பொதுவான மடங்கினால் பெருக்கினால் முழுக்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளாக அதே மூலங்களுடன் அமையும். உறுதியாகவே இத்தருணத்தை மிகுந்த கவனத்துடன் கையாள வேண்டும். உதாரணமாக, $\frac{1}{2}$ ஐ மூலமாகக் கொண்ட விகிதமுறு எண்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட ஒரு படி உள்ள ஒற்றை பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு அமைந்தாலும் $\frac{1}{2}$ ஐ மூலமாகக் கொண்டு முழு எண்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட எந்த படியுள்ள ஒற்றை பல்லுறுப்புக் கோவையும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 3.11

$2x^2 - 6x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு x -ன் எந்த மெய்யெண் மதிப்பும் தீர்வைத் தராது எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$\Delta = b^2 - 4ac = -20 < 0$. எனவே மூலங்கள் கற்பனை எண்களாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$x^2 + 2(k+2)x + 9k = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம் எனில், k மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

இங்கு மூலங்கள் சமம் என்பதால் $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ஆகும். இதிலிருந்து $4(k+2)^2 = 4(9)k$ எனக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து k -ன் மதிப்பு 4 அல்லது 1 ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 3.13

p, q, r ஆகியவை விகிதமுறு எண்கள் எனில்

$x^2 - 2px + p^2 - q^2 + 2qr - r^2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாக இருக்க வேண்டுமெனில்,

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2p)^2 - 4\left(p^2 - q^2 + 2qr - r^2\right)$ என இருக்க வேண்டும்.

ஆனால் இதனைச் சுருக்கினால் $4\left(q^2 - 2qr + r^2\right)$ அல்லது $4(q-r)^2$ எனும் முழு வர்க்க எண்ணாகும். எனவே, மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாக இருக்கும். ■

3.5 வடிவியலில் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் பயன்பாடுகள் (Applications of Polynomial Equation in Geometry)

சில வடிவியல் பண்புகளை பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் வாயிலாக நிரூபிக்க இயலும். அத்தகைய நிரூபணங்களில் சிலவற்றை இங்கு காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

ஒரு வட்டத்தை ஒரு கோடு இரு புள்ளிகளுக்கு மேல் வெட்டாது என நிறுவுக.

தீர்வு

பொருத்தமான ஆயக்கூறு அச்சுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=r^2$ எனவும், நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y=mx+c$ எனவும் கொள்க. வட்டமும் நேர்க்கோடும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகள் கீழ்க்காணும் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வாகும் என நாம் அறிவோம்.

$$x^2+y^2 = r^2 \qquad \ldots (1)$$

$$y = mx+c \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (1)-ல் $y=mx+c$ எனப் பிரதியிட,

$$x^2+(mx+c)^2-r^2 = 0$$

எனக் கிடைக்கும் இச்சமன்பாட்டினை,

$$(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-r^2) = 0. \qquad \ldots (3)$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

இச்சமன்பாட்டிற்கு இரண்டிற்கு மேற்பட்டத் தீர்வுகள் இல்லை என்பதால் ஒரு கோடும் ஒரு வட்டமும் இரு புள்ளிகளுக்கு மேல் வெட்டிக்கொள்ளாது. ■

இரு மாறிகள் கொண்ட இரு சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒரு பிரதியிடல் மூலம் ஒரு இருபடி சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் கணக்காக மாறுவது கவனிக்கத்தக்கது.

மேலும் அவ்வாறு குறைக்கப்பட்டு அமையும் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் மெய்யெண்களாக இருப்பதால், இரு மூலங்களுமே மெய் எண்களாகவோ அல்லது இரு மூலங்களுமே மெய்யற்ற எண்களாகவோ அமையும். அவ்வாறு இரு மூலங்களுமே மெய்யற்ற கலப்பெண்கள் எனில், வட்டமும் நேர்க்கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாது. மெய்யெண் மூலங்களைப் பொருத்தவரையில் அவை ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்டவையாகவோ பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்களின் மடங்குகளாகளாகவோ அமையும். அவை வேறுபட்டவை எனில், சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிட y க்கு இரு வேறுபட்டமதிப்புகள் கிட்டும் என்பதால் இரு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளும். அவை இரண்டுமே சமமான மூலங்களாக இருப்பின் வட்டத்தில் நேர்க்கோடு தொடுகோடாக அமையும். சமன்பாடு (3)-ல் குறிப்பிட்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு ஒரே ஒரு எளிமையான மெய்யெண் மூலம் இருப்பதால் ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டாது.

குறிப்பு

எடுத்துக்காட்டு 3.14-ல் பயன்படுத்திய வழிமுறையைப் பின்பற்றி பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்கலாம்.

- இரு வட்டங்கள் இரு புள்ளிகளுக்கு மேல் வெட்டிக்கொள்ளாது.
- ஒரு வட்டமும் ஒரு நீள்வட்டமும் நான்கு புள்ளிகளுக்கு மேற்பட்டு வெட்டிக்கொள்ளாது.

பயிற்சி 3.2

1. k என்பது மெய்யெண் எனில், $2x^2+kx+k=0$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் இயல்பை, k வழியாக ஆராய்க.
2. $2+\sqrt{3}\,i$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
3. $2i+3$-ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
4. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
5. ஒரு நேர்க்கோடும் ஒரு பரவளையமும் இரு புள்ளிகளுக்கு மேற்பட்டு வெட்டிக் கொள்ளாது என்பதனை நிரூபிக்க.

3.6 உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் (Roots of Higher Degree Polynomial Equations)

$P(x)=0$ என்பது பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடாகும் என்பதை நாம் அறிவோம். ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் தீர்வு என்பதும், மூலம் என்பதும் ஒன்றுதான். எனவே இரு கலைச்சொற்களையுமே நாம் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஒரு எண்ணைப் பிரதியிடுவதன் மூலம் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டுக்கு அது மூலமாக இருக்குமா அல்லது இருக்காதா என்பதை எளிதில் சோதித்து அறியலாம். ஆனால் அச்சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாக இருக்கும்வரை இத்தகைய சோதித்து அறிதல் முயற்சி மூலங்களைக் கண்டறிய எளிய வழியாகும். ஆனால், உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்குப் பொதுவாக எளிதானதாக இருக்காது.

நான்கு அடிப்படை கணித செயற்பாடுகளான(கூட்டல், பெருக்கல், கழித்தல் மற்றும் வகுத்தல்) மற்றும் விகிதமுறு அடுக்கேற்றம் (வர்க்கம், கனம், வர்க்கமூலம் மற்றும் கனமூலம் போன்ற விகிதமுறுஎண் அடுக்குகளாக) மற்றும் கெழுக்களை மட்டும் பயன்படுத்தி எழுதப்படும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் தீர்வு **விகிதமுறுத் தீர்வு** எனப்படும். ஐந்தாம் படி மற்றும் அதற்கு மேலுள்ள பொது பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் தீர்வினை விகிதமுறுத் தீர்வாக எழுத முடியாது என்பதை ஏபெல் நிரூபித்தார்.

உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை எட்டுவதற்குப் பயன்படும் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளைப் பற்றிய சில முடிவுகள் கீழ்க்காணும் வகையில் எடுத்துரைக்கப்படுகின்றது.

- ஒரே மாறி உள்ள ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக்கோவையும் $\mathbb{R}$ -லிருந்து $\mathbb{R}$ -க்கு ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.
- இரட்டைப்படை படியுள்ள $P(x)=0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு $-\infty$ -யை x நெருங்கும்போது ∞ -யை $P(x)$ நெருங்குகிறது. அதேபோல் ∞ -யை x நெருங்கும்போதும் ∞ -யை $P(x)$ நெருங்குகிறது. அதாவது $x\to\pm\infty$ எனும்போது $P(x)\to\infty$ எனவே இரட்டைபடை படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடம் மேற்புற உச்சியில் துவங்கி வலது மேற்புற உச்சியை சென்றடைவதைப் போல் காணப்படுகின்றது.

- *பதினோராம் வகுப்பு முதல் தொகுதி பாடநூலில் உள்ள உருமாற்றத்தைப் பயன்படுத்திச் சார்புகளை வரைபடமாக்குதல் பகுதியில் ஆய்ந்த அனைத்து முடிவுகளும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் வரைபடங்களுக்குப் பொருந்தும். உதாரணமாக, ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் மாறிலி உறுப்பின் மாற்றம், வரைபடத்தை மேற்புறமாகவோ அல்லது கீழ்ப்புறமாகவோ நகர்த்தும்.*
- *ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக்கோவையும் எண்ணற்ற முறை வகைமை உடையதாக இருக்கும்.*
- *x அச்சை $P(x)=0$ என்ற வளைவரை வெட்டுமிடத்தில் உள்ள புள்ளிகளாக $P(x)=0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளது.*
- *$P(a)$ மற்றும் $P(b)$ ஒன்றுக்கொன்று எதிர்குறிகளாக இருக்குமாறு அமையும் a மற்றும் b ஆகிய இரு மெய்யெண்கள் எனில்,*
  - *$P(c)=0$ என அமையுமாறு மெய்யெண்கோட்டில் c எனும் ஒரு புள்ளி இருக்கும்.*
  - *a மற்றும் b –க்கிடையே ஒரு மூலம் உள்ளது.*
  - *மேற்குறிப்பிட்ட புள்ளிகளுக்கிடையே ஒரே ஒரு மூலம் மட்டும்தான் இருக்க வேண்டும் எனும் அவசியமில்லை. $3,5,7,\ldots$ என அமையலாம். அதாவது, a மற்றும் b –க்கிடையே ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையில் மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளது எனலாம் மற்றும் இரட்டைப் படை எண்ணிகையில் மூலங்கள் இருக்காது.*

ஆயினும், மூலங்களைப் பற்றிய சில விவரங்கள் தெரிந்திருந்தால் பிற மூலங்களை கண்டறிய நாம் முயலலாம். உதாரணமாக, விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் ஆறு படி பல்லுறுப்பு கோவை சமன்பாட்டின் இரு மூலங்கள் $2+3i$ மற்றும் $4-\sqrt{5}$ எனில், அப்பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டிற்கு $2-3i$ மற்றும் $4+\sqrt{5}$ ஆகியவையும் மூலங்களாக இருக்கும். எனவே இந்நான்கு காரணிகளால் வகுக்க, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கு இருபடி சமன்பாட்டு கணக்காக குறைக்கப்பட்டு எளிதில் தீர்வு கண்டறியப்படுகின்றது. இப்பாடப்பகுதியில் உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மூலங்களைப் பற்றிய சில விவரங்களின் அடிப்படையில் மூலங்களைக் கண்டறிய சில வழிமுறைகளைக் காண்போம்.

3.7 கூடுதல் விவரங்களுடன் கூடிய பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials with Additional Information)

இனி உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்குத் தீர்வு காணத் தேவைப்படும் சில கூடுதல் விவரங்களைப் பற்றி ஆராய்வோம். சில சமயங்களில் கூடுதல் தகவல்கள் நேரடியாக அதாவது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மூலம் $2+3i$ எனத் தரப்பட்டிருக்கும். சில சமயங்களில் மறைமுகமாக அதாவது கெழுக்களின் கூட்டல் தொகை பூச்சியம் எனத் தரப்பட்டு பல்லுறுப்புக்கோவையினை ஆய்ந்து கண்டறியும் வகையில் இருக்கும்.

3.7.1 கற்பனை மூலங்கள் அல்லது முருடு மூலங்கள் (Imaginary or Surds Roots)

மெய்யெண் கெழுக்களுடைய ஒரு நாற்படி பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $\alpha+i\beta$ என்ற ஒரு மெய்யற்ற கலப்பெண் எனில் $\alpha-i\beta$ -ம் ஒரு மூலமாகும்; எனவே, $(x-(\alpha+i\beta))$ மற்றும் $(x-(\alpha-i\beta))$ ஆகியவை பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் காரணிகளாகும். எனவே அதன் பெருக்குத்தொகையும் காரணியாகும். அதாவது, $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ என்பதும் காரணியாகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டை இக்காரணியால் வகுக்க, இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையாக ஈவு பெறப்படும். அதனை தெரிந்த வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்தி தீர்ப்பதன் மூலம் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் அனைத்து மூலங்களையும் கண்டறிய இயலும்.

விகிதமுறு கெழுக்களைக் கொண்ட ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $2+\sqrt{3}$ எனில், $2-\sqrt{3}$ மற்றொரு மூலமாகும்; எனவே $(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))$ -ம் ஒரு காரணியாகும்; x^2-4x+1 -ம் ஒரு காரணியாகும். இக்காரணியால் பல்லுறுப்புக்கோவையை வகுத்து ஈவாக பெறப்படும் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையைத் தெரிந்த வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க இயலும். $2+\sqrt{3}$ இடத்தில் இடம் பெறும் அனைத்து முருடுகளுக்கும் இதே வழிமுறைப் பொருந்தும். இதனைப் பயன்படுத்தி நாற்படி பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் அனைத்து மூலங்களையும் நம்மால் கண்டறிய இயலும்.

விகிதமுறு எண் கெழுக்களுடைய ஓர் அறுபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் ஒரு மூலம் மெய்யற்ற கலப்பெண் மற்றும் ஒரு மூலம் முருடு என அறிந்தால், படிப்படியாக ஆறுபடி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஒரு இருபடி சமன்பாட்டின் தீர்வு கணக்காக மாற்றப்பட்டு விடும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

$2+i$ மற்றும் $3-\sqrt{2}$ ஆகியவை $x^6-13x^5+62x^4-126x^3+65x^2+127x-140=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் அனைத்து மூலங்களையும் காண்க.

தீர்வு

சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் அனைத்தும் விகிதமுறு எண்கள் என்பதாலும் $2+i$ மற்றும் $3-\sqrt{2}$ ஆகியவை மூலங்கள் என்பதாலும் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டிற்கு $2-i$ மற்றும் $3+\sqrt{2}$ ஆகியவையும் மூலங்களாக அமையும். எனவே, $(x-(2+i))$, $(x-(2-i)),(x-(3-\sqrt{2}))$ மற்றும் $(x-(3+\sqrt{2}))$ ஆகியவையும் காரணிகளாகும். ஆகையால் இவற்றின் பெருக்கல்

$$((x-(2+i))(x-(2-i))(x-(3-\sqrt{2}))(x-(3+\sqrt{2}))$$

என்பதும் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு ஒரு காரணியாகும். அதாவது,

$$(x^2-4x+5)(x^2-6x+7)$$

என்பது ஒரு காரணி. கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டை இக்காரணியால் வகுக்க, மற்றொரு காரணியாக (x^2-3x-4) பெறப்படுகிறது. இதிலிருந்து 4 மற்றும் -1 ஆகியவை மற்ற இரு மூலங்களாகும். எனவே,

$$2+i, 2-i, 3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}, -1, \text{ மற்றும் } 4$$

ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். ■

3.7.2 இரட்டைப்படை அடுக்குகள் மட்டும் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகள் (Polynomial equations with Even Powers Only)

$2n$ படியுள்ள $P(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டில் x -ன் இரட்டைப்படை அடுக்குகள் மட்டுமே உள்ளது (அதாவது ஒற்றைப்படை அடுக்குகளின் கெழுக்கள் 0 ஆகும்) எனில் $x^2=y$ என பிரதியிட y -ல் n -படி உள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு கிடைக்கும்; இப்பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு $y_1, y_2, \cdots y_n$ ஆகியவை மூலங்கள் என்க. இனி $x^2=y_r$ என n சமன்பாடுகளை மட்டும் கருதும்போது ஒவ்வொரு r -க்கும் x -க்கு இரு மதிப்புகள் கிடைக்கும்; இந்த $2n$ மதிப்புகளே கொடுக்கப்பட்ட x -ல் உள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டிற்கு மூலங்களாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.16

$x^4-9x^2+20=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு $x^4-9x^2+20=0$ ஆகும்.

இது ஒரு நாற்படிச் சமன்பாடாகும். $x^2=y$ எனப் பிரதியிட $y^2-9y+20=0$ எனும் இருபடி சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதன் தீர்வு 4 மற்றும் 5 ஆகும். இனி $x^2=4$ மற்றும் $x^2=5$ என எடுத்துக் கொண்டால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு $2,-2,\sqrt{5},-\sqrt{5}$ என்பது தீர்வுகளாகும்.

மேற்கண்ட வழிமுறையை, $x^6-17x^3+30=0$, $ax^{2k}+bx^k+c=0$ மற்றும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கும் மற்றும் $a_nx^{kn}+a_{n-1}x^{k(n-1)}+\cdots+a_1x^k+a_0$ (இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு எண்) என்ற முறையில் அமையும் பொதுவான பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கும் பயன்படுத்தலாம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. ■

3.7.3 அனைத்து கெழுக்களின் கூட்டல்தொகை பூச்சியமாகும் (Zero Sum of all Coefficients)

$P(x)=0$ எனும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியம் என்க. கெழுக்களின் கூட்டல்தொகை என்பது உண்மையில் என்ன? கெழுக்களின் கூட்டல் என்பது $P(1)$ என அறிவோம். எனவே கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியம் எனில் $P(1)=0$ என்பதால் $P(x)$ -ன் ஒரு மூலம் 1 ஆகும். இனி மீதமுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பது எளிதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

$x^3-3x^2-33x+35=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு

இங்கு பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டின் கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியமாகும். எனவே பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 1 ஆகும். மீதமுள்ள மூலங்களைக் கண்டறிய $x^3-3x^2-33x+35$ -ஐ $x-1$ ஆல் வகுக்க, $x^2-2x-35$ என்பது ஈவாகக் கிடைக்கின்றது. இதனைத் தீர்க்க 7 மற்றும் -5 மூலங்களாகும். எனவே $1,7,-5$ ஆகியவை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு ஆகும். ■

3.7.4 ஒற்றைப்படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலும் இரட்டைப் படி உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலும் சமம் (Equal Sums of Coefficients of Odd and Even Powers)

ஒற்றைப்படியுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலும் இரட்டைப் படியுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலும் சமமாக இருக்கும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு $P(x)=0$ என்க. இவ்வாறு உரைப்பதன் பொருள் என்ன? a என்பது $P(x)=0$ -ல் ஒற்றைப் படியிலுள்ள உறுப்பின் கெழு எனில் $P(-x)=0$ -ல், அதே ஒற்றைப் படியிலுள்ள உறுப்பின் கெழு $-a$ என இருக்கவேண்டும். $P(x)=0$ மற்றும் $P(-x)=0$ -ல் உள்ள இரட்டைப்படை படியிலுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையின்படி $P(-x)=0$ -ல் உள்ள அனைத்து கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியமாக இருக்கும். எனவே $P(-x)=0$ -ன் ஒரு மூலம் 1 ஆகும். ஆகையால் $P(x)=0$ -ன் ஒரு மூலம் -1 ஆகும். இனி மீதி சமன்பாட்டு கணக்கைத் தீர்ப்பது மிகவும் எளிதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.18

$2x^3+11x^2-9x-18=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு

இங்கு ஒற்றைப் படியுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலும் இரட்டைப் படியுள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலும் சமமாக இருக்கின்றது. எனவே, -1 என்பது இச்சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும். இனி பிற மூலங்களைக் கண்டறிய $2x^3+11x^2-9x-18$-ஐ $x+1$ஆல் வகுத்து $2x^2+9x-18$ என்பதை ஈவாகப் பெறுகிறோம். இதனைத் தீர்ப்பதன் மூலம், $\frac{3}{2}$ மற்றும் -6 ஆகியவற்றை மூலங்களாக பெறுகிறோம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு $-6,-1,\frac{3}{2}$ ஆகியவை தீர்வுகளாக அமையும்.

3.7.5 தொடர்முறையில் உள்ள மூலங்கள் (Roots in Progressions)

உயர்படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முன்னரே குறிப்பிட்டது போல பல்லுறுப்புக்கோவைகளை பற்றியோ அல்லது சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை பற்றியோ சில விவரங்கள் கூடுதலாகத் தேவைப்படும். "மூலங்கள் கூட்டுத்தொடர் முறையாக உள்ளன", "மூலங்கள் பெருக்குத்தொடர் முறையாக உள்ளன" என்பவை அத்தகைய சில விவரங்களாகும். இவ்வாறான சமன்பாடுகளில் ஒன்றைப் பற்றி இங்கு ஆராய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.19

$x^3+px^2+qx+r=0$ -ன் மூலங்கள் கூட்டுத் தொடர்முறையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனையைப் பெறுக.

தீர்வு

மூலங்கள் கூட்டுத்தொடரில் உள்ளன என்க. பின்னர் அம்மூலங்கள் $\alpha-d,\alpha,\alpha+d$ ஆகும். வியட்டாவின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=-\frac{p}{1}=p\Rightarrow 3\alpha=-p\Rightarrow\alpha=-\frac{p}{3}.$$

ஆனால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு α ஒரு மூலம் என்பதால்,

$\left(-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(-\frac{p}{3}\right)^2+q\left(-\frac{p}{3}\right)+r=0\Rightarrow 9pq=2p^3+27r$ இதுவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கூட்டுத் தொடர் அமையத் தேவையான நிபந்தனையாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 3.20

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் பெருக்குத் தொடர்முறையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க. இங்கு $a,b,c,d\neq 0$ எனக்கொள்க.

தீர்வு

மூலங்கள் பெருக்குத் தொடர்முறையில் உள்ளன என்க. எனவே, அவற்றை $\frac{\alpha}{\lambda},\alpha,\alpha\lambda$ எனக் கருதுக.

வியட்டாவின் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது

$$\sum\nolimits_1=\alpha\left(\frac{1}{\lambda}+1+\lambda\right)=-\frac{b}{a}\qquad\ldots(1)$$

$$\sum\nolimits_2=\alpha^2\left(\frac{1}{\lambda}+1+\lambda\right)=\frac{c}{a}\qquad\ldots(2)$$

$$\sum_3 = \alpha^3 = -\frac{d}{a}. \qquad \ldots (3)$$

சமன்பாடு (2)–ஐ சமன்பாடு (1)–ஆல் வகுக்க,

$$\alpha = -\frac{c}{b} \qquad \ldots (4)$$

(4)–ஐ (3)–இல் பிரதியிட $\left(-\frac{c}{b}\right)^3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow ac^3 = db^3$.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ –ன் மூலங்கள் இசைத்தொடர் முறையில் உள்ளன எனில், $9pqr = 27r^2 + 2q^3$ என நிரூபிக்க. இங்கு $p, q, r \neq 0$ என்க.

தீர்வு

மூலங்கள் இசைத் தொடர்முறையில் உள்ளன என்க. எனவே அவற்றின் பெருக்கல் தலைகீழிகள் கூட்டுத் தொடர் முறையில் இருக்கும். மேலும்,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 + p\left(\frac{1}{x}\right)^2 + q\left(\frac{1}{x}\right) + r = 0 \Leftrightarrow rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0. \qquad \ldots (1)$$

(1) –ன் மூலங்கள் கூட்டுத்தொடர் முறையில் இருப்பதால் அவற்றினை $a-d, a, a+d$ என்க. வியட்டாவின் சூத்தரங்களைப் பயன்படுத்த,

$$\sum_1 = (\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = -\frac{q}{r} \Rightarrow 3\alpha = -\frac{q}{r} \Rightarrow \alpha = -\frac{q}{3r}.$$

ஆனால் (1)–ன் மூலம் α என்பதால்,

$$r\left(-\frac{q}{3r}\right)^3 + q\left(-\frac{q}{3r}\right)^2 + p\left(-\frac{q}{3r}\right) + 1 = 0 \Rightarrow -q^3 + 3q^3 - 9pqr + 27r^2 = 0 \Rightarrow 9pqr = 2q^3 + 27r^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.22

$x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கூட்டுத் தொடர் முறையாக உள்ளது என அறியப் படுகிறது. சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

தீர்வு

மூலங்கள் $a-d, a, a+d$ என்க. எனவே மூலங்களின் கூடுதல் $3a$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின்படி 6 –க்கு சமம். எனவே $3a = 6$ ஆகும். ஆகையால் $a = 2$ ஆகும். மூலங்களின் பெருக்கல் $a^3 - ad^2$ என்பது சமன்பாட்டின்படி -24 –க்கு சமம். a –ன் மதிப்பைப் பிரதியிட $8 - 2d^2 = -24$ என ஆகும். எனவே, $d = \pm 4$ ஆகும். $d = 4$ எனில் $-2, 2, 6$ என மூலங்கள் கிடைக்கும். மேலும் $d = -4$ எனில், $6, 2, -2$ (அதே மூலங்கள் பின்னோக்கு வரிசையில்) என மூலங்கள் கிடைக்கும்.

பயிற்சி 3.3

1. $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ எனும் முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களில் இரண்டின் கூட்டல் தொகை பூச்சியமெனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.
2. $9x^3 - 36x^2 + 44x - 16 = 0$ –ன் மூலங்கள் கூட்டுத் தொடரில் அமைந்தவை எனில், சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.
3. $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ –ன் மூலங்கள் பெருக்குத்தொடரில் அமைந்தவை எனில், சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

4. $2x^3-6x^2+3x+k=0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்ற இரு மூலங்களின் கூடுதலின் இரு மடங்கு எனில், k -ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.
5. $1+2i$ மற்றும் $\sqrt{3}$ ஆகியவை $x^6-3x^5-5x^4+22x^3-39x^2-39x+135$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் இரு பூச்சியமாக்கிகள் எனில் அனைத்து பூச்சியமாக்கிகளையும் கண்டறிக.
6. பின்வரும் முப்படி சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க:
   (i) $2x^3-9x^2+10x=3$ (ii) $8x^3-2x^2-7x+3=0$
7. $x^4-14x^2+45=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

3.7.6 பகுதி காரணிபடுத்தப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகள் (Partly Factored Polynomials)

$(ax+b)(cx+d)(px+q)(rx+s)+k=0$, $k\neq 0$ எனும் வகைக்கு மாற்றி எழுதக்கூடிய $(\alpha x^2+\beta x+\lambda)\,(\alpha x^2+\beta x+\mu)+k=0$

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் இதுபோன்ற சமன்பாடுகளை தீர்க்கும் வழிமுறையை விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

தீர்க்க : $(x-2)(x-7)(x-3)(x+2)+19 \;=\; 0$.

தீர்வு

இந்நாற்படி சமன்பாட்டை பொருத்தமாக மாற்றி எழுதி பிரதியிடல் முறையைக் கடைபிடிப்பதன் மூலம் இதனைத் தீர்க்கலாம்.

$$(x-2)(x-3)(x-7)(x+2)+19 \;=\; 0.$$

எனச் சமன்பாட்டை மாற்றி எழுதலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$(x^2-5x+6)(x^2-5x-14)+19 \;=\; 0 \text{ என்றாகிறது.}$$

x^2-5x -ஐ y எனப் பிரதியிட, சமன்பாடு $(y+6)(y-14)+19=0$; என மாறுகிறது.

அதாவது,

$$y^2-8y-65 \;=\; 0.$$

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $y=13$ மற்றும் $y=-5$ எனக் கிடைக்கும். இவற்றைப் பிரதியிட நமக்கு $x^2-5x-13=0$ மற்றும் $x^2-5x+5=0$ என இரு இருபடி சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. அவற்றை வழக்கமான முறைகளில் தீர்க்க இயலும். இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்பட்ட தீர்வுகள் அனைத்தையும் ஒன்று சேர்த்து $\dfrac{5\pm\sqrt{77}}{2}, \dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ என எழுதலாம். ■

எடுத்துக்காட்டு 3.24

$(2x-3)(6x-1)(3x-2)(x-2)-5=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மாற்றியமைக்க,

$$(2x-3)(3x-2)(6x-1)(x-2)-5 \;=\; 0.$$

சோடிகளாகப் பெருக்க,

$$(6x^2-13x+6)(6x^2-13x+2)-5 \;=\; 0.$$

இதில் $y=6x^2-13x$ எனப் பிரதியிட, சமன்பாடு

$$(y+6)(y+2)-5 = 0$$

என மாறுகிறது. அதாவது,

$$y^2+8y+7 = 0.$$

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க, $y=-1$ மற்றும் $y=-7$ எனக் கிடைக்கிறது.

$y=6x^2-13x$-ல் y -ன் மதிப்புகளை பிரதியிட,

$$6x^2-13x+1 = 0$$

$$6x^2-13x+7 = 0$$

எனப் பெறுகிறோம். இவ்விரு சமன்பாட்டுகளையும் தீர்க்க,

$$x=1, x=\frac{7}{6}, x = \frac{13+\sqrt{145}}{12} \text{ மற்றும் } x=\frac{13-\sqrt{145}}{12}$$

என சமன்பாட்டின் மூலங்களைப் பெறுகிறோம். ■

பயிற்சி 3.4

1. தீர்க்க : (i) $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504$ (ii) $(x-4)(x-7)(x-2)(x+1)=16$
2. தீர்க்க : $(2x-1)(x+3)(x-2)(2x+3)+20=0$

3.8 கூடுதல் விவரம் இல்லாத பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகள் (Polynomial Equations with no Additional Information)

3.8.1 விகிதமுறு மூலத் தேற்றம் (Rational Root Theorem)

சில பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களில் சிலவற்றை சோதித்தறிதல் முறையில் காணலாம். உதாரணமாக,

$$4x^3-8x^2-x+2 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

எனும் சமன்பாட்டைக் கருதுக. இது இதுவரை நாம் ஆய்ந்த எந்தவொரு முறைகளிலும் தீர்க்க இயலாத ஒரு மூன்றாம்படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடாகும். (1)-இன் பல்லுறுப்புக்கோவையை $P(x)$ எனக் குறிப்பிட்டால், $P(2)=0$ என்பதிலிருந்து $x-2$ என்பது ஒரு காரணியாகும். கணக்கின் மீதமுள்ள சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு காண்பது இனி எளிது என்பதால் பயிற்சிக்கு விடப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

$x^3-5x^2-4x+20=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு

சமன்பாட்டிலுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவையை $P(x)$ எனக் குறிப்பிட்டால், $P(2)=0$ ஆகும். எனவே பல்லுறுப்புக்கோவைசமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 2 ஆகும். பிற மூலங்களைக் கண்டறிய $x^3-5x^2-4x+20$ -ஐ $x-2$ –ஆல் வகுக்க, $x^2-3x-10$ என்பது ஈவாக கிடைக்கிறது. இதனைத் தீர்க்க, -2 மற்றும் 5 மூலங்களாகக் கிடைக்கிறது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $2,-2,5$ ஆகும். ■

சோதித்தறிதல் முறையின் மூலம் ஓர் எண்ணை மூலமாக ஊகிப்பது எளிதான செயலன்று. ஆனால் கெழுக்கள் முழுக்களாகும் எனில், தலைமைக்கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்பு இவற்றை பயன்படுத்தி சில விகிதமுறு எண்களை சாத்தியக்கூறுள்ள மூலங்களாகப் பட்டியலிட இயலும். விகிதமுறு மூலத் தேற்றம் அத்தகைய விகிதமுறு மூலங்களின் சாத்தியக்கூறுள்ள பட்டியலை நாம் உருவாக்க உதவுகின்றது. விகிதமுறு கெழுக்களுடைய பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டை

67GIF

பொருத்தமான எண்களால் பெருக்கும்போது அதே மூலங்களையுடைய முழு எண்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டைப் பெறலாம் என்பதை நினைவு கூர்வோம். எனவே கீழே கொடுக்கப்படும் **விகிதமுறு மூலத் தேற்றம்** விகிதமுறு எண்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் சில மூலங்களை ஊகிக்க பயன்படுத்துவோம். நிரூபணமின்றி அத்தேற்றத்தினைக் கூறுவோம்.

தேற்றம் 3.5 (விகிதமுறு மூலத்தேற்றம்) (Rational Root Theorem)

முழு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ என்க. (இங்கு $a_n \neq 0$ மற்றும் $a_0 \neq 0$, பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $\dfrac{p}{q}$ (இங்கு $(p,q)=1$ எனில், a_0 -ன் காரணி p ஆகவும் a_n -ன் காரணி q ஆகவும் இருக்கும்.

$a_n = 1$ எனும்போது, $\dfrac{p}{q}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு மூலம் எனில் a_n -ன் காரணி q என்பதால் $q = \pm 1$ என்றிருக்க வேண்டும். எனவே p ஒரு முழு எண்ணாகத்தான் இருக்க வேண்டும். எனவே முழு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட ஓர் தலைஒற்றைப் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டிற்கு முழு எண் இல்லாத விகிதமுறு மூலங்கள் இருக்காது. எனவே $a_n = 1$ எனும்போது, ஒரு வேளை விகிதமுறு மூலம் என்று இருந்தால் அது முழு எண்ணாகவும் a_0 -ஐ வகுக்கக்கூடிய எண்ணாகவும்தான் இருக்க வேண்டும். (ஒரு முழு எண் a என்பது b -ஐ மீதமின்றி வகுத்தால் ஏதேனும் ஒரு முழு எண்ணிற்கு $b = ad$ ஆகும்).

உதாரணமாக $x^2 - 5x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். விகிதமுறு மூலத் தேற்றத்தின்படி இச்சமன்பாட்டின் சாத்தியக்கூறு தீர்வுகளாக $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ மட்டுமே இருக்கும். இதனால் இவை அனைத்தும் தீர்வுகளாக அமையும் எனக் கருத முடியாது. -1 மற்றும் 6 ஆகியவை மட்டுமே சமன்பாட்டைத் நிறைவு செய்யும் ஏனைய மதிப்புகள் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யாது.

மேலும், விகிதமுறு மூலத் தேற்றத்தின்படி $x^2 + 4 = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு சாத்தியக்கூறு தீர்வுகளாக $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ அமைந்தாலும் இவற்றுள் எதுவும் தீர்வாகாது. **எனவே விகிதமுறு மூலத்தேற்றம் தீர்விற்கு ஊகத்தை மட்டுமே தரும். தீர்வினைத் தராது.**

எடுத்துக்காட்டு 3.26

$2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$ -ன் மூலங்களைக் காண்க.

தீர்வு

நமது குறியிடல் முறைப்படி $a_n = 2$ மற்றும் $a_0 = 3$ ஆகும். பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் $(p,q)=1$ எனும்படி ஒரு மூலம் $\dfrac{p}{q}$ எனில், p மூன்றால் வகுபட வேண்டும் மற்றும் q இரண்டால் வகுபட வேண்டும். தெளிவாக p -ன் சாத்தியக்கூறுகளாக $1, -1, 3, -3$ மற்றும் q -ன் சாத்தியக்கூறுகளாக $1, -1, 2, -2$ இருக்கும். இதன் மூலம் $\pm\dfrac{1}{1}, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{3}{1}$ எனும் பின்னங்களை உருவாக்கலாம். இந்த எட்டு சாத்தியக்கூறுகளில், சோதித்தறிதல் முறைப்படி, $\dfrac{-3}{2}$ என்பதுதான் ஒரே விகித மூலமாகின்றது. மற்ற மூலங்களைக் காண $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை $2x + 3$ ஆல் வகுக்க $x^2 + 1$ என்ற ஈவும் மீதி பூச்சியமும் கிடைக்கின்றது. $x^2 + 1 = 0$ -ஐ தீர்க்க i மற்றும் $-i$ மூலங்கள் கிடைக்கின்றது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $-\dfrac{3}{2}, i, -i$ ஆகும். ■

3.8.2 தலைகீழ் சமன்பாடுகள் (Reciprocal Equations)

$$2x^6-3x^5+\sqrt{2}x^4+7x^3+\sqrt{2}x^2-3x+2 \;=\; 0. \qquad \ldots (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு α என்க. இங்கு $\alpha \neq 0$ என்பது தெளிவு. இனி,

$$2\alpha^6-3\alpha^5+\sqrt{2}\alpha^4+7\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^2-3\alpha+2=0$$

(1)-ன் இடப்பக்கத்தில் x-க்கு $\dfrac{1}{\alpha}$ எனப் பிரதியிட

$$2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6-3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+7\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-3\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2.$$

$$=\frac{2-3\alpha+\sqrt{2}\alpha^2+7\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^4-3\alpha^5+2\alpha^6}{\alpha^6}=\frac{0}{\alpha^6}=0.$$

எனவே, $\dfrac{1}{\alpha}$ என்பது (1)-க்கு ஒரு தீர்வாகிறது. இதே போன்று

$$2x^5+3x^4-4x^3+4x^2-3x-2 \;=\; 0 \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (2)-க்கு α ஒரு தீர்வு எனில், $\dfrac{1}{\alpha}$-ம் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

(1) மற்றும் (2)சமன்பாடுகளுக்குள் இருக்கும் பொதுவான பண்பு என்னவெனில், சமன்பாட்டில் x-ஐ $\dfrac{1}{x}$-ஆல் பிரதியிட்டால் அதே சமன்பாடு மீண்டும் கிடைக்கும். உடனடியாக நம் மனதில் எழும் கேள்வியே "கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைப் பார்த்தவுடன் அது மேற்கண்ட பண்பைப் பெற்றிருக்கின்றதா இல்லையா என்பதை இனம் காண்பது எவ்வாறு?" இவ்வினாவிற்கு தேற்றம் 3.6 விடையளிக்கிறது.

வரையறை 3.1

n-படி உள்ள $P(x)$ எனும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை தலைகீழி பல்லுறுப்புக்கோவை எனில், கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் ஒன்று மெய்யாகும்.

(i) $P(x)=x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (ii) $P(x)=-x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

n-படி உள்ள $P(x)$ எனும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை , $P(x)=x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right)$ என இருந்தால் முதல் வகை தலைகீழ் சமன்பாடு எனப்படும்.

n-படி உள்ள $P(x)$ எனும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை , $P(x)=-x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right)$ என இருந்தால் இரண்டாம் வகை தலைகீழ் சமன்பாடு எனப்படும்.

தேற்றம் 3.6

(i) $a_n=a_0$, $a_{n-1}=a_1$, $a_{n-2}=a_2\cdots$ (ii) $a_n=-a_0$, $a_{n-1}=-a_1$, $a_{n-2}=-a_2,\cdots$ என்ற கூற்றுகளில் ஒன்று மெய் எனில், $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ (இங்கு $a\neq 0$) என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு தலைகீழி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு எனப்படும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

நிரூபணம்

பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு

$$P(x)= \; a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0. \qquad \ldots (1)$$

(1)-ல் x-ஐ $\dfrac{1}{x}$-ஆல் பிரதியிட்டால்,

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x^n}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}+\cdots+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x}+a_0=0\,. \qquad \ldots (2)$$

எனக் கிடைக்கும். (2)–ன் இருமருங்கும் x^n –ஆல் பெருக்க,

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\,. \qquad \ldots (3)$$

எனக் கிடைக்கும். இனி (1) என்பது தலைகீழ் சமன்பாடு $\Leftrightarrow$ $P(x)= \pm\, x^n P\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$ (1) மற்றும் (3) ஆகிய இரு சமன்பாடுகளும் ஒன்றேயாகும்.

இது சாத்தியம், $\Leftrightarrow \dfrac{a_n}{a_0}=\dfrac{a_{n-1}}{a_1}=\dfrac{a_{n-2}}{a_2}=\cdots=\dfrac{a_2}{a_{n-2}}=\dfrac{a_1}{a_{n-1}}=\dfrac{a_0}{a_n}$.

என இருக்கவேண்டும். இங்கு விகிதாச்சாரம் λ என்க. எனவே, $\dfrac{a_n}{a_0}=\lambda$ மற்றும் $\dfrac{a_0}{a_n}=\lambda$ எனக் கிடைக்கிறது. இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் பெருக்கினால், $\lambda^2=1$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே, $\lambda=1$ மற்றும் $\lambda=-1$ என இரு நிலைகள் கிடைக்கின்றன.

நிலை (i) :

$\lambda=1$ இந்நிலையில் $a_n=a_0, a_{n-1}=a_1, a_{n-2}=a_2,\ldots$ எனக் கிடைக்கிறது. அதாவது, (1)–ல் முதலிலிருந்தும் கடைசியிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள கெழுக்கள் சமமாக உள்ளன.

நிலை (ii) :

$\lambda=-1$ இந்நிலையில் $a_n=-a_0,\ a_{n-1}=-a_1,\ a_{n-2}=-a_2,\ \cdots$ எனக் கிடைக்கிறது. அதாவது, சமன்பாடு (1) –ல் முதலிலிருந்தும் கடைசியிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள கெழுக்கள் எண்ணளவில் சமமாகவும் மற்றும் எதிர் குறியையும் பெற்றிருக்கும். ■

குறிப்பு

முதல்வகை தலைகீழ் சமன்பாடுகளில் கெழுக்கள் முதலில் இருந்தும் (இறுதியில் இருந்தும்) சமமாக உள்ளன. உதாரணத்திற்கு, $6x^5+x^4-43x^3-43x^2+x+6=0$ எனும் சமன்பாடு முதல்வகை தலைகீழ் சமன்பாடாகும்.

இரண்டாம்வகை தலைகீழ் சமன்பாடுகளில் கெழுக்கள் முதலில் இருந்தும் (இறுதியில் இருந்தும்) எண்ணளவில் சமமாகவும் குறிகள் நேர் எதிராகவும் உள்ளன. உதாரணத்திற்கு, $6x^5-41x^4+97x^3-97x^2+41x-6=0$ எனும் சமன்பாடு இரண்டாம் வகை தலைகீழ் சமன்பாடாகும்.

குறிப்புரை

(i) தலைகீழ் சமன்பாட்டிற்கு 0 ஒரு தீர்வாகாது.

(ii) கெழுக்களும் தீர்வுகளும் மெய்யெண்கள் வரம்பிற்குள் உட்படுத்தப் படவில்லை

(iii) “ $P(x)=0$ **எனும் பல்லுறுப்புகோவை சமன்பாட்டில் எப்பொழுதெல்லாம் α ஒரு மூலமாகிறதோ அப்பொழுதெல்லாம் $\dfrac{1}{\alpha}$ –ம் ஒரு மூலமாக இருக்கும் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு தலைகீழ் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாடாகத்தான் இருக்கவேண்டும்**" என்ற கூற்று உண்மையல்ல. உதாரணமாக $2x^3-9x^2+12x-4=0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $2,2,\dfrac{1}{2}$ ஆகும். $x^3P\left(\dfrac{1}{x}\right)\neq\pm P(x)$ என்பதால், இச்சமன்பாடு தலைகீழ் சமன்பாடாகாது. தலைகீழ் சமன்பாடுகள் $a_{n-r}=a_r$ அல்லது $a_{n-r}=-a_r$ என்பதைப் பொறுத்து

முதல்வகை மற்றும் இரண்டாம் வகை என இரு வகைப்படும். நிரூபணமின்றி சில முடிவுகள் இங்கு தரப்படுகிறது. :

- முதல்வகை சார்ந்த ஓர் ஒற்றைப் படை படி தலைகீழ் சமன்பாட்டிற்கு, $x=-1$ ஒரு தீர்வாகும்.
- இரண்டாம்வகை சார்ந்த ஓர் ஒற்றைப் படை படி தலைகீழ் சமன்பாட்டிற்கு, $x=1$ ஒரு தீர்வாகும்.
- இரண்டாம்வகை சார்ந்த ஓர் இரட்டைப் படை படி தலைகீழ் சமன்பாட்டிற்கு, மைய உறுப்பு பூச்சியமாகத் தான் இருக்கும். மேலும் $x=1$ மற்றும் $x=-1$ தீர்வுகளாகும்.
- இரட்டைப்படை தலைகீழ் சமன்பாடுகளில் $x+\frac{1}{x}$ அல்லது $x-\frac{1}{x}$ ஐ, y எனப் பிரதியிட,

  கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் படி மதிப்பில் பாதி படியாக ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். இப்பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டை தீர்ப்பதன் மூலம் தேவையான பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கான மூலங்கள் பெற இயலும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$6x^6-35x^5+56x^4-56x^2+35x-6=0$$

என்பது இரட்டைப்படை இரண்டாம் வகை தலைகீழ் சமன்பாடாகும். எனவே 1 மற்றும் -1 ஆகியவை சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகள் என்பதால் x^2-1 என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணியாகும். எனவே பல்லுறுப்புக்கோவையை x^2-1-ஆல் வகுக்க, $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6$ என ஒரு காரணி கிடைக்கிறது. இக்காரணியை x^2-ஆல் வகுத்து உறுப்புகளை ஒழுங்குபடுத்த $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62$ எனக்கிடைக்கிறது. $u=\left(x+\frac{1}{x}\right)$ எனப் பிரதியிட, சமன்பாடு $6(u^2-2)-35u+62=0$ என இருபடி சமன்பாடாகிறது. மேலும் $6u^2-35u+50=0$ என எளிமைபடுத்தப் படுகிறது. இதனைத் தீர்க்க $u=\frac{10}{3},\frac{5}{2}$ எனக் கிடைக்கிறது. $u=\frac{10}{3}$ என்பதன் மூலம், $x=3,\frac{1}{3}$ என்ற மதிப்புகளும் $u=\frac{5}{2}$ என்பதன் மூலம் $x=2,\frac{1}{2}$ என்ற மதிப்புகளும் கிடைக்கிறது. எனவே $+1,-1,2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3}$ ஆகியவை தீர்வுகளாக அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 3.27

$7x^3-43x^2=43x-7$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $7x^3-43x^2-43x+7=0$ என மாற்றி எழுதலாம். இது முதல்வகையைச் சார்ந்த ஒற்றைப்படை படி தலைகீழ் சமன்பாடு. எனவே -1 ஒரு தீர்வாகும். ஆகையால் $x+1$ ஒரு காரணியாகும். $7x^3-43x^2-43x+7$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை $x+1$ ஆல் வகுக்க $7x^2-50x+7$ எனும் ஒரு காரணி கிடைக்கிறது. இதனைத் தீர்க்க 7 மற்றும் $\frac{1}{7}$ மூலங்களாகக் கிடைக்கிறது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு $-1,\frac{1}{7},7$ தீர்வுகளாக அமையும். ■

எடுத்துக்காட்டு 3.28

$x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு

இது இரட்டைப்படை முதல் வகை தலைகீழ் சமன்பாடாகும். எனவே இதனை,

$$x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26\right]=0 \quad x\neq 0 \text{ எனவே } \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$$

என மாற்றி எழுதலாம். $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ என்க.

$$\left[\left(y^2-2\right)-10y+26\right]=0 \Rightarrow \left(y^2-10y+24\right)=0 \Rightarrow (y-6)(y-4)=0.$$

நிலை (i)

$y=6$ எனில், $x+\dfrac{1}{x}=6 \;\Rightarrow\; x=3+2\sqrt{2}, x=3-2\sqrt{2}$.

நிலை (ii)

$y=4$ எனில், $x+\dfrac{1}{x}=4 \;\Rightarrow\; x=2+\sqrt{3}, x=2-\sqrt{3}$

எனவே, மூலங்கள் $3\pm 2\sqrt{2},\; 2\pm\sqrt{3}$ ஆகும். ■

3.8.3 பல்லுறுப்புக்கோவையற்ற சமன்பாடுகள் (Non-polynomial Equations)

சில பல்லுறுப்புக்கோவையற்ற சமன்பாடுகளையும் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் துணையோடு தீர்க்க இயலும். உதாரணமாக $\sqrt{15-2x}=x$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். முதற்கண் இது பல்லுறுப்புக்கோவை அன்று என்பது குறிப்பிடத் தக்கது. இருபக்கமும் வர்க்கம் காண $x^2+2x-15=0$ எனக் கிடைக்கும். இந்த பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டை எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதை நாம் அறிவோம். பல்லுறுப்புக்கோவையின் தீர்வுகளிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை ஆராய்ந்தால் 3 மற்றும் -5 ஆகியவை $x^2+2x-15=0$ -க்கு தீர்வுகளாக அமையும். $\sqrt{\bullet}$ மதிப்பிற்கு குறையற்ற மதிப்புகளை மட்டுமே ஒதுக்கீடு செய்வது என்பதை கருத்தில் கொண்டால் $x=3$ என்பது மட்டுமே மூலமாகும். அத்தகைய ஒதுக்கீடு இல்லையெனில் $x=-5$ என்பதும் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.29

$$2\cos^2 x-9\cos x+4 \;=\; 0. \qquad \ldots (1)$$

எனும் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு இருப்பின் காண்க.

தீர்வு

சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம் இருப்பது பல்லுறுப்புக்கோவை அல்ல. ஆனால் பல்லுறுப்புக்கோவை போல் தோற்றமளிக்கிறது. உண்மையில், இதனை $\cos x$ -ல் இருக்கும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை எனலாம். எனினும் (1) -ல் உள்ள சமன்பாட்டைத் தீர்க்க பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி நாம் அறிந்தவற்றைப் பயன்படுத்தலாம். $\cos x$ -ஐ y எனப் பிரதியிட $2y^2-9y+4=0$ எனும் பல்லுறுப்பு கோவைச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. 4 மற்றும் $\dfrac{1}{2}$ ஆகியவை இதன் தீர்வுகளாகும்.

இதிலிருந்து $\cos x=4$ அல்லது $\cos x=\dfrac{1}{2}$ -க்கு ஏற்றதாக x அமையவேண்டும். ஆனால் $\cos x=4$ என்பது சாத்தியமில்லாதது. $\cos x=\dfrac{1}{2}$ -எனும்போது எண்ணற்ற பல மெய்யெண் மதிப்புள்ள x

அமைகின்றது. உண்மையில் அனைத்து $n \in \mathbb{Z}$-க்கும் $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு (1) க்கு தீர்வாகும்.

$\cos^2 x - 9\cos x + 20 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இதே வழிமுறைகளை கடைபிடித்தால் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வே இல்லை என்பது புலனாகிறது. ■

குறிப்புரை

- வருவிக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் அனைத்து தீர்வுகளும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வாக ஆகாது.
- பல்லுறுப்புக்கோவைச்சமன்பாடுகளைப்போலதோற்றமளித்தாலும்பல்லுறுப்புக்கோவையற்ற சமன்பாடுகளுக்கு எண்ணற்றத் தீர்வுகள் இருக்கலாம்.
- அத்தகைய சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு இல்லாமலும் இருக்கலாம்.
- அடிப்படை இயற்கணித தேற்றம் பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு மட்டுமே நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது. பல்லுறுப்புக்கோவையற்றவைகளுக்கு படியைப் பற்றியே கூற முடியாததால் பல்லுறுப்புக்கோவையற்றவைகளை மனதில் கொண்டு அடிப்படை இயற்கணித தேற்றத்தில் எந்த குழப்பமும் தேவையில்லை.

பயிற்சி 3.5

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

   (i) $\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$ (ii) $12x^3 + 8x = 29x^2 - 4$

2. விகிதமுறு மூலங்கள் உள்ளதா என ஆராய்க.

   (i) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$ (ii) $x^8 - 3x + 1 = 0$.

3. தீர்க்க : $8x^{\frac{3}{2n}} - 8x^{\frac{-3}{2n}} = 63$

4. தீர்க்க : $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$.

5. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க:

   (i) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ (ii) $x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$

6. $4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$ எனும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் அனைத்து மெய்யெண்களையும் காண்க.

7. $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $\frac{1}{3}$ எனில், சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

3.9 டெஸ்கார்ட்டே விதி (Descartes Rule)

இப்பகுதியில் $\mathbb{R}$ -ல் உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மிகையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை, குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றிற்கு சில வரம்புகளைப் பற்றி ஆய்வோம். அத்தகைய வரம்புகளைக் கணிக்க உதவும் ஒரு சிறந்த முறை டெஸ்கார்ட்டே விதியாகும்.

3.9.1 டெஸ்கார்ட்டே விதியின் கூற்று (Statement of Descartes Rule)

விதியைப் பற்றி பார்க்குமுன் பல்லுறுப்புக்கோவையின் **கெழுக்களின் குறிகள் மாற்றம்** எனும் கருத்தை அறிமுகப்படுத்துவோம். பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையை கருதுக.

$$2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 7x + 8$$

இப்பல்லுறுப்புக்கோவையின் கெழுக்களின் குறிகளை $'+'$ மற்றும் $'-'$ எனும் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி

$$+, -, -, +, +, -, +$$

என எழுதுவோம். இங்கு x^2 -உறுப்புக்கான குறியீடு எதையும் நாம் குறிப்பிடவில்லை என்பதை கவனிக்கவும். மேலும், 4 முறை குறி மாற்றங்கள் நிகழ்ந்துள்ளது (அதாவது x^6, x^4, x^1 மற்றும் x^0 இடங்களில்) என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

வரையறை 3.2

x^{j+1} –ன் கெழுவும் x^j –ன் கெழுவும் அல்லது x^{j-1} –ன் கெழுவும் x^j –ன் கெழுவும் வெவ்வேறு குறிகளோடு இருந்தால், $P(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையில் x –ன் j –வது **அடுக்கில் கெழுக்களின் குறிகளில் ஒரு மாற்றம் நிகழும்** எனப்படும். (கெழு பூச்சியமாக இருப்பின், பூச்சியக் கெழு உள்ள உறுப்பின் உடனடி முன்னால் உறுப்பின் பூச்சியமற்ற கெழுவின் குறிகளை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து டெஸ்கார்ட்டே விதியினைப் பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்களைப் பற்றி சில விவரங்களைப் பெறுவோம். இதன் நிரூபணம் பாடநூலின் பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது என்பதால் நிரூபணமின்றி தேற்றம் மட்டும் தரப்படுகின்றது.

தேற்றம் 3.7 (டெஸ்கார்ட்டே விதி) (Descartes Rule)

$P(x)$ எனும் மெய்யெண்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட $P(x)$ எனும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை p மற்றும் $P(x)$ –ன் கெழுக்களின் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை s எனில், $s - p$ என்பது ஒரு குறையற்ற இரட்டைப்படை முழு எண்ணாகும்.

$P(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் மிகை பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை $P(x)$ -ல் உள்ள குறி மாற்றங்களுக்கு மிகாமல் இருக்கும் எனத்தேற்றம் கூறுகிறது. மேலும் $P(x)$ -ல் உள்ள கெழுக்களின் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் $P(x)$ -ன் மிகை பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள வித்தியாசம் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கும்.

$P(x)$ –ன் குறையெண் பூச்சியமாக்கி என்பது $P(-x)$ –ன் மிகையெண் பூச்சியமாக்கி என்பதால் தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்காணுமாறு முடிவுக்கு வரலாம்.

$P(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை $P(-x)$ –ன் கெழுக்களின் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கு மிகாது. $P(-x)$ –ன் கெழுக்களின் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் $P(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள வித்தியாசம் ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணாகும்.

ஏதேனும் சில மிகை எண் k -க்கு, x^k –ஆல் பல்லுறுப்புக்கோவையைப் பெருக்குவதால் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கையில் மாற்றம் இராது. கெழுக்களின் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையிலும் மாற்றம் வராது.எனவே பல்லுறுப்புக்கோவையின் மாறிலி உறுப்பு பற்றிக் கவலைப்பட வேண்டியதில்லை. சில நூலாசிரியர்கள் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மாறிலி உறுப்பு பூச்சியமற்ற எண்ணாக இருக்க வேண்டும் என எண்ணுகின்றனர்.

டெஸ்கார்ட்டே விதியில் பூச்சியம் ஒரு மூலமாக எதுவும் கூறப்படாதது குறிப்பிடத்தக்கது. ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை வழக்கமான மரபு முறையில் எழுதப்பட்டிருந்தால், பார்த்தவுடனேயே ஒருவரால் அப்பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு 0 மூலமாக இருக்குமா அல்லது இராதா எனக் கூறிவிட முடியும். இனி டெஸ்கார்ட்டே விதியினை சில குறிப்பிட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மூலம் பரிசோதிப்போம்.

3.9.2 வரம்பினை அடைதல் (Attainment of bounds)

3.9.2 (a) மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்கான வரம்புகள் (Bounds for the number of real roots)

$P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+i)(x-i)$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு $-1, 1, 2, -i, i$ ஆகிய பூச்சியங்கள் உள்ளன.வழக்கமான முறையில் இதனை x^5-2x^4-x+2 என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையாக எழுதலாம். இப்பல்லுறுப்புக்கோவை $P(x)$ -க்கு 2 முறை குறிமாற்றங்கள் அதாவது நான்காவது மற்றும் பூச்சிய அடுக்கு இடங்களில் நிகழ்ந்திருக்கிறது. மேலும்,

$$P(-x)=-x^5-2x^4+x+2$$

ஒரு முறை குறி மாற்றம் நிகழ்ந்துள்ளது. நமது டெஸ்கார்ட்டே விதிப்படி $P(x)$ –ல் உள்ள மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை 2 -க்கு மிகாது; $P(x)$ –ல் உள்ள குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை 1 -க்கு மிகாது. தெளிவாகவே 1 மற்றும் 2 மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளாகவும் -1 என்பது ஒரே குறையெண் பூச்சியமாக்கியாகவும் x^5-2x^4-x+2 எனும் பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு உள்ளது. எனவே மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் வரம்பு 2 என்றும் குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் வரம்பு 1 என்றும் அடையப்பட்டது. இங்கு i மற்றும் $-i$ ஆகியவை மிகையெண்ணும் அல்ல; குறையெண்ணும் அல்ல.

$(x+2)(x+3)(x+i)(x-i)$ என்பது $-2, -3, -i, i$ எனும் மூலங்களையுடைய பல்லுறுப்புக் கோவை என நாம் அறிவோம். பல்லுறுப்புக்கோவை $P(x)$ –ஐ வழக்கமான முறையில்எழுதும்போது

$x^4+5x^3+7x^2+5x+6$ என எழுதுவோம். $P(x)$ –ல் ஒரு தடவைகூட குறி மாற்றம் நிகழவில்லை. மேலும் $P(-x)=x^4-5x^3+7x^2-5x+6$ -ல் 4 தடவை குறிகள் மாறியுள்ளது. டெஸ்கார்ட்டே விதிப்படி பல்லுறுப்புக்கோவை $P(x)$ -க்கு எண்ணிக்கை 0 –க்கு மேல் மிகைஎண் பூச்சியமாக்கிகள் இருக்காது. குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை 4 –க்கு மேல் இருக்காது.

மற்றுமொரு உதாரணமாக,

$$x^n - {}^nC_1x^{n-1} + {}^nC_2x^{n-2} - {}^nC_3x^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{(n-1)}x + (-1)^n .$$

எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையைக் கருதுவோம். இது $(x-1)^n$ -ன் விரிவாக்கமாகும். இந்த பல்லுறுப்புக்கோவையின் கெழுக்களில் n மாற்றங்களும் $P(-x)$ –ன் கெழுக்களின் குறிகளில்

மாற்றமில்லாமலும் உள்ளது. இது, பல்லுறுப்புக்கோவையின் மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை n –க்கு மேலிராது என்பதும் குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை 0 –க்கு மேலிராது என்பதைக் காட்டுகிறது. குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளைப் பற்றிய கூற்றின்படி பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளே இல்லை என்பது பயனுள்ள தகவலாகும். ஆனால் மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளைப் பற்றி எவ்வித பயனுள்ள தகவலும் இல்லை. இருப்பினும் அதற்கு சரியாக n மிகை எண் பூச்சியமாக்கிகள் உள்ளது; உண்மையில் n –படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு n –விட பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகாது. எனவே மிகை எண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை n –க்கு மேல் இராது.

3.9.2 (b) மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்கான வரம்பு (Bounds for the number of Imaginary (Nonreal Complex)roots)

டெஸ்கார்ட்டே விதியினைப் பயன்படுத்தி மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்கு ஒரு கீழ் வரம்பை நம்மால் கணிக்க இயலும். n படியுள்ள $P(x)$ –ல் உள்ள கெழுக்களின் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை m என்க. $P(-x)$ –ல் உள்ள கெழுக்களின் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை k என்க. எனவே குறைந்தபட்சம் $n-(m+k)$ மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்கள் $P(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு உள்ளது. விதியின் பிற முடிவின்படி அதாவது, மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்குமான வேறுபாடு இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கும் என்பதை வைத்து குறிப்பிட்ட சந்தர்ப்பங்களில் வரம்பை துல்லியமாக கணிக்க இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.30

$9x^9+2x^5-x^4-7x^2+2=0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தபட்சம் ஆறு மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்கள் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட $P(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டிற்கு தெளிவாகவே 2 முறை குறிமாற்றங்கள் இருப்பதால் $P(x)$ –ன் மிகையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை இரண்டிற்கு மேலிராது. மேலும் $P(-x)=-9x^9-2x^5-x^4-7x^2+2$ -ல் $P(-x)$ –க்கு ஒரே ஒரு முறை குறிமாற்றம் இருப்பதால் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை ஒன்றுக்கு மேற்பட்டு இல்லை. தெளிவாகவே 0 ஒரு மூலம் இல்லை. எனவே மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை அதிகபட்சம் 3 ஆகும். எனவே குறைந்தபட்சம் ஆறு மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்கள் உண்டு. ■

குறிப்புரை

மேற்கண்ட ஆய்விலிருந்து டெஸ்கார்ட்டே விதியானது மிகையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் உச்ச வரம்பை மட்டுமே அளிக்கிறது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது; துல்லியமாக மிகையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையையோ அல்லது குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையையோ தருவதில்லை. ஆனால் சில சந்தர்ப்பங்களில் நம்மால் துல்லியமாக மிகையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை, குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் மெய்யற்ற மூலங்களின் எண்ணிக்கை முதலியவற்றை கண்டறிய இயலும். மேலும் இது மூலங்களைக் கண்டறிய எவ்வித முறையையும் அளிப்பதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 3.31

பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மை பற்றி ஆராய்க::

(i) $x^{2018}+1947x^{1950}+15x^8+26x^6+2019=0$ (ii) $x^5-19x^4+2x^3+5x^2+11=0$

தீர்வு

கருதப்படும் பல்லுறுப்புக்கோவையை $P(x)$ என்க.

(i) $P(x)$ மற்றும் $P(-x)$ –ல் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் என்பதால் மிகை எண் மூலங்களோ குறையெண் மூலங்களோ இல்லை. தெளிவாகவே பூச்சியம் மூலம் இல்லை. ■

எனவே பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை. ஆகையால் பல்லுறுப்புக்கோவையின் அனைத்து மூலங்களும் மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்களாகும்.

(ii) $P(x)$ மற்றும் $P(-x)$-ல் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 2 மற்றும் 1 ஆகும். எனவே அதிகபட்சம் இரு மிகையெண் மூலங்களும் அதிகபட்சம் ஒரு குறையெண் மூலங்களும் உண்டு. $P(-x)$-ல் உள்ள குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள வேறுபாடு இரட்டைப்படை எண் என்பதால் பூச்சிய எண்ணிக்கையில் குறையெண் மூலங்கள் இல்லை. எனவே குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை 1 ஆகும்.

$P(x)$-ல் உள்ள குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் மிகையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள வேறுபாடு இரட்டைப்படை எண் என்பதால் பூச்சிய எண்ணிக்கையில் அல்லது இரு மிகை எண் மூலங்கள் உண்டு. ஆனால் கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியம் என்பதால் 1 ஒரு மூலமாகும். எனவே இரண்டே இரண்டு மிகை எண் மூலங்கள் உண்டு. தெளிவாக பிற இரு மூலங்களும் மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்களாகும்.

பயிற்சி 3.6

1. $9x^9-4x^8+4x^7-3x^6+2x^5+x^3+7x^2+7x+2=0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் அதிகபட்ச சாத்தியமான மிகை எண் மற்றும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையை ஆராய்க
2. x^2-5x+6 மற்றும் $x^2-5x+16$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் அதிகபட்ச சாத்தியமான மிகை எண் மற்றும் குறையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கையை ஆராய்க. வளைவரைகளின் தோராய வரைபடம் வரைக.
3. $x^9-5x^5+4x^4+2x^2+1=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தபட்சம் 6 மெய்யற்ற கலப்பெண் தீர்வுகள் உண்டு எனக் காட்டுக.
4. $x^9-5x^8-14x^7=0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மிகையெண் மற்றும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையை தீர்மானிக்க.
5. $x^9+9x^7+7x^5+5x^3+3x$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மெய்யெண் மற்றும் மெய்யற்ற கலப்பெண் பூச்சியமாக்கிகளின் துல்லியமான எண்ணிக்கையைக் கண்டறிக.

பயிற்சி 3.7

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகப் பொருத்தமான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்க.

1. x^3+64-ன் ஒரு பூச்சியமாக்கி

   (1) 0 (2) 4 (3) $4i$ (4) -4

2. f மற்றும் g என்பன முறையே m மற்றும் n படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைகள் மற்றும் $h(x)=(f\circ g)(x)$ எனில், h-ன் படியானது

   (1) mn (2) $m+n$ (3) m^n (4) n^m

3. x-ல் n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு பெற்றுள்ள மூலங்கள்

   (1) n வெவ்வேறு மூலங்கள் (2) n மெய்யெண் மூலங்கள்

   (3) n கலப்பெண் மூலங்கள் (4) அதிகபட்சம் ஒரு மூலம்

4. x^3+px^2+qx+r -க்கு α,β மற்றும் γ என்பவை பூச்சியமாக்கிகள் எனில், $\sum\frac{1}{\alpha}$ -ன் மதிப்பு

(1) $-\frac{q}{r}$ (2) $-\frac{p}{r}$ (3) $\frac{q}{r}$ (4) $-\frac{q}{p}$

5. விகிதமுறு மூலத் தேற்றத்தின்படி பின்வருவனவற்றுள் எந்த எண் $4x^7+2x^4-10^3-5$ என்பதற்கு சாத்தியமற்ற விகிதமுறு பூச்சியமாகும்?

(1) -1 (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{4}{5}$ (4) 5

6. x^3-kx^2+9x எனும் பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மூன்று மெய்யெண் பூச்சியமாக்கிகள் இருப்பதற்கு தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை

(1) $|k|\le 6$ (2) $k=0$ (3) $|k|>6$ (4) $|k|\ge 6$

7. $[0,2\pi]$ -ல் $\sin^4 x-2\sin^2 x+1$ -ஐ நிறைவு செய்யும் மெய்யெண்களின் எண்ணிக்கை

(1) 2 (2) 4 (3) 1 (4) ∞

8. $x^3+12x^2+10ax+1999$ -க்கு நிச்சயமாக ஒரு மிகையெண் பூச்சியமாக்கி இருப்பதற்கு தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை

(1) $a\ge 0$ (2) $a>0$ (3) $a<0$ (4) $a\le 0$

9. x^3+2x+3 எனும் பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு

(1) ஒரு குறை மற்றும் இரு மெய்யெண் பூச்சியமாக்கிகள் இருக்கும்

(2) ஒரு மிகை மற்றும் இரு மெய்யற்ற கலப்பெண் பூச்சியமாக்கிகள் இருக்கும்

(3) மூன்று மெய்யெண் பூச்சியமாக்கிகள் இருக்கும்

(4) பூச்சியமாக்கிகள் இல்லை

10. $\sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r(-1)^r x^r$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை

(1) 0 (2) n (3) $<n$ (4) r

பாடச்சுருக்கம்

- படி 2 அல்லது 3 உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டிற்கான வியட்டாவின் சூத்திரம் $n>3$.
- இயற்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம்: $n\ge 1$ படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு $\mathbb{C}$ -ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூச்சியமாக்கியாவது உண்டு.
- இணை கலப்பெண் மூலத் தேற்றம்: பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் மெய்யெண்கள் எனில் மெய்யற்ற கலப்பெண் மூலங்கள் இணை சோடிகளாகத்தான் நிகழ்கின்றன.
- விகிதமுறு மூலத் தேற்றம்: $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$ (இங்கு $a_n\ne 0$ மற்றும் $a_0\ne 0$) என்பது முழுக்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாடாகும். $\frac{p}{q}$ (இங்கு $(p,q)=1$ ஆகும்) என்பது பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலம் எனில், a_0 -ன் காரணி p ஆகவும், a_n -னின் காரணி q ஆகவும் இருக்கும்.

- இரட்டைப் படை எண் அடுக்குகளை மட்டும் கொண்டிருக்கும் பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகள், பகுதி காரணிபடுத்தப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகள், கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியமாக உள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகள், தலைகீழ் சமன்பாடுகள் போன்ற சில சிறப்பான பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடுகளினைத் தீர்க்க வழிமுறைகள்.
- டெஸ்கார்ட்டே விதி: $P(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை p எனில் மற்றும் $P(x)$ –ன் கெழுக்களின் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை s எனில் $s-p$ ஒரு குறையற்ற இரட்டைப்படை முழு எண்ணாகும்.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும். GeoGebra-வின் "12th Standard Mathematics" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடது பக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "Theory of Equations" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க. இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். "Relation between roots and co-efficients" பயிற்சித்தாளை தேர்வு செய்க.

GLUZO

அத்தியாயம்

4

நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள்

VESDM

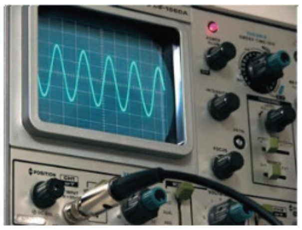
* பெரும்பாலும் ஒன்றை மற்றொன்றாக மாற்றுவதும் வடிவியலை மொழியில் மாற்றுவதும் கணிதத்தின் ஆற்றலாகும்*

--மார்கஸ் டு சாடோய்

4.1 அறிமுகம் (Introduction)

ஜான் F.W. ஹெர்சே

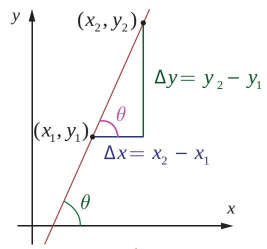
நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் அளவீட்டுக் கருவிகளைக் கொண்டு அளவிட முடியாத கணக்குகளுக்கு மறைமுக அளவீடுகளால் தீர்வு காணப்படுகிறது. மலைகள் மற்றும் உயரமான கட்டிடங்களின் உயரங்களை அளவீட்டுக் கருவிகளைக் கொண்டு கண்டறிய இயலாதபோது அவைகளைக் கண்டறிய முக்கோணவியல் நமக்கு உதவுகிறது. பொறியியல் மற்றும் இயற்பியல் உள்ளிட்ட இதர அறிவியல் பிரிவுகளில் முக்கோணவியல் சார்புகளும் மற்றும் அவற்றின் நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளும் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேலும் இச்சார்புகள், ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் இரு பக்கங்களின் நீளங்களை மட்டுமே அறிந்து அம்முக்கோணத்திற்கு தீர்வு காணும் கணக்குகளில் மட்டுமல்லாமல், $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ போன்ற குறிப்பிட்ட தொகையிடல் கணக்குகளுக்கு தீர்வு காண உதவுகின்றன. சைன் சார்பின் நேர்மாறு முக்கோணவியல் சைன் சார்பான $\text{arcsine}(x)$-க்கு $\sin^{-1}x$ எனும் குறியீட்டை முதல் முறையாக ஆங்கில கணிதவியலாளர் ஜான் F.W. ஹெர்சே (1792-1871) (John F.W. Herschel) என்பவர் அறிமுகப்படுத்தினார். 1826-ல் தன் தந்தையுடன் சேர்ந்து பணியமாற்றியமைக்காக இராயல் வானவியல் கழகத்தின் தங்க பதக்கம் இவருக்கு அளிக்கப்பட்டது.



மின்சாதன அலைவு காட்டி (Oscilloscope) எனும் கருவி சைன் சார்பின் வளைவரைகளைப் போன்று மின்சமிக்கைகளை வரைபடங்களாக மாற்றுகிறது. கட்டுப்பாட்டுக்கருவிகளைக் கொண்டு சைன் வளைவரையின் வீச்சு, காலஅளவு மற்றும் நிலை மாற்றத்தை மாற்றலாம். மனித உடலின் இதயத்துடிப்புகளைக் அளவிடுதல் போன்று பல்வேறு பயன்பாடுகளில் அலைவுக்காட்டிக் கருவிப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அத்தகைய பயன்பாடுகளில் முக்கோணவியலின் சார்புகள் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது.

நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளை சில எளிய எடுத்துகாட்டுகளின் மூலம் விளக்குவோம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு-1 (சாய்வு கணக்கு)



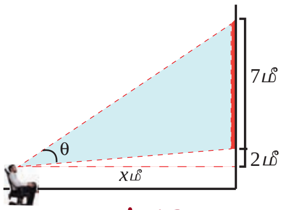
சாய்வு : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta$

படம். 4.1

$y = mx + b$ எனும் நேர்கோட்டைக் கருதுக. x அச்சுடன் நேர்க்கோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் θ-ஐ சாய்வு m மூலம், காண்போம். ஒரு சார்பின் சாய்வு என்பது அதன் மாறு வீதமாக வரையறுக்கப்படும். சாய்வு அல்லது சாய்வுவிகிதம் பொதுவாக $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ எனக் கணக்கிடப்படுகிறது. படத்திலுள்ள செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து, $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. எனவே, $\tan\theta = m$. இங்கு θ வின் மதிப்பைக் கண்டறிய முக்கோணவியல் சார்பின் நேர்மாறு தேவைப்படுகிறது. இதனை "நேர்மாறு தொடுகோட்டுச்சார்பு (inverse tangent function) " என்போம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு-2 (திரைப்பட அரங்கின் திரைகள்)

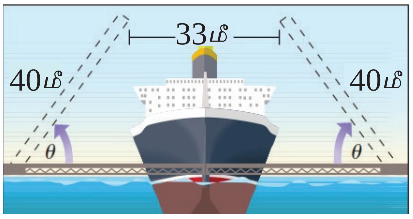
திரையரங்கத்தின் திரை 7 மீட்டர் உயரம் கொண்டது என்க. ஒருவர் அமர்ந்த நிலையில் திரையின் அடிபகுதியானது பார்வை மட்டத்திற்கு 2 மீட்டர் உயரத்தில் உள்ளது. பார்வையிலிருந்து திரையின் அடிமட்டம் வரை வரையப்படும் கிடைமட்டகோட்டிற்கும், பார்வையிலிருந்து திரையின் முகட்டிற்கு வரையப்படும் நேர்க்கோட்டிற்கும் இடையே ஏற்படும் கோணம் பார்வைக் கோணம் என்க. படத்தில், θ என்பது பார்வைக்கோணமாகும். திரையிலிருந்து x மீட்டர் தூரத்தில் ஒருவர் அமர்ந்திருப்பதாக கொள்வோம். பார்வைக் கோணம் θ -ஐக் கண்டறிய பயன்படும் சார்பு $\theta(x) = \tan^{-1}\left(\frac{9}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$. இங்கு பார்வைக் கோணம் θ என்பது x-ன் சார்பு என்பதை கவனிக்க.



படம் 4.2

விளக்க எடுத்துக்காட்டு-3 (இழுப்புப்பாலம்)

படத்தில் காண்பது போன்ற இரட்டைமடிப் பலகு இழுப்புப்பாலம் ஒன்றினைக் கருதுவோம். ஒவ்வொரு மடிப்பலகும் 40 மீட்டர் நீளம் கொண்டது. 33 மீட்டர் அகலமுடைய கப்பலொன்று பாலத்தைக் கடக்க வேண்டும். பாலத்தைக் கப்பல் கடக்க, ஒவ்வொரு மடிப்பலகும் திறப்பதற்கு ஏற்படுத்தும் மீச்சிறுகோணம் θ -ஐக் கண்டறிய நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்பு பயன்படுகிறது.



படம் 4.3

அலகு வட்டத்தினைப் பயன்படுத்தி, மெய்யெண்களின் முக்கோணவியல் சார்புகள் (இங்கு ஆரையனில் கோணங்கள் மதிப்பிடப்படுகின்றன) குறித்து பதினொன்றாம் வகுப்பில் படித்தோம். இப்பாடப்பகுதியில், நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள், அதன் வரைபடங்கள் மற்றும் பண்புகளைப் பற்றி கற்றறிவோம். வழக்கம்போல் $\mathbb{R}$ மற்றும் $\mathbb{Z}$ என்பவை முறையே மெய்யெண்களின் கணத்தையும் மற்றும் முழுவெண்களின் கணத்தையும் குறிக்கின்றன. ஆறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் காலவட்ட ஒழுங்குடைமை (periodicity), சார்பகம் (domain) மற்றும் வீச்சகம் (range) முதலியனவற்றின் வரையறைகளை நினைவுகூர்வோம்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது, மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகள்:

- நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் வரையறைகள்
- நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் முதன்மை மதிப்புகளை மதிப்பிடும் விதம்
- முக்கோணவியல் சார்புகள் மற்றும் அதன் நேர்மாறு சார்புகளின் வரைபடங்கள் வரையும் விதம்
- நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் பண்புகளைப் பயன்படுத்துதல் மற்றும் சில கோவைகளின் மதிப்புகளைக் கண்டறிதல்

4.2 சில அடிப்படைக் கருத்துகள் (Some Fundamental Concepts)

வரையறை 4.1 (காலவட்ட ஒழுங்குடைமை)

ஒரு மெய்மதிப்புடையச் சார்பு f -ன் சார்பகத்தில் உள்ள அனைத்து x-க்கும், ஒரு மிகை எண் p -ஐ, $x+p$ ஆனது f -ன் சார்பகத்தில் இருக்குமாறும் $f(x+p) = f(x)$ எனவும் காண இயலுமாமனால், f ஐ திரும்ப சார்பு அல்லது காலவட்டச் சார்பு என்போம்.

அவ்வாறான எண்களில் மிகச்சிறிய எண், f என்ற சார்பின் காலம் (period) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ மற்றும் e^{ix} ஆகியவை காலம் 2π ஆரையன்கள் கொண்ட கால வட்டச் சார்புகளாகும். மாறாக $\tan x$, $\cot x$ ஆகியவை π ஆரையன்கள் கொண்ட கால வட்டச் சார்புகளாகும்.

வரையறை 4.2 (ஒற்றை மற்றும் இரட்டைச் சார்புகள்)

ஒரு மெய்மதிப்புடையச் சார்பு f-ன் சார்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு x க்கும், $-x$ என்பதும் f –ன் சார்பகத்தில் இருந்து, $f(-x)=f(x)$ என்றவாறு இருந்தால், f ஐ ஓர் இரட்டைச் சார்பு (even function) என்போம்.

ஒரு மெய்மதிப்புடையச் சார்பு f –ன் சார்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு x –க்கும், $-x$ என்பதும் f –ன் சார்பகத்தில் இருந்து, $f(x) = -f(x)$ என்றவாறு இருந்தால், f ஐ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு (odd function) என்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக, x^3, $\sin x$, $\operatorname{cosec} x$, $\tan x$ மற்றும் $\cot x$ ஆகியவை ஒற்றைச்சார்புகளாகும். ஆனால், x^2, $\cos x$ மற்றும் $\sec x$ ஆகியவை இரட்டைச்சார்புகளாகும்.

குறிப்புரை

g மற்றும் h க்கு காலம் இருந்து, $f=g\pm h$ என்றவாறு இருந்தால் f –ன் காலம் மி.சி.ம {காலம் g, காலம் h } என இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $y=\cos 6x+\sin 4x$ –ன் காலம் π மற்றும் $y=\cos x-\sin x$ –ன் காலம் 2π ஆகும்.

4.2.1 முக்கோணவியல் சார்புகளின் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம் (Domain and Range of trigonometric functions)

முக்கோணவியல் சார்புகளின் சார்பகங்கள் மற்றும் வீச்சகங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

முக்கோணவியல் சார்பு	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cosec} x$	$\sec x$	$\cot x$
சார்பகம்	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\{n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\{n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$
வீச்சகம்	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}$

4.2.2 சார்புகளின் வரைபடங்கள் (Graphs of functions)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ என்பது ஒரு மெய்மதிப்புடையச் சார்பு என்க. அதன் சார்பகத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி x -ல் சார்பு f–ன் மதிப்பு $f(x)$ என்க. பின்னர், $(x, f(x)), x\in\mathbb{R}$ என்ற புள்ளிகளின் தொகுப்புக் கணம், சார்பு f–ன் வரைபடத்தை தீர்மானிக்கிறது. பொதுவாக, xy –தளத்தில் உள்ள ஒரு வரைபடம், ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும் என கூறமுடியாது. இருந்தபோதிலும், ஒரு வரைபடம் நிலைக் குத்துக் கோட்டுச் சோதனையை (ஒரு நிலைக்குத்துக்கோடு ஒரு வரைபடத்தை வெட்டுமானால், அக்கோடு அதிகபட்சமாக ஒரேயொரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டும்) நிறைவு செய்தால், அவ்வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

நம் அன்றாட வாழ்வில், அலைகள், இரவு/பகல் சுழற்சி போன்று நேரத்தைப் பொறுத்து காலவட்டத்தினை உள்ளடக்கிய பல்வேறு நிகழ்வுகளைக் காண்கிறோம். முக்கோணவியல் சார்புகள் அனைத்தும் திரும்பச் சார்புகள் என்பதால், இத்தகைய நிகழ்வுகளை முக்கோணவியல் சார்புகள் மூலமாக அறிந்துணரலாகும். முக்கோணவியல் சார்புகளை அவைகளின் வரைபடங்கள் வாயிலாகப் பார்த்து அறிந்து கொள்வதின் மூலம், கால வட்ட ஒழுங்குடைமையுள்ள நிகழ்வுகளின் பண்புகளை ஆராய்ந்தறியலாம்.

முக்கோணவியல் சார்புகளின் வரைபடத்தை xy –தளத்தில் வரைய, சாரா மாறி x ஐ ஆரையனில் உள்ள கோண அளவுகளைக் குறிக்கும். சார்ந்த மாறியை y எனவும் குறிப்பிடுவோம். சைன் சார்பினை $y=\sin x$ என எழுதுகிறோம். இதைப்போலவே மற்ற முக்கோணவியல் சார்புகளையும் எழுதலாம். இனி வரும் பாடப்பகுதிகளில், முக்கோணவியல் சார்புகள் மற்றும் நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் வரைபடங்களை எவ்வாறு வரையலாம் எனவும் மற்றும் அவற்றின் பண்புகளைப் பற்றியும் படிக்க உள்ளோம்.

4.2.3 வரைபடத்தின் வீச்சு மற்றும் காலம் (Amplitude and Period of a graph)

x –அச்சிலிருந்து ஒரு சார்பின் வரைபடத்திற்கு உள்ள மீப்பெரு தூரம் அச்சார்பின் வீச்சு (amplitude) ஆகும். இவ்வாறாக ஒரு சார்பின் வீச்சு ஆனது x –அச்சிலிருந்து அதன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பிற்கு உள்ள உயரம் ஆகும். ஒரு முழுச்சுற்றினை பூர்த்தி செய்ய சார்புக்கு தேவைப்படும் தூரம் அச்சார்பின் காலம் (period) ஆகும்.

குறிப்புரை

(i) காலவட்டச் சார்பின் கால அளவிற்கு (period) சமமான நீளம் கொண்ட இடைவெளியில் வரையப்படும் வரைபடப்பகுதியே திரும்ப திரும்ப வரும் பல வரைபடப் பகுதிகளைக் கொண்டதாக அச்சார்பின் மொத்த வரைபடம் அமையும்.

(ii) ஒற்றைச் சார்பின் வரைபடம் ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீராகவும் மற்றும் இரட்டைச் சார்பின் வரைபடம் y –அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீராகவும் இருக்கும்.

4.2.4 நேர்மாறு சார்புகள் (Inverse functions)

உள்ளீடு செய்யப்படும் ஒரு மதிப்புக்கு எப்பொழுதும் ஒரேயொரு தனித்த மதிப்பினை விடையாகத் தரும் விதிமுறையே ஒரு சார்பாகும் என்பதை நினைவு கூர்வோம். சார்பின் நேர்மாறு இருத்தலுக்கு மேற்கண்ட சார்பிற்கான தேவையைப் பூர்த்தி செய்தல் அவசியமாகிறது. இதனை நாம் ஒரு எடுத்துக்காட்டு மூலம் விளக்குவோம்.

இரட்டையர் அல்லாத அனைத்து மானிடர்களின் கணத்தினைக் கருதுவோம். அக்கணத்திலுள்ள ஒவ்வொருவரும் ஒரு இரத்த வகை மற்றும் ஒரு மரபணு (DNA) தொடர்ச்சியை பெற்றுள்ளார். மானிடரை உள்ளீடாகவும் இரத்த வகை அல்லது மரபணு தொடர்ச்சியை வெளியீடாகவும் இருப்பதால் இவை சார்புகளாகின்றன. ஒரே இரத்த வகை கொண்டுள்ள மனிதர் பலருண்டு என்பதனை நாம் அறிவோம். இருப்பினும் மரபணு தொடர்ச்சியை பொருத்தவரை ஒவ்வொரு தனி மனிதனுக்கும் மரபனு தொடர்ச்சி தனித்தனியே இருக்கும். இதனை பின்னோக்கி படிக்கும்போது இரத்த மாதிரியின் இரத்த வகை தெரிந்திருந்தால் அதன் மூலம் அம்மாதிரி இரத்த வகை குறிப்பாக யாரிடமிருந்து பெறப்பட்டது எனக் கூற முடியுமா? முடியாது என்பதே இதற்கு விடையாகும்.மாறாக ஒரு மரபணு தொடர்ச்சியை தெரிந்திருந்தால் கணத்திலுள்ள அதற்குரிய மனிதரைக் கண்டறிய இயலும். இவ்வறாக மரபணு தொடர்ச்சி மூலம் மனிதரைக் கண்டறியும் பின்னோக்குதேலே நேர்மாறு சார்பின் இருத்தலுக்கான அடிப்படையாகிறது. இத்தகைய பின்நோக்கி கண்டறிதலே நேர்மாறு சார்பாகும். மரபணு தொடர்ச்சி எடுத்துகாட்டுப் போல், சார்பானது ஒன்றுக் கொன்று சார்பாக இருந்தால், அதற்கு நேர்மாறு சார்பு இருக்கும். தோராயமாக கூறும்போது சார்பு செய்யும் செயலை அதன் நேர்மாறு சார்பு அச்செயலை, செயலிழக்க வைக்கிறது.

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு குறுங்கோணமும் மற்றும் ஒரு பக்க நீளமும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், பிற கோணங்களையும் மற்றும் பிற பக்க நீளங்களையும் கண்டறிவது எளிதாகும். ஆனால் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் மட்டுமே தரப்பட்டிருந்தால், பக்கங்களின் விகிதத்தைப் பயன்படுத்தி கோணத்தைக் காண்பதற்கு ஒரு வழிமுறை தேவைப்படுகிறது. இத்தகைய தருணத்தில்தான் முக்கோணவியல் சார்பின் நேர்மாறு சார்பு எனும் கருத்தாக்கம் முக்கியத்துவம் பெறுகிறது.

எந்தவொரு முக்கோணவியல் சார்பும் அதன் முழுமை சார்பகத்தின்மீது ஒன்றுக்கொன்று சார்பு அல்ல என்பதை நாம் அறிவோம். எடுத்துகாட்டாக, $\sin\theta = 0.5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \ldots$ ஆகிய எண்ணற்ற θ -வின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை பூர்த்தி செய்யும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட $\sin\theta$ -விற்கு ஏற்ப θ -க்கு தனித்த மதிப்பைக் காண இயலாது. இவ்வாறு ஒரே மதிப்பிற்கு பல கோணங்களை கோர்க்கும் நிலை ஏற்படுவதை தவிர்க்க, நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்பினை வரையறுக்கும் முன்னரே, தக்க எல்லைக் கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்பட்டவாறு சார்பிற்கான சார்பகத்தை வரையறைச் செய்ய வேண்டும்.

முக்கோணவியல் சார்பின் நேர்மாறை உருவாக்கும்போது, கட்டுபடுத்தப்பட்ட இடைவெளியில் அச்சார்பு ஒன்றுக்கொன்று சார்பாக அமையும்படி போதுமானதொரு சிறிய இடைவெளியைக் கருதுவோம். ஆனால், அவ்வாறு கட்டுபடுத்தப்பட்ட இடைவெளியைச் சார்பகமாகக் கொண்ட

சார்பின் வீச்சகம் அச்சார்பின் முழுமையான வீச்சகமாக இருக்கவேண்டும். இப்பாடப்பகுதியில் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகங்களில் வரையறுக்கப்பட்ட முக்கோணவியல் சார்புகளின் நேர்மாறு சார்புகளை வரையறை செய்வோம்.

4.2.5 நேர்மாறு சார்புகளின் வரைபடங்கள் (Graph of inverse functions)

f என்பது ஒரு இருபுறச் சார்பாகவும் மற்றும் f -ன் நேர்மாறு f^{-1} எனவும் கருதுவோம். ஆகவே $y = f(x)$ எனில்,எனில் மட்டுமே $x = f^{-1}(y)$ ஆகும்.எனவே (a, b) என்பது, f-ன் வரைபடத்தில் ஒரு புள்ளியாக அமைவதற்குத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை அப்புள்ளிக்கு ஒத்த புள்ளியாக (b, a) எனும் புள்ளி f^{-1}-ன் வரைபடத்தில் அமையவேண்டும். இக்கருத்தின் வாயிலாக f-ன் வரைபடத்தில் உள்ள x மற்றும் y அச்சுகளை ஒன்றுக்கொன்று இடமாற்றம் செய்வதன்மூலம், f^{-1} ன் வரைபடத்தைப் பெறலாம் என்பது புலனாகின்றது. மாறாக $y = x$ எனும் நேர்க்கோட்டின் ஊடாக f-ன் வரைபடத்தின் கண்ணாடி பிம்பமாக (mirror image) f^{-1}-ன் வரைபடம் உள்ளது எனவும் கூறலாம் அல்லது $y = x$ எனும் நேர்க்கோட்டின் ஊடாக f -ன் வரைபடத்தின் பிரதிபலிப்பாக (reflection) f^{-1} ன் வரைபடம் உள்ளது எனவும் கூறலாம்.

4.3 சைன் சார்பு மற்றும் நேர்மாறு சைன் சார்பு (Sine Function and Inverse Sine Function)

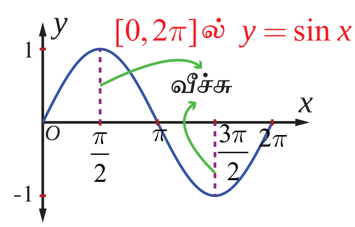
$\mathbb{R}$ –ஐ சார்பகமாகவும் மற்றும் $[-1, 1]$–ஐ வீச்சகமாகவும் கொண்டதே சைன் சார்பு என்பதை நினைவு கூர்வோம். சைன் சார்பை $y = \sin x$ எனவும் மற்றும் நேர்மாறு சைன் சார்பை $y = \sin^{-1} x$ அல்லது $y = \arcsin(x)$ எனவும் குறிப்பிடுவோம். இங்கு -1 எனும் குறியீடு படிக்குறி அன்று. மேலும் இக்குறியீடு நேர்மாறைக் குறிக்கிறதே அன்றி தலைகீழியை அல்ல.

அனைத்து மெய்யெண்கள் x -க்கும் $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ என்பது மெய்யாகிறது. மேலும் $0 < p < 2\pi$ –இல் $\sin(x + p)$–ன் மதிப்பு $\sin x$ – க்கு சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எனவே, சைன் சார்பின் கால முறை 2π ஆகும்.

4.3.1 சைன் சார்பின் வரைபடம் (The graph of sine function)

சைன் சார்பின் வரைபடமானது $y = \sin x$ என்பதன் வரைபடமாகும். இங்கு x ஒரு மெய்யெண்ணாகும். சைன் சார்பின் காலம் 2π என்பதால், பின்வரும் ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் $\ldots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], \ldots$.சைன் சார்பின் வரைபடம் ஒரே வடிவத்தில் அமைகின்றது. எனவே $x \in [0, 2\pi]$- எனும் மதிப்புகளுக்கு மட்டும் வரைபடத்தை தீர்மானித்தாலே போதுமானதாகும். $x \in [0, 2\pi]$ எனில் $y = \sin x$ ன் வரைபடத்தில் உள்ள (x, y) புள்ளிகளில் அறிந்த சில புள்ளிகளின் மதிப்புகளைக் காண கீழ்க்காணும் அட்டவணையை உருவாக்குவோம்.

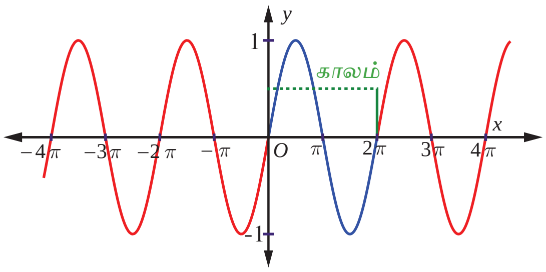
x (ஆரையனில்)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0



படம் 4.4

அட்டவணையின்படி $y = \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$, இன் வரைபடம் ஆதியிலிருந்து தொடங்குகிறது என்பது தெளிவாகிறது. 0 முதல் $\frac{\pi}{2}$ வரை x மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, $y = \sin x$ –ன் மதிப்பும் 0 முதல் 1 வரை அதிகரிக்கின்றது. $\frac{\pi}{2}$ முதல் π வரை x ன் மதிப்பு அதிகரித்து,

தொடர்ந்து $\frac{3\pi}{2}$ வரையிலும் அதிகரிக்கும்போது y ன் மதிப்பு 1 முதல் 0 வரை குறைகிறது, அதனை தொடர்ந்து -1 க்கு குறைகிறது. $\frac{3\pi}{2}$ முதல் 2π வரை x ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது y ன் மதிப்பு -1 முதல் 0 வரை அதிகரிக்கிறது. அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து இழைவான வளைவரை வரைக. வரைபடத்தின் ஒரு பகுதி படம்.4.4-ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது



படம் 4.5

$y = \sin x$ என்பது 2π காலம் கொண்டது என்பதால், $y = \sin x$ -ன் முழு வளைவரையில் $[0, 2\pi]$ இடைவெளியில் அமைந்த வரைபடமே இருமருங்கும் திரும்ப திரும்ப அமைந்துள்ளது. படம். 4.5 -ல் சைன் சார்பின் முழு வரைபடம் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது. 0 முதல் 2π வரையுள்ள சைன் வளைவரையின் பகுதியை ஒரு சுழற்சி என்போம். அதன் வீச்சு 1 ஆகும்.

குறிப்பு

$0 \le x \le \pi$ -ல் முதல் மற்றும் இரண்டாம் காற்பகுதியில் சைன் சார்பின் மதிப்புகளுக்கு $\sin x \ge 0$ ஆகும். $\pi < x < 2\pi$ -ல் மூன்றாம் மற்றும் நான்காம் காற்பகுதியில் சைன் மதிப்புகளுக்கு $\sin x < 0$ ஆகும்.

4.3.2 சைன் சார்பின் பண்புகள் (Properties of the sine function)

$y = \sin x$ ன் வரைபடத்திலிருந்து கீழ்க்காணும் சைன் சார்பின் பண்புகளைப் பற்றி காணலாம்.

(i) வளைவரையில் தொடர்ச்சியின்மையோ அல்லது முறிவுகளோ இல்லை. சைன் சார்பு தொடர்ச்சியானது.

(ii) வரைபடம் ஆதிபுள்ளியைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால் சைன் சார்பு ஒற்றைச் சார்பாகும்.

(iii) சைன் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு 1 ஐ $x = \cdots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$ ஆகிய மதிப்புகளில் பெறுகிறது. மீச்சிறு மதிப்பு -1 ஐ $x = \cdots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots$ ஆகிய மதிப்புகளில் பெறுகிறது. மாறாக அனைத்து $x \in \mathbb{R}$ க்கும் $-1 \le \sin x \le 1$ எனக்கூறலாம்.

4.3.3 நேர்மாறு சைன் சார்பு மற்றும் அதன் பண்புகள் (The inverse sine function and its properties)

சைன் சார்பானது அதன் முழு சார்பகம் $\mathbb{R}$ -ல் ஒன்றுக்கொன்றானது அல்ல. இதனை $y = b,\ -1 \le b \le 1,$ எனும் ஒவ்வொரு கிடைமட்டக்கோடும் $y = \sin x$ -ன் வரைபடத்தினை எண்ணற்ற முறை வெட்டுவதைக் கொண்டு இதனை நாம் அறியலாம். அதாவது, ஒன்றுக்கொன்றான சார்பா என சோதிக்கும் கருவியான கிடைமட்டச் சோதனையில் சைன் சார்பு தோல்வியடைகிறது. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என சைன் சார்பின் சார்பகம் கட்டுபடுத்தப்பட்டால், அதன் வீச்சகம் $[-1, 1]$ என்பதோடு மட்டுமில்லாமல் சைன் சார்பு ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் மேற்கோர்த்தலாகவும் இருக்கிறது. தற்போது $[-1, 1]$-ஐ சார்பகமாகவும் , $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-ஐ வீச்சகமாகவும் கொண்டு நேர்மாறு சைன் சார்பை வரையறை செய்யலாம்.

வரையறை 4.3

$-1 \le x \le 1$-ல், $\sin^{-1} x$-ஐ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ எனும் தனித்த எண்ணை $\sin y = x$ எனுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது, $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ எனும் நேர்மாறு சைன் சார்பை, $\sin^{-1}(x) = y$ என வரையறுக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\sin y = x$ மற்றும் $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ஆகும்.

குறிப்பு

(i) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ எனும் கட்டுபடுத்தப்பட்ட சார்பகத்தில் சைன் சார்பு ஒன்றுக்கொன்று ஆகும். ஆனால், பூஜ்ஜியத்தை உள்ளடக்கிய இதனை விடப் பெரிய இடைவெளியில் சைன் சார்பு ஒன்றுக்கொன்று சார்பாகாது.

(ii) $\sin^{-1} x$-ன் வீச்சகமான $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-ல் கொசைன் சார்பு குறையற்ற எண் மதிப்பைப் பெறுகிறது. இந்த முடிவு, தொகை நுண்கணிதத்தில் சில முக்கோணவியல் பிரதியிடலில் முக்கியமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(iii) சைன் சார்பின் நேர்மாறைப் பற்றி குறிப்பிடும்போதெல்லாம், $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ மற்றும் $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

(iv) $\ldots \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right], \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \ldots$ ஆகிய இடைவெளிகளில் ஏதேனும் ஒரு இடைவெளியை சைன் சார்பின் சார்பகமாகக் கட்டுப்படுத்தலாம். அவ்வாறான இடைவெளிகளிலும் சைன் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகவும் மற்றும் $[-1,1]$ என்பது அதன் வீச்சாகவும் இருக்கும்.

(v) கட்டுப்படுத்தப்பட்ட இடைவெளி $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ஆனது சைன் சார்பின் முதன்மை சார்பகம் (principal domain) எனவும், $-1 \le x \le 1$-ல் $y = \sin^{-1} x$ எனும் சார்பின் மதிப்புகள் முதன்மை மதிப்புகள் (principal value) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

$y = \sin^{-1} x$-ன் வரையறையிலிருந்து பின்வருவனவற்றை அறிந்து கொள்ளவும்.

(i) $-1 \le x \le 1$ மற்றும் $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ என்றிருக்கும்போது, $y = \sin^{-1} x$ எனில், எனில் மட்டுமே $x = \sin y$ ஆகும்.

(ii) $|x| \le 1$ எனில் $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ ஆகும். $|x| > 1$ எனும்போது $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ அர்த்தமற்றதாகிறது.

(iii) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ எனில் $\sin^{-1}\left(\sin x\right) = x$ ஆகும். $\sin^{-1}(\sin 2\pi) = 0 \neq 2\pi$ என்பதனைக் கவனத்தில் கொள்க.

(iv) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ எனில், $\sin^{-1}(\sin x) = \pi - x$ ஆகும். $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ எனும்போது $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$ எனக் கிடைக்கும் என்பதனைக் கவனிக்கவும்.

(v) $y = \sin^{-1} x$ என்பது ஒற்றைச் சார்பாகும்.

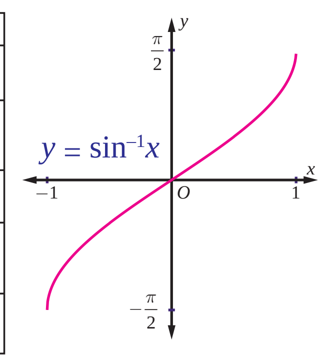
குறிப்புரை

$\sin x = \frac{1}{2}$ மற்றும் $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாட்டைக் காண்போம். $\sin x = \frac{1}{2}$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவேண்டும் எனில் $(-\infty, \infty)$ எனும் இடைவெளியில் $\sin x = \frac{1}{2}$ எனுமாறு உள்ள அனைத்து x மதிப்புகளையும் கண்டறிய வேண்டும். ஆயினும், $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$-ல் உள்ள x மதிப்பைக் கண்டறிய $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ எனும் இடைவெளியில் $\sin x = \frac{1}{2}$ எனுமாறு உள்ள தனித்த மதிப்பைக் கண்டறியவேண்டும்.

4.3.4 நேர்மாறு சைன் சார்பின் வரைபடம் (Graph of the inverse sine function)

$\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, எனும் நேர்மாறு சைன் சார்பு $[-1, 1]$ இடைவெளியில் x எனும் மெய்யெண்ணை உள்ளீடாகக் கொண்டு $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ இடைவெளியில் y எனும் மெய்யெண்ணை வெளியீடாகத் தருகிறது. வழக்கம்போல் $y = \sin^{-1}x$ சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி (x, y) எனும் சில புள்ளிகளைக் கண்டறிந்து அவற்றை xy தளத்தில் குறிப்போம். x -ன் மதிப்பு -1 லிருந்து 1 வரை அதிகரிக்கும்போது y-ன்மதிப்பு $-\frac{\pi}{2}$ -லிருந்து $\frac{\pi}{2}$ வரை அதிகரிக்கின்றது. இப்புள்ளிகளை இழைவான வளைவரையால் இணைக்கும்போது $y = \sin^{-1} x$ ன் வரைபடம் கிடைக்கின்றது. அது படம். 4.6–ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	y
-1	$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
0	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
1	$\frac{\pi}{2}$



படம். 4.6

குறிப்புரை

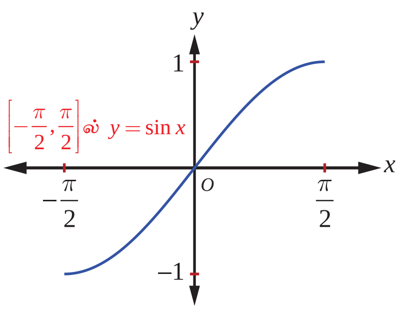
$y = \sin^{-1} x$ ன் வரைபடமானது,

(i) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ இடைவெளியில் $y = \sin x$ ன் வரைபடத்தின் பகுதியை $y = x$ எனும் கோட்டின் ஊடாக பிரதிபலிக்கும் பகுதியாகவோ அல்லது $y = \sin x$ ன் வரைபடத்தில் x மற்றும் y அச்சுகளை இடமாற்றுவதன் மூலமாகவும் பெறலாம்.

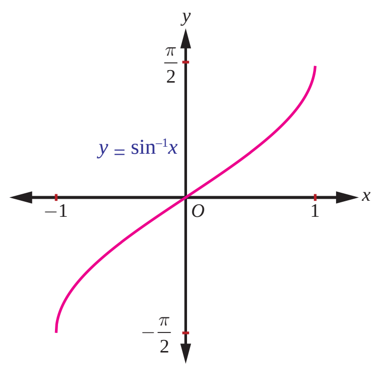
(ii) ஆதி வழியே செல்கிறது

(iii) ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால் $y = \sin^{-1} x$ என்பது ஒற்றைச் சார்பாகிறது.

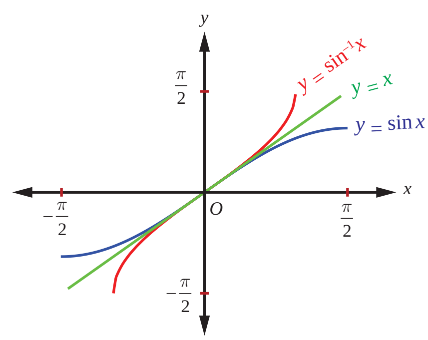
$y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ மற்றும் $y = \sin^{-1} x,\ -1 \le x \le 1$ ஆகியவைகளின் வரைபடங்கள் தனித்தனியாகவும், இரு வரைபடங்களையும் ஒருங்கிணைத்தும் புரிதலுக்காக கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம். 4.7



படம். 4.8



படம். 4.9

$y = \sin^{-1} x$ –ன் வரைபடமானது $y = x$ எனும் கோட்டினைப் பொறுத்து $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ன் வரைபடத்தின் மீதான பிம்பம் என்பதை படம் 4.9 காட்டுகிறது. மேலும் சைன் சார்பும் மற்றும் நேர்மாறு சைன் சார்பும் ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளன என்பதையும் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

ஆரையன் மற்றும் பாகைகளில் $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$–ன் முதன்மை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$ என்க. எனவே, $\sin y = -\frac{1}{2}$ ஆகும்.

$\sin^{-1} x$ -ன் முதன்மை மதிப்புகளின் வீச்சகம் $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ஆகும். எனவே $\sin y = -\frac{1}{2}$ என்றவாறு $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ஐ கண்டறியவேண்டும். ஆகவே $y = -\frac{\pi}{6}$ எனக் கிடைக்கின்றது. எனவே $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$-ன் முதன்மை மதிப்பு $-\frac{\pi}{6}$ ஆகும். அதன் ஒத்த மதிப்பு -30° ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 4.2

$\sin^{-1}(2)$-ன் முதன்மை மதிப்பு இருப்பின், அதனை கண்டறிக.

தீர்வு

$y = \sin^{-1} x$–ன் சார்பகம் $[-1, 1]$ என்பதாலும் $2 \notin [-1, 1]$ என்பதாலும் $\sin^{-1}(2)$-க்கு முதன்மை மதிப்பு இல்லை. ■

எடுத்துக்காட்டு 4.3

முதன்மை மதிப்பைக்காண்க.

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

தீர்வு

$\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என்பது $\sin^{-1} x = y$ என கொடுக்கப்படத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $x = \sin y$ ஆகும். இங்கு $-1 \le x \le 1$ மற்றும் $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. எனவே,

(i) $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ மற்றும் $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ என்பதால் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

(ii) $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என்பதால் $\sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

(iii) $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என்பதால் $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$. ■

எடுத்துக்காட்டு 4.4

$\sin^{-1}\left(2-3x^2\right)$-ன் சார்பகத்தைக் காண்க.

தீர்வு $\sin^{-1}(x)$ -ன் சார்பகம் $[-1, 1]$ஆகும்.

எனவே $-1 \le 2-3x^2 \le 1$. ஆகையால் $-3 \le -3x^2 \le -1$.

$-3 \le -3x^2$, எனும்போது $x^2 \le 1$ (1)

$-3x^2 \le -1$, எனும்போது $x^2 \ge \frac{1}{3}$ (2)

சமன்பாடுகள்(1) மற்றும் (2), ஆகியவற்றிலிருந்து $\frac{1}{3} \le x^2 \le 1$ எனக் கிடைக்கிறது.
எனவே, $\frac{1}{\sqrt{3}} \le |x| \le 1$.

$a \le |x| \le b$ என்பதிலிருந்து $x \in [-b, -a] \cup [a, b]$ என கிடைக்கும் என்பதால்,

எனவே, $x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$. ■

பயிற்சி 4.1

1. x –ன் அனைத்து மதிப்புகளையும் காண்க
(i) $-10\pi \le x \le 10\pi$ மற்றும் $\sin x = 0$ (ii) $-3\pi \le x \le 3\pi$ மற்றும் $\sin x = -1$.
2. பின்வருவனவற்றின் காலம் மற்றும் வீச்சு காண்க.
(i) $y = \sin 7x$ (ii) $y = -\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ (iii) $y = 4\sin(-2x)$.
3. $0 \le x < 6\pi$ எனும்போது $y = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ ன் வரைபடம் வரைக.
4. மதிப்பு காண்க (i) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.
5. x –ன் எந்த மதிப்பிற்கு $\sin x = \sin^{-1} x$ ஆகும்?
6. பின்வருவனவற்றிற்கு சார்பகம் காண்க
(i) $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$ (ii) $g(x) = 2\sin^{-1}(2x-1) - \frac{\pi}{4}$.
7. மதிப்பு காண்க $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}\right)$.

4.4 கொசைன் சார்பு மற்றும் நேர்மாறு கொசைன் சார்பு (The Cosine Function and Inverse Cosine Function)

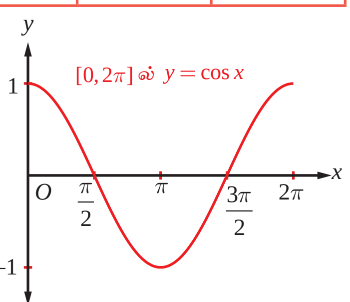
$\mathbb{R}$ -ஐ சார்பகமாகவும் மற்றும் $[-1, 1]$ -ஐ வீச்சகமாகவும் கொண்ட சார்பே கொசைன் சார்பு ஆகும். கொசைன் சார்பை $y = \cos x$ எனவும் மற்றும் நேர்மாறு கொசைன் சார்பினை $y = \cos^{-1} x$ அல்லது $y = \arccos(x)$ எனவும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. அனைத்து மெய்யெண்கள் x-க்கு $\cos(x+2\pi) = \cos x$ என்பது மெய்யாகும். மேலும், $0 < p < 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$–க்கு $\cos(x+p)$ மற்றும் $\cos x$ ஆகியன சமமாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. எனவே $y = \cos x$ -ன் காலம் 2π ஆகும்.

4.4.1 கொசைன் சார்பின் வரைபடம் (Graph of cosine function)

கொசைன் சார்பின் வரைபடமானது $y = \cos x$ -ன் வரைபடமாகும். இங்கு x ஒரு மெய் எண்ணாகும். கொசைன் சார்பின் காலமுறை 2π என்பதால் $\cdots, [-4\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], \cdots$. ஆகிய இடைவெளிகளில் ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் கொசைன் சார்பின் வரைபடம் ஒரே வடிவத்தினை திரும்பவும் பெறுகின்றது. எனவே $x \in [0, 2\pi]$–க்கு உரிய கொசைன் சார்பு வரைபடத்தின் பகுதியைத் தீர்மானித்தாலே போதுமானது. $x \in [0, 2\pi]$ எனில் $y = \cos x$ ன் வரைபடத்தில் உள்ள (x, y) புள்ளிகளில் அறிந்த சில புள்ளிகளை குறிப்பதற்கு கீழ்க்காணும் அட்டவணையை உருவாக்குவோம்.

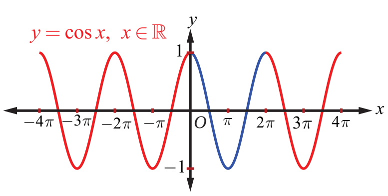
x (ஆரையனில்)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$y = \cos x, 0 \le x \le 2\pi$, ன் வரைபடம் $(0,1)$ புள்ளியிலிருந்து தொடங்குகிறது என்பதை அட்டவணையிலிருந்து அறியலாம். x ன் மதிப்பு 0 முதல் π வரை அதிகரிக்கும்போது, $y = \cos x$ –ன் மதிப்பும் 1 முதல் -1 வரை குறைகின்றது. x ன் மதிப்பு π முதல் 2π வரை அதிகரிக்கும்போது, y –ன் மதிப்பும் -1 முதல் 1 வரை அதிகரிக்கின்றது. அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து அவற்றை இணைக்கும் இழைவான வளைவரையை வரைக. $y = \cos x$ –ன் வரைபடத்தின் ஒரு பகுதியினை படம். 4.10–ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.



படம். 4.10

$[0, 2\pi]$ இடைவெளியின் இருபுறமும் மேலே உள்ள வரைபடப் பகுதியை திரும்ப திரும்ப கொண்டிருக்கும் வகையில் $y = \cos x$ –ன் முழுவரைபடம் அமைந்திருக்கும். படம்.4.11–ல் கொசைன் சார்பின் முழு வரைபடம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கொசைன் சார்பின் வரைபடத்திலிருந்து cosx–ன் மதிப்பு முதல் காற்பகுதியில் $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ மிகையெண்ணாகவும், இரண்டாவது காற்பகுதியில் $\left(\frac{\pi}{2} < x \le \pi\right)$ மற்றும் மூன்றாவது காற்பகுதியில் $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ ஆகியவற்றில் குறையெண்ணாகவும், மீண்டும் நான்காவது காற்பகுதியில் $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ மிகையெண்ணாகவும் உள்ளது என்பதை காண்கிறோம்.



படம். 4.11

குறிப்பு

வரைபடத்திலிருந்து, அனைத்து x மதிப்புகளுக்கும் $\cos(-x) = \cos x$ என அறியலாம். இது $y = \cos x$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு என்பதை உறுதி செய்கிறது.

4.4.2 கொசைன் சார்பின் பண்புகள் (Properties of the cosine function)

$y = \cos x$ ன் வரைபடத்திலிருந்து கொசைன் சார்பின் பின்வரும் பண்புகளைக் காணலாம்.

(i) வளைவரையில் எங்கும் முறிவோ அல்லது தொடர்ச்சியின்மையோ இல்லை. கொசைன் சார்பு தொடர்ச்சியானது.

(ii) y அச்சைப் பொறுத்து வரைபடம் சமச்சீராக இருப்பதால் கொசைன் சார்பு இரட்டைச் சார்பாகும்.

(iii) $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$ ஆகிய மதிப்புகளில் கொசைன் சார்பு மீப்பெரு மதிப்பு 1 ஐ அடைகிறது. $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு கொசைன் சார்பு மீச்சிறு மதிப்பு -1 ஐ அடைகிறது. அதாவது, $-1 \leq \cos x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

குறிப்புரை

(i) $y = \cos x$ ன் வரைபடத்தை $\frac{\pi}{2}$ ஆரையன்கள் அளவிற்கு வலப்புறம் நகர்த்த, $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ -ன் வரைபடமாகப் பெறலாம். இந்த வரைபடம் $y = \sin x$ -ன் வரைபடத்துக்கு ஒப்பாக அமைகிறது. இங்கு $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. என்பதை கவனிக்கவும்.

(ii) $y = A\sin\alpha x$ மற்றும் $y = B\cos\beta x$ ஆகியன முறையே $-|A| \leq A\sin\alpha x \leq |A|$ மற்றும் $-|B| \leq B\cos\beta x \leq |B|$ எனும் ஆகிய அசமன்பாடுகளைத் பூர்த்தி செய்கிறது. $y = \mathrm{A}\sin\alpha x$ –ன் வீச்சு மற்றும் காலம் முறையே $|A|$ மற்றும் $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ ஆகும். $y = B\cos\beta x$ –ன் வீச்சு மற்றும் காலம் முறையே $|B|$ மற்றும் $\frac{2\pi}{|\beta|}$ ஆகும். $y = A\sin\alpha x$ மற்றும் $y = B\cos\beta x$ ஆகியன சைன் வளைகோட்டுச் (Sinusoidal) சார்புகளாகும்.

(iii) $\left[0, \frac{2\pi}{|\alpha|}\right]$ மற்றும் $\left[0, \frac{2\pi}{|\beta|}\right]$ -ன் மீதான முறையே $y = A\sin\alpha x$ மற்றும் $y = B\cos\beta x$ ஆகியவற்றின் பகுதி வரைபடங்களை நீட்டிக்க $y = A\sin\alpha x$ மற்றும் $y = B\cos\beta x$ ஆகியவற்றின் முழு வரைப்படங்கள் பெறப்படுகின்றது.

பயன்பாடுகள்

காலச் சுழற்சியில் நிகழும் நிகழ்வுகளான, பருவ வெப்பநிலை, கடல் அலைகள் போன்ற இயற்கை நிகழ்வுகள் திரும்ப திரும்ப நேர்வதால், சைன் வளைகோட்டைப் பயன்படுத்தி மாதிரிகள் வடிவமைக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, சைன் வளைகோட்டுச் சார்பு $y = d + a\cos(bt - c)$ -ஐ பயன்படுத்தி கடல் அலைகளை மாதிரியாக உருவாக்க கீழ்க்காணும் படிகள் தரப்படுகின்றன.

(i) சைன் வளைகோட்டு வரைபடத்தின் வீச்சு என்பது, வரைபடத்தில் y - ன் மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகளின் வேறுபாட்டின் எண் மதிப்பில் பாதியாகும்.

அதாவது, வீச்சு, $a = \frac{1}{2}$ (மீப்பெரு மதிப்பு – மீச்சிறு மதிப்பு);

மையக்கோடு $y = d$, இங்கு $d = \frac{1}{2}$ (மீப்பெரு மதிப்பு + மீச்சிறு மதிப்பு)

(ii) காலம் $p = 2\times$ (மீப்பெரு மதிப்பிலிருந்து மீச்சிறு மதிப்பிற்கு இடையேயுள்ள கால அளவு) ; $b = \dfrac{2\pi}{p}$

(iii) $c = b\times$ (மீப்பெரு மதிப்பை அடையும் நேரம்).

மாதிரி-1

ஒரு கப்பல்துறையின் எல்லையில் கடல் அலைகளினால் ஆழம் மாறுபடுகின்றது. கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் வெவ்வேறு நேரங்களில் நீரின் ஆழம் (மீட்டரில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

நேரம், t	12 முற்பகல்	2 முற்பகல்	4 முற்பகல்	6 முற்பகல்	8 முற்பகல்	10 முற்பகல்	12 முற்பகல்
ஆழம்	3.5	4.2	3.5	2.1	1.4	2.1	3.5

t நேரத்தில் நீரின் ஆழத்தைக் காண $y = d + a\cos(bt-c)$ எனும் வடிவில் ஒரு சைன் வளைகோட்டுச் சார்பினை கருதுவோம். இங்கு, $a = 1.4$; $d = 2.8$; $p = 12$; $b = \dfrac{\pi}{6}$; $c = \dfrac{\pi}{3}$.

தேவைப்படும் சைன் வளைகோட்டுச் சார்பு $y = 2.8 + 1.4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ என ஆகும்.

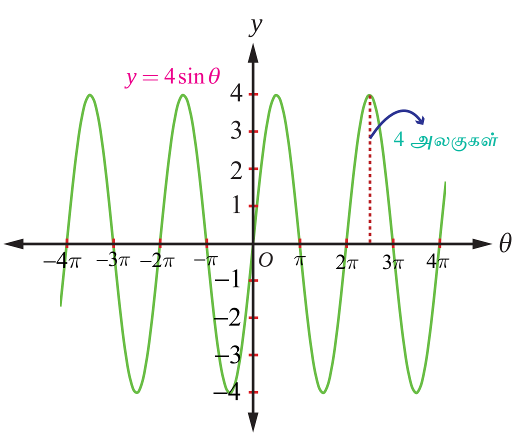
குறிப்பு

சைன் மற்றும் கொசைன் சார்புகளின் உருமாற்றங்கள் எண்ணற்ற பயன்பாடுகளுக்குப் பயன்படுகின்றன. சைன் அல்லது கொசைன் சார்பினைப் பயன்படுத்தி ஒரு வட்ட இயக்க மாதிரி ஒன்றை உருவாக்க முடியும்.

மாதிரி-2

ஆதியை மையமாகவும் ஆரம் 4 மீ உள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் ஒரு புள்ளி நகர்கிறது. சுழலும் கோண சுழற்சியை சார்பாகக் கொண்டு அப்புள்ளியின் y –ஆயக்கூறை காணலாம்.

ஆதியை மையமாகக் கொண்டும் ஆரம் 4 மீ உள்ள ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளியின் y–ஆயக்கூறு, $y = a\sin\theta$ ஆகும், இங்கு θ என்பது சுழலும் கோண சுழற்சி. இங்கு $y(\theta) = 4\sin\theta$ எனும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. (இங்கு θ ஆரையன், வீச்சு 4 மற்றும் காலம் 2π ஆகும்) வீச்சு 4 என்பதால் சைன் சார்பின் y மதிப்புகள் 4 காரணியாக செங்குத்தாக நீளத்தை நீள்கிறது.



படம். 4.12

4.4.3 நேர்மாறு கொசைன் சார்பு மற்றும் அதன் பண்புகள் (The inverse cosine function and its properties)

கொசைன் சார்பு அதன் முழு சார்பகம் $\mathbb{R}$ –ல் ஒன்றுக்கொன்று அல்ல. எனினும் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகம் $[0, \pi]$ மீது கொசைன் சார்பு ஒன்றுக்கொன்று சார்பாகும் மற்றும் அதன் வீச்சகம் $[-1, 1]$ ஆகும். தற்போது $[-1, 1]$–ஐ சார்பகமாகவும் மற்றும் $[0, \pi]$–ஐ வீச்சகமாகவும் கொண்டு நேர்மாறு கொசைன் சார்பை வரையறை செய்யலாம்.

வரையறை 4.4

$-1 \le x \le 1$, –ல் $\cos^{-1} x$ ஆனது $[0, \pi]$–ல் தனித்த y –ஆக $\cos y = x$ எனுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ எனும் நேர்மாறு கொசைன் சார்பு, $\cos^{-1}(x) = y$ என வரையறுக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\cos y = x$ மற்றும் $y \in [0, \pi]$. ஆகும்.

குறிப்பு

(i) $\cos^{-1} x$ -ன் வீச்சகமான $[0,\ \pi]$ எனும் இடைவெளியில் சைன் சார்பு குறையற்ற எண் மதிப்பைப் கொண்டுயிருக்கிறது. இந்த முடிவு, தொகை நுண்கணிதத்தில் சில முக்கோணவியல் பிரதியிடலுக்கு முக்கியமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(ii) நேர்மாறு கொசைன் சார்பைப் பற்றிக் குறிப்பிடும்போதெல்லாம் $\cos x : [0,\ \pi] \to [-1,\ 1]$ மற்றும் $\cos^{-1} x : [-1,\ 1] \to [0,\ \pi]$ என நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

(iii) $\cdots, [-\pi,\ 0], [\pi,\ 2\pi], \cdots,$ ஆகிய இடைவெளிகளில் ஏதேனும் ஒரு இடைவெளியை கொசைன் சார்பின் சார்பகமாக கட்டுப்படுத்தலாம். அவ்வாறாக இடைவெளிகளிலும் கொசைன்சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகவும் மற்றும் $[-1,\ 1]$ என்பது அதன் வீச்சாகவும் இருக்கும்.

கட்டுபடுத்தப்பட்ட இடைவெளி $[0,\ \pi]$ஆனது கொசைன் சார்பின் முதன்மை சார்பகம் எனவும், $-1 \le x \le 1$-ல் சார்பு $y = \cos^{-1} x$ எனும் சார்பின் மதிப்புகள் முதன்மை மதிப்புகள் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

$y = \cos^{-1} x$ எனும் வரையறையிலிருந்து பின்வரும் கருத்துக்களைக் கவனிக்கவும்.

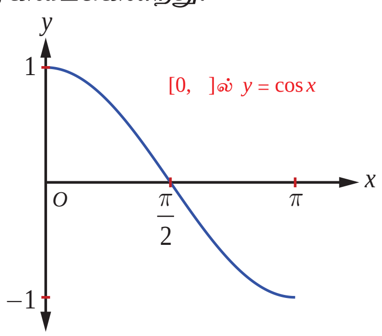
(i) $-1 \le x \le 1$ மற்றும் $0 \le y \le \pi$ என்றிருக்கும்போது $y = \cos^{-1} x$ எனில், எனில் மட்டுமே $x = \cos y$ ஆகும்.

(ii) $|x| \le 1$ எனில் $\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$ ஆகும். $|x| > 1$ எனும்போது $\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$ என்பது அர்த்தமற்றதாகிறது.

(iii) $\cos^{-1} x$ –ன் வீச்சகமான $0 \le x \le \pi$ ல் $\cos^{-1}(\cos x) = x$ என ஆகும். $\cos^{-1}(\cos 3\pi) = \pi$. என்பதனை கவனிக்கவும்.

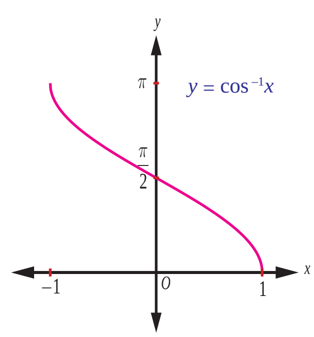
4.4.4 நேர்மாறு கொசைன் சார்பின் வரைபடம் (Graph of the inverse cosine function)

$\cos^{-1} : [-1,\ 1] \to [0,\ \pi]$ எனும் நேர்மாறு கொசைன் சார்பு $[-1,\ 1]$ இடைவெளியில் x எனும் மெய்யெண்ணை உள்ளீடாகக் கொண்டு $[0,\ \pi]$ இடைவெளியில் y (ஆரையன்களில்) எனும் மெய்யெண்ணை வெளியீடாக தருகிறது. $y = \cos^{-1} x$ சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $(x,\ y)$ எனும் சில புள்ளிகளைக் கண்டறிந்து xy தளத்தில் குறிப்போம். x–ன் மதிப்பு -1 லிருந்து 1 வரை அதிகரிக்கும்போது y–ன்மதிப்பு π லிருந்து 0 வரை குறைகின்றது. நேர்மாறு கொசைன் சார்பு அதன் சார்பகத்தில் குறையும் சார்பாகவும் மற்றும் தொடர்ச்சியானதாகவும் இருக்கிறது. இப்புள்ளிகளை இழைவான வளைவரையால் இணைக்கும்போது படம் 4.14–ல் காண்பதைப் போன்று $y = \cos^{-1} x$ எனும் வரைபடம் நமக்கு கிடைக்கின்றது.



படம். 4.13

x	y
-1	π
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
1	0



படம். 4.14

குறிப்பு

(i) $y = \cos^{-1} x$ ன் வரைபடமானது, $y = \cos x$ ன் வரைபடத்தின் x மற்றும் y அச்சுகளை இடமாற்றுவதன் மூலமாகவும் பெறலாம்.

(ii) $y = \cos^{-1} x$ எனும் சார்பின் x -வெட்டுத்துண்டு 1 மற்றும் y -வெட்டுத்துண்டு $\frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

(iii) ஆதியைப் பொறுத்தோ அல்லது y –அச்சைப் பொறுத்தோ $y = \cos^{-1} x$ –ன் வரைபடம் சமச்சீர் அல்ல. எனவே சார்பு $y = \cos^{-1} x$ இரட்டைச் சார்போ அல்லது ஒற்றைச் சார்போ அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 4.5

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ -ன் முதன்மை மதிப்பைக் காண்க .

தீர்வு

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$ என்க. எனவே, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகும்.

$y = \cos^{-1} x$ -ன் முதன்மை மதிப்பு வீச்சகம் $[0, \pi]$ என நாம் அறிவோம். எனவே, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ எனும்படி y மதிப்பு $[0, \pi]$-ல் காண வேண்டும். ஆனால், $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ மற்றும் $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ என்பதால் $y = \frac{\pi}{6}$ ஆகும். எனவே, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6 மதிப்பு காண்க

(i) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (iii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

தீர்வு

$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ எனும் நேர்மாறு கொசைன் சார்பு வரையறையின்படி, $\cos^{-1} x = y$ எனில், எனில் மட்டுமே $\cos y = x$. இங்கு $-1 \le x \le 1$ மற்றும் $0 \le y \le \pi$ ஆகையால்,

(i) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$, ஏனெனில் $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$ மற்றும் $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$, ஏனெனில் $-\frac{\pi}{3} \notin [0, \pi]$, ஆனால் $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

(iii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$, ஏனெனில் $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ மற்றும் $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

$\cos^{-1}\left(\frac{2 + \sin x}{3}\right)$ -ன் சார்பகம் காண்க.

தீர்வு

$y = \cos^{-1} x$ -ன் சார்பகம் $-1 \le x \le 1$ அதாவது $|x| \le 1$ ஆகும்.

எனவே, $-1 \le \frac{2 + \sin x}{3} \le 1$ என்பதை $-3 \le 2 + \sin x \le 3$ எனலாம்.

எனவே, $-5 \le \sin x \le 1$ என்பதை சுருக்கி, $-1 \le \sin x \le 1$ எனப் பெறலாம்,

இதிலிருந்து $-\sin^{-1}(1) \le x \le \sin^{-1}(1)$ அல்லது $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ எனப் பெறலாம்.

ஆகையால் $\cos^{-1}\left(\frac{2 + \sin x}{3}\right)$ -ன் சார்பகம் $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ஆகும்.

பயிற்சி 4.2

1. அனைத்து x -ன் மதிப்புகளையும் காண்க
   $(i) -6\pi \le x \le 6\pi$ மற்றும் $\cos x = 0$ (ii) $-5\pi \le x \le 5\pi$ மற்றும் $\cos x = 1$.
2. $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \neq -\frac{\pi}{6}$ என இருப்பதற்கான காரணத்தைக் கூறுக.
3. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$ என்பது மெய்யாகுமா? விடைக்கு தக்க காரணம் கூறுக.
4. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$-ன் முதன்மை மதிப்புக் காண்க.
5. மதிப்பு காண்க
   (i) $2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}(-1)$
   (iii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{17} - \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{17}\right)$.
6. சார்பகம் காண்க (i) $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{|x|-2}{3}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1-|x|}{4}\right)$ (ii) $g(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$
7. x -ன் எந்த மதிப்பிற்கு, சமனிலை $\frac{\pi}{2} < \cos^{-1}(3x-1) < \pi$ மெய்யாகும்?
8. மதிப்பு காண்க
   (i) $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) + \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

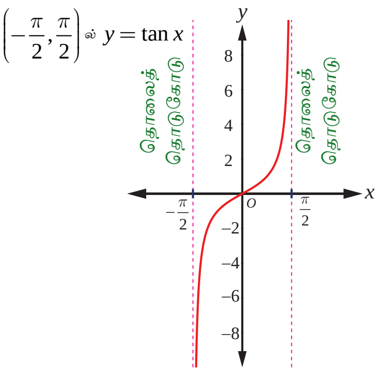
4.5 தொடுகோட்டுச் சார்பு மற்றும் நேர்மாறு தொடுகோட்டுச் சார்பு (The Tangent Function and the Inverse Tangent Function)

கட்டிடம், மலை அல்லது கொடிகம்பம் போன்றவற்றின் உயரம் அல்லது தூரத்தை கண்டறிவதற்கு $y = \tan x$ எனும் தொடுகோட்டுச் சார்பை பயன்படுத்துகிறோம். $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ -ன் சார்பகத்தில் பகுதியை பூஜ்ஜியமாக்கும் x-ன் மதிப்புகள் நீக்கப்படுகிறது. எனவே $x = \cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots$. ஆகிய மதிப்புகளுக்கு தொடுகோட்டுச் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை . ஆகையால் $y = \tan x$ -ன் சார்பகமானது $\left\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2k+3}{2}\pi\right)$ ஆகும். அதன் வீச்சகம் $(-\infty, \infty)$ ஆகும். $y = \tan x$ எனும் தொடுகோட்டுச் சார்பின் காலம் π ஆகும்.

4.5.1 தொடுகோட்டுச் சார்பின் வரைபடம் (The graph of tangent function)

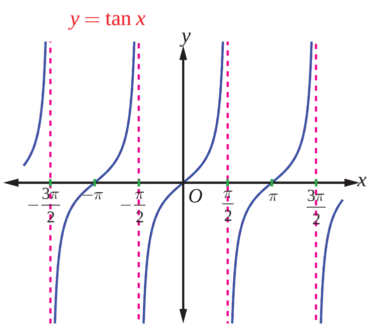
மீள்நிகழ் காலமுறையுள்ள இடைவெளிகளில் சார்பின் மதிப்பை காண்பதற்கு தொடுகோட்டுச் சார்பு பயனுள்ளதாக இருக்கும். தொடுகோட்டுச் சார்பு ஒற்றைச் சார்பாகும். ஆகையால் $y = \tan x$ -ன் வளைவரை ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீராக இருக்கும். தொடுகோட்டுச் சார்பின் காலம் π என்பதால் π நீளமுள்ள ஏதேனும் ஒரு இடைவெளியில் $y = \tan x$ ன் வரைபடத்தை வரையலாம். $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ எனும் இடைவெளியைக் கருதுக. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ எனும்படி $y = \tan x$ ன் வளைவரை வரைய கீழ்க்காணும் அட்டவணையை அமைப்போம்.

x (ஆரையனில்)	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



படம். 4.15

இப்போது அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறித்து, அவைகளை இழைவான வளைவரையில் இணைத்து $y = \tan x$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, ன் வரைபடத்தை வரையலாம். $\dfrac{\pi}{2}$ மதிப்பை x நெருங்கும்போது அதே சமயம் $\dfrac{\pi}{2}$ -ஐ விட குறைவான மதிப்பைப் பெறும்போது $\sin x$ மதிப்பு 1 -ஐ நெருங்கும் மற்றும் $\cos x$ மிகை எண் மதிப்பாகவும் 0-ஐ நெருங்கியும் இருக்கும். ஆதலால் $x, \dfrac{\pi}{2}$ -ஐ நெருங்கும்போது $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ எனும் விகிதம் மிகையெண் மதிப்பாகவும் மற்றும் அதன் மதிப்பு அதிகரித்தும் ∞ -ஐ நெருங்குகிறது. எனவே $x, \dfrac{\pi}{2}$ எனும் நேர்க்கோடு வரைபடத்திற்கு செங்குத்து தொலைத் தொடுகோடாக இருக்கும். அதேபோல் $x, -\dfrac{\pi}{2}$ -ஐ நெருங்கும்போது $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ எனும் விகிதம் குறையெண் மதிப்பாகவும் மற்றும் எண்ணளவு அதிகரித்தும் $-\infty$ -ஐ நெருங்கும். எனவே $x = -\dfrac{\pi}{2}$ எனும் நேர்க்கோடும் வரைபடத்திற்கு செங்குத்து தொலைத் தொடுகோடாக இருக்கும். எனவே, படம் 4.15 ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போல், $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ -க்கு, $y = \tan x$ இன் வரைபடத்தின் ஒரு கிளை கிடைக்கும். $y = \tan x$ -ன் முதன்மை சார்பகம் $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ஆகும்.



படம் 4.16

$x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ மதிப்புகளைத் தவிர ஏனைய மெய்யெண்கள்களுக்கு தொடுகோட்டுச்சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது மற்றும் அதிகரிக்கும் சார்பாக இருக்கிறது. $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ -ல் செங்குத்து தொலைத் தொடுகோடுகள் உள்ளது. $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ -ஐப் பொறுத்து $y = \tan x$ ன் கிளைகள் சமச்சீராக உள்ளது. $y = \tan x$ ன் முழு வரைபடம் படம் 4.16-இல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு

வரைபடத்திலிருந்து $y = \tan x$ எனும் வளைவரையானது, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ -ல் மற்றும் $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ -ல் மிகையெண் மதிப்பாக இருக்கிறது; $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ -ல் மற்றும் $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ -ல் குறையெண் மதிப்பாகவும் இருக்கிறது.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 158 07-12-2021 13:55:08

4.5.2 தொடுகோட்டுச் சார்பின் பண்புகள் (Properties of the tangent function)

$y = \tan x$ ன் வளைவரையிலிருந்து கீழ்க்காணும் தொடுகோட்டுச்சார்பின் பண்புகளை அறியலாம்.

(i) தொடுகோட்டுச்சார்பின் வளைவரை தொடர்ச்சியற்றது.

மேலும் $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ எனும் புள்ளிகளில் $y = \tan x$ தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ளது.

(ii) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ -க்கு $y = \tan x$ எனும் வளைவரையின் ஒரு பகுதி ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது.

(iii) $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ ஆகிய இடங்களில், எண்ணற்ற தொலைத் தொடுகோடுகள் உள்ளது.

(iv) தொடுகோட்டுச் சார்பிற்கு மீப்பெருமமோ அல்லது மீச்சிறுமமோ இல்லை.

குறிப்புரை

(i) $y = a\tan bx$ -ன் வளைவரை $-\frac{\pi}{2|b|} < x < \frac{\pi}{2|b|}$ எனும் இடைவெளியில் ஒரு முழுமையான சுழற்சியில் பெற்றுள்ளது மற்றும் அதன் காலம் $\frac{\pi}{|b|}$ ஆகும்.

(ii) $y = a\tan bx$ -க்கு தொலைத் தொடுகோடுகள் $x = \frac{\pi}{2|b|} + \frac{\pi}{|b|}k,\ k \in \mathbb{Z}$ ஆகும்.

(iii) தொடுகோட்டுச் சார்பிற்கு மீப்பெருமமோ அல்லது மீச்சிறுமமோ இல்லை என்பதால் $\tan x$ க்கான வீச்சு வரையறுக்க முடியாது.

4.5.3 நேர்மாறு தொடுகோட்டுச் சார்பு மற்றும் அதன் பண்புகள் (The inverse tangent function and its properties)

தொடுகோட்டுச் சார்பனது அதன் முழுசார்பகம் $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ - ல் ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு அல்ல ஆயினும், $\tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ என்பது இருபுறச் சார்பு. $\mathbb{R}$ -ஐ சார்பகமாகவும் மற்றும் $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ வீச்சகமாகவும் கொண்டு நேர்மாறு தொடுகோட்டுச் சார்பை வரையறை செய்வோம்.

வரையறை 4.5

எவ்வொரு மெய்யெண் x -க்கும், $\tan y = x$ என்றவாறு $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ -ல் உள்ள தனித்த எண் y ஐ $\tan^{-1} x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது, நேர்மாறு தொடுகோட்டுச் சார்பு $\tan^{-1} : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ஐ $\tan^{-1}(x) = y$ என வறையறுக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\tan y = x$ மற்றும் $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ஆகும்.

$y = \tan^{-1} x$ வரையறையிலிருந்து பின்வருவனவற்றை அறியலாம்.

(i) $y = \tan^{-1} x$ என்பதற்கு தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை அனைத்து $x \in \mathbb{R}$ மற்றும் $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ற்கு $x = \tan y$ ஆகும்.

(ii) ஒவ்வொரு மெய்யெண் x-க்கும் $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$ ஆகும். மேலும் $y = \tan^{-1} x$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

(iii) $\tan^{-1}\left(\tan x\right) = x$ என இருக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

இங்கு $\tan^{-1}\left(\tan \pi\right) = 0$ ஆகுமே தவிர π ஆகாது என்பதனைக் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு

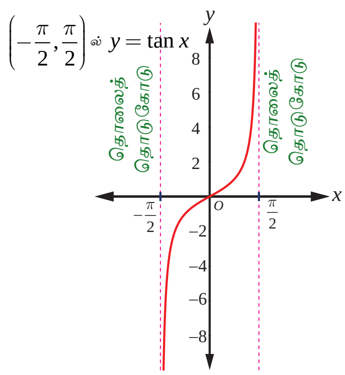
(i) நேர்மாறு தொடுகோட்டுச் சார்பு பற்றிக் குறிப்பிடும்போதெல்லாம், $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ மற்றும் $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.

(ii) கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகமான $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ என்பது தொடுகோட்டுச் சார்பின் முதன்மை சார்பகமாகும். $y = \tan^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$, எனும் மதிப்புகள் $y = \tan^{-1} x$ வின் முதன்மை மதிப்புகளாகும்.

4.5.4 நேர்மாறு தொடுகோட்டுச் சார்பின் வரைபடம் (Graph of the inverse tangent function)

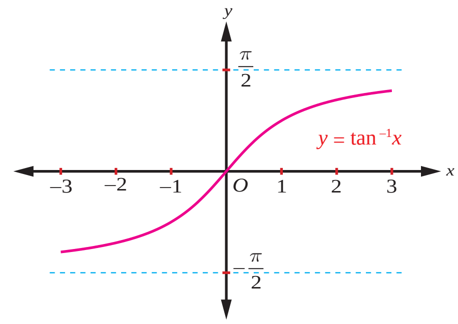
$y = \tan^{-1} x$ ன் சார்பு மெய்யெண் கோட்டின் முழுவதுமான $(-\infty, \infty)$-ஐ சார்பகமாகவும் மற்றும் $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-ஐ வீச்சகமாகவும் கொண்டுள்ளது. இங்கு $-\frac{\pi}{2}$ மற்றும் $\frac{\pi}{2}$ ஆகிய இடங்களில் தொடுகோட்டுச் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எனவே $y = \tan^{-1} x$ வரைபடமானது $y = -\frac{\pi}{2}$ மற்றும் $y = \frac{\pi}{2}$ ஆகிய இரு கோடுகளுக்கிடையே மட்டும்தான் அமையப்பெற்றிருக்கும் மற்றும் அவ்விரு கோடுகளையும் எவ்விடத்திலும் தொடுவதில்லை. மாறாக, $y = -\frac{\pi}{2}$ மற்றும் $y = \frac{\pi}{2}$ ஆகிய இவ்விரு கோடுகளும் $y = \tan^{-1} x$-க்கு கிடைமட்ட தொலைத் தொடுகோடுகளாக இருக்கின்றன.

படம் 4.17 மற்றும் படம் 4.18 ஆகிய இரு படங்களும் முறையே $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ எனும் சார்பகத்தைக் கொண்ட $y = \tan x$ ன் வரைபடத்தையும் மற்றும் $(-\infty, \infty)$ எனும் சார்பகத்தைக் கொண்ட $y = \tan^{-1} x$ ன் வரைபடத்தையும் சித்தரிக்கிறது.



படம். 4.17

x	y
-1	$-\frac{\pi}{4}$
0	0
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$



படம். 4.18

குறிப்பு

(i) நேர்மாறு தொடுகோட்டுச் சார்பு திடமாக ஏறும் சார்பு மற்றும் $(-\infty, \infty)$ எனும் சார்பகத்தில் தொடர்ச்சியானது.

(ii) $y = \tan^{-1} x$ –ன் வரைபடம் ஆதி வழியாகச் செல்கிறது.

(iii) ஆதியைப் பொறுத்து வளைவரை சமச்சீராக இருப்பதால் சார்பு $y = \tan^{-1} x$ ஆனது ஒரு ஒற்றைச் சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.8

முதன்மை மதிப்பு காண்க: $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$.

தீர்வு

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = y$ என்க. எனவே, $\tan y = \sqrt{3}$. ஆகையால், $y = \frac{\pi}{3}$. ஏனெனில் $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

எனவே, $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{3}$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 4.9

மதிப்பு காண்க (i) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$ (iii) $\tan\left(\tan^{-1}(2019)\right)$

தீர்வு

(i) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$, ஏனெனில் $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$.

$\tan\theta = \tan\frac{3\pi}{5}$ எனுமாறு $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ஐ நாம் கண்டறிய வேண்டும்.

தொடுகோட்டுச் சார்பின் காலம் π என்பதால், $\tan\frac{3\pi}{5} = \tan\left(\frac{3\pi}{5} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$.

எனவே, $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}$, ஏனெனில் $-\frac{2\pi}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

(iii) $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x, x \in \mathbb{R}$ என்பதால், $\tan\left(\tan^{-1}(2019)\right) = 2019$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 4.10

மதிப்பு காண்க $\tan^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

தீர்வு

$\tan^{-1}(-1)=y$ என்க. எனவே, $\tan y=-1=-\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

இங்கு $-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ என்பது குறிப்பிடதக்கது. எனவே, $\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

இனி, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=y$ எனில் $\cos y=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$.

$\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$ என்பதால் $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

மேலும், $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=y$ எனில் $\sin y=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

$-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ என்பதால் $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

எனவே, $\tan^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{12}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.11

நிரூபி $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$.

தீர்வு

$x=0$ எனில், இருபுறமும் 0 ஆகும். ... (1)

$0<x<1$. என்க.

$\theta=\sin^{-1}x$ என்க. எனவே $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. ஆகும். தற்போது $\sin\theta=\frac{x}{1}$ என்பதால், $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

எனவே, $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ... (2)

அடுத்தாக $-1<x<0$. என்க. எனவே, $\theta=\sin^{-1}x$ என்பதிலிருந்து $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$.

$\sin\theta=\frac{x}{1}$ என்பதால், $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

இம்முறையிலும் $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ என கிடைக்கின்றது. ... (3)

சமன்பாடுகள் (1), (2) மற்றும் (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$. என நிறுவப்படுகின்றது.

பயிற்சி 4.3

1. கீழ்க்காணும் சார்புகளின் சார்பகம் காண்க.

   (i) $\tan^{-1}\left(\sqrt{9-x^2}\right)$ (ii) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(1-x^2\right)-\frac{\pi}{4}$.

2. மதிப்பு காண்க (i) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{5\pi}{4}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

3. மதிப்பு காண்க

(i) $\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ (ii) $\tan\left(\tan^{-1}(1947)\right)$ (iii) $\tan\left(\tan^{-1}(-0.2021)\right)$.

4. மதிப்பு காண்க (i) $\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ (ii) $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$.

(iii) $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

4.6 கொசீகண்ட் சார்பு மற்றும் நேர்மாறு கொசீகண்ட் சார்பு

(The Cosecant Function and the Inverse Cosecant Function)

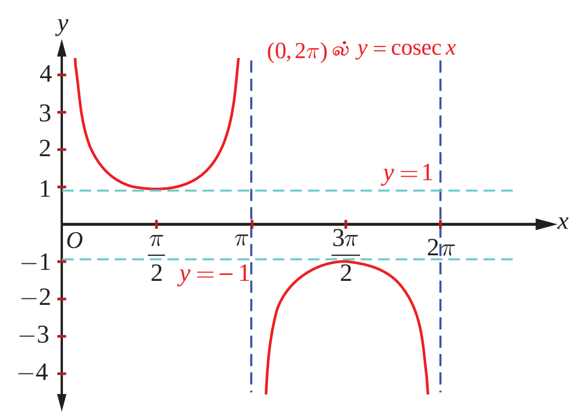
சைன் சார்பினைப் போன்றே, கொசீகண்ட் சார்பும் ஓர் ஒற்றைச் சார்பாகும் மற்றும் அதன் காலம் 2π ஆகும். கொசீகண்ட் சார்பு $y=\operatorname{cosec} x$ -ன் மதிப்புகள் 2π அளவுக்குப் பிறகு திரும்பவும் அதே மதிப்புகளைப் பெறுகிறது. $\sin x = 0$ எனும்போது, $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ ஐ வரையறுக்க இயலாது. ஆதலால் கொசீகண்ட் சார்பின் சார்பகம் $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ ஆகும். $-1\le \sin x\le 1$ என்பதால் $y=\operatorname{cosec} x$ ஆனது -1 மற்றும் 1-க்கும் இடையே எம்மதிப்பையும் பெறுவதில்லை. எனவே, கொசீகண்ட் சார்பின் வீச்சகம் $(-\infty,1]\cup[1,\infty)$ ஆகும்.

4.6.1 கொசீகண்ட் சார்பின் வரைபடம்

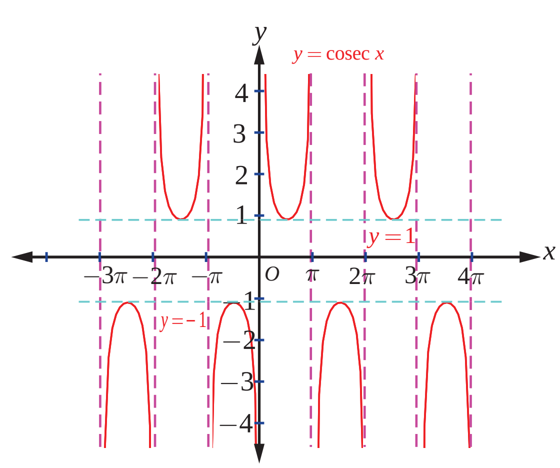
(Graph of the cosecant function)

$(0, 2\pi)$ இடைவெளியில், கொசீகண்ட் சார்பானது $x=\pi$ எனும் புள்ளியைத் தவிர்த்து ஏனைய புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியாக இருக்கும். இதற்கு மீப்பெருமமோ அல்லது மீச்சிறுமமோ இல்லை. பொதுவாக, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ மதிப்புகளுக்கு $y=\operatorname{cosec} x$ -ன் மதிப்பு, ∞ முதல் 1 வரை குறையும். $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ மதிப்புகளுக்கு, $y=\operatorname{cosec} x$ -ன் மதிப்புகள் 1 முதல் ∞ வரை அதிகரிக்கும். $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ மதிப்புகளுக்கு, $y=\operatorname{cosec} x$ -ன் மதிப்புகள் $-\infty$ முதல் -1 வரை அதிகரிக்கும். $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ மதிப்புகளுக்கு, $y=\operatorname{cosec} x$ -ன் மதிப்புகள் -1 முதல் $-\infty$ வரை குறையும். $y=\operatorname{cosec} x$, $x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ -ன் வரைபடத்தினை படம் 4.19 -ல் காண்க.

$$\cdots,(-4\pi,-2\pi)\setminus\{-3\pi\},(-2\pi,0)\setminus\{-\pi\},$$
$$(2\pi,4\pi)\setminus\{3\pi\},(4\pi,6\pi)\setminus\{5\pi\},\cdots.$$



படம். 4.19



படம். 4.20

ஆகிய இடைவெளிகளில் $(0,2\pi)$ல் $y=\operatorname{cosec} x$ ன் வரைபடத்தின் இப்பகுதியே திரும்ப அமைகின்றது.

$y=\operatorname{cosec} x$ –ன் முழு வரைபடம் ஆனது படம் 4.20–ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

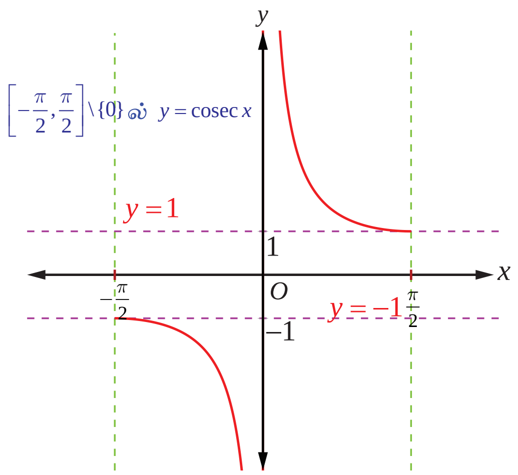
4.6.2 நேர்மாறு கொசீகண்ட் சார்பு (The inverse cosecant function)

$\operatorname{cosec}:\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\to(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ எனும் கொசீகண்ட் சார்பானது $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ எனும் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகத்தில் இருபுறச்சார்பாக உள்ளது. எனவே, $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ -ஐ சார்பகமாகவும் மற்றும் $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ வீச்சகமாகவும் கொண்டு நேர்மாறு கொசீகண்ட் சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது.

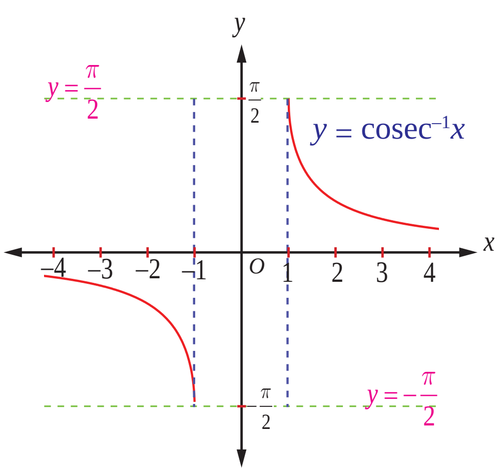
வரையறை 4.6

$\operatorname{cosec}^{-1}:(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ எனும் நேர்மாறு கொசீகண்ட் சார்பை, $\operatorname{cosec}^{-1}(x)=y$ என வரையறுக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\operatorname{cosec} y=x$ மற்றும் $y\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ஆகும்.

4.6.3 நேர்மாறு கொசீகண்ட் சார்பின் வரைபடம் (Graph of the inverse cosecant function)



படம். 4.21



படம். 4.22

$y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ எனும் நேர்மாறு கொசீகண்ட் சார்பின் சார்பகம் $\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$ மற்றும் வீச்சகம் $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$. ஆகும். அதாவது, $\operatorname{cosec}^{-1}:(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ஆகும்.

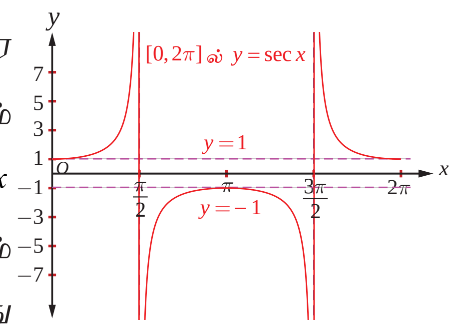
படம் 4.21 மற்றும் படம் 4.22 –ல் முதன்மை சார்பகத்தில் கொசீகண்ட் சார்பின் வரைபடம் மற்றும் நேர்மாறு கொசீகண்ட் சார்பின் சார்பகத்தில் அதன் வரைபடம் ஆகியவை முறையே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

4.7 சீகண்ட் சார்பு மற்றும் நேர்மாறு சீகண்ட் சார்பு (The Secant Function and Inverse Secant Function)

சீகண்ட் சார்பு என்பது கொசைன் சார்பின் தலைகீழ்ச்சார்பு என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ என்பது $\cos x = 0$ எனும்போது தவிர ஏனைய x மதிப்புகளுக்கு வரையறுக்கப்படுகிறது. ஆகையால், $y = \sec x$ -ன் சார்பகம் $\mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ ஆகும். $-1 \le \cos x \le 1$ என்பதால், $y = \sec x$ என்பது $(-1,\ 1)$-ல் எம்மதிப்புகளையும் பெறாது. எனவே, சீகண்ட் சார்பின் வீச்சகம் $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ ஆகும். சீகண்ட் சார்பிற்கு மீப்பெருமமோ அன்றி மீச்சிறுமமோ இல்லை. $y = \sec x$ என்பது 2π கொண்ட காலம் சார்பு மற்றும் இரட்டைச் சார்பாகவும் அமைகிறது.

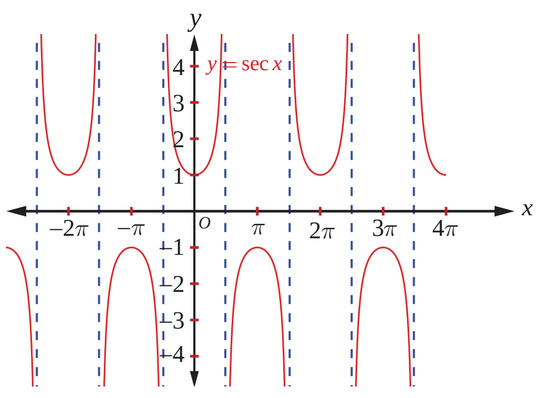
4.7.1 சீகண்ட் சார்பின் வளைவரை (The graph of the secant function)

$0 \le x \le 2\pi$, $x \ne \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$-ல் சீகண்ட் சார்பின் வளைவரை படம் 4.23-ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது. முதல் மற்றும் நான்காம் காற்பகுதிகளில் அதாவது $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ இடைவெளியில், $y = \sec x$ மிகையெண் மதிப்புகளை மட்டுமே பெறுகிறது. அதே சமயம் இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது காற்பகுதிகளில் அதாவது $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ இடைவெளியில் குறையெண் மதிப்புகளையே பெறுகிறது.



படம். 4.23

$0 \le x \le 2\pi$, $x \ne \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$, எனும்போது சீகண்ட் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருக்கும். $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ எனும்போது சீகண்ட் சார்பின் மதிப்பு 1 முதல் ∞ வரை உயரும். மேலும், $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ எனும்போது சீகண்ட் சார்பின் மதிப்பு $-\infty$ முதல் -1 வரை உயரும். $x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ எனும்போது -1 முதல் $-\infty$ வரை இறங்கும். $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ எனும்போது ∞ முதல் 1 வரை இறங்கும். $y = \sec x$ ஒரு 2π-காலம் கொண்ட சார்பாகும், எனவே $0 \le x \le 2\pi$, $x \ne \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$-க்கான வளைவரைப் பகுதியே, $[2\pi, 4\pi] \setminus \left\{\dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}\right\}$, $[4\pi, 6\pi] \setminus \left\{\dfrac{9\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{2}\right\}, \cdots$ மற்றும், $\cdots$ $[-4\pi, -2\pi] \setminus \left\{-\dfrac{7\pi}{2}, -\dfrac{5\pi}{2}\right\}$ $[-2\pi, 0] \setminus \left\{-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right\}$ ஆகிய இடைவெளிகளில் திரும்ப, திரும்ப அமைகின்றது. தற்போது $y = \sec x$-ன் முழு வரைபடமும் படம் 4.24-ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.



படம். 4.24

4.7.2 நேர்மாறு சீகண்ட் சார்பு (Inverse secant function)

$\sec x : [0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}\setminus(-1,1)$ எனும் சீகண்ட் சார்பு கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகமான $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$-ல் ஓர் இருபுறச் சார்பு ஆகும். எனவே நேர்மாறு சீகண்ட் சார்பு என்பது $\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ என்பதை சார்பகமாகவும் மற்றும் $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ வீச்சகமாகவும் கொண்டு வரையறுக்கப்படுகிறது.

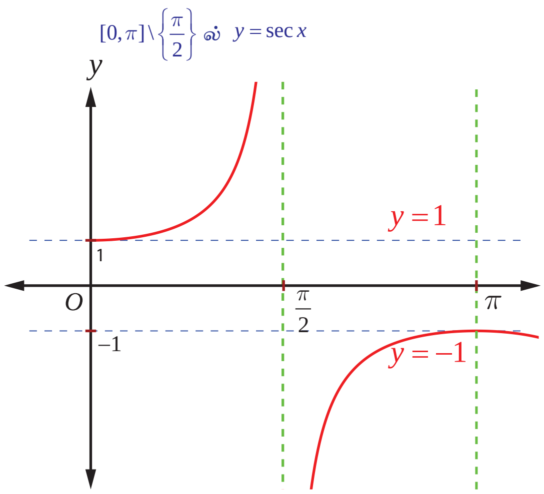
வரையறை 4.7

$\sec y = x$ மற்றும் $y \in [0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ எனும்போது நேர்மாறு சீகண்ட் சார்பு $\sec^{-1} : \mathbb{R}\setminus(-1,1) \to [0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ஐ $\sec^{-1}(x) = y$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

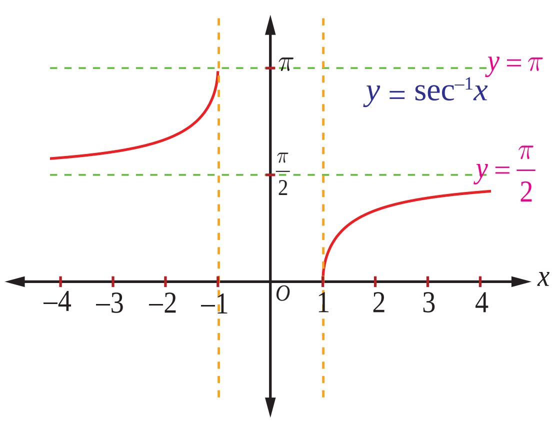
4.7.3 நேர்மாறு சீகண்ட் சார்பின் வரைபடம் (Graph of the inverse secant function)

நேர்மாறு சீகண்ட் சார்பு, $y = \sec^{-1} x$ என்பது $\mathbb{R}\setminus(-1,1)$-ஐ சார்பகமாகவும் மற்றும் $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$-ஐ வீச்சாகவும் கொண்ட சார்பாகும். அதாவது , $\sec^{-1} : \mathbb{R}\setminus(-1,1) \to [0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

படம் 4.25 மற்றும் படம் 4.26 ஆகியவற்றில், முறையே முதன்மை சார்பகத்தில் சீகண்ட் சார்பின் வரைபடமும் மற்றும் நேர்மாறு சீகண்ட் சார்பின் வரைபடம் அதற்குறிய சார்பகத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.



படம். 4.25



படம். 4.26

குறிப்புரை

$y = \sec x$ அல்லது $\operatorname{cosec} x$ எனும் வரைபடத்தை எளிதாக வரைய கீழ்க்காணும் வழிமுறையைப் பின்பற்றவும்.

(i) $y = \cos x$ அல்லது $\sin x$ வரைபடத்தை வரையவும்.

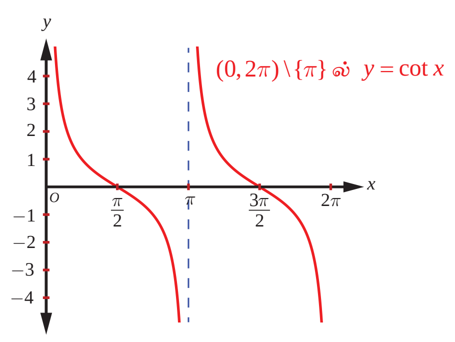
(ii) x வெட்டுத்துண்டுகள் சந்திக்கும் புள்ளிகளில் செங்குத்து தொலைத் தொடுகோடுகளை வரையவும். y மதிப்புகளின் தலைகீழியாக எடுத்துக் கொள்ளவும்.

4.8 கோடான்ஜெண்ட் சார்பு மற்றும் நேர்மாறு கோடான்ஜெண்ட் சார்பு (The Cotangent Function and the Inverse Cotangent Function)

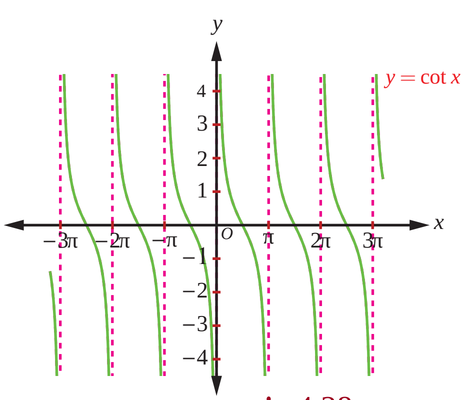
கோடான்ஜெண்ட் சார்பு என்பது $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ ஆகும். $\tan x = 0$ அல்லது $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ எனும் மதிப்புகளைத் தவிர x-ன் ஏனைய மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு கோடான்ஜெண்ட் சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது. எனவே, கோடான்ஜெண்ட் சார்பின் சார்பகமானது $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ மற்றும் அதன் வீச்சகம் $(-\infty, \infty)$ ஆகும். $\tan x$ போன்று கோடான்ஜெண்ட் சார்பும் ஓர் ஒற்றைச் சார்பாகவும் மற்றும் அதன் காலம் π ஆகவும் உள்ளது.

4.8.1 கோடான்ஜெண்ட் சார்பின் வரைபடம் (The graph of the cotangent function)

கோடான்ஜெண்ட் சார்பு $(0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ எனும் கணத்தில் தொடர்ச்சியாக இருக்கிறது. $(0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$.-ல் முதலில் கோடான்ஜெண்ட் சார்பின் வரைபடத்தை வரைவோம். முதல் மற்றும் மூன்றாம் காற்பகுதியில் கோடான்ஜெண்ட் மிகையெண் மதிப்புகளை மட்டுமே பெறுகிறது. இரண்டாவது மற்றும் நான்காவது காற்பகுதிகளில் குறையெண் மதிப்புகளை மட்டுமே பெறுகிறது. கோடான்ஜெண்ட் சார்பிற்கு மீப்பெருமமோ அல்லது மீச்சிறுமமோ இல்லை. $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ எனும்போது கோடான்ஜெண்ட் சார்பு, ∞ -லிருந்து 0 -க்கு இறங்குகிறது; $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ எனும்போது 0 -லிருந்து $-\infty$-க்கு இறங்குகிறது; $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ எனும்போது $-\infty$-லிருந்து 0 வரை இறங்குகிறது; $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. எனும்போது, 0-லிருந்து $-\infty$ வரை இறங்குகிறது.



படம். 4.27



படம். 4.28

$y = \cot x$, $x \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ -க்கான வரைபடம் படம் 4.27-ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

$(0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ -ல் அமைந்த $y = \cot x$ ன் வரைபடம் போல $(2\pi, 4\pi) \setminus \{3\pi\}, (4\pi, 6\pi) \setminus \{5\pi\}, \cdots,$ மற்றும் $\cdots, (-4\pi, -2\pi) \setminus \{-3\pi\}, (-2\pi, 0) \setminus \{-\pi\}$. ஆகிய இடைவெளிகளிலும் $y = \cot x$ ன் வரைப்படம் திரும்ப,திரும்ப அமைகிறது. $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ -ஐ சார்பகமாகக் கொண்ட கோடான்ஜெண்ட் சார்பின் முழு வரைபடமும் படம் 4.28-ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

4.8.2 நேர்மாறு கோடான்ஜெண்ட் சார்பு (Inverse cotangent function)

கோடான்ஜெண்ட் சார்பு அதன் முழுசார்பகத்தில் $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ ஒன்றுக்கொன்று சார்பு அல்ல. ஆயினும் கட்டுபடுத்தப்பட சார்பகமான $(0, \pi)$ -ல், $\cot : (0, \pi) \to (-\infty, \infty)$ ஆனது இருபுறச் சார்பாகும். எனவே, $(-\infty, \infty)$ சார்பகமாகவும், $(0, \pi)$ வீச்சாகவும் கொண்டு நேர்மாறு கோடான்செண்ட் சார்பை வரையறுப்போம்.

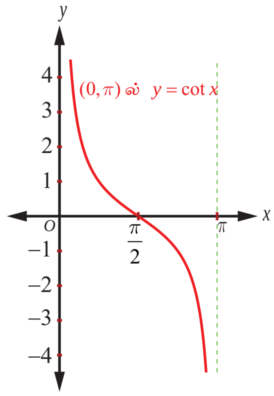
வரையறை 4.8

நேர்மாறு கோடான்ஜெண்ட் சார்பான $\cot^{-1}:(-\infty,\infty)\to(0,\pi)$ என்பது $\cot^{-1}(x)=y$ என வரையறுக்க தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகள் $y\in(0,\pi)$ மற்றும் $\cot y = x$ ஆகும்.

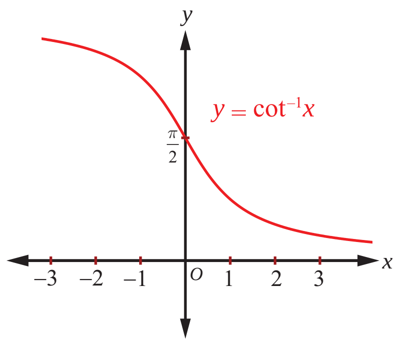
4.8.3 நேர்மாறு கோடான்ஜெண்ட் சார்பின் வரைபடம் (Graph of the inverse cotangent function)

நேர்மாறு கோடான்ஜெண்ட் சார்பான $y=\cot^{-1}x$ என்பது $\mathbb{R}$-ஐ சார்பகமாகவும் மற்றும் $(0,\pi)$-ஐ வீச்சாகவும் கொண்ட சார்பாகும். அதாவது $\cot^{-1}x:(-\infty,\infty)\to(0,\pi)$ ஆகும்.

படம் 4.29 மற்றும் படம். 4.30 ஆகியவற்றில் வரைபடங்கள் முறையே முதன்மை சார்பகத்தில் கோடான்ஜெண்ட் சார்பின் வரைபடம் மற்றும் நேர்மாறு கோடான்ஜெண்ட் சார்பின் வரைபடம் அதற்குரிய சார்பகத்திலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம். 4.29



படம். 4.30

4.9 நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் முதன்மை மதிப்பு (Principal Value of Inverse Trigonometric Functions)

x எனும் புள்ளியில் நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்பின் முதன்மை மதிப்பானது, முதன்மை பகுதியின் வீச்சில் உள்ள x எனும் புள்ளியில் நேர்மாறு சார்பின் மதிப்பாகும். எடுத்துக்காட்டாக $\frac{\pi}{6}\in[0,\pi]$ என்பதால், $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{\pi}{6}$ ஆகும். இரு மதிப்புகள் எண்மதிப்பில் சமமாகவும், ஒன்று குறையெண்ணாகவும் மற்றொன்று மிகையெண்ணாகவும் இருந்தால் முக்கோணவியல் சார்பின் முதன்மை மதிப்பு மிகை எண்ணாகவே அமையும். கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் முக்கோணவியல் சார்புகளின் முதன்மை சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம், நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் சார்பகம் மற்றும் வீச்சகம் ஆகியவை பட்டியலிடப்படுகின்றன.

சார்பு	முதன்மை சார்பகம்	வீச்சகம்
சைன்	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$
கொசைன்	$[0,\pi]$	$[-1,1]$
தொடுகோடு	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

நேர்மாறு சார்பு	சார்பகம்	முதன்மை மதிப்பிற்குரிய வீச்சகம்
$\sin^{-1}$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\tan^{-1}$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

கொசீகண்ட்	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus(-1,1)$	**cosec^{-1}**	$\mathbb{R}\setminus(-1,1)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$
சீகண்ட்	$[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus(-1,1)$	**sec^{-1}**	$\mathbb{R}\setminus(-1,1)$	$[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
கோடான்ஜெண்ட்	$(0,\pi)$	$\mathbb{R}$	**cot^{-1}**	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$

எடுத்துக்காட்டு 4.12

முதன்மை மதிப்பு காண்க

(i) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$ (ii) $\sec^{-1}(-2)$

தீர்வு

(i) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)=y$ என்க. எனவே, $\operatorname{cosec} y=-1$

$y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ –ன் முதன்மை மதிப்பிற்குரிய வீச்சகம் $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ ஆகும். மேலும்,

$\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ என்பதால், $y=-\frac{\pi}{2}$ என்றிருக்க வேண்டும். இங்கு $-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ என்பதை கவனிக்க.

எனவே, $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$ –ன் முதன்மை மதிப்பு $-\frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

(ii) $y=\sec^{-1}(-2)$ என்க. எனவே, $\sec y=-2$.

$y=\sec^{-1}x$ –ன் முதன்மை மதிப்பிற்குரிய வீச்சகம் $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ஆகும்.

$\sec y=-2$ என்றிருக்குமாறு $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ –ல் y–ஐ காணவேண்டும் .

ஆனால் $\sec y=-2\ \Rightarrow\ \cos y=-\frac{1}{2}$.

இனி, $\cos y=-\frac{1}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$. எனவே, $y=\frac{2\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3}\in[0,\ \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ என்பதால், $\sec^{-1}(-2)$–ன் முதன்மை மதிப்பு $\frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.13

$\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

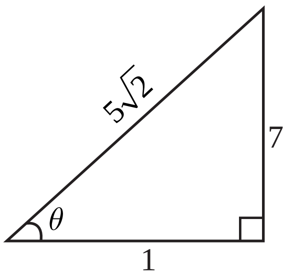
$\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\theta$ என்க. எனவே, $\sec\theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ இங்கு $\theta\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ஆகும்.

எனவே, $\cos\ \theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகும். இனி, $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகும்

எனவே, $\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.14

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$, எனில், $\cos\theta$ மதிப்பு காண்க.



தீர்வு

வரையறைப்படி $\cot^{-1} x \in (0, \pi)$.

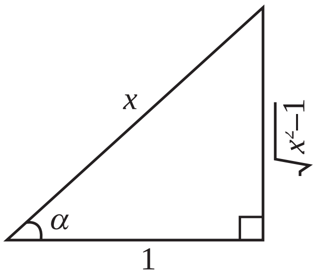
எனவே, $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$ என்பதிலிருந்து $\theta \in (0, \pi)$ ஆகும்.

ஆனால் $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$ என்பது $\cot\theta = \frac{1}{7}$ ஆகும். எனவே $\tan\theta = 7$ மற்றும் θ ஒரு குறுங்கோணம் ஆகும்.

$\tan\theta = \frac{7}{1}$ என்பதை பயன்படுத்தி, செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றை உருவாக்குக. பின்னர் $\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ என நமக்கு கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.15

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$. எனக் காட்டுக.



$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \alpha$ என்க. எனவே, $\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

மற்றும் α ஒரு குறுங்கோணம் ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு செங்கோண முக்கோணம் உருவாக்குக.

முக்கோணத்திலிருந்து, $\sec\alpha = \frac{x}{1} = x$ எனப் பெறலாம். எனவே, $\alpha = \sec^{-1} x$ ஆகும்.

எனவே $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$ ஆகும்.

பயிற்சி 4.4

1. முதன்மை மதிப்பு காண்க

(i) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (ii) $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

2. மதிப்பு காண்க

(i) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) - \sec^{-1}(-2)$ (ii) $\sin^{-1}(-1) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \cot^{-1}(2)$

(iii) $\cot^{-1}(1) + \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

4.10 நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் பண்புகள் (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

இப்பாடப்பகுதியில் நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் சிலப் பண்புகளைப் பற்றி ஆராய்வோம். இங்கு குறிப்பிடப்படும் பண்புகள் தொடர்புடைய நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள் அவற்றின் முதன்மை மதிப்புகள் உள்ள இடைவெளிகளில் எங்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதோ, அவ்விடத்தில் பொருந்தும்.

பண்பு-1

(i) $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ எனில், $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ (ii) $\theta \in [0, \pi]$ எனில், $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$

(iii) $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ எனில், $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ (iv) $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ எனில், $\operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec}\theta) = \theta$

(v) $\theta \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ எனில், $\sec^{-1}(\sec\theta) = \theta$ (vi) $\theta \in (0, \pi)$ எனில், $\cot^{-1}(\cot\theta) = \theta$

நிரூபணம்

மேற்கண்ட அனைத்து முடிவுகளும் அவைகளுக்குரிய நேர்மாறு சார்புகளின் வரையறைகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெறலாம்.

எடுத்துகாட்டிற்கு, (i) $\sin\theta = x$; $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ என்க.

எனவே நேர்மாறு சைன் சார்பின் வரையறையிலிருந்து, $\sin\theta = x$ மூலம் $\theta = \sin^{-1} x$ எனப் பெறலாம். எனவே, $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$. ■

பண்பு-II

(i) $x \in [-1, 1]$ எனில், $\sin(\sin^{-1} x) = x$ (ii) $x \in [-1, 1]$ எனில், $\cos(\cos^{-1} x) = x$

(iii) $x \in \mathbb{R}$ எனில், $\tan(\tan^{-1} x) = x$ (iv) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = x$

(v) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\sec(\sec^{-1} x) = x$ (vi) $x \in \mathbb{R}$ எனில், $\cot(\cot^{-1} x) = x$

நிரூபணம்

(i) $x \in [-1, 1]$ எனும்போது, $\sin^{-1} x$ நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\sin^{-1} x = \theta$ என்க. எனவே, வரையறைப்படி $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ மற்றும் $\sin\theta = x$ ஆகும்.

எனவே, $\sin\theta = x$ என்பதிலிருந்து $\sin(\sin^{-1} x) = x$ எனப் பெறலாம்.

இதேபோன்று மற்ற முடிவுகளையும் நிரூபிக்கலாம். ■

குறிப்பு

(i) முக்கோணவியல் சார்பு $y = f(x)$, -க்கு, f-ன் வீச்சிலுள்ள அனைத்து x-க்கும் $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ ஆகும். $f^{-1}(x)$-ன் வரையறையிலிருந்து இதனைப் பெறலாம். $f\left(g^{-1}(x)\right)$ எனும்போது, இங்கு $g^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ அல்லது $\cos^{-1} x$ அத்தகைய கணக்கை தீர்க்க, நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்பினை வரையறுக்கும் முக்கோணம் ஒன்றை வரைவது அவசியமாகிறது. உதாரணத்திற்கு $\cot\left(\sin^{-1} x\right)$ -ன் மதிப்பைக் காண முக்கோணம் ஒன்றை, $\sin^{-1} x$.-ஐ பயன்படுத்தி வரையவேண்டும். இருப்பினும், $f^{-1}\left(f(x)\right)$ போன்றவற்றைக் கையாளும்போது கவனம் செலுத்த வேண்டியுள்ளது.

(ii) f என்பது ஆறு முக்கோணவியல் சார்புகளில் ஏதேனும் ஒன்று எனில், $f^{-1}[f(x)]$ -ன் மதிப்பைக் காணுதல்.

(அ) x என்பது f -ன் கட்டுபடுத்தப்பட்ட சார்பகத்தில் இருந்தால் $f^{-1}[f(x)] = x$ ஆகும்.

(ஆ) x என்பது f -ன் கட்டுபடுத்தப்பட்ட சார்பகத்தில் இல்லையெனில் f -ன் கட்டுபடுத்தப்பட்ட சார்பகத்தில் $f(x) = f(x_1)$ எனுமாறு x_1-ஐ கண்டறிய வேண்டும். இனி, $f^{-1}[f(x)] = x_1$.

எடுத்துகாட்டாக,

$$\sin^{-1}(\sin x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x_1 & \text{if } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$ இங்கு $\sin x = \sin x_1$ மற்றும் $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

பண்பு-III (தலைகீழ் நேர்மாறு முற்றொருமைகள்)

(i) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1} x$. (ii) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1} x$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \cot^{-1} x & , x > 0 \\ -\pi + \cot^{-1} x & , x < 0. \end{cases}$

நிரூபணம்

(i) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\frac{1}{x} \in [-1, 1]$ மற்றும் $x \neq 0$ ஆகும். எனவே, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது.

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta$ என்க. எனவே, வரையறையின்படி $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ மற்றும் $\sin\theta = \frac{1}{x}$.

ஆகையால், $\operatorname{cosec}\theta = x$ என்பதிலிருந்து $\theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$ எனப் பெறப்படுகிறது.

இனி, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$ ஆகும். ஆகையால், $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ ஆகும்.

இதே போன்று மற்ற முடிவுகளையும் நிரூபிக்கலாம். ■

பண்பு-IV (பிரதிபலிப்பு முற்றொருமைகள்)

(i) $x \in [-1, 1]$ எனில், $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$.

(ii) $x \in \mathbb{R}$ எனில், $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$.

(iii) $|x| \geq 1$ அல்லது $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$

(iv) $x \in [-1, 1]$ எனில், $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$.

(v) $|x| \geq 1$ அல்லது $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$.

(vi) $x \in \mathbb{R}$ எனில், $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$.

நிரூபணம்

(i) $x \in [-1, 1]$ எனில், $-x \in [-1, 1]$ ஆகும். ஆகையால், $\sin^{-1}(-x)$ என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது

$\sin^{-1}(-x) = \theta$ என்க. எனவே $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ மற்றும் $\sin\theta = -x$ ஆகும்.

எனவே, $\sin\theta = -x$ -லிருந்து $x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$ என ஆகும்.

$x = \sin(-\theta)$ என்பதிலிருந்து, $\sin^{-1} x = -\theta$ என ஆகும். இதிலிருந்து $\theta = -\sin^{-1} x$ ஆகும்.

எனவே, $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ ஆகும்.

(iv) $x \in [-1, 1]$ எனில், $-x \in [-1, 1]$ என ஆகும். எனவே, $\cos^{-1}(-x)$ என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது.

$\cos^{-1}(-x) = \theta$ என்க. எனவே $\theta \in [0, \pi]$ மற்றும் $\cos\ \theta = -x$ ஆகும்.

எனவே, $\cos\theta = -x$ என்பதால் $x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$ ஆகும்.

ஆகையால், $\pi - \theta = \cos^{-1} x$ என்பதால் $\theta = \pi - \cos^{-1} x$ ஆகும்.

எனவே $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ ஆகும்.

இதே போன்று ஏனைய முடிவுகளையும் நிரூபிக்கலாம். ■

குறிப்பு

(i) ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் ஒற்றைச் சார்பின் நேர்மாறு சார்பும் ஒற்றைச் சார்பாகும். எடுத்துகாட்டிற்கு, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ எனும் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட சார்பகத்தில் சைன் சார்பு ஒன்றுக்கொன்று மற்றும் ஒற்றைச் சார்பாக இருப்பதால் $y = \sin^{-1} x$ என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாகும்.

(ii) இரட்டைச் சார்பின் நேர்மாறு இரட்டைச் சார்பாகுமா? இவ்வினாவினை அர்த்தமற்ற வினா என புறக்கணித்துவிடலாம். ஏனெனில் பூஜ்ஜியத்தைத் தவிர வேறெங்கும் ஓர் இரட்டைச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்று ஆக இருக்காது. $\cos^{-1} x$ மற்றும் $\sec^{-1} x$ ஆகியவை இரட்டைச் சார்பாக இருக்காது என்பதை கவனிக்கவும்.

பண்பு-V (துணை நேர்மாறுச்சார்பு முற்றொருமைகள்)

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$ (ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R}.$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ அல்லது $|x| \geq 1$.

நிரூபணம்

(i) இங்கு, $x \in [-1, 1]$. $\sin^{-1} x = \theta$ என்க. எனவே $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ மற்றும் $\sin\theta = x$ ஆகும்.

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$ என்பதைக் கவனிக்க.

எனவே, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = x,$ என்பதிலிருந்து $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ எனப் பெறலாம்.

எனவே, $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

(ii) $\cot^{-1} x = \theta$ என்க. எனவே, $\cot\theta = x$, $0 < \theta < \pi$ மற்றும் $x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

இனி, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = x$ ஆகும் ... (1)

ஆகையால், $x \in \mathbb{R}$ -க்கு $\tan(\tan^{-1} x) = x$ மற்றும் (1) -லிருந்து $\tan(\tan^{-1} x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ ஆகும்.

எனவே, $\tan(\tan^{-1} x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \cot^{-1} x\right)$ ஆகும். ... (2)

$0 < \cot^{-1} x < \pi$ -லிருந்து $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - \cot^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ என்பதைக் கவனிக்க

ஆகையால், (2) லிருந்து $\tan^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - \cot^{-1} x$ எனப் பெறலாம்.

எனவே, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ ஆகும். ■

இதே போன்று, (iii) நிரூபிக்கலாம்.

பண்பு VI

(i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$, இங்கு $x^2 + y^2 \le 1$ அல்லது $xy < 0$ ஆகும்.

(ii) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$, இங்கு $x^2 + y^2 \le 1$ அல்லது $xy > 0$ ஆகும்.

(iii) $x + y \ge 0$ எனில், $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$ ஆகும்.

(iv) $x \le y$ எனில், $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, ஆகும்.

(v) $xy < 1$ எனில், $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ ஆகும்.

(vi) $xy > -1$ எனில், $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$ ஆகும் .

நிரூபணம்

(i) $A = \sin^{-1} x$. என்க. எனவே, $x = \sin A$; $A \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; $|x| \le 1$ மற்றும் $\cos A$ என்பது மிகையெண் மதிப்பாகும். $B = \sin^{-1} y$. என்க. எனவே, $y = \sin B$; $B \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; $|y| \le 1$ மற்றும் $\cos B$ மிகை எண் மதிப்பாகும்.

இனி, $\cos A = +\sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-x^2}$ மற்றும் $\cos B = +\sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{1-y^2}$ ஆகும்.

எனவே, $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$, இங்கு $|x| \le 1$; $|y| \le 1$ எனவே, $x^2 + y^2 \le 1$

ஆகையால், $A + B = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

ஆகையால், $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$, இங்கு $x^2 + y^2 \le 1$ அல்லது $xy < 0$.

இதைப் போலவே ஏனைய முடிவுகளையும் நிரூபிக்கலாம். ■

பண்பு-VII

(i) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), |x| < 1$ (ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x \ge 0$

(iii) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), |x| \le 1$.

நிரூபணம்

(i) பண்பு-VI (v) -ல் , $y = x$ என எடுத்துக்கொண்டால், நமக்கு தேவையான முடிவுகளை பெறலாம்,

$2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), |x| < 1$ ஆகும்.

(ii) $\theta = 2\tan^{-1} x$. எனவே, $\tan\frac{\theta}{2} = x$.

$\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ என்பதிலிருந்து $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

எனவே, $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x \ge 0$.

இதைப் போலவே ஏனைய முடிவுகளும் நிரூபிக்கலாம். ■

பண்பு-VIII

(i) $|x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ அல்லது $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில், $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ எனில், $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$

நிரூபணம்

(i) $x = \sin\theta$. எனவே $|x| \le 1$

இனி, $2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

ஆகையால், $2\theta = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. எனவே, $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x$.

(ii) $x = \cos\theta$.

இனி, $2x\sqrt{1-x^2} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$.

எனவே, $2\theta = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.ஆகையால், $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$. ■

பண்பு-IX

(i) $0 \le x \le 1$ எனில், $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(ii) $-1 \le x < 0$ எனில், $\sin^{-1} x = -\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

(iii) $-1 < x < 1$ எனில், $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

(iv) $0 \le x \le 1$ எனில்,, $\cos^{-1} x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(v) $-1 \le x < 0$ எனில், $\cos^{-1} x = \pi - \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(vi) $x > 0$ எனில், $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

நிரூபணம்

(i) $\sin^{-1} x = \theta$ என்க. எனவே, $\sin\theta = x$. $0 \le x \le 1$ என்பதால் , $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ என கிடைக்கிறது.

இனி, $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ அல்லது $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \theta = \sin^{-1} x$.

எனவே, $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$

(ii) $-1 \le x \le 0$ என்க. மேலும் $\sin^{-1} x = \theta$. எனவே $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta < 0$

அதனால், $\sin\theta = x$ மற்றும் $\cos(-\theta) = \sqrt{1-x^2}$ (ஏனெனில் $\cos\theta > 0$)

எனவே, $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = -\theta = -\sin^{-1} x$. எனவே, $\sin^{-1} x = -\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

இதே போன்று ஏனைய முடிவுகளையும் நிரூபிக்கலாம். ■

பண்பு-X

(i) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. (ii) $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

நிரூபணம்

(i) $x = \sin\theta$ என்க. ஆகையால், $\theta = \sin^{-1} x$.

இனி, $3x - 4x^3 = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta$

ஆகையால், $\sin^{-1}(3x - 4x^3) = 3\theta = 3\sin^{-1} x$.

இதே போன்று அடுத்ததாக உள்ள முடிவையும் நிரூபிக்கலாம். ■

குறிப்புரை

(i) $\sin^{-1}(\cos x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x, & x \in [0, \pi] \\ \dfrac{\pi}{2} - y, & x \notin [0, \pi] \text{ மற்றும் } \cos x = \cos y, y \in [0, \pi] \end{cases}$

$$\text{(ii)}\ \cos^{-1}(\sin x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{\pi}{2} - y, & x \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ மற்றும் } \sin x = \sin y,\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.16

$\dfrac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x \le \dfrac{3\pi}{2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} x$$

$0 \le \cos^{-1} x \le \pi$ எனவே, $\dfrac{\pi}{2} + 0 \le \cos^{-1} x + \dfrac{\pi}{2} \le \pi + \dfrac{\pi}{2}$.

எனவே, $\dfrac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x \le \dfrac{3\pi}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.17

சுருக்குக (i) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\dfrac{13\pi}{3}\right)\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

(iii) $\sec^{-1}\left(\sec\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right)$ (iv) $\sin^{-1}[\sin 10]$

தீர்வு

(i) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\dfrac{13\pi}{3}\right)\right)$.

$\cos^{-1} x$ -ன் முதன்மை மதிப்புகளின் வீச்சகம் $[0, \pi]$ ஆகும்.

$\dfrac{13\pi}{3} \notin [0, \pi]$ என்பதால், $\dfrac{13\pi}{3}$ -ஐ, $\dfrac{13\pi}{3} = 4\pi + \dfrac{\pi}{3}$ என எழுதுவோம். இங்கு $\dfrac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

இனி, $\cos\left(\dfrac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(4\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$.

எனவே, $\cos^{-1}\left(\cos\left(\dfrac{13\pi}{3}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{\pi}{3}$, ஏனெனில் $\dfrac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.

$\tan^{-1} x$ -ன் முதன்மை வீச்சான $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$-ல் $\dfrac{3\pi}{4}$ இல்லை என்பதை கவனிக்கவும்.

எனவே $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$ என எழுதுவோம்.

இனி, $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{4} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ மற்றும் $-\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ஆகையால், $\tan^{-1}\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.

(iii) $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$.

$\sec^{-1} x$ -ன் முதன்மை வீச்சான $[0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ -ல் $\frac{5\pi}{3}$ இல்லை என்பதை கவணிக்கவும்.

எனவே $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ என எழுதுவோம். இனி, $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sec\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$ மற்றும் $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

எனவே, $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.

(iv) $\sin^{-1}[\sin 10]$

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ எனில், $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ ஆகும். $\frac{\pi}{2} \simeq \frac{11}{7}$ எனும் தோராய மதிப்பைக் கொள்க,

$10 \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ எனலாம், ஆயினும் $(10 - 3\pi) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ஆகும்.

இனி , $\sin 10 = \sin(3\pi + (10 - 3\pi)) = \sin(\pi + (10 - 3\pi) = -\sin(10 - 3\pi) = \sin(3\pi - 10)$.

எனவே, $\sin^{-1}[\sin 10] = \sin^{-1}[\sin(3\pi - 10)] = 3\pi - 10$, ஏனெனில் $(3\pi - 10) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

எடுத்துக்காட்டு 4.18

மதிப்பு காண்க (i) $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (ii) $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$

(iii) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]$.

தீர்வு

(i) $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(ii) $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$ ல் $\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \theta$ என்க. எனவே, $\cos\theta = \frac{1}{8}$ மற்றும் $\theta \in [0, \pi]$.

இனி, $\cos\theta = \frac{1}{8}$ -லிருந்து $2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1}{8}$.ஆகையால், $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

எனவே, $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right] = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

(iii) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]$

$a = \tan\theta$ என்க.

இனி,

$$\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)+\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]=\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)+\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)\right]$$

$$=\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}(\sin 2\theta)+\frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)\right]=\tan[2\theta]=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2a}{1-a^2}.$$

■

எடுத்துக்காட்டு 4.19

நிரூபிக்க $\tan(\sin^{-1}x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ இங்கு $|x|<1.$

தீர்வு

எனவே $\sin^{-1}x=\theta$ ஆகையால், $x=\sin\theta$ மற்றும் $-1\le x\le 1$

இனி, $\tan(\sin^{-1}x)=\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1.$ ■

எடுத்துக்காட்டு 4.20

மதிப்பிடுக $\sin\left[\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)+\sec^{-1}\left(\dfrac{5}{4}\right)\right]$

தீர்வு

$\sec^{-1}\dfrac{5}{4}=\theta$ என்க. எனவே, $\sec\theta=\dfrac{5}{4}$. அதனால், $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$.

மேலும், $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$, எனப் பெற $\theta=\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

ஆகையால், $\sec^{-1}\left(\dfrac{5}{4}\right)=\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$ மற்றும் $\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\sec^{-1}\left(\dfrac{5}{4}\right)=2\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$

$|x|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ எனில், $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\sin^{-1}x$ என அறிவோம்.

$\dfrac{3}{5}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, என்பதால் $2\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)=\sin^{-1}\left(2\times\dfrac{3}{5}\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}\right)=\sin^{-1}\left(\dfrac{24}{25}\right)$.

எனவே, $\sin\left[\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)+\sec^{-1}\left(\dfrac{5}{4}\right)\right]=\sin\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{24}{25}\right)\right)=\dfrac{24}{25}$, ஏனெனில் $\dfrac{24}{25}\in[-1,1]$ ■

எடுத்துக்காட்டு 4.21

நிரூபிக்க (i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ (ii) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{7}=\tan^{-1}\dfrac{31}{17}$

தீர்வு

(i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $xy<1$ என அறிவோம்.

ஆகையால், $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

(ii) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $-1<x<1$ என அறிவோம்

எனவே, $2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

ஆகையால், $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{7}\right)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$.

எடுத்துக்காட்டு 4.22

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ மற்றும் $0<x,y,z<1$, எனில்

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ எனக் காண்பி.

தீர்வு

$\cos^{-1}x=\alpha$ மற்றும் $\cos^{-1}y=\beta$ என்க எனவே, $x=\cos\alpha$ மற்றும் $y=\cos\beta$ ஆகும்.

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ என்பதிலிருந்து $\alpha+\beta=\pi-\cos^{-1}z$. ... (1)

இனி, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

(1)-லிருந்து, $\cos\left(\pi-\cos^{-1}z\right)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ எனப்பெறலாம்.

$-\cos\left(\cos^{-1}z\right)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

எனவே, $-z=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$, என்பதிலிருந்து $-xy-z=-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்தி சுருக்க $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ எனப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.23

d-ஐ பொது வித்தியாசமாகக் கொண்டு $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ ஒரு கூட்டுத் தொடர் எனில்,

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right]=\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}$$ என நிறுவு.

தீர்வு

$$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}\right)=\tan^{-1}a_2-\tan^{-1}a_1.$$

இதே போன்று $\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a_3-a_2}{1+a_2a_3}\right)=\tan^{-1}a_3-\tan^{-1}a_2$.

தொடர்ந்து உய்த்தறிதல் மூலம்

$$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_n a_{n-1}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{1+a_{n-1}a_n}\right)=\tan^{-1}a_n-\tan^{-1}a_{n-1}$$ என கிடைக்கிறது.

செங்குத்தாக கூட்டும்போது,

$$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)=\tan^{-1}a_n-\tan^{-1}a_1$$ என நமக்கு

கிடைக்கிறது.

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right]=\tan[\tan^{-1}a_n-\tan^{-1}a_1]$$

$$=\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}\right)\right]=\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.24

தீர்க்க $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$, இங்கு $x>0$.

தீர்வு

$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ என்பதிலிருந்து $\tan^{-1}1-\tan^{-1}x=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$.

எனவே, $\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\tan^{-1}x$, என்பதையே சுருக்கி $\tan^{-1}x=\frac{\pi}{6}$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, $x=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.25

தீர்க்க $\sin^{-1}x>\cos^{-1}x$

தீர்வு

$\sin^{-1}x>\cos^{-1}x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இருபுறமும் $\sin^{-1}x$, -ஐ கூட்ட

$\sin^{-1}x+\sin^{-1}x>\cos^{-1}x+\sin^{-1}x$, என்பது சுருங்கி $2\sin^{-1}x>\frac{\pi}{2}$.

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ எனும் இடைவெளியில் சைன் சார்பு மதிப்பு ஏறும் என்பதால், $x>\sin\frac{\pi}{4}$ அல்லது

$x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆகும்.

ஆகையால் தீர்வு கணமான இடைவெளி $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.26

$\cot(\sin^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1\le x\le 1$ மற்றும் $x\neq 0$ எனக் காண்பி.

தீர்வு

$\sin^{-1} x = \theta$. என்க. எனவே, $x = \sin\theta$ மற்றும் $x \neq 0,\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ என கிடைக்க பெறுகிறது,

$\cos\theta \geq 0$ மற்றும் $\cos\,\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$.

எனவே, $\cot(\sin^{-1} x) = \cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $|x| \leq 1$ மற்றும் $x \neq 0$.

எடுத்துக்காட்டு 4.27

$6x^2 < 1$ எனில், $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$, ஐ தீர்க்க,

தீர்வு

$6x^2 < 1$ எனில் $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x+3x}{1-6x^2}\right)$.

$$\tan^{-1}\left(\frac{5x}{1-6x^2}\right) = \frac{\pi}{4}, \text{ என்பதால் } \frac{5x}{1-6x^2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

ஆகையால், $1-6x^2 = 5x$, என்பதிலிருந்து $6x^2+5x-1=0$

ஆகவே, $x = \dfrac{1}{6}, -1$.

$x = -1$ என்பது சமன்பாட்டின் இடப்புறம் குறையெண் மதிப்பையும் மற்றும் வலப்புறம் மிகையெண் மதிப்பையும் தருகிறது என்பதை கவனிக்கவும். ஆகையால், $x = -1$ என்பது தீர்வாகாது. எனவே, $x = \dfrac{1}{6}$ மட்டுமே சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.28

தீர்க்க $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

தீர்வு

Now, $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right] = \dfrac{\pi}{4}$.

எனவே, $\dfrac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} = 1$, என்பதை சுருக்கினால் $2x^2 - 4 = -3$ எனக்கிடைக்கிறது.

எனவே, $x^2 = \dfrac{1}{2}$ என்பதிலிருந்து $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ எனப்பெறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.29

தீர்க்க $\cos\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \sin\left\{\cot^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)\right\}$.

தீர்வு

$\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. என அறிவோம்

எனவே, $\cos\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. ...(1)

$\cot^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) = \theta$. என்க. பின்னர் $\cot\theta = \dfrac{3}{4}$ மற்றும் θ குறுங்கோணம்.

படத்திலிருந்து, நமக்கு கிடைக்கபெறுவது

$$\sin\left\{\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\} = \sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \text{... (2)}$$

(1) மற்றும் (2)–ஐ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தும்போது

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{4}{5}$, என்பதிலிருந்து $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{5}{4}$ எனவே, $x = \pm\dfrac{3}{4}$.

பயிற்சி 4.5

1. மதிப்பு உள்ளது எனில் பின்வருவனவற்றிக்கு மதிப்பு காண்க. மதிப்பு இல்லையெனில் அதற்கான காரணம் தருக.

   (i) $\sin^{-1}(\cos\pi)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)\right)$ (iii) $\sin^{-1}[\sin 5]$.

2. முக்கோணத்தினை மேற்கோளாகக் கொண்டு x –ன் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin\left(\cos^{-1}(1-x)\right)$ (ii) $\cos\left(\tan^{-1}(3x-1)\right)$ (iii) $\tan\left(\sin^{-1}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

3. மதிப்பு காண்க

   (i) $\sin^{-1}\left(\cos\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)$ (ii) $\cot\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right)$ (iii) $\tan\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\cot^{-1}\dfrac{3}{2}\right)$.

4. நிரூபிக்க

   (i) $\tan^{-1}\dfrac{2}{11}+\tan^{-1}\dfrac{7}{24}=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ (ii) $\sin^{-1}\dfrac{3}{5}-\cos^{-1}\dfrac{12}{13}=\sin^{-1}\dfrac{16}{65}$.

5. நிரூபிக்க $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\left[\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right]$.

6. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ எனில், $x+y+z=xyz$ எனக் காட்டுக.

7. $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$ என நிறுவுக.

8. சுருக்குக: $\tan^{-1}\dfrac{x}{y}-\tan^{-1}\dfrac{x-y}{x+y}$.

9. தீர்க்க:

(i) $\sin^{-1}\dfrac{5}{x}+\sin^{-1}\dfrac{12}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ (ii) $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\dfrac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}$, $a>0,\ b>0$.

(iii) $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$ (iv) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+2)=\dfrac{\pi}{12},\ x>0$.

10. சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(3x)$.

பயிற்சி 4.6

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $\sin^{-1}(\cos x),\ 0\le x\le\pi$ -ன் மதிப்பு

(1) $\pi-x$ (2) $x-\dfrac{\pi}{2}$ (3) $\dfrac{\pi}{2}-x$ (4) $x-\pi$

2. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\dfrac{2\pi}{3}$; எனில் $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y$ என்பதன் மதிப்பு

(1) $\dfrac{2\pi}{3}$ (2) $\dfrac{\pi}{3}$ (3) $\dfrac{\pi}{6}$ (4) π

3. $\sin^{-1}\dfrac{3}{5}-\cos^{-1}\dfrac{12}{13}+\sec^{-1}\dfrac{5}{3}-\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{13}{12}$ என்பதன் மதிப்பு

(1) 2π (2) π (3) 0 (4) $\tan^{-1}\dfrac{12}{65}$

4. If $\sin^{-1}x=2\sin^{-1}\alpha$ -க்கு ஒரு தீர்வு இருந்தால், பின்னர்

(1) $|\alpha|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $|\alpha|\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $|\alpha|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $|\alpha|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5. பின்வருவனவற்றில் எம்மதிப்புகளுக்கு $\sin^{-1}(\cos x)=\dfrac{\pi}{2}-x$ க்கு மெய்யாகும்

(1) $-\pi\le x\le 0$ (2) $0\le x\le\pi$ (3) $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ (4) $-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{3\pi}{4}$

6. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\dfrac{3\pi}{2}$ எனில், $x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}-\dfrac{9}{x^{101}+y^{101}+z^{101}}$ -ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

7. சில $x\in R$ -க்கு $\cot^{-1}x=\dfrac{2\pi}{5}$ எனில், $\tan^{-1}x$ -ன் மதிப்பு

(1) $-\dfrac{\pi}{10}$ (2) $\dfrac{\pi}{5}$ (3) $\dfrac{\pi}{10}$ (4) $-\dfrac{\pi}{5}$

8. $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{x-1}$ என வரையறுக்கப்படும் சார்பின் சார்பகம்

(1) $[1,\ 2]$ (2) $[-1,\ 1]$ (3) $[0,\ 1]$ (4) $[-1,\ 0]$

9 $x=\frac{1}{5}$ எனில், $\cos\left(\cos^{-1}x+2\sin^{-1}x\right)$ -ன் மதிப்பு

(1) $-\sqrt{\frac{24}{25}}$ (2) $\sqrt{\frac{24}{25}}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $-\frac{1}{5}$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ என்பதின் சமம்

(1) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (2) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (3) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (4) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

11. சார்பு $f(x)=\sin^{-1}\left(x^2-3\right)$ எனில், x இருக்கும் இடைவெளி

(1) $[-1, 1]$ (2) $\left[\sqrt{2}, 2\right]$

(3) $\left[-2, -\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}, 2\right]$ (4) $\left[-2, -\sqrt{2}\right]$

12. $\cot^{-1}2$ மற்றும் $\cot^{-1}3$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் எனில், மூன்றாவது கோணமானது

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{3}$

13. $\sin^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)-\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)=\frac{\pi}{6}$ -ல் x என்பதை மூலமாக கொண்ட சமன்பாடு

(1) $x^2-x-6=0$ (2) $x^2-x-12=0$ (3) $x^2+x-12=0$ (4) $x^2+x-6=0$

14. $\sin^{-1}\left(2\cos^2x-1\right)+\cos^{-1}\left(1-2\sin^2x\right)=$

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

15. $\cot^{-1}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)=u$ எனில், $\cos 2u$ ன் மதிப்பு

(1) $\tan^2\alpha$ (2) 0 (3) -1 (4) $\tan 2\alpha$

16. $|x|\le 1$, எனில், $2\tan^{-1}x-\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ என்பதற்கு சமம்

(1) $\tan^{-1}x$ (2) $\sin^{-1}x$ (3) 0 (4) π

17. $\tan^{-1}x-\cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு

(1) தீர்வு இல்லை (2) ஒரேயொரு தீர்வு

(3) இரு தீர்வுகள் (4) எண்ணற்றத் தீர்வுகள்

18. $\sin^{-1}x+\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ எனில், x -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $\sin^{-1}\frac{x}{5}+\text{cosec}^{-1}\frac{5}{4}=\frac{\pi}{2}$ எனில், x -ன் மதிப்பு

(1) 4 (2) 5 (3) 2 (4) 3

20. $|x|<1$ எனில், $\sin(\tan^{-1}x)$ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

பாடச்சுருக்கம்

நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள் (Inverse Trigonometric Functions)

நேர்மாறு சைன் சார்பு	நேர்மாறு கொசைன் சார்பு	நேர்மாறு தொடு கோட்டுச் சார்பு	நேர்மாறு கொசீகண்ட் சார்பு	நேர்மாறு சீகண்ட் சார்பு	நேர்மாறு கோடான்-ஜெண்ட் சார்பு
சார்பகம் $[-1,1]$	சார்பகம் $[-1,1]$	சார்பகம் $\mathbb{R}$	சார்பகம் $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	சார்பகம் $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	சார்பகம் $\mathbb{R}$
வீச்சகம் $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	வீச்சகம் $[0,\pi]$	வீச்சகம் $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	வீச்சகம் $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$	வீச்சகம் $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	வீச்சகம் $(0,\pi)$
காலச் சார்பு அல்ல	காலச் சார்பு அல்ல	காலச் சார்பு அல்ல	காலச் சார்பு அல்ல	காலச் சார்பு அல்ல	காலச் சார்பு அல்ல
ஒற்றைச் சார்பு	ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல இரட்டைச் சார்பும் அல்ல	ஒற்றைச் சார்பு	ஒற்றைச் சார்பு	ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல இரட்டைச் சார்பும் அல்ல	ஒற்றைச் சார்பும் அல்ல இரட்டைச் சார்பும் அல்ல
திடமாக ஏறும் சார்பு	திடமாக இறங்கும் சார்பு	திடமாக ஏறும் சார்பு	அதன் சார்பகத்தைப் பொறுத்து திடமாக குறையும் சார்பு.	அதன் சார்பகத்தைப் பொறுத்து திடமாக குறையும் சார்பு	திடமாக இறங்கும் சார்பு
ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு	ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு	ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு	ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு	ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு	ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு

நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகளின் பண்புகள்
(Properties of Inverse Trigonometric Functions)

பண்பு-I

(i) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ எனில், $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$ (ii) $\theta\in[0,\pi]$ எனில், $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta$

(iii) $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ எனில், $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$ (iv) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\}$ எனில், $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\,\theta)=\theta$

(v) $\theta \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ எனில், $\sec^{-1}(\sec\theta) = \theta$ (vi) $\theta \in (0, \pi)$ எனில், $\cot^{-1}(\cot\theta) = \theta$

பண்பு-II

(i) $x \in [-1, 1]$ எனில், $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ (ii) $x \in [-1, 1]$ எனில், $\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$

(iii) $x \in \mathbb{R}$ எனில், $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$ (iv) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = x$

(v) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\sec\left(\sec^{-1} x\right) = x$ (vi) $x \in \mathbb{R}$ எனில், $\cot\left(\cot^{-1} x\right) = x$

பண்பு-III தலைகீழ் நேர்மாறு முற்றொருமை (Reciprocal inverse identities)

(i) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec} x$ (ii) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1} x$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \cot^{-1} x & x > 0 \\ -\pi + \cot^{-1} x & x < 0. \end{cases}$

பண்பு-IV பிரதிபலிப்பு முற்றொருமைகள் (Reflection identities)

(i) $x \in [-1, 1]$ எனில், $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

(ii) $x \in \mathbb{R}$ எனில், $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

(iii) $|x| \geq 1$ அல்லது $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$

(iv) $x \in [-1, 1]$ எனில், $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

(v) $|x| \geq 1$ அல்லது $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ எனில், $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$

(vi) $x \in \mathbb{R}$ எனில், $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$

பண்பு-V துணை நேர்மாறு சார்பு முற்றொருமைகள் (Cofunction inverse identities)

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$. (ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ அல்லது $|x| \geq 1$.

பண்பு-VI

(i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$, இங்கு $x^2 + y^2 \leq 1$ அல்லது $xy < 0$.

(ii) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$, இங்கு $x^2 + y^2 \leq 1$ அல்லது $xy > 0$.

(iii) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, இங்கு $x + y \geq 0$.

(iv) $x \leq y$ எனில், $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$

(v) $xy < 1$ எனில், $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

(vi) $xy > -1$ எனில், $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$

பண்பு-VII

(i) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right),\ |x| < 1$ (ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x \geq 0$

(iii) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right),\ |x| \leq 1$

பண்பு-VIII

(i) $|x| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ அல்லது $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ எனில், $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ எனில், $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$

பண்பு-IX

(i) $0 \leq x \leq 1$ எனில், $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (ii) $-1 \leq x < 0$ எனில், $\sin^{-1} x = -\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(ii) $-1 < x < 1$ எனில், $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (iv) $0 \leq x \leq 1$ எனில், $\cos^{-1} x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(v) $-1 \leq x < 0$ எனில், $\cos^{-1} x = \pi - \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(vi) $x > 0$ எனில், $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

பண்பு-X

(ι) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3),\ x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. (ii) $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x),\ x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும். GeoGebra–வின் "12th Standard Mathematics" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடது பக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "Inverse Trigonometric Functions" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க. இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். "Graph of Inverse Trigonometric Functions" பயிற்சித்தாளை தேர்வு செய்க.

508QS

அத்தியாயம்

5

இருபரிமாண பகுமுறை வடிவியல்-II

"ஒவ்வொரு பிரச்சனையையும், தேவையான அளவுக்கு மற்றும் எந்த அளவிற்கு முடியுமோ அந்த அளவிற்கு சிறு பகுதிகளாகப் பிரித்து தீர்வு காணவேண்டும்."

– ரானே டி–கார்ட்டே

ரானே டி–கார்ட்டே
1596 – 1650

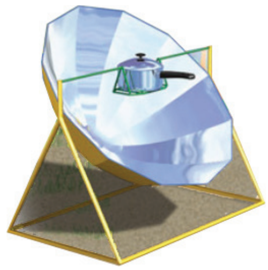
5.1 அறிமுகம் (Introduction)

வடிவியல் வடிவங்களான புள்ளி, நேர்கோடு, வட்டம், பரவளையம், நீள்வட்டம் மற்றும் அதிபரவளையம் போன்றவற்றை கார்ட்டீசியன் முறையில் வரையறுக்க இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல் பயன்படுகின்றது. கூம்பின் வளைவரைகளைப் பற்றி படிப்பது ஆச்சரியமூட்டும் கருத்துக்கள் பெறத் தூண்டுவதாகவும். சவாலாகவும் உற்சாகமூட்டுவதாகவும் இருந்ததால், இரண்டாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்னரே ($\approx 2-1$ கி.மு(பொஆ.மு)), பண்டைய கிரேக்கர்கள் கூம்பு வளைவரை பற்றி படித்தனர். பகுமுறை வடிவ கணிதம், முதன்மையாக டி–கார்ட்டே(Descartes) மற்றும் பெர்மெட் (Fermat), கெப்ளர் (Kepler), நியூட்டன் (Newton), ஆய்லர் (Euler), லீப்னிட்ஸ் (Leibniz), லோ பிதால் (l'Hôpital), கிளாரட் (Clairaut), கிராமர் (Cramer), ஜாகோபிஸ் (Jacobis). போன்ற மாபெரும் கணித மேதைகளால் 17–ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் முறையாக மேம்படுத்தப்பட்டது.

வடிவ கணித பிரச்சினைகளைத் தீர்ப்பதற்குரிய சீரான வழிமுறைகளை நிறுவுவதற்கான தேவையின் அடிப்படையில் பகுமுறை வடிவியல் வளர்ந்தது. பகுமுறை வடிவியலின் வளர்ச்சி இன்றைய தொழில், மருத்துவம் மற்றும் அறிவியல் ஆய்வு ஆகியவற்றை வென்றுவிட்டது எனில் அது மிகையாகாது. அவர்கள் கற்பனையிலும் காணாத அளவிற்கு பின்வரும் நூற்றாண்டுகளில் இந்த வளைவரைகளின் பயன்பாடு உள்ளது.

ஜெர்மென் கணிதமேதையும் இயற்பியல் அறிஞருமான ஜொகன்ஸ் கெப்ளர் (Johanes Kepler)-ன் தலைகீழ் வர்க்க விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு பூமி சூரியனை ஒரு குவியமாகக் கொண்டு நீள்வட்டப் பாதையில் சுற்றுகின்றது என்பது உட்பட கோள்கள் இயக்கம் பற்றிய எடுகோள்களின் தேற்றத்தின் ஊடாக பகுமுறை வடிவியல் பற்றிய ஆய்வு யூகிளீடின் (Euclidean Geometry) வடிவகணிதத்தை ஆயத் தொலைகள் மூலம் நிறுவ வழிவகுத்தது. ஆய்லர் (Euler), வெளி வளைவரைகள் மற்றும் வளைதளப் பரப்புகள் பற்றிய தனது ஆய்வில் பகுமுறை வடிவியலைப் பயன்படுத்தினார். ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டீன் (Albert Einstein) தனது சார்புக் கொள்கையில் மேலும் இதனை மேம்படுத்தினார்.

சக்கரங்கள், பற்சக்கரங்கள், அணைக்கட்டுகளின் மதகுகள், வட்டவடிவியலின் மூலம் முக்கோணவியல் என்று பல இடங்களில் வட்டத்தின் பண்புகளும்; வளைவுகள், தொலைக்காட்சி துணைக்கோள் கிண்ண ஏற்பி, சூரிய அடுப்புகள், முகப்பு விளக்குகள், தொங்கு பாலங்கள், தேடும் விளக்குகள் போன்றவைகளில் பரவளையத்தின் பண்புகளும்; வளைவுகள், மருத்தவத்துறையில் லித்தோ டிரப்டர், நீள்வட்ட எதிரொளிப்பான் போன்று வடிவமைக்கப்பட்டிருக்கும் (Wispering Gallery) கூரை, அறிவியல் ஆய்வுகளில் மிகப் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் Nd: yag லேசர் மற்றும் நீள்வட்ட பற்சக்கரங்கள் போன்றவற்றில் நீள்வட்டத்தின் பண்புகளும்; தொலைநோக்கிகள், அனல்மின் நிலைய குளிரவைக்கும் கோபுரங்கள், கப்பல்கள் அல்லது விமானங்கள் நகரும் இடங்களைக் காணல் போன்ற இடங்களில் அதிபரவளையப் பண்புகளுமாக பல துறைகளில் கூம்பு வளைவரைகள் பயன்படுகின்றது.



படம் 5.1

படம் 5.2

படம் 5.3

படம் 5.4

படம் 5.5

படம் 5.8

ஓர் ஓட்டுநர் வளைதளத்தில் பெறப்பட்ட ஆணைகளுக்கான புத்தகங்களைக் கொண்டு சேர்க்கும் பணியில் இருந்தார். டிரக்கின் அகலம் 3 மீ, உயரம் 2.7 மீ, டிரக்கை ஓட்டும்போது ஒரு நீள்வட்ட நுழைவு கொண்ட சுரங்கப் பாதையின் முன் இருந்த எச்சரிக்கையைக் கண்டார். எச்சரிக்கை! சுரங்கப்பாதையின் மைய உயரம் 3 மீ எனவும் மற்றுமொரு எச்சரிக்கையில் எச்சரிக்கை! சுரங்கப்பாதையின் அகலம் 12மீ எனவும் இருந்தது. சுரங்கப்பாதையின் அந்த வளைவு வழியே அந்த டிரக் செல்ல முடியுமா? இதுபோன்ற வினாக்களுக்கு இந்தப் பாடப் பகுதியின் முடிவில் விடையளிக்க இயலும்

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது பின்வருவனவற்றை மாணவர்கள் அறிந்திருப்பர்

- வட்டம், பரவளையம், நீள்வட்டம் மற்றும் அதிபரவளையம் ஆகியவற்றின் திட்ட சமன்பாடுகளைக் காணல்
- கூம்பு வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளிலிருந்து மையம், முனைகள், குவியங்கள் போன்றவற்றை காணல்
- கூம்பு வளைவரைகளின் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளை வருவித்தல்
- கூம்பு வளைவரைகள் மற்றும் அவற்றின் சிதைந்த வடிவங்களை வகைப்படுத்துதல்
- கூம்பு வளைவரைகளின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் மற்றும் அவற்றின் பயன்பாடுகள்
- அன்றாட வாழ்க்கையில் கூம்பு வளைவரைகளின் பயன்பாடுகள்.

5.2 வட்டம் (Circle)

வட்டம் என்ற வார்த்தை கிரேக்கத்தில் இருந்து தோன்றியது. மேலும் கி.மு. 17ஆம் நூற்றாண்டுகளில் வட்டங்கள் பற்றிய குறிப்புகள் உள்ளது. நிலவு, சூரியன், நீரில் ஏற்படும் சுழல்கள் என இயற்கையில் பல இடங்களில் நாம் வட்டத்தைக் காணலாம். சக்கரத்தின் அடிப்படை வட்டம் மேலும் நவீன இயந்திரங்கள் பலவற்றில் பயன்படும் பற்சக்கரம் போன்றவைகள் உருவாக காரணமானது வட்டம். கணிதத்தில் வட்டங்களைப் பற்றி படிப்பது, வடிவியல், வானஇயல் மற்றும் நுண்கணிதம் போன்றவற்றின் வளர்ச்சிக்கு ஊக்கமளிப்பதாக இருக்கின்றது. ஃபோர்–சோமர்பீல்ட்–டின் அணுக்கோட்பாட்டின் எலக்ட்ரான் சுற்றுப்பாதை வட்டவடிவமாகவும் இருக்கும்.

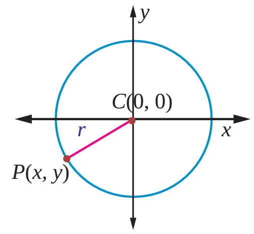
வரையறை 5.1

ஒரு தளத்தில் உள்ள நிலைப்புள்ளியிலிருந்து மாறாத தூரத்தில் அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை வட்டம் ஆகும். அந்த நிலைப்புள்ளி வட்டத்தின் **மையம்** என்றும் மாறாத தூரம் அந்த வட்டத்தின் **ஆரம்** என்றும் அழைக்கப்படும்.

5.2.1 வட்டச் சமன்பாட்டின் திட்டவடிவம்

(Equation of a circle in standard form)

(i) மையம் (0, 0) மற்றும் ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு



படம் 5.7

மையம் $C(0,0)$, ஆரம் r மற்றும் $P(x,y)$ ஒரு நகரும் புள்ளி என்க.

P என்ற புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x,y) என்பது $P(x,y)$ என குறிக்கப்படுவதைக் கவனிக்க.

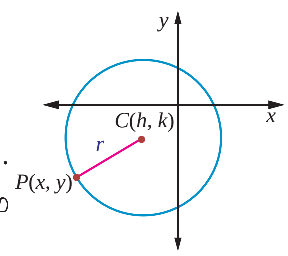
$$CP = r \quad \text{மற்றும்} \quad CP^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

இது மையம் $(0,0)$, ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

(ii) மையம் (h, k) மற்றும் ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு



படம் 5.8

மையம் $C(h,k)$, ஆரம் r மற்றும் நகரும் புள்ளி $P(x,y)$ என்க.

தற்போது $CP = r$ எனவே $CP^2 = r^2$, அதாவது $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. இது வட்டத்தின் திட்டவடிவச் சமன்பாடு ஆகும். இது மைய–ஆர வடிவம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை விரிவுபடுத்த

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ எனக்கிடைக்கின்றது.

இங்கு $2g = -2h, 2f = -2k, c = h^2 + k^2 - r^2$ எனக்கொண்டால் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வடிவத்தைப் பெறும். இது வட்டத்தின் பொது வடிவம் எனப்படும்.

சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது பின்வரும் பண்புகளைக் கொண்ட x, y என்ற மாறிகளில் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும்.

(i) இது x, y இல் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடு

(ii) x^2 -ன் கெழு $=$ y^2 -ன் கெழு $\neq 0$,

(iii) xy -ன் கெழு $= 0$.

மறுதலையாக மேற்கண்ட பண்புகள் உடைய ஒரு சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிக்கும் என நிறுவலாம்.

$ax^2 + ay^2 + 2g'x + 2f'y + c = 0$ எனில், ... (1)

இது x, y -ல் அமைந்த, பண்புகள் (i), (ii) மற்றும் (iii) உடைய இருபடிச்சமன்பாடு, மேலும் $a \neq 0$. a -ஆல் (1)ஐ வகுக்க

$x^2 + y^2 + \frac{2g'}{a}x + \frac{2f'}{a}y + \frac{c'}{a} = 0$ என கிடைக்கும். ... (2)

$\frac{g'}{a} = g, \frac{f'}{a} = f$, $\frac{c'}{a} = c$ என எடுத்துக்கொண்டால் சமன்பாடு (2) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என மாறும்.

g^2 மற்றும் f^2 -ஐ கூட்டி, கழிக்க பின்வரும் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 - g^2 - f^2 + c = 0$$

$$(x+g)^2+(y+f)^2 = g^2+f^2-c$$

$$(x-(-g))^2+(y-(-f))^2 = \left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2$$

இது திட்ட வடிவில் உள்ளதால் வட்டத்தின் மையம் $(-g,-f)$ மற்றும் ஆரம் $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ஆகும். எனவே சமன்பாடு (1), $(-g,-f)=\left(\frac{-g'}{a},\frac{-f'}{a}\right)$-ஐ மையமாகவும்

ஆரம் $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\frac{1}{a}\sqrt{g'^2+f'^2-c'a}$ உள்ள ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

குறிப்புரை

மையம் $(-g,-f)$ மற்றும் ஆரம் $\sqrt{g^2+f^2-c}$ உடைய $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற சமன்பாடு

(i) $g^2+f^2-c>0$ எனில் மெய்வட்டத்தைக் குறிக்கும்;

(ii) $g^2+f^2-c=0$ எனில் ஒரு புள்ளி வட்டத்தைக் குறிக்கும் ;

(iii) மற்றும் $g^2+f^2-c<0$ எனில் நியமப்பாதையற்ற ஒரு கற்பனை வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.1

மையம் $(-3,-4)$ மற்றும் ஆரம் 3 அலகுகள் கொண்ட வட்டத்தின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் திட்ட வடிவச் சமன்பாடு $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$\Rightarrow \quad (x-(-3))^2+(y-(-4))^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+3)^2+(y+4)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+6x+8y+16 = 0$$ இது பொது வடிவம் ஆகும். ■

தேற்றம் 5.1

$lx+my+n=0$ என்ற நேர்கோடும் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டமும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}^1$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

நிரூபணம்

வட்டம் S : $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$, ... (1)

மற்றும் நேர்கோடு L : $lx+my+n = 0$ என்க. ... (2)

$S+\lambda L=0$ -ஐ கருத்தில் கொள்க.

அதாவது $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$ -ன் x, y உறுப்புகள் மற்றும் மாறிலிகளை ஒன்று சேர்க்கக் கிடைப்பது ... (3)

$x^2+y^2+x(2g+\lambda l)+y(2f+\lambda m)+c+\lambda n=0$ இது x, y -இல் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடு மேலும் இங்கு xy உறுப்பு இல்லை, மற்றும் x^2, y^2 கெழுக்கள் சமமாக உள்ளதால் $S+\lambda L=0$ என்பது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். (α,β) என்ற புள்ளி S மற்றும் L–இன் வெட்டும் புள்ளியானால் சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2)–ஐ நிறைவு செய்கின்றன. எனவே இது சமன்பாடு (3)–ஐயும் நிறைவு செய்கிறது. எனவே $S+\lambda L=0$ என்பது தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 5.2

$x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்தின் நாண் $3x+y+5=0$ -ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

தேற்றம் 5.1–ன் படி $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டமும் $3x+y+5=0$ என்ற நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-16+\lambda(3x+y+5)=0$. இந்த வட்டத்தின் மையம் $\left(\frac{-3\lambda}{2},\frac{-\lambda}{2}\right)$. இது $3x+y+5=0$ என்ற கோட்டின் மீதுள்ளதால்

$$3\left(\frac{-3\lambda}{2}\right)-\frac{\lambda}{2}+5=0,$$
$$\Rightarrow \frac{-9\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+5=0,$$
$$\Rightarrow -5\lambda+5=0,$$
$$\Rightarrow \lambda=1.$$

எனவே, தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+3x+y-11=0$.

எடுத்துக்காட்டு 5.3

$x^2+y^2-6x+4y+c=0$ என்ற வட்டத்திற்கு c-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $x+y-1=0$ என்ற நேர்க்கோடு விட்டமாக அமையுமா எனத் தீர்மானிக்க.

தீர்வு

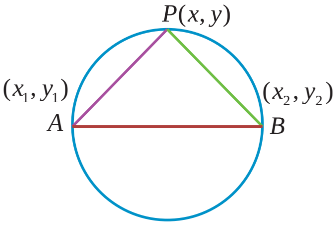
கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் $(3,-2)$. இது $x+y-1=0$-ல் உள்ளது. எனவே $x+y-1=0$ என்ற கோடு c-இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் வட்டத்தின் மையம் வழிச்செல்லும் ஆதலால் $x+y-1=0$ என்ற கோடு c-இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் வட்டத்தின் விட்டமாக அமையும்.

தேற்றம் 5.2

ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் (x_1,y_1) மற்றும் (x_2,y_2) எனில் அந்த வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ஆகும்.

நிரூபணம்

AB என்ற விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ என்க. மேலும் $P(x,y)$ வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. அப்பொழுது $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ (அரைவட்டத்தில் தாங்கும் கோணம்) எனவே AP, PB என்பவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்கல் -1.



படம் 5.9

$$\left(\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)}\right)\left(\frac{(y-y_2)}{(x-x_2)}\right)=-1$$ இதிலிருந்து வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ எனக்கிடைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

$(-4,-2)$ மற்றும் $(1,1)$ என்ற புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

தேற்றம் 5.2 –ன் படி (x_1,y_1) மற்றும் (x_2,y_2) என்ற புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$$\Rightarrow (x+4)(x-1)+(y+2)(y-1)=0$$

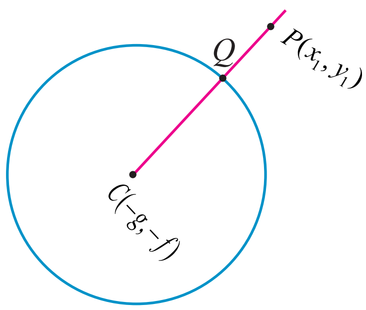
எனவே தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+3x+y-6=0$.

தேற்றம் 5.3

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்தைப் பொறுத்து $P(x_1,y_1)$ என்ற புள்ளியின் நிலை,

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$ ன் மதிப்பு $\begin{cases} >0 & \text{அல்லது} \\ =0 & \text{அல்லது} \\ <0. \end{cases}$ –க்கு தகுந்தாற்போல் முறையே வட்டத்தின் வெளியே, வட்டத்தின் மேல் அல்லது வட்டத்தின் உள் அமையும்.

நிரூபணம்



படம் 5.10

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் C $(-g,-f)$

ஆரம் $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

$P(x_1,y_1)$ என்ற புள்ளி வட்டம் உள்ள தளத்தில் உள்ளது என்க.

CP –ஐ இணைத்து அது வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி Q என்க.

P என்ற புள்ளி $|CP|$-ன் மதிப்பு $\begin{cases} >|CQ| & \text{அல்லது} \\ =|CQ| & \text{அல்லது} \\ <|CQ|. \end{cases}$ என்ற நிலைக்கு ஏற்ப முறையே வட்டத்திற்கு வெளியே வட்டத்தின் மீது அல்லது வட்டத்தின் உள்ளே அமையும்.

அதாவது CP^2 -ன் மதிப்பு $\begin{cases} >r^2 & \text{அல்லது} \\ =r^2 & \text{அல்லது} \quad \{CQ=r\}, \\ <r^2. \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1+g)^2+(y_1+f)^2$ -ன் மதிப்பு $\begin{cases} >g^2+f^2-c & \text{அல்லது} \\ =g^2+f^2-c & \text{அல்லது} \\ <g^2+f^2-c. \end{cases}$

எனவே $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$ -ன் மதிப்பு $\begin{cases} >0 & \text{அல்லது} \\ =0 & \text{அல்லது} \\ <0. \end{cases}$

ஏற்ப புள்ளி $P(x_1,y_1)$ வட்டத்திற்கு வெளியே வட்டத்தின் மீது அல்லது வட்டத்தின் உள்ளே அமையும். ■

எடுத்துக்காட்டு 5.5

$x^2+y^2-6x-8y+12=0$ என்ற வட்டத்தைப் பொறுத்து $(2,3)$ என்ற புள்ளியின் நிலையை ஆராய்க.

தீர்வு

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=2^2+3^2-6\times2-8\times3+12,$$
$$=4+9-12-24+12 \ =-11<0.$$

எனவே புள்ளி $(2,3)$ தேற்றம் 5.3-ன் படி வட்டத்திற்கு உள்ளே அமையும். ■

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$3x+4y-12=0$ என்ற நேர்க்கோடு ஆய அச்சுகளை A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. கோட்டுத்துண்டு AB –ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

நேர்க்கோடு $3x+4y=12$ -ஐ வெட்டுத்துண்டு வடிவில் எழுத $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ எனக் கிடைக்கும். எனவே புள்ளிகள் A மற்றும் B முறையே $(4,0)$ மற்றும் $(0,3)$.

வட்டத்தின் சமன்பாடு விட்ட வடிவம்

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$
$$(x-4)(x-0)+(y-0)(y-3) = 0$$
$$x^2+y^2-4x-3y = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

ஒரு நேர்க்கோடு $3x+4y+10=0$, மையம் $(2,1)$ உள்ள ஒரு வட்டத்தில் 6 அலகுகள் நீளமுள்ள ஒரு நாணை வெட்டுகின்றது. அந்த வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

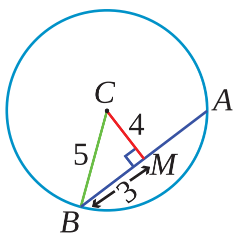
மையம் (2, 1) உடைய வட்டத்தில் $3x+4y+10=0$ என்ற நேர்க்கோடு AB என்ற நாணை வெட்டுகின்றது. AB –ன் மையப்புள்ளி M என்க.

$AM = BM = 3$. BMC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்

$$CM = \frac{|3(2)+4(1)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4.$$

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி $BC^2 = BM^2+MC^2 = 3^2+4^2 = 25$.

$BC = 5 =$ ஆரம்



படம் 5.11

தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-2)^2+(y-1) = 5^2$

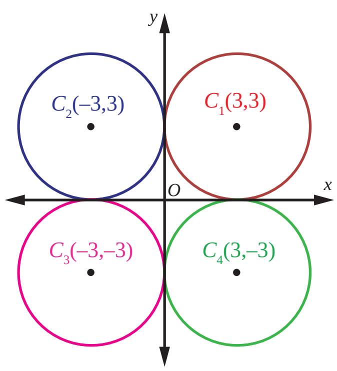
அதாவது $x^2+y^2-4x-2y-20 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 5.8

ஆரம் 3 அலகுகள் கொண்ட ஒரு வட்டம் ஆய அச்சுகளைத் தொட்டுச் செல்கின்றவாறு உருவாகும் அனைத்து வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

தீர்வு

வட்டம் இரு அச்சுகளையும் தொட்டுச் செல்வதால் அச்சுகளிலிருந்து வட்டத்தின் மையத்திற்கு உள்ள தூரம் 3 அலகுகள். எனவே மையம் $(\pm3,\pm3)$ ஆக இருக்கும். அதனால் ஆரம் 3 உடைய நான்கு வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $x^2+y^2\pm6x\pm6y+9=0$ ஆகும்.



படம் 5.12

எடுத்துக்காட்டு 5.9

ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2+(a+1)y^2+6x-9y+a+4=0$ எனில் அதன் மையம், ஆரம் காண்க.

தீர்வு

x^2 –ன் கெழு $=$ y^2 –ன் கெழு (இருபடிச் சமன்பாட்டின் பண்பு (ii)–ன் படி)

ஆதலால் $3=a+1$, $a=2$ எனக்கிடைக்கின்றது. எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$3x^2+3y^2+6x-9y+6 = 0$$
$$x^2+y^2+2x-3y+2 = 0$$

மையம் $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ மற்றும் ஆரம் $r = \sqrt{1+\frac{9}{4}-2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

எடுத்துக்காட்டு 5.10

$(1,1)$, $(2,-1)$, மற்றும் $(3,2)$ என்ற மூன்று புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (1)

இது $(1,1),(2,-1)$ மற்றும் $(3,2)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்வதால்

$$2g+2f+c = -2, \quad \ldots (2)$$
$$4g-2f+c = -5, \quad \ldots (3)$$
$$6g+4f+c = -13. \quad \ldots (4)$$

$(2)-(3)$-இலிருந்து $\quad -2g+4f = 3.$ ... (5)

$(4)-(3)$-இலிருந்து $\quad 2g+6f = -8.$ ... (6)

$(5)+(6)$-இலிருந்து $f = -\frac{1}{2}$ என கிடைக்கும் மதிப்பை (6)இல் பிரதியிட $g=\frac{-5}{2}$, f,g இன் மதிப்புகளை (2)இல் பிரதியிட $c=4$ எனவும் கிடைக்கிறது.

எனவே தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2\left(-\frac{5}{2}\right)x+2\left(-\frac{1}{2}\right)y+4 = 0$$

அதாவது $x^2+y^2-5x-y+4 = 0.$ ■

5.2.2 வட்டத்தின் மீதமைந்த *P* என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகள்

(Equations of tangent and normal at a point *P* on a given circle)

ஒரு நேர்கோடு வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொட்டுச்சென்றால் அது தொடுகோடாகும். மேலும் அந்த தொடுகோட்டுக்குச் செங்குத்தாகவும் தொடுபுள்ளி வழியாகவும் செல்லும் கோடு செங்கோடாகும்.

$P(x_1,y_1)$ மற்றும் $Q(x_2,y_2)$ என்பன $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்தின் மீதமைந்த இரு புள்ளிகள் என்க.

எனவே, $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c = 0$ ... (1)

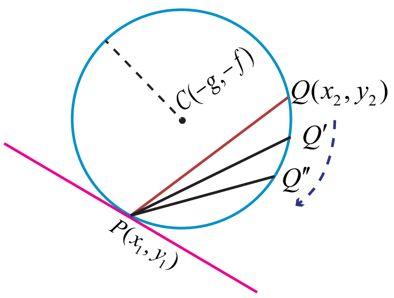
மற்றும் $x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c = 0$,,, (2)

$(2)-(1)$-இலிருந்து

$$x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0$$

$$(x_2-x_1)(x_2+x_1+2g)+(y_2-y_1)(y_2+y_1+2f)=0$$

$$\frac{x_2+x_1+2g}{y_2+y_1+2f} = -\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$$



படம் 5.13

இதனால் PQ -இன் சாய்வு $= -\dfrac{(x_1+x_2+2g)}{(y_1+y_2+2f)}$.

Q என்ற புள்ளி P–ஐ நோக்கி நகரும்போது PQ என்ற நாண் P என்ற புள்ளிக்கான தொடுகோடாக மாறும்.

தொடுகோட்டின் சாய்வு $-\dfrac{(2x_1+2g)}{(2y_1+2f)} = -\dfrac{(x_1+g)}{(y_1+f)}$.

எனவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y-y_1 = -\dfrac{(x_1+g)}{(y_1+f)}(x-x_1)$ -இலிருந்து,

$$yy_1+fy-y_1^2-fy_1+xx_1-x_1^2+gx-gx_1 = 0$$

$$xx_1+yy_1+gx+fy-(x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1) = 0 \qquad ...(1)$$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளி வட்டத்தின் மீதுள்ளதால் $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$

எனவே, $-(x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1) = gx_1+fy_1+c$. ...(2)

இதனால் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ ஆகும்.

மேலும் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $(y-y_1) = \dfrac{(y_1+f)}{(x_1+g)}(x-x_1)$

$$\Rightarrow \quad (y-y_1)(x_1+g) = (y_1+f)(x-x_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_1(y-y_1)+g(y-y_1) = y_1(x-x_1)+f(x-x_1)$$

$$\Rightarrow \quad yx_1-xy_1+g(y-y_1)-f(x-x_1) = 0$$ சமன்பாடுகள்

குறிப்புரை

(1) $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $xx_1+yy_1=a^2$.

(2) $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் செங்கோட்டுச் சமன்பாடு $xy_1-yx_1=0$.

(3) செங்கோடு வட்டத்தின் மையம் வழிச் செல்லும்.

5.2.3 $y=mx+c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடாக இருக்க கட்டுப்பாடு மற்றும் தொடும் புள்ளி காணல் (Condition for the line $y=mx+c$ to be a tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$ and finding the point of contact)

$y=mx+c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தைத் தொடுகின்றது என்க. இந்த வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் முறையே $(0,0)$ மற்றும் a ஆகும்.

(i) ஒரு நேர்க்கோடு தொடுகோடாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு (Condition for a line to be tangent)

$(0,0)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $y-mx-c=0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கான செங்குத்து தூரம்

$\left|\dfrac{0-m.0-c}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \dfrac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}$. இது ஆரத்திற்குச் சமம்.

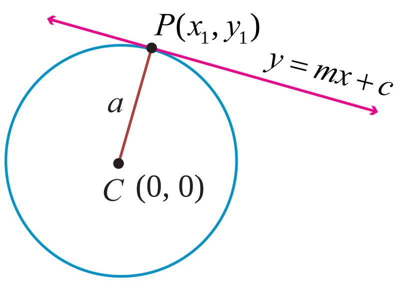
எனவே $\dfrac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = a$ அல்லது $c^2 = a^2(1+m^2)$.

இதனால் $y = mx + c$ என்ற நேர்கோடு '$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைய கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1+m^2)$.

(ii) தொடுபுள்ளி (Point of contact)

$y = mx + c$ என்ற நேர்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தை தொடும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில்

$$y_1 = mx_1 + c. \qquad \text{... (1)}$$



படம் 5.14

(x_1, y_1) -இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.

$$yy_1 = -xx_1 + a^2 \qquad \text{... (2)}$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கின்றன. எனவே கெழுக்கள் விகித சமமாக இருக்கும்.

$$\text{அதனால்,}\quad \frac{y_1}{1} = \frac{-x_1}{m} = \frac{a^2}{c}$$

$$y_1 = \frac{a^2}{c}, x_1 = \frac{-a^2 m}{c},\ c = \pm a\sqrt{1+m^2}.$$

அதனால் தொடுபுள்ளி (1) $\left(\dfrac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ அல்லது

(2) $\left(\dfrac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \dfrac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$.

குறிப்பு

P என்ற புள்ளியில் வட்டத்தின் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$.

தேற்றம் 5.4

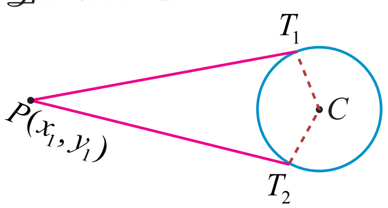
$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ளது என்க. தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$. இது (x_1, y_1) வழிச்செல்லும். எனவே

$$y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2}$$

$y_1 - mx_1 = a\sqrt{1+m^2}$. இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,



படம் 5.15

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$$

$$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 - a^2 - a^2m^2 = 0$$

$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1^2 - a^2) = 0.$$

m -ன் இந்த இருபடிச் சமன்பாடு, m க்கு இரண்டு மதிப்புகள் தரும். இந்த இருமதிப்புகள் வட்டத்திற்கான இரு தொடுகோடுகளைத் தரும். ■

குறிப்பு

(1) புள்ளி (x_1, y_1) வட்டத்திற்கு வெளியில் அமையுமானால் இரு தொடுகோடுகளும் மெய்யானவையாகும்.

(2) புள்ளி (x_1, y_1) வட்டத்திற்கு உள்ளே அமையுமானால் இரு தொடுகோடுகளும் கற்பனையானவையாகும்.

(3) புள்ளி (x_1, y_1) வட்டத்தின் மீது அமையுமானால் இரு தொடுகோடுகளும் ஒன்றாக இணையும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.11

$x^2 + y^2 = 25$ என்ற வட்டத்திற்கு $P(-3,4)$ -இல் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

$P(x_1, y_1)$ -இல் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 = a^2$.

அதாவது, $(-3,4)$ -இல் $x(-3) + y(4) = 25$

$-3x + 4y = 25$

செங்கோட்டுச் சமன்பாடு $xy_1 - yx_1 = 0$

அதாவது, $4x + 3y = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 5.12

$y = 4x + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடு எனில் c -ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு

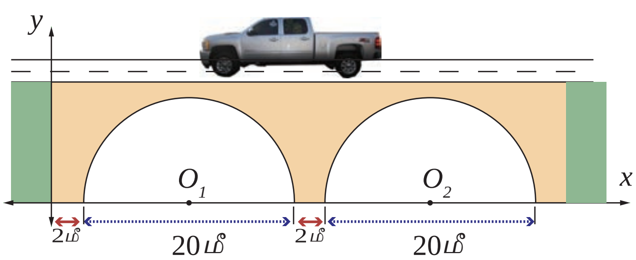
$y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு $c^2 = a^2(1 + m^2)$.

எனவே, $c = \pm\sqrt{9(1+16)}$

அல்லது $c = \pm 3\sqrt{17}$.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

பாசன வாய்க்கால் மீது அமைந்த சாலையில் 20மீ அகலமுடைய இரண்டு அரைவட்ட வளைவு நீர்வழிகள் அமைக்கப்பட்டன. அவற்றின் துணைத்தூண்களின் அகலம் 2 மீ. படம் 5,16-ஐப் பயன்படுத்தி அந்த வளைவுகளின் மாதிரிக்கான சமன்பாடுகளைக் காண்க.



படம் 5.16

தீர்வு

அரைவட்ட வளைவு வழிகளின் மையப்புள்ளிகள் O_1 மற்றும் O_2 என்க.

முதல் வளைவு வழியின் மையம் O_1 $(12,0)$ மற்றும் $r = 10$. இதிலிருந்து அந்த அரைவட்டத்தைக் குறிக்கும் சமன்பாடு

$$(x-12)^2 + (y-0)^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 24x + 44 = 0, \ y > 0.$$

இரண்டாம் வளைவு வழியின் மையம் O_2 $(34,0)$ மற்றும் ஆரம் $r = 10$. முதல் வளைவு போல இரண்டாம் வளைவு வழியின் சமன்பாடு

$$(x-34)^2 + y^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 68x + 1056 = 0, \ y > 0.$$

பயிற்சி 5.1

1. ஆரம் 5 செ.மீ. அலகுகள் உடையதும், x-அச்சை ஆதிப்புள்ளியில் தொட்டுச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைத் தருவிக்க.

2. $(2,-1)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், $(3,6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
3. இரு அச்சுக்களையும் தொட்டுச் செல்வதும், $(-4,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
4. மையம் $(2,3)$ உடையதும் $3x-2y-1=0$ மற்றும் $4x+y-27=0$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
5. $(3,4)$ மற்றும் $(2,-7)$ என்ற புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.
6. $(1,0)$, $(-1,0)$, மற்றும் $(0,1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
7. 9π சதுர அலகுகள் பரப்பு கொண்ட வட்டத்தின் விட்டங்கள், $x+y=5$ மற்றும் $x-y=1$ என்ற நேர்கோடுகள் மீது அமைந்துள்ளன எனில் அந்த வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
8. $y=2\sqrt{2}x+c$ என்ற கோடு $x^2+y^2=16$, என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடு எனில், c -ன் மதிப்பு காண்க.
9. $x^2+y^2-6x+6y-8=0$ என்றவட்டத்தின்தொடுகோடுமற்றும்செங்கோட்டுச்சமன்பாடுகளை $(2,2)$ என்ற புள்ளியில் காண்க.
10. $(-2,1),(0,0)$ மற்றும் $(-4,-3)$ என்ற புள்ளிகள் $x^2+y^2-5x+2y-5=0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்டத்தின் மீது அல்லது உள்ளே இவற்றில் எங்கே உள்ளன எனத் தீர்மானிக்கவும்.
11. பின்வரும் வட்டங்களுக்கு மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.
    (i) $x^2+(y+2)^2=0$ (ii) $x^2+y^2+6x-4y+4=0$
    (iii) $x^2+y^2-x+2y-3=0$ (iv) $2x^2+2y^2-6x+4y+2=0$
12. $3x^2+(3-p)xy+qy^2-2px=8pq$ என்றசமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனில் p மற்றும் q -ன் மதிப்பு காண்க. மேலும் அந்த வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.

CHPJZ

5.3. கூம்பு வளைவுகள் (Conics)

வரையறை 5.2

ஒரு தளத்தில் ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து நிலைப்புள்ளிக்கு உள்ள தூரத்திற்கும் நகரும் புள்ளியிலிருந்து நிலைப்புள்ளி வழிச்செல்லாத ஒரு நிலைக்கோட்டிற்குமான தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் ஒரு மாறிலியாக இருக்குமாறு நகரும் எனில் அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு கூம்பு வளைவு (வளைவரை) எனப்படும்.

நிலைப்புள்ளி குவியம் எனப்படும். நிலைக்கோடு இயக்குவரை எனப்படும் மற்றும் மாறாத விகிதம் மையத் தொலைத்தகவு எனப்படும். இது 'e' என குறிக்கப்படும்.

(i) இந்த மாறிலி $e=1$ எனில் கூம்பு வளைவரை பரவளையம் எனப்படும்.

(ii) இந்த மாறிலி $e<1$ எனில் கூம்பு வளைவரை நீள்வட்டம் எனப்படும்.

(iii) இந்த மாறிலி $e>1$ எனில் கூம்பு வளைவரை அதிபரவளையம் எனப்படும்.

5.3.1 கூம்பு வளைவின் பொதுச் சமன்பாடு (The general equation of a Conic)

நிலைப்புள்ளி $S(x_1,y_1)$ l, நிலைக்கோடு, e மையத் தொலைத்தகவு மற்றும் $P(x,y)$ நகரும் புள்ளி என்க. கூம்பு வரையறையின்படி

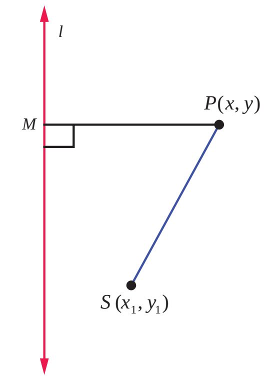
$$\frac{SP}{PM} = \text{மாறிலி} = e, \quad ...(1)$$

$$SP = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$PM = P(x, y)$ -இலிருந்து நேர்க்கோடு

$lx+my+n=0$ -க்கான செங்குத்து தூரம்

$$= \left|\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|.$$



படம் 5.17

மேலும் $SP^2 = e^2 PM^2$

$$\Rightarrow \quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = e^2\left[\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right]^2.$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை சுருக்க இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ எனக்கிடைக்கும்.

இங்கு $A = 1-\dfrac{e^2l^2}{l^2+m^2}$, $B = \dfrac{2lme^2}{l^2+m^2}$, $C = 1-\dfrac{e^2m^2}{l^2+m^2}$

தற்போது $B^2-4AC = \dfrac{4l^2m^2e^4}{\left(l^2+m^2\right)^2} - 4\left(1-\dfrac{e^2l^2}{l^2+m^2}\right)\left(1-\dfrac{e^2m^2}{l^2+m^2}\right)$

$$= 4\left(e^2-1\right)$$

இதிலிருந்து

(i) $B^2-4AC = 0 \;\Leftrightarrow\; e=1$ எனவே கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளையம்,

(ii) $B^2-4AC < 0 \;\Leftrightarrow\; 0<e<1$ எனவே கூம்பு வளைவு ஒரு நீள்வட்டம்,

(iii) $B^2-4AC > 0 \;\Leftrightarrow\; e>1$ எனவே கூம்பு வளைவு ஒரு அதிபரவளையம்.

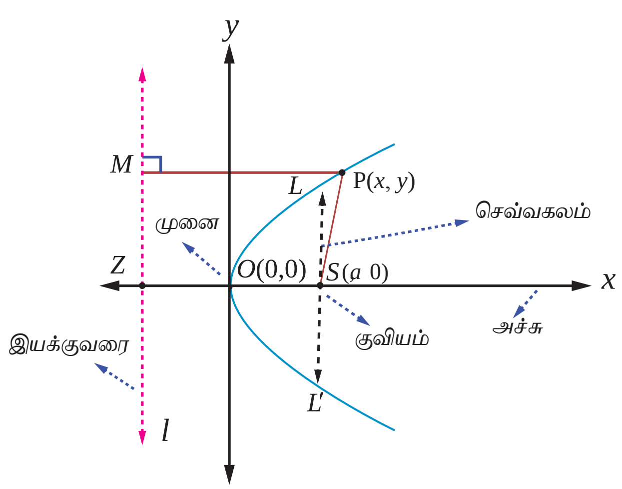
5.3.2 பரவளையம் (Parabola)

பரவளையத்தின் மையத்தொலைத்தகவு $e=1$ என்பதால் ஒரு தளத்தில் குவியம் மற்றும் இயக்குவரைகளுக்கு சமதூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதை பரவளையம் ஆகும்.

(i) முனை (0, 0) உள்ள பரவளைய சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவம் (Equation of a parabola in standard form with vertex at (0, 0)

S குவியம் எனவும் l இயக்குவரை எனவும் கொள்க.

l -க்கு செங்குத்தாக S வழியே SZ வரைக. SZ -ஐ x -அச்சு எனவும் SZ -ன் மையக்குத்துக்கோட்டை y - அச்சு எனவும் கொள்க. மையக்குத்துக்கோடு SZ -ஐ சந்திக்கும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளி O என்க.



படம் 5.18

$SZ = 2a$ எனில், S என்பது $(a,0)$ மற்றும் இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x + a = 0$ ஆகும்.

பரவளையத்தை தரும் நகரும் புள்ளி $P(x, y)$ என்க. இயக்குவரைக்கு செங்குத்தாக PM வரைக. பரவளைய வரையறையின்படி $e = \dfrac{SP}{PM} = 1$. அதாவது $SP^2 = PM^2$.

எனவே, $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$. இதை விரிவுபடுத்திச் சுருக்க $y^2 = 4ax$ எனக் கிடைக்கின்றது. இது பரவளையச் சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவமாகும். பரவளையச் சமன்பாட்டின் மற்ற திட்டவடிவங்கள் $y^2 = -4ax, x^2 = 4ay$, மற்றும் $x^2 = -4ay$ ஆகும்.

வரையறை 5.3

- இயக்குவரைக்கு செங்குத்தாகவும், குவியம் வழியாகவும் செல்லும் நேர்கோடு பரவளையத்தின் ***அச்சு*** எனப்படும்.
- பரவளையம் மற்றும் அதன் அச்சு வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி பரவளையத்தின் **முனை** எனப்படும்.
- பரவளையத்தின் குவியம் வழியாகச் செல்லும் நாண் அப்பரவளையத்தின் **குவி நாண்** எனப்படும்.
- பரவளையத்தின் அச்சுக்கு செங்குத்தாக உள்ள குவிநாண் பரவளையத்தின் **செவ்வகலம்** ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.14

பரவளையம் $y^2 = 4ax$ -ன் செவ்வகல நீளம் காண்க.

தீர்வு

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$.

செவ்வகலம் LL' குவியம் $(a,0)$ வழிச் செல்கின்றது. (படம் 5.18-ஐ பார்க்கவும்)

எனவே L என்பது (a, y_1) ஆகும்.

அதனால் $y_1^2 = 4a^2$.

எனவே $y_1 = \pm 2a$.

செவ்வகலத்தின் முனைப்புள்ளிகள் $(a, 2a)$ மற்றும் $(a, -2a)$ ஆகும்.

எனவே செவ்கலத்தின் நீளம் $LL' = 4a$. ■

குறிப்புரை

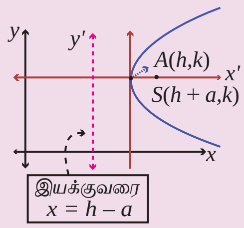
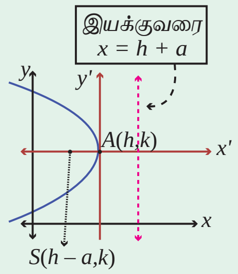
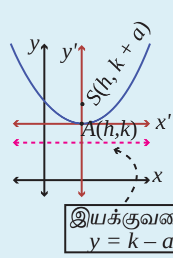
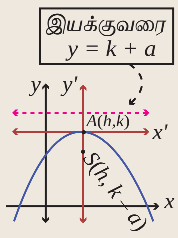
பரவளையச் சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவம் $y^2 = 4ax$ -க்கு முனை $(0,0)$, அச்சு x-அச்சு மற்றும் குவியம் $(a,0)$ ஆக இருக்கும். பரவளையம் $y^2 = 4ax$ முழுவதுமாக x-அச்சின் குறையற்ற பகுதியில் அமையும். $y^2 = 4ax$ -இல் y-க்கு $-y$ பிரதியிட சமன்பாடு மாறாமல் இருக்கின்றது. எனவே பரவளையம் $y^2 = 4ax$, x-அச்சுக்கு சமச்சீராக இருக்கும். அதாவது $y^2 = 4ax$ பரவளைத்தின் சமச்சீர் அச்சு x-அச்சாகும்.

(ii) (h, k) –ஐ முனையாக உடைய பரவளையங்கள்

(Parabolas with vertex at (h, k))

முனை (h,k) மற்றும் அச்சு x-அச்சுக்கு இணை எனில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ அல்லது $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ என இருக்கும் (படம் 5.19, 5.20).

முனை (h,k) மற்றும் அச்சு y-அச்சுக்கு இணை எனில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ அல்லது $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ (படம் 5.21, 5.22).

சமன்பாடு	வரைபடம்	முனைகள்	குவியம்	சமச்சீர் அச்சு	இயக்கு வரையின் சமன்பாடு	செவ்வ கலத்தின் நீளம்
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	 (a) $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ -இன் வரைபடம் படம் 5.19	(h,k)	$(h+a,0+k)$	$y=k$	$x=h-a$	$4a$
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	 (b) $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ -இன் வரைபடம் படம் 5.20	(h,k)	$(h-a,0+k)$	$y=k$	$x=h+a$	$4a$
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	 (c) $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ -இன் வரைபடம் படம் 5.21	(h,k)	$(0+h,a+k)$	$x=h$	$y=k-a$	$4a$
$(x-h)^2 = -4a(y-k)$	 (d) $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ -இன் வரைபடம் படம் 5.22	(h,k)	$(0+h,-a+k)$	$x=h$	$y=k+a$	$4a$

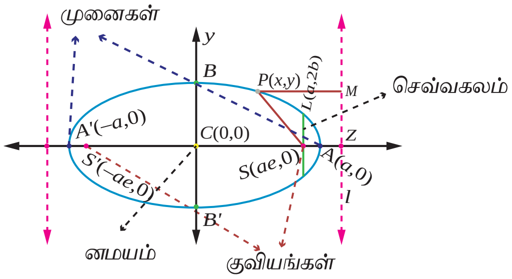
5.3.3 நீள்வட்டம் (Ellipse)

ஒரு தளத்தில், ஒரு நகரும் புள்ளிக்கும் குவியத்திற்கும் உள்ள தூரம் அந்த நகரும் புள்ளிக்கும் இயக்குவரைக்கும் உள்ள தூரத்தைவிடக் குறைவாக e என்ற மாறாத விகிதமுடையதாக $(0<e<1)$ இருப்பின் அந்த நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஓர் நீள்வட்டமாகும்.

(i) மையம் $(0,0)$ உடைய நீள்வட்டச் சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவம்

குவியம் S, இயக்குவரை l, மையத் தொலைத்தகவு e $(0<e<1)$ மற்றும் நகரும் புள்ளி $P(x,y)$ என்க. இயக்குவரை l-க்குச் செங்குத்தாக SZ மற்றும் PM வரைக.

A மற்றும் A' என்ற புள்ளிகள் முறையே SZ-ஐ உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் $e:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன என்க. $AA'=2a$ என்க. AA'-ன் மையக்குத்துக்கோடு AA'-ஐ C-இல் வெட்டுகின்றது என்க.



படம் 5.23

C-ஐ மையமாகவும் CZ-இன் நீட்சியை x-அச்சாகவும், AA'-இன் மையக் குத்துக்கோட்டை y-அச்சாகவும் கொள்க. அதனால் $CA=a$ மற்றும் $CA'=a$ ஆகும்.

வரையறையின்படி

$$\frac{SA}{AZ}=\frac{e}{1} \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{SA'}{A'Z}=\frac{e}{1}$$

$$SA=eAZ \qquad SA'=eA'Z$$

$$CA-CS=e(CZ-CA) \qquad A'C+CS=e(A'C+CZ)$$

$$a-CS=e(CZ-a) \quad \dots(1) \qquad a+CS=e(a+CZ) \quad \dots(2)$$

$(2)+(1)$ இதிலிருந்து $CZ=\dfrac{a}{e}$ மற்றும் $(2)-(1)$ இதிலிருந்து $CS=ae$ எனக்கிடைக்கும்.

எனவே M என்பது $\left(\dfrac{a}{e},y\right)$ மற்றும் S என்பது $(ae,0)$ ஆக இருக்கும்.

வரையறையின்படி $\dfrac{SP}{PM}=e$ அல்லது $SP^2=e^2PM^2$

$$\Rightarrow (x-ae)^2+(y-0)=e^2\left[\left(x-\frac{a}{e}\right)^2+0\right] \text{ இதைச்சுருக்க } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

$1-e^2$ மிகை மதிப்பு எனவே, $b^2=a^2(1-e^2)$ எனவும் $ae=c,\ b^2=a^2-c^2$ எனக்கொண்டால்

இப்போது P-ன் நியமப்பாதை $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ எனக்கிடைக்கும். இது **நீள்வட்டச் சமன்பாட்டின் திட்டவடிவம்** ஆகும். மேலும் வளைவரை x, y அச்சுகளுக்கு சமச்சீராக உள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

வரையறை 5.4

(1) கோட்டுத்துண்டு AA' என்பது **நெட்டச்சு** மற்றும் அதன் நீளம் $2a$ ஆகும்.

(2) கோட்டுத்துண்டு BB' என்பது **குற்றச்சு** மற்றும் அதன் நீளம் $2b$ ஆகும்.

(3) கோட்டுத்துண்டு $CA=$ கோட்டுத்துண்டு $CA'=$ **அரை நெட்டச்சு $=a$** மற்றும் கோட்டுத்துண்டு $CB=$ கோட்டுத்துண்டு $CB'=$ **அரை குற்றச்சு $=b$**.

(4) சமச்சீர் தன்மையினால் குவியம் $S'(-ae,0)$ மற்றும் இயக்குவரை l', $x=-\dfrac{a}{e}$ எடுத்துக்கொண்டாலும் அதே நீள்வட்டம் கிடைக்கும்.

இதன் மூலம் நீள்வட்டத்திற்கு $S(ae,0)$ மற்றும் $S'(-ae,0)$ என இரு குவியங்களும் $A(a,0)$ மற்றும் $A'(-a,0)$ என இரு முனைகளும், $x=\dfrac{a}{e}$ மற்றும் $x=-\dfrac{a}{e}$ என இரு இயக்குவரைகளும் உள்ளதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.15

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ -ன் செவ்வகல நீளம் காண்க.

தீர்வு

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் செவ்வகலம் LL' (படம் 5.22) $S(ae,0)$ வழிச்செல்கின்றது.

எனவே, $L \quad (ae, y_1)$ நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ளது.

அதனால்,

$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y_1{}^2}{b^2} = 1-e^2$$

$$y_1{}^2 = b^2(1-e^2)$$

$$= b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) \qquad \left(\because\ e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$y_1 = \pm\frac{b^2}{a}.$$

அதாவது செவ்வகலத்தின் முனைப்புள்ளிகள் L மற்றும் L' முறையே $\left(ae,\frac{b^2}{a}\right)$ மற்றும் $\left(ae,-\frac{b^2}{a}\right)$ ஆகும்.

செவ்வகலத்தின் நீளம் $LL'=\frac{2b^2}{a}$. ■

(ii) மையம் (h,k) உடைய நீள்வட்டத்தின் வகைகள் (Types of ellipses with centre at (h,k))

(அ) நெட்டச்சு *x*-அச்சுக்கு இணை (Major axis parallel to the *x*-axis)

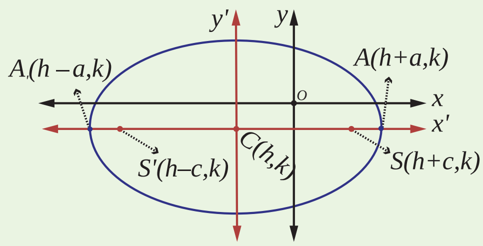
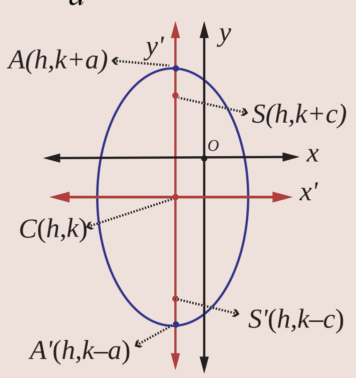
நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு (படம் 5.24) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ a>b$ ஆகும்.

நெட்டச்சின் நீளம் $2a$ மற்றும் குற்றச்சின் நீளம் $2b$ ஆகும். முனைப்புள்ளிகள் $(h+a,k)$ மற்றும் $(h-a,k)$, மேலும் குவியங்கள் $(h+c,k)$ மற்றும் $(h-c,k)$ ஆக இருக்கும். இங்கு $c^2=a^2-b^2$.

(ஆ) நெட்டச்சு *y*-அச்சுக்கு இணை (Major axis parallel to the *y*-axis)

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு (படம் 5.25) $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1,\ a>b$ ஆகும்.

நெட்டச்சின் நீளம் $2a$, குற்றச்சின் நீளம் $2b$ ஆகும். முனைப்புள்ளிகள் $(h,k+a)$ மற்றும் $(h,k-a)$ மேலும் குவியங்கள் $(h,k+c)$ மற்றும் $(h,k-c)$ ஆக இருக்கும். இங்கு $c^2=a^2-b^2$.

சமன்பாடு	மையம்	நெட்டச்சு	முனைகள்	குவியங்கள்
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\boxed{a^2>b^2}$  படம் 5.24 (a) நெட்டச்சு x-அச்சுக்கு இணை குவியங்கள் மையத்திலிருந்து இடப்பக்கமும், வலப்பக்கமும் c அலகுகள் தூரத்தில் இருக்கும். இங்கு $c^2=a^2-b^2$.	(h,k)	x-அச்சுக்கு இணை	$(h-a,k)$ $(h+a,k)$	$(h-c,k)$ $(h+c,k)$
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ $\boxed{a^2>b^2}$  படம் 5.25 (b) நெட்டச்சு y-அச்சுக்கு இணை குவியங்கள் மையத்திலிருந்து இடப்பக்கமும், வலப்பக்கமும் c அலகுகள் தூரத்தில் இருக்கும். இங்கு $c^2=a^2-b^2$.	(h,k)	y-அச்சுக்கு இணை	$(h,k-a)$ $(h,k+a)$	$(h,k-c)$ $(h,k+c)$

தேற்றம் 5.5

நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் குவித்தொலைவுகளின் கூடுதல் அதன் நெட்டச்சின் நீளத்திற்குச் சமம்.

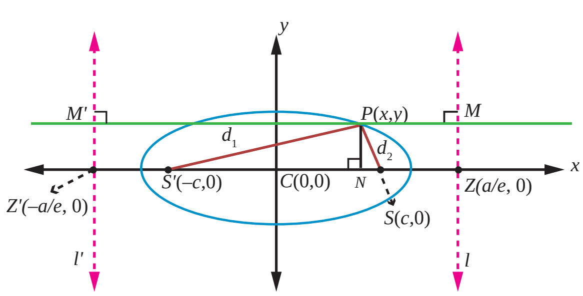
நிரூபணம்

$P(x,y)$ என்பது நீள்வட்டம் $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$-ன் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

P-ன் வழியாக l,l' இயக்குவரைகளுக்கு செங்குத்தாக MM' வரைக.

x-அச்சுக்கு செங்குத்தாக PN வரைக.

வரையறையிலிருந்து



படம் 5.26

$$
\begin{aligned}
SP &= ePM \\
&= eNZ \\
&= e[CZ - CN] \\
&= e\left[\frac{a}{2} - x\right] = a - ex && \dots (1)\\
SP' &= ePM' \\
&= e[CN + CZ'] \\
&= e\left[x + \frac{a}{e}\right] = ex + a && \dots (2)\\
SP + S'P &= a - ex + a + ex = 2a
\end{aligned}
$$

குறிப்புரை

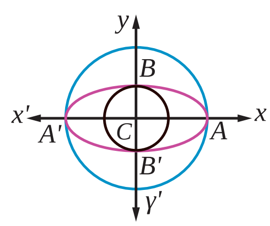
$b = a$ ஆக இருக்கும்போது $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ என்ற சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ என மாறும். இது மையம் (h, k) மற்றும் ஆரம் a உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

$b = a$ ஆக இருக்கும்போது $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2}} = 0$. **எனவே வட்டத்தின் மையத்தொலைத்தகவு பூச்சியம்.**

$\frac{SP}{PM} = 0 \Rightarrow PM \to \infty$. அதாவது வட்டத்தின் இயக்குவரை (முடிவிலியில்) கந்தழியில் உள்ளது எனலாம்.

குறிப்புரை

ஒரு நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் **துணைவட்டம்** அல்லது **சுற்றுவட்டம்** எனப்படும். மேலும் குற்றச்சை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் **உள்வட்டம்** எனப்படும். அவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x^2 + y^2 = a^2$ மற்றும் $x^2 + y^2 = b^2$ ஆகும்.



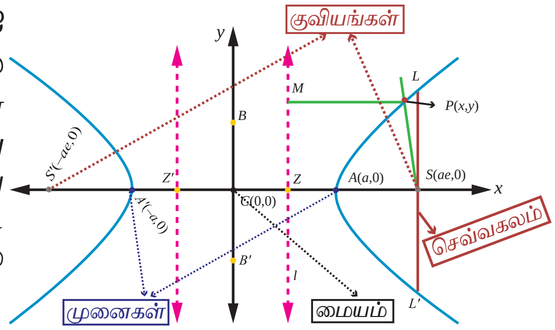
படம் 5.27

5.3.4 அதிபரவளையம் (Hyperbola)

ஒரு தளத்தில், ஒரு நகரும் புள்ளிக்கும் குவியத்திற்கும் உள்ள தூரம் அந்த நகரும் புள்ளிக்கும் இயக்குவரைக்கும் உள்ள தூரத்தைவிட அதிகமாக, e $(e > 1)$ என்ற மாறாத விகிதம் உடையதாக இருப்பின் அந்த நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை ஓர் அதிபரவளையம் ஆகும்.

(i) மையம் $(0,0)$ உடைய நீள்வட்டச் சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவம்

A மற்றும் A' என்ற புள்ளிகள் முறையே SZ-ஐ உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் $e:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன என்க. $AA' = 2a$ என்க. AA' -ன் மையக்குத்துக்கோடு AA' -ஐ C-இல் வெட்டுகின்றது என்க. C-ஐ மையமாகவும் CZ-இன் நீட்சியை x-அச்சாகவும், AA'-இன் மையக் குத்துக்கோட்டை y-அச்சாகவும் கொள்க. அதனால் $CA = a$ மற்றும் $CA' = a$ ஆகும்.



படம் 5.28

வரையறையின்படி $\frac{AS}{AZ}=e$ மற்றும் $\frac{A'S}{A'Z}=e$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ $AS = eAZ$ $\qquad$ $A'S = eA'Z$

$\Rightarrow$ $CS - CA = e(CA - CZ)$ $\qquad$ $A'C + CS = e(A'C + CZ)$

$\Rightarrow$ $CS - a = e(a - CZ) \ldots (1)$ $\qquad$ $a + CS = e(a + CZ) \ldots (2)$

$(1)+(2)$ -இலிருந்து $CS = ae$ மற்றும் $(2)-(1)$ -இலிருந்து $CZ = \frac{a}{e}$ என கிடைக்கும்

எனவே, S -ன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$. $PM = x - \frac{a}{e}$, மற்றும் இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x - \frac{a}{e} = 0$ எனக்கிடைக்கும். $P(x, y)$ அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி என்க.

கூம்பு வளைவின் வரையறைப்படி, $\frac{SP}{PM} = e$ அல்லது $SP^2 = e^2 PM^2$.

அதனால் $\quad (x-ae)^2 + (y-0)^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$

$$\Rightarrow \qquad (x-ae)^2 + y^2 = (ex-a)^2$$

$$\Rightarrow \qquad (e^2-1)x^2 - y^2 = a^2(e^2-1)$$

$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$ இங்கு $a^2(e^2-1) = b^2$ எனப்பிரதியிட P -ன் நியமப்பாதை $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனக்கிடைக்கும். இந்த **அதிபரவளையச் சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவம்.** இங்கு $ae = c$ என எடுக்க, $b^2 = c^2 - a^2$ எனக்கிடைக்கும். இந்த அதிபரவளையம் x மற்றும் y-அச்சுகளுக்கு சமச்சீராக உள்ளதைக் காணலாம்.

வரையறை 5.5

(1) கோட்டுத்துண்டு AA' என்பது **குறுக்கச்சு** மற்றும் அதன் நீளம் $2a$ ஆகும்.

(2) கோட்டுத்துண்டு BB' என்பது **துணையச்சு** மற்றும் அதன் நீளம் $2b$ ஆகும்.

(3) கோட்டுத்துண்டு $CA =$ கோட்டுத்துண்டு $CA' =$ **அரைக்குறுக்கச்சு** $= \boldsymbol{a}$ மற்றும்
கோட்டுத்துண்டு $CB =$ கோட்டுத்துண்டு $CB' =$ **அரைத்துணையச்சு** $= \boldsymbol{b}$ ஆகும்.

(4) சமச்சீர் தன்மையினால் குவியம் $S'(-ae, 0)$ மற்றும் இயக்குவரை l', $x = -\frac{a}{e}$ என எடுத்துக்கொண்டாலும் அதே அதிபரவளையம் கிடைக்கும். இதன் மூலம் அதிபரவளையத்திற்கு $S(ae, 0)$ மற்றும் $S'(-ae, 0)$ என இரு குவியங்களும் $A(a, 0)$ மற்றும் $A'(-a, 0)$ என இரு முனைகளும், $x = \frac{a}{e}$ மற்றும் $x = -\frac{a}{e}$ என இரு இயக்குவரைகளும் உள்ளதைக் காணலாம்.

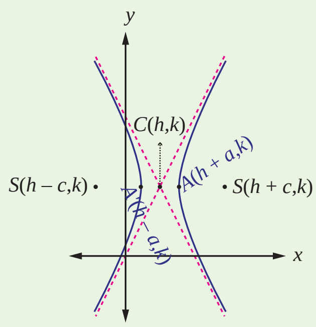
அதிபரவளையத்தின் செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{2b^2}{a}$, என நீள்வட்டத்தில் பெற்றதுபோல பெறலாம்.

தொலைத்தொடுகோடுகள் (Asymptotes)

$P(x, y)$ என்பது $y = f(x)$ என வரையறுக்கப்பட்ட வளைவரையின் மீதுள்ள புள்ளி என்க. P என்ற புள்ளிக்கும் ஏதேனும் ஒரு நிலைக்கோட்டிற்குமான தூரம் பூச்சியத்தை நெருங்குமாறு P என்ற புள்ளி ஆதிப்புள்ளியை விட்டு மேலும் மேலும் விலகிச் செல்லுமானால் அந்த நிலைக்கோடு **வளைவரையின் தொலைத்தொடுகோடு** எனப்படும்.

அதிபரவளையத்திற்கு தொலைத்தொடுகோடுகள் உண்டு. அதே சமயம் பரவளையத்திற்கும், நீள்வட்டத்திற்கும் தொலைத்தொடுகோடுகள் இல்லை..

(ii) (h,k) –ஐ முனையாக உடைய அதிபரவளையங்கள் (Types of Hyperbola with centre at (h, k))



படம் 5.29

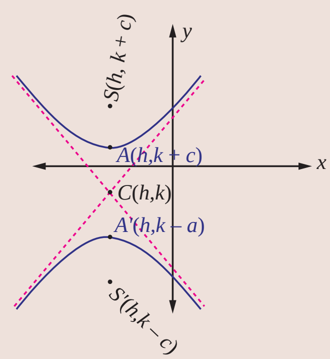
(a) குறுக்கச்சு x-அச்சுக்கு இணை

(a) குறுக்கச்சு x-அச்சுக்கு இணையான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

(படம் 5.29) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ஆகும்.

முனைப்புள்ளிகள் $A(h+a,k)$ மற்றும் $A'(h-a,k)$ ஆகும். குவியங்கள் $S(h+c,k)$ மற்றும் $S'(h-c,k)$ ஆகும். இங்கு $c^2=a^2+b^2$.

இயங்குவரையின் சமன்பாடுகள் $x=h\pm\dfrac{a}{e}$.



படம் 5.30

(b) குறுக்கச்சு y-அச்சுக்கு இணை

(b) குறுக்கச்சு y-அச்சுக்கு இணையான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

(படம் 5.30) $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ ஆகும்.

முனைப்புள்ளிகள் $A(h,k+a)$ மற்றும் $A'(h,k-a)$ ஆகும். குவியங்கள் $S(h,k+c)$ மற்றும் $S'(h,k-c)$ ஆகும்.

இங்கு $c^2=a^2+b^2$.

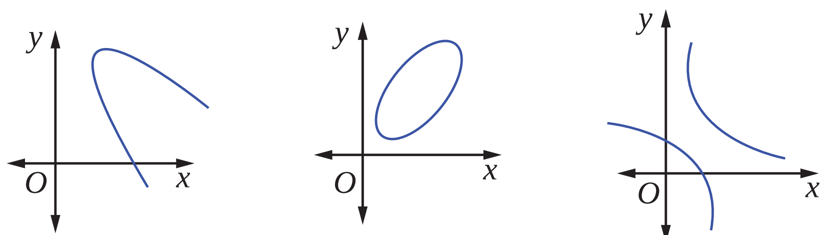
இயங்குவரையின் சமன்பாடுகள் $y=k\pm\dfrac{a}{e}$.

குறிப்புரை

(1) அதிபரவளையத்தின் குறுக்கச்சை விட்டமாகக்கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் அதிபரவளையத்தின் துணைவட்டம் எனப்படும். அதன் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$.

(2) அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் குவியங்களுக்கும் இடையேயான தூரங்களின் வித்தியாசத்தின் மட்டு மதிப்பு குறுக்கச்சின் நீளத்திற்குச் சமம். அதாவது $|PS-PS'|=2a$. (இதை நீள்வட்டத்திற்கான நிரூபணம் போன்று நிறுவலாம்.)

இதுவரை நாம் பரவளையத்தின் நான்கு திட்டவடிவங்களையும், நீள்வட்டத்தின் இரு திட்டவடிவங்களையும், அதிபரவளையத்தின் இரு திட்டவடிவங்களையும் பற்றி படித்தோம். இவற்றைத் தவிர இந்தத்திட்ட வடிவங்களில் வகைப்படுத்த முடியாத பல வகையான, பரவளையங்கள், நீள்வட்டங்கள் மற்றும் அதிபரவளையங்களும் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக பின்வரும் பரவளையம், நீள்வட்டம், அதிபரவளையம் ஆகியவற்றைக் கருத்தில் கொள்க.

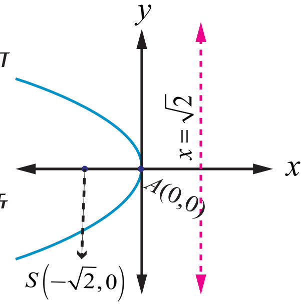


படம் 5.31

ஆனால்மேற்கண்ட வளைவரைகளை சரியான அச்சின் இடப்பெயர்ச்சி மூலம் திட்டவடிவங்களுக்கு மாற்றலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.16

குவியம் $\left(-\sqrt{2},0\right)$ மற்றும் இயக்குவரை $x=\sqrt{2}$ உடைய பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.



படம் 5.32

தீர்வு

பரவளையம் இடப்பக்கம் திறப்புடையது மற்றும் சமச்சீர் அச்சு x-அச்சாகவும் முனை $(0,0)$ ஆகவும் இருக்கும்.

எனவே தேவையான பரவளையத்தின் சமன்பாடு

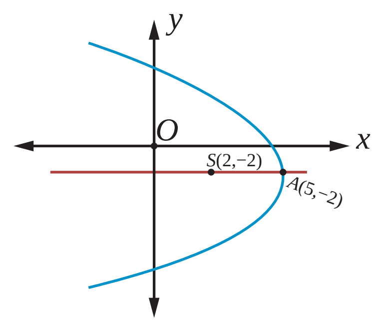
$$(y-0)^2 = -4\sqrt{2}\,(x-0)$$

$$\Rightarrow \qquad y^2 = -4\sqrt{2}\,x.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.17

முனை $(5,-2)$ மற்றும் குவியம் $(2,-2)$ உடைய பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு



படம் 5.33

கொடுக்கப்பட்டவைகள் முனை $A(5,-2)$ மற்றும் குவியம் $S(2,-2)$, குவியதூரம் $AS=a=3$.

பரவளையத்தின் சமச்சீர் அச்சு x-அச்சுக்கு இணை மற்றும் பரவளையம் இடப்பக்கம் திறப்புடையது.

தேவையான பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(y+2)^2 = -4(3)(x-5)$$

$$\Rightarrow \qquad y^2+4y+4 = -12x+60$$

$$\Rightarrow \qquad y^2+4y+12x-56=0.$$

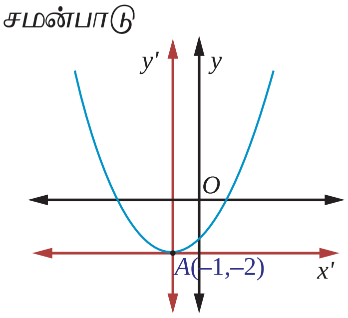
எடுத்துக்காட்டு 5.18

முனை $(-1,-2)$, அச்சு y-அச்சுக்கு இணை மற்றும் $(3,6)$ வழிச்செல்லும் பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

அச்சு y-அச்சுக்கு இணை என்பதால் தேவையான பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(x+1)^2 = 4a(y+2).$$



படம் 5.34

இது $(3,6)$ வழிச்செல்வதால்

$$(3+1)^2 = 4a(6+2)$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}.$$

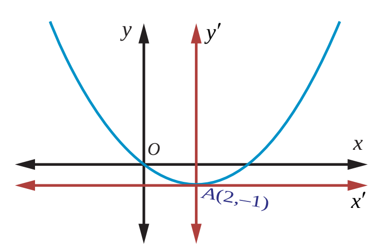
எனவே பரவளையத்தின் சமன்பாடு $(x+1)^2 = 2(y+2)$

இதைச்சுருக்க $\quad x^2+2x-2y-3 = 0$ எனக்கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.19

$x^2-4x-5y-1=0$. என்ற பரவளையத்தின் முனை, குவியம், இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகல, நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 5.35

பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$x^2-4x-5y-1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x^2-4x = 5y+1$$

$$\Rightarrow \qquad x^2-4x+4 = 5y+1+4.$$

$(x-2)^2 = 5(y+1)$ இது திட்ட வடிவம் ஆகும்.

எனவே, $4a = 5$ மற்றும் முனை $(2,-1)$, குவியம் $\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

இயக்குவரையின் சமன்பாடு
$$y - k + a = 0$$
$$y + 1 + \frac{5}{4} = 0$$
$$4y + 9 = 0.$$

செவ்வகலத்தின் நீளம் 5 அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 5.20

குவியங்கள் $(\pm 2, 0)$, மற்றும் முனைகள் $(\pm 3, 0)$ உடைய நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

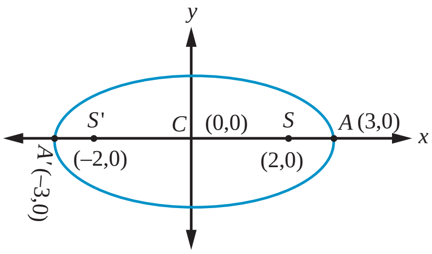
படம் 5.36லிருந்து

$$SS' = 2c \text{ மற்றும் } 2c = 4 \quad ; \; A'A = 2a = 6$$
$$\Rightarrow \quad c = 2 \text{ மற்றும் } a = 3,$$
$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5.$$

நெட்டச்சு x-அச்சு, $a > b$.

மையம் (0, 0) மற்றும் குவியம் $(\pm 2, 0)$.

எனவே நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.



படம் 5.36

எடுத்துக்காட்டு 5.21

மையத்தொலைத்தகவு $\frac{1}{2}$, குவியங்களில் ஒன்று $(2,3)$ மற்றும் ஒரு இயக்குவரை $x = 7$ உடைய நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. மேலும் நெட்டச்சு, குற்றச்சு நீளங்களைக் காண்க.

தீர்வு

கூம்பு வளைவின் வரையறைப்படி $\frac{SP}{PM} = e$ அல்லது $SP^2 = e^2 PM^2$.

இதனால், $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}(x-7)^2$

$\Rightarrow$ $3x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 3 = 0$, இதைப்பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$\Rightarrow \quad 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4(y-3)^2 = 3\left(\frac{1}{9}\right) + 4 \times 9 - 3 = \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{100}{9}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{100}{12}} = 1$$ இது திட்டவடிவம் ஆகும்.

எனவே நெட்டச்சின் நீளம் $= 2a = 2\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{20}{3}$ மற்றும்

குற்றச்சின் நீளம் $= 2b = 2\sqrt{\frac{100}{12}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

எடுத்துக்காட்டு 5.22

$4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$ என்ற கூம்பு வளைவின் குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் அதன் நெட்டச்சு, குற்றச்சு நீளங்களைக் காண்க.

தீர்வு

x மற்றும் y மதிப்புகளை முழுவர்க்கமாக்க $4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$,

$$4(x^2+10x+25-25)+36(y^2-8y+16-16)+532 = 0$$ இலிருந்து

$$4(x^2+10x+25)+36(y^2-8y+16) = -532+100+576$$

$$4(x+5)^2+36(y-4)^2 = 144.$$

இருபுறமும் 144 –ஆல் வகுக்கச் சமன்பாடு

$$\frac{(x+5)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{4} = 1.$$

இது மையம் $(-5,4)$, மற்றும் நெட்டச்சு x-அச்சுக்கு இணையான நீள்வட்டம். இதன் அரை நெட்டச்சின் நீளம் 12 மற்றும் குற்றச்சின் நீளம் 4. முனைகள் $(1,4)$ மற்றும் $(-11,4)$.

தற்போது, $c^2 = a^2-b^2=36-4=32$

மற்றும் $c = \pm 4\sqrt{2}$.

எனில் குவியங்கள் $\left(-5-4\sqrt{2},4\right)$ மற்றும் $\left(-5+4\sqrt{2},4\right)$.

நெட்டச்சின் நீளம் = $2a=12$ அலகுகள் மற்றும்

குற்றச்சின் நீளம் = $2b=4$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 5.23

$4x^2+y^2+24x-2y+21=0$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம், முனைகள் மற்றும் குவியங்கள் காண்க. மேலும் செவ்வகல நீளம் 2 என நிறுவுக.

தீர்வு

உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்தி எழுத நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

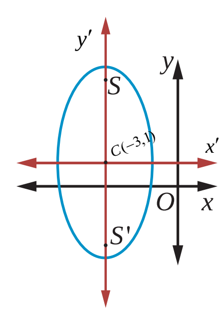
$$4x^2+24x+y^2-2y+21 = 0$$

அதாவது, $$4\left(x^2+6x+9-9\right)+\left(y^2-2y+1-1\right)+21 = 0,$$

$$4\left(x+3\right)^2-36+\left(y-1\right)^2-1+21 = 0,$$

$$4\left(x+3\right)^2+\left(y-1\right)^2 = 16,$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$



படம் 5.37

மையம் $(-3,1)$ $a=4,\ b=2$, மற்றும் நெட்டச்சு y-அச்சுக்கு இணை

$$c^2 = 16-4=12$$

$$c = \pm 2\sqrt{3}.$$

எனவே குவியங்கள் $\left(-3,2\sqrt{3}+1\right)$ மற்றும் $\left(-3,-2\sqrt{3}+1\right)$.

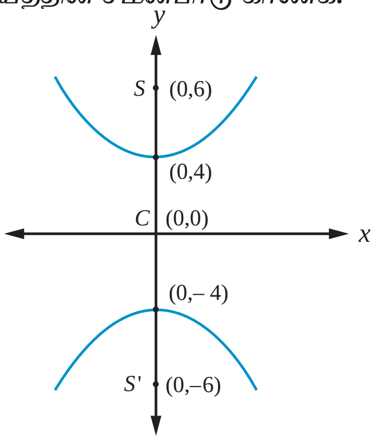
முனைகள் $(3,\pm 4+1)$, அதாவது $(3,5)$ மற்றும் $(3,-3)$, மற்றும்

செவ்வகல நீளம் = $\dfrac{2b^2}{a}=2$ அலகுகள். (படம் 5.37)

எடுத்துக்காட்டு 5.24

முனைகள் $(0,\pm4)$ மற்றும் குவியங்கள் $(0,\pm6)$ உள்ள அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு



படம் 5.38

குவியங்களின் நடுப்புள்ளி மையம் $C\ (0,0)$ (படம் 5.38)

குறுக்கச்சு y -அச்சு

$$AA' = 2a \Rightarrow 2a = 8,$$
$$SS' = 2c = 12, c = 6$$
$$a = 4$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

எனவே தேவையான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1.$

எடுத்துக்காட்டு 5.25

$9x^2 - 16y^2 = 144$ என்ற அதிபரவளையத்தின் முனைகள், குவியங்கள் காண்க.

தீர்வு

$9x^2 - 16y^2 = 144$ என்ற சமன்பாட்டைத் திட்டவடிவில் மாற்ற

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ எனக்கிடைக்கும்.

குறுக்கச்சு x -அச்சு, முனைகள் $(-4,0)$ மற்றும் $(4,0)$;

மற்றும் $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$, $c = 5$.

எனவே குவியங்கள் $(-5,0)$ மற்றும் $(5,0)$.

எடுத்துக்காட்டு 5.26

$11x^2 - 25y^2 - 44x + 50y - 256 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மையம், குவியங்கள் மற்றும் மையத் தொலைத்தகவு காண்க.

தீர்வு

சமன்பாட்டின் உறுப்புகளை வரிசைப்படுத்தி அதிபரவளையத்தின் திட்டவடிவமாக மாற்ற

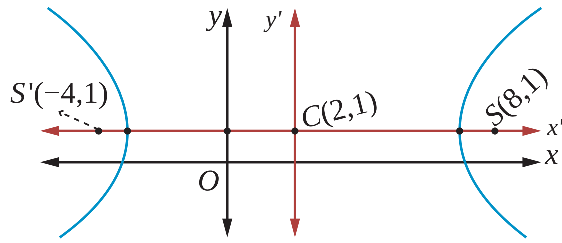
$$11(x^2 - 4x) - 25(y^2 - 2y) - 256 = 0$$
$$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 256 - 44 + 25$$
$$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 275$$
$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1.$$

மையம் $(2,1)$, $a^2 = 25, b^2 = 11$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$= 25 + 11 = 36$$

எனவே, $c = \pm 6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{5}$ மற்றும் குவியங்கள் $(8,1)$ மற்றும் $(-4,1)$ (படம் 5.39).



படம் 5.39

எடுத்துக்காட்டு 5.27

ஹாலேயின் வால் நட்சத்திர சுற்றுப்பாதை, (படம் 5.51) 36.18 விண்வெளி அலகு நீளமும் 9.12 விண்வெளி அலகுகள் அகலமும் கொண்ட நீள்வட்டம். அந்த நீள்வட்டத்தின் மையத்தொலைத்தகவு காண்க.

தீர்வு

$2a = 36.18,\ 2b = 9.12$, எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$$\text{இதிலிருந்து } e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{36.18}{2}\right)^2-\left(\frac{9.12}{2}\right)^2}}{\frac{36.18}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(18.09)^2-(4.56)^2}}{(8.09)} \approx 0.97\,.$$

குறிப்பு

ஒரு விண்வெளி அலகு (சூரியனுக்கும் பூமிக்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தின் சராசரி) என்பது $1,49,597,870$ கி.மீ, பூமியின் சுற்றுப்பாதையின் அரைநெட்டச்சு.

பயிற்சி 5.2

1. பின்வரும் ஒவ்வொன்றிற்கும் பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க:
   (i) குவியம் $(4,0)$ மற்றும் இயக்குவரை $x = -4$.
   (ii) y -அச்சுக்கு சமச்சீரானது மற்றும் $(2,-3)$ வழிச்செல்வது.
   (iii) முனை $(1,-2)$ மற்றும் குவியம் $(4,-2)$.
   (iv) செவ்வகலத்தின் முனைகள் $(4,-8)$ மற்றும் $(4,8)$.
2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றிற்குமான நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க :
   (i) குவியங்கள் $(\pm 3,0)$ மற்றும் $e = \frac{1}{2}$
   (ii) குவியங்கள் $(0,\pm 4)$ மற்றும் நெட்டச்சின் முனைகள் $(0,\pm 5)$.
   (iii) செவ்வகல நீளம் 8, $e = \frac{3}{5}$, மையம் $(0,0)$ மற்றும் நெட்டச்சு x -அச்சு.
   (iv) செவ்வகல நீளம் 4, குவியங்களுக்கிடையேயான தூரம் $4\sqrt{2}$, மையம் $(0,0)$ மற்றும் நெட்டச்சு y - அச்சு.
3. பின்வரும் ஒவ்வொன்றிற்குமான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க:
   (i) குவியங்கள் $(\pm 2,0)$, $e = \frac{3}{2}$.
   (ii) மையம் $(2,1)$, ஒரு குவியம் $(8,1)$ மற்றும் இதற்கொத்த இயக்குவரை $x = 4$.
   (iii) $(5,-2)$ வழிச்செல்வது மற்றும் குற்றச்சின் நீளம் 8 அலகுகள், நெட்டச்சு x அச்சு
4. பின்வருவனவற்றிற்கான முனை, குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு மற்றும் செவ்வகல நீளம் காண்க:
   (i) $y^2 = 16x$ (ii) $x^2 = 24y$ (iii) $y^2 = -8x$
   (iv) $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$ (v) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$

5. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் கூம்புவளைவின் வகையைக் கண்டறிந்து அவற்றின் மையம், குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் இயக்குவரைகள் காண்க :

(i) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ (ii) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{10}=1$ (iii) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$ (iv) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

6. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் செவ்வகல நீளம் $\frac{2b^2}{a}$ என நிறுவுக.

7. அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி P-இலிருந்து அதன் குவியத்தூரங்களின் வித்தியாசத்தின் மட்டு மதிப்பு குறுக்கச்சின் நீளத்திற்குச் சமம் என நிறுவுக.

8. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் கூம்பு வளைவின் வகையைக் கண்டறிந்து அவற்றின் மையம், குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் இயக்குவரைகளைக் காண்க :

(i) $\frac{(x-3)^2}{225}+\frac{(y-4)^2}{289}=1$ (ii) $\frac{(x+1)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{64}=1$ (iii) $\frac{(x+3)^2}{225}-\frac{(y-4)^2}{64}=1$

(iv) $\frac{(y-2)^2}{25}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$ (v) $18x^2+12y^2-144x+48y+120=0$

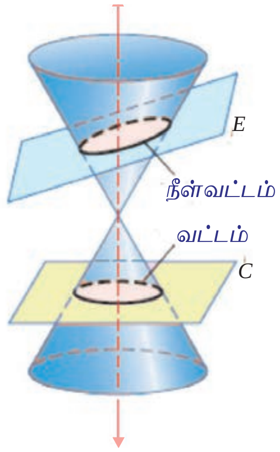
(vi) $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

5.4 கூம்பு வெட்டு முகங்கள் (Conic Sections)

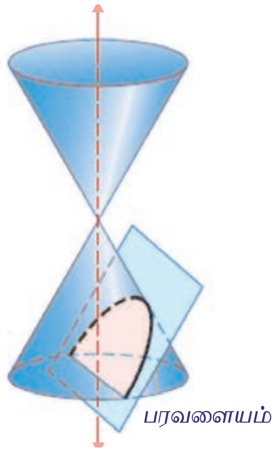
வளைவரைகளை தீர்மானிக்க பிரிவு 5.3-இல் விவரித்த முறைகளுடன் வடிவியல் முறையிலான கூம்பு வெட்டு முகங்களைப் பற்றி இங்கு காண்போம். ஓர் இரட்டைக் கூம்பை ஒரு தளத்தால் வெட்டும்போது வட்டம், நீள்வட்டம், பரவளையம், அதிபரவளையம் போன்ற வடிவங்களைப் பெறலாம். எனவே அந்த வடிவங்கள் கூம்பின் வெட்டு முக வடிவங்கள் அல்லது சுருக்கமாக கூம்பு வளைவரைகள் எனக்குறிக்கப்படுகின்றன.

5.4.1 கூம்பு வெட்டு முகங்களின் வடிவியல் விளக்கம்' (Geometric description of conic section)

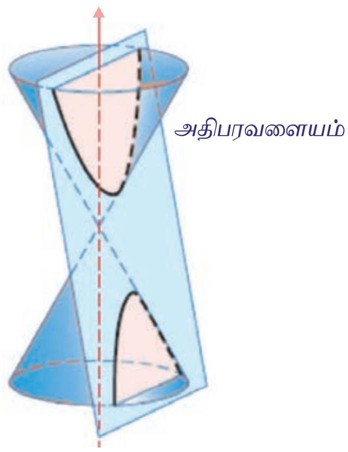
கூம்பின் அச்சுக்கு செங்குத்தான ஒரு தளம் (தளம் C) இரட்டைக் கூம்பின் ஒரு பகுதியை மட்டும் வெட்டும்போது வட்டம் (படம் 5.40) கிடைக்கின்றது. தளம் E, அச்சுக்கு செங்குத்தாக இல்லாமல் சற்று சாய்ந்த நிலையில் இரட்டைக் கூம்பின் ஒரே ஒரு பகுதியை மட்டும் வெட்டும்போது நீள்வட்டம் (படம் 5.40) கிடைக்கின்றது. இரட்டைக் கூம்பின் ஒரு கூம்பின் பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு தளம் வெட்டும்போது பரவளையம் (படம் 5.41) கிடைக்கின்றது. இரட்டைக் கூம்பின் அச்சுக்கு இணையாக ஒரு தளம் இரட்டைக் கூம்பின் இரு பகுதிகளையும் வெட்டும்போது அதிபரவளையம் (படம் 5.42) கிடைக்கின்றது.



படம் 5.40



படம் 5.41

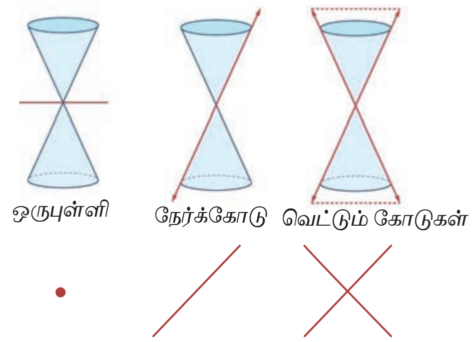


படம் 5.42

5.4.2 சிதைந்த வடிவங்கள் (Degenerate Forms)

கூம்பு வளைவுகளின் சிதைந்த வடிவங்கள், (படம் 5.43) இரட்டைக் கூம்பை வெட்டும் தளத்தின் கோணம் மற்றும் அது முனை வழிச்செல்கிறதா என்பதைப் பொறுத்து, புள்ளி, ஒரு நேர்க்கோடு, ஓர் இரட்டை நேர்க்கோடு, வெட்டும் கோடுகள் அல்லது வெற்றுக்கணமாக இருக்கும். அல்லது தளம் உருளையின் அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்போது சிதைவு ஒரு உருளையாக இருக்கும். கூம்பு வளைவின் வெட்டுகின்ற தளம் இரட்டைக் கூம்பின் முனை வழியாகவும் அச்சுக்கு செங்குத்தாகவும் இருக்கும்போது ஒரு புள்ளி அல்லது புள்ளிவட்டம் கிடைக்கும்.

வெட்டுகின்ற தளம் கூம்பு உருவாக்கி வழியாகச் செல்லும்போது ஒரு நேர்க்கோடு அல்லது ஒரு சோடி இணைகோடு கிடைக்கின்றது. இது பரவளையத்தின் ஒரு சிதைந்த வடிவம் கூம்பின் பொதுச் சமன்பாட்டில் $A = B = C = 0$ எனும்போது கிடைக்கின்றது. மற்றும் வெட்டுகின்ற தளம் அச்சு வழியாகவும் இரட்டைக் கூம்பின் முனை வழியாகவும் செல்லும்போது அதிபரவளையத்தின் ஒரு சிதைந்த வடிவம் கிடைக்கின்றது.



படம் 5.43

குறிப்புரை

நீள்வட்டத்தைப் $(0 < e < 1)$ பொறுத்தவரை $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, $e \to 0$ எனில் $\frac{b}{a} \to 1$ அதாவது $b \to a$ அல்லது நெட்டச்சு, குற்றச்சு நீளங்கள் சமம். அதாவது நீள்வட்டம் ஒரு வட்டமாக மாறுகின்றது. $e \to 1$ எனில் $\frac{b}{a} \to 0$ மற்றும் நீள்வட்டம் ஒரு கோட்டுத்துண்டாக மாறும். அதாவது நீள்வட்டம் தட்டையாக இருக்கும்.

குறிப்புரை

அதிபரவளையத்தை $(e > 1)$ பொறுத்தவரை $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, $e \to 1$ எனில் $\frac{b}{a} \to 0$ அதாவது $e \to 1$ எனில் b-ன் மதிப்பு a-ஐப் பொறுத்தவரை மிகச்சிறிய மதிப்பு மற்றும் அதிபரவளையம் ஒரு கூர்முனையாக மாறும். $e \to \infty$ எனில் a-ஐப் பொறுத்து b மிகப்பெரிய மதிப்பு மற்றும் அதிபரவளையம் தட்டையாக மாறும்.

5.4.3 கூம்பு வளைவின் பொதுச் சமன்பாடு $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$-லிருந்து கூம்புவளைவின் வடிவங்களை அடையாளம் காணல் (Identifying the conics from the general equation of the conic $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$)

இரண்டாம்படி சமன்பாட்டின் வரைபடம் பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்ப வட்டம், பரவளையம், நீள்வட்டம், அதிபரவளையம், ஒரு புள்ளி, வெற்றுக்கணம், ஒரு நேர்க்கோடு அல்லது ஒரு இரட்டை நேர்க்கோடாக இருக்கும்.

(1) $A = C = 1,\ B = 0, D = -2h,\ E = -2k,\ F = h^2 + k^2 - r^2$ எனில் பொதுச்சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ எனக்கிடைக்கும். இது ஒரு வட்டம் ஆகும்.

(2) $B=0$ மற்றும் A அல்லது $C=0$ எனில், பொதுச்சமன்பாடு நாம் படித்த ஏதேனும் ஒரு பரவளையம் ஆகும்.

(3) $A \neq C$ மற்றும் A மற்றும் C இரண்டும் ஒரே குறியாக இருப்பின் பொதுச் சமன்பாடு நீள்வட்டத்தைத் தரும்.

(4) $A \neq C$ மற்றும் A மற்றும் C இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்குறியாக இருக்குமானால் பொதுச் சமன்பாடு அதிபரவளையத்தைத் தரும்.

(5) $A=C$ மற்றும் $B=D=E=F=0$, எனில் பொதுச் சமன்பாடு $x^2+y^2=0$ என்ற புள்ளியாக மாறும்.

(6) $A=C=F$ மற்றும் $B=D=E=0$, எனில் பொதுச் சமன்பாடு $x^2+y^2+1=0$ என்ற வெற்றுக் கணத்தைத் தரும்.

(7) $A \neq 0$ அல்லது $C \neq 0$ மற்றும் மற்ற கெழுக்கள் பூச்சியம் எனில் பொதுச் சமன்பாடு ஆய அச்சுகளின் சமன்பாட்டைத் தரும்.

(8) $A=-C$ மற்றும் மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் பொதுச் சமன்பாடு $x^2-y^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோட்டைத் தரும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.28

பின்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து கூம்பு வளைவின் வகையைக் கண்டறிக:

(1) $16y^2=-4x^2+64$ (2) $x^2+y^2=-4x-y+4$

(3) $x^2-2y=x+3$ (4) $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$

தீர்வு

வினா எண்	சமன்பாடு	கட்டுப்பாடு	கூம்பு வளைவின் வகை
1	$16y^2=-4x^2+64$	3	நீள் வட்டம்
2	$x^2+y^2=-4x-y+4$	1	வட்டம்
3	$x^2-2y=x+3$	2	பரவளையம்
4	$4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$	4	அதிபரவளையம்

பயிற்சி 5.3

பின்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து அவற்றின் கூம்பு வளைவு வகையை கண்டறிக.

1. $2x^2-y^2=7$
2. $3x^2+3y^2-4x+3y+10=0$
3. $3x^2+2y^2=14$
4. $x^2+y^2+x-y=0$
5. $11x^2-25y^2-44x+50y-256=0$
6. $y^2+4x+3y+4=0$

5.5 கூம்பு வடிவின் துணையலகு வடிவம் (Parametric form of Conics)

5.5.1 துணையலகுச் சமன்பாடுகள் (Parametric equations)

$f(t)$ மற்றும் $g(t)$ என்பன 't'-ன் சார்புகள் எனில் $x=f(t)$ மற்றும் $y=g(t)$ என்ற சமன்பாடுகள் இரண்டும் சேர்ந்து தளத்தில் ஒரு வளைவரையை உருவாக்கும். பொதுவாக 't' ஒரு தனித்த மாறியாகும், இங்கு இது ஒரு துணையலகு எனப்படும், மற்றும் ஒரு வளைவரையை இந்த முறையில் குறிப்பிடுவதை **துணையலகுச் சமன்பாடுகள்** என அறியப்படுகிறது. 't' -ன் ஒரு முக்கியப் பொருள் காலத்தைக் குறிப்பது. இந்த விளக்கத்தில் $x=f(t)$ மற்றும் $y=g(t)$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் 't' –இல் ஒரு பொருளின் நிலையைக் குறிக்கின்றன.

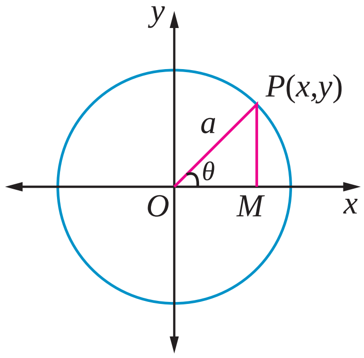
சுருக்கமாக, x மற்றும் y மதிப்புகளை ஒரு மூன்றாவது மாறி மூலம் எழுதுவது துணையலகுச் சமன்பாடு எனப்படும். இந்த மூன்றாவது மாறி துணையலகு எனப்படும். ஒரு துணையலகு எப்போதும் $'t'$ ஆக இருக்க வேண்டியதில்லை. $'t'$ -ஐப் பயன்படுத்துவது ஒரு வழக்கு என்றாலும் வேறு மாறிகளையும் பயன்படுத்தலாம்.

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகு வடிவம் (Parametric form of the circle $x^2 + y^2 = a^2$)

$P(x, y)$ என்பது $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

OP -ஐ இணைத்து அது x-அச்சுடன் θ என்ற கோணத்தை உருவாக்கும் என்க.

x -அச்சுக்கு செங்குத்தாக PM வரைக.



படம் 5.44

முக்கோணம் OPM -இலிருந்து

$x = OM = a\cos\theta$

$y = MP = a\sin\theta$

இதனால் வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ மேலும் $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ என்பன $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

மறுதலையாக, $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$

எனில், $\dfrac{x}{a} = \cos\theta, \dfrac{y}{a} = \sin\theta$.

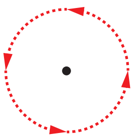
வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

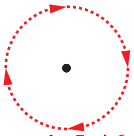
எனவே $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற சமன்பாடு மையம் $(0,0)$ மற்றும் ஆரம் a அலகுகள் கொண்ட வட்டத்தைத் தரும்.

குறிப்பு

(1) $x = a\cos t, y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ என்ற துணையலகுச் சமன்பாடுகளும் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தைக் குறிக்கின்றன. இங்கு t கடிகார எதிர்திசையில் அதிகரிக்கும்.


படம் 5.45

(2) $x = a\sin t, y = a\cos t, 0 \le t \le 2\pi$ என்ற துணையலகுச் சமன்பாடுகளும் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தைக் குறிக்கின்றன. இங்கு t கடிகார திசையில் அதிகரிக்கும்.


படம் 5.46

(ii) பரவளையம் $y^2 = 4ax$ –ன் துணையலகு வடிவம் (Parametric form of the parabola $y^2 = 4ax$)

$P(x_1, y_1)$ பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி என்க.

$$y_1^2 = 4ax_1$$

$$(y_1)(y_1) = (2a)(2x_1)$$

$$\frac{y_1}{2a} = \frac{2x_1}{y_1} = t \quad (-\infty < t < \infty) \text{ என்க.}$$

$$y_1 = 2at,\ 2x_1 = y_1 t$$

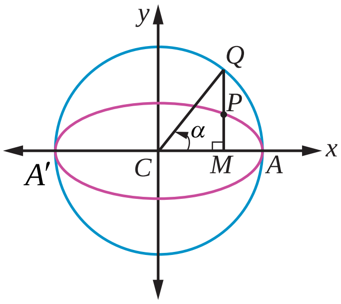
$$2x_1 = 2at(t)$$

$$x_1 = at^2$$

எனவே $y^2 = 4ax$ துணையலகு வடிவம் $x = at^2, y = 2at, -\infty < t < \infty$ மறுதலையாக $x = at^2$ மற்றும் $y = 2at, -\infty < t < \infty$ எனில் இவற்றிலிருந்து $'t'$-ஐ நீக்க, $y^2 = 4ax$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

(iii) நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ -ன் துணையலகு வடிவம் (Parametric form of the Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)

நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P என்க. P-ன் y-அச்சு தூரம் MP துணைவட்டத்தைக் Q-இல் சந்திக்கின்றது என்க.



படம் 5.47

$\angle ACQ = \alpha$ என்க.

$\therefore\ CM = a\cos\alpha,\ MQ = a\sin\alpha$

மற்றும் $Q(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$

தற்போது P-ன் x-அச்சு தூரம் $a\cos\alpha$.

y-அச்சு தூரம் y', எனில் $P(a\cos\alpha, y')$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ளது.

எனவே $$\cos^2\alpha + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow\quad y' = b\sin\alpha.$$

அதனால் P-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$.

இந்த துணையலகு α P-ன் மையத்தகவு கோணம் எனப்படும். இங்கு α என்பது CQ என்ற கோடு x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் மற்றும் ***CP* ஏற்படுத்தும் கோணம் அல்ல** என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

எனவே நீள்வட்டத்தின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் $x = a\cos\theta$ மற்றும் $y = b\sin\theta$, இங்கு θ ஒரு துணையலகு $0 \le \theta \le 2\pi$.

(iv) அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ -இன் துணையலகு வடிவம் (Parametric form of the Hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$)

இதுபோலவே அதிபரவளையத்தின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$, இங்கு θ ஒரு துணையலகு $-\pi \le \theta \le \pi$, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ தவிர.

சுருக்கமாக வட்டம், பரவளையம், நீள்வட்டம், அதிபரவளையம் ஆகியவற்றின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

கூம்பு வளைவு	துணையலகுச் சமன்பாடுகள்	துணையலகு	துணையலகு வீச்சு	கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி
வட்டம்	$x = a\cos\theta$ $y = a\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' அல்லது $(a\cos\theta, a\sin\theta)$
பரவளையம்	$x = at^2$ $y = 2at$	t	$-\infty < t < \infty$	't' அல்லது $(at^2, 2at)$
நீள்வட்டம்	$x = a\cos\theta$ $y = b\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' அல்லது $(a\cos\theta, b\sin\theta)$
அதிபரவளையம்	$x = a\sec\theta$ $y = b\tan\theta$	θ	$-\pi \le \theta \le \pi$ except $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$	'θ' அல்லது $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

குறிப்புரை

(1) துணையலகு வடிவம் என்பது கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் தொகுப்பைக் குறிக்கின்றது. மேலும் துணையலகு, மாறிலி மற்றும் மாறி என்ற இரண்டு பணிகளையும் செய்கிறது. ஆனால் கார்ட்டீசியன் வடிவம் என்பது கூம்பு வளைவை உருவாக்கும் ஒரு புள்ளியின் நியமப்பாதையைக் குறிக்கின்றது. துணையலகு முறை வளைவரையின் திசைப்போக்கைக் குறிக்கின்றது.

(2) துணையலகு வடிவம் என்பது ஒருமைத்தன்மையுடையதாக இருக்கத் தேவையில்லை.

(3) துணையலகு வடிவம் என்பது மாறிகளின் எண்ணிக்கையில் குறைந்தது ஒன்றையாவது குறைக்கின்றது.

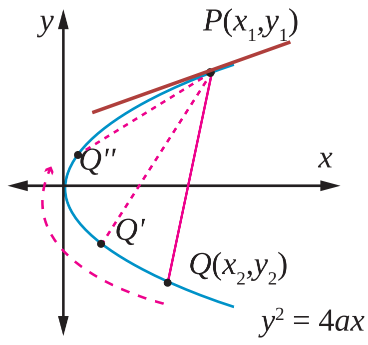
5.6 கூம்பு வளைவரையின் தொடுகோடுகள் மற்றும் செங்கோடுகள் (Tangents and Normals to Conics)

தொடுகோடு என்பது வளைவரையை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொட்டுச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு மற்றும் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாக தொடுபுள்ளி வழியாக செல்லும் நேர்க்கோடு செங்கோடு எனப்படும்.

5.6.1 $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகள் (Equation of tangent and normal to the parabola $y^2 = 4ax$)

(i) தொடுகோட்டுச் சமன்பாட்டின் கார்ட்டீசியன் வடிவம் (Equation of tangent in cartesian form)

$P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகள் பரவளையம் $y^2 = 4ax$ -ன் மீது உள்ளன எனக்.



படம் 5.48

இதனால், $y_1^2 = 4ax_1, \; y_2^2 = 4ax_2,$

மற்றும் $y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$.

சுருக்க $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}$, இது நாண் PQ -ன் சாய்வு.

இதனால் $(y - y_1) = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$, என்பது நாண் PQ -ன் சமன்பாட்டைக் குறிக்கின்றது.

$Q \to P$ அல்லது $y_2 \to y_1$ எனும்போது நாண் PQ என்பது P -ன் தொடுகோடாக மாறுகின்றது.

இதனால் (x_1, y_1) -இல் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1) \text{ இங்கு } \frac{2a}{y_1} \text{ என்பது தொடுகோட்டின் சாய்வு} \quad \dots (1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$$

$$yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$$

$$\boxed{yy_1 = 2a(x + x_1)}$$

(ii) தொடுகோட்டுச் சமன்பாட்டின் துணையலகு வடிவம் (Equation of tangent in parametric form)

பரவளையத்தின் புள்ளி $(at^2, 2at)$ -இல் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு

$$y(2at) = 2a(x + at^2)$$

$$\boxed{yt = x + at^2}$$

(iii) செங்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் கார்ட்டீசியன் வடிவம் (Equation of normal in cartesian form)

(1)-இலிருந்து செங்கோட்டின் சாய்வு $-\dfrac{y_1}{2a}$

அதனால் **செங்கோட்டுச் சமன்பாடு**

$$\begin{aligned} y-y_1 &= -\frac{y_1}{2a}(x-x_1) \\ 2ay-2ay_1 &= -y_1x+y_1x_1 \\ xy_1+2ay &= y_1(x_1+2a) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{xy_1+2ay=x_1y_1+2ay_1}}$$

(iv) செங்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் துணையலகு வடிவம் (Equation of normal in parametric form)

பரவளையத்தின் புள்ளி $(at^2, 2at)$ -இல் செங்கோட்டுச் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} x2at+2ay &= at^2(2at)+2a(2at) \\ 2a(xt+y) &= 2a(at^3+2at) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{y+xt=at^3+2at}}$$

தேற்றம் 5.6

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து $y^2=4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு மூன்று செங்கோடுகள் வரையலாம். அவற்றில் ஒன்று எப்போதும் மெய்யானது.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட பரவளையம் $y^2=4ax$ மற்றும் (α,β) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி என்க.

செங்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் துணையலகு வடிவம்

$$y = -tx+2at+at^3 \qquad \ldots (1)$$

செங்கோட்டின் சாய்வு m எனில் $m=-t$.

எனவே சமன்பாடு (1) $\quad y = mx-2am-am^3$ என மாறுகின்றது.

இது (α,β) வழிச் செல்வதால் $\quad \beta = m\alpha-2am-am^3$

$$am^3+(2a-\alpha)m+\beta = 0$$

இது m -இல் அமைந்த ஒரு மூன்றாம்படிச் சமன்பாடு. இதற்கு மூன்று m -ன் மதிப்புகள் இருக்கும். இதன் விளைவாக ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளையத்திற்கு மூன்று செங்கோடுகள் வரையலாம், மெய்யெண் சமன்பாட்டின் கலப்பு எண் மூலங்கள் எப்போதும் இணை எண் கொண்ட சோடியாக அமையும் என்பதாலும் சமன்பாடு (1) ஒற்றைப்படை அடுக்கு கொண்டிருப்பதாலும், குறைந்தபட்சம் ஒரு மெய்யெண் மூலம் இருக்கும். எனவே பரவளையத்தின் செங்கோடுகளில் ஒன்று மெய்யானதாக இருக்கும். ■

5.6.2 நீள்வட்டம் மற்றும் அதிபரவளையங்களின் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகள் (பின்வரும் நிரூபணங்கள் படிப்பவரின் பயிற்சிக்கு விடப்படுகின்றது)

(Equations of tangent and normal to Ellipse and Hyperbola)

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

(i) (x_1,y_1) -இல் $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$ கார்ட்டீசியன் வடிவம்

(ii) 'θ'-இல் $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$.   துணையலகு வடிவம்

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

(i) (x_1,y_1) -இல் $\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$ கார்ட்டீசியன் வடிவம்

(ii) 'θ'-இல் $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$ துணையலகு வடிவம்

(3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

(i) (x_1,y_1) -இல் $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ கார்ட்டீசியன் வடிவம்

(ii) 'θ' -இல் $\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$ துணையலகு வடிவம்

(4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

(i) (x_1,y_1) -இல் $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2$ கார்ட்டீசியன் வடிவம்

(ii) 'θ'-இல் $\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2$ துணையலகு வடிவம்

5.6.3 நேர்க்கோடு $y = mx + c$ கூம்பு வெட்டுமுக வளைவரைகளின் தொடுகோடாக இருக்க நிபந்தனை (Condition for the line $y = mx + c$ to be a tangent to the conic sections)

(i) பரவளையம் $y^2=4ax$ (Parabola $y^2=4ax$)

$y^2=4ax$ என்ற பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி (x_1,y_1). என்க. எனவே, $y_1^2=4ax_1$ ... (1)

பரவளையத்தின் தொடுகோடு $y=mx+c$ என்க. ... (2)

(x_1,y_1) என்ற புள்ளியில் பரவளையத்தின் தொடுகோடு 5.6.1-லிருந்து $yy_1=2a(x+x_1)$. ... (3)

(2) மற்றும் (3) இரண்டும் ஒரே நேர்க்கோட்டை குறிக்கின்றதால் கெழுக்கள் விகிதச்சமமாக இருக்கும்.

$$\frac{y_1}{1}=\frac{2a}{m}=\frac{2ax_1}{c}$$

$$\Rightarrow y_1=\frac{2a}{m}, x_1=\frac{c}{m}$$

இதனால் சமன்பாடு (1) , $\left(\frac{2a}{m}\right)^2=4a\left(\frac{c}{m}\right)$ என மாறும்.

$$\Rightarrow \boxed{c=\frac{a}{m}}$$

எனவே தொடுபுள்ளி $\left(\frac{a}{m^2},\frac{2a}{m}\right)$ மற்றும் பரவளையத்தின் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $y=mx+\frac{a}{m}$.

பரவளையத்தைப் போல நீள்வட்டத்திற்கும், அதிபரவளையத்திற்கும் $y=mx+c$ என்ற கோடு தொடுகோடாக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளை நிறுவலாம்.

(ii) நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)

$y=mx+c$ என்ற கோடு நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-க்குத் தொடுகோடாக இருக்க நிபந்தனை $c^2=a^2m^2+b^2$ தொடுபுள்ளி $\left(-\frac{a^2m}{c},\frac{b^2}{c}\right)$ மற்றும் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

(iii) அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (Hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$)

$y=mx+c$ என்ற கோடு அதிபரவளையம் $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-க்கு தொடுகோடாக இருக்க நிபந்தனை $c^2=a^2m^2-b^2$ தொடுபுள்ளி $\left(-\frac{a^2m}{c},-\frac{b^2}{c}\right)$ மற்றும் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$.

குறிப்பு

(1) $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ -இல் $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ அல்லது $y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}$ இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றுதான் நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடாக இருக்கும், இரண்டும் அல்ல.

(2) $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ -இல் $y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ அல்லது $y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}$ இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றுதான் அதிபரவளையத்தின் தொடுகோடாக இருக்கும், இரண்டும் அல்ல.

முடிவுகள் (நிரூபணங்கள் இல்லாமல்)

(1) தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து (i) பரவளையம், (ii) நீள்வட்டம், (iii) அதிபரவளையம் ஆகியவற்றுக்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

(2) தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து (i) நீள்வட்டம், (ii) அதிபரவளையம் ஆகியவற்றுக்கு நான்கு செங்கோடுகள் வரையலாம்.

(3) செங்குத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியின் நியமப்பாதை

(i) $y^2=4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு is $x=-a$ (இயங்குவரை).

(ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு $x^2+y^2=a^2+b^2$ (இயங்குவட்டம்).

(iii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $x^2+y^2=a^2-b^2$ (இயங்கு வட்டம்) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.29

$x^2+6x+4y+5=0$ என்ற பரவளையத்திற்கு $(1,-3)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2+6x+4y+5=0$.

$$x^2+6x+9-9+4y+5 = 0$$

$$(x+3)^2 = -4(y-1) \qquad \ldots (1)$$

$$X = x+3, Y=y-1 \text{ எனில்}$$

சமன்பாடு (1) திட்ட வடிவத்தை அடைகிறது.

$$X^2 = -4Y$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $XX_1 = -2(Y+Y_1)$

$(1,-3)$ -இல் $X_1 = 1+3=4; Y_1 = -3-1=-4$

$(1,-3)$ -இல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} (x+3)4 &= -2(y-1-4) \\ 2x+6 &= -y+5\ . \\ 2x+y+1 &= 0\ . \end{aligned}$$

$(1,-3)$ -இல் தொடுகோட்டின் சாய்வு -2, எனவே செங்கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{2}$

$(1,-3)$ -இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} y+3 &= \frac{1}{2}(x-1) \\ 2y+6 &= x-1 \\ x-2y-7 &= 0\ . \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.30

$x^2+4y^2=32$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு $\theta=\frac{\pi}{4}$ எனும்போது தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} x^2+4y^2 &= 32 \\ \frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8} &= 1 \\ a^2 &= 32,\ b^2=8 \\ a &= 4\sqrt{2},\ b=2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ -இல் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} \frac{x\cos\frac{\pi}{4}}{4\sqrt{2}}+\frac{y\sin\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}} &= 1 \\ \frac{x}{8}+\frac{y}{4} &= 1 \\ x+2y-8 &= 0\ . \end{aligned}$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{2}x}{\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{2\sqrt{2}y}{\sin\frac{\pi}{4}} &= 32-8 \\ 8x-4y &= 24 \\ 2x-y-6 &= 0\ . \end{aligned}$$

மாற்று முறை

$\theta = \frac{\pi}{4}$ எனில்

$$\begin{aligned} (a\cos\theta, b\sin\theta) &= \left(4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4},\ 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= (4,2) \end{aligned}$$

$\therefore$ தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $\theta = \frac{\pi}{4}$ -இல் என்பதும் புள்ளி $(4,2)$ -இல் என்பதும் ஒன்றே.

எனவே தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

$$x + 2y - 8 = 0$$

தொடுகோட்டுச் சாய்வு $-\frac{1}{2}$

செங்கோட்டுச் சாய்வு 2

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - 2 = 2(x-4)$

$$y - 2x + 6 = 0.$$

பயிற்சி 5.4

1. $(5,2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $2x^2 + 7y^2 = 14$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
2. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு, $10x - 3y + 9 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையான தொடுகோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
3. $x - y + 4 = 0$ என்ற நேர்க்கோடு $x^2 + 3y^2 = 12$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு என நிறுவுக. மேலும் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.
4. $y^2 = 16x$ என்ற பரவளையத்திற்கு, $2x + 2y + 3 = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தான தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு காண்க.
5. $y^2 = 8x$ என்ற பரவளையத்திற்கு $t = 2$ -இல் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு காண்க.
(குறிப்பு : துணையலகு வடிவத்தைப் பயன்படுத்துக)
6. $12x^2 - 9y^2 = 108$ என்ற அதிபரவளையத்திற்கு $\theta = \frac{\pi}{3}$ -இல் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க. (குறிப்பு : துணையலகு வடிவத்தைப் பயன்படுத்துக)
7. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு 't_1' மற்றும் 't_2' ஆகிய புள்ளிகளில் அமையும் தொடுகோடுகள் $\left[at_1t_2, a(t_1 + t_2)\right]$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.
8. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு 't_1' என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு, பரவளையத்தை மீண்டும் 't_2' என்ற புள்ளியில் சந்திக்குமெனில், $t_2 = -\left(t_1 + \frac{2}{t_1}\right)$ என நிறுவுக.

5.7 அன்றாட வாழ்வில் கூம்பு வளைவுகளின் பயன்பாடுகள் (Real life Applications of Conics)

5.7.1 பரவளையம் (Parabola)

பரவளையத்தின் முக்கியப் பயன்பாடுகள் ஒளி அல்லது வானொலி அலைகளின் எதிரொளிப்பான் அல்லது ஏற்பியை உள்ளடக்கியதாக இருக்கின்றது. எடுத்துக்காட்டாக வாகனங்களின் முகப்பு விளக்கின் குறுக்கு வெட்டு. சுடர் விளக்கு இவற்றில் பரவளைய எதிரொளிப்பான்கள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

பரவளைய எதிரொளிப்பான் என்பது வெள்ளி முலாம் பூசப்பட்ட பரவளையம் தன் அச்சைப் பற்றிச் சுற்றுவதால் உருவாகும் வளைதளப்பரப்பாகும். இவற்றில் பல்புகள் குவியத்தில் பொருத்தப்படுகின்றன. இதனால் குவியத்திலிருந்து புறப்படும் ஒளி பரவளையத்தில் பட்டு பரவளையத்தின் அச்சுக்கு இணையாக பிரதிபலிக்கின்றது. (படம் 5.60) அதே சமயம் துணைக்கோள் கிண்ண ஏற்பி மற்றும் விளையாட்டு நிகழ்ச்சிகளில் பயன்படுத்தப்படும் ஒலிப்பெருக்கிகள் போன்றவற்றில் உள்ளே வரும் அச்சுக்கு இணையான வானொலி அலைகள் அல்லது ஒலி அலைகள் பிரதிபலிக்கப்பட்டு குவியத்தில் ஒன்று சேருகின்றது (படம் 5.59). இதேபோல் ஒரு சட்டத்தில் பரவளையக் கண்ணாடியும் அதன் குவியத்தில் சமையற்பாத்திரமும் பொருத்தப்பட்டால் (படம் 5.1) உள்ளே வரும் அச்சுக்கு இணையான சூரிய ஒளிக்கற்றைகள் பிரதிபலிக்கப்பட்டுக் குவியத்தில் சமைப்பதற்குத் தேவையான வெப்பத்தை உற்பத்தி செய்கின்றது.

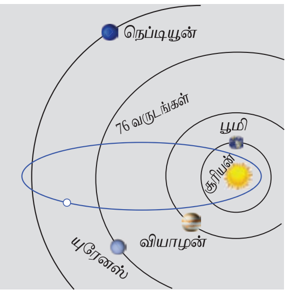
பரவளைய வளைவுகள் அதன் மிகச்சிறந்த கட்டுமான நிலைத்தன்மைக்கும் மற்றும் அதன் அழகுக்கும் சிறந்தது. அவற்றில் சில இந்தியாவில், ஆந்திர மாநிலத்தில் கோதாவரி நதியின் மீதுள்ள பாலம், பிரான்ஸ் நாட்டில் பாரிஸ் நகரில் உள்ள ஈபில் கோபுரம் ஆகும்.

படம் 5.49

படம் 5.50

5.7.2 நீள்வட்டம் (Ellipse)

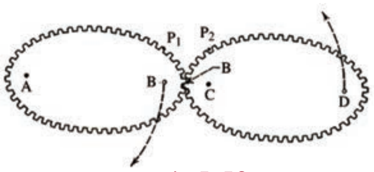
ஜோகன்ஸ் கெப்ளரின் கூற்றுப்படி சூரியக் குடும்பத்தில் உள்ள எல்லாக் கோள்களும் சூரியனை ஒரு குவியமாகக் கொண்ட நீள்வட்டப்பாதையில் சுற்றுகின்றன. சில வால் நட்சத்திரங்களும்கூட சூரியனை ஒரு குவியமாகக் கொண்ட நீள்வட்டப்பாதையிலேயே சுற்றுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, 75 ஆண்டுகளுக்கு ஒருமுறை தோன்றும் ஹாலேயின் வால் நட்சத்திரம் $e \approx 0.97$ கொண்ட ஒரு நீள்வட்டப் பாதையில் (படம் 5.51) சுற்றுகின்றது. நம்முடைய துணைக்கோள் சந்திரன் பூமியை ஒரு குவியமாகக் கொண்ட நீள்வட்டப்பாதையில் சுற்றுகின்றது. மற்ற கோள்களின் துணைக்கோள்களும் அவற்றின் கோள்களைச் சுற்றி நீள்வட்டப்பாதையிலேயே சுற்றுகின்றன.



ஹாலே வால்நட்சத்திரத்தின் நீள்வட்டப் பாதை

படம் 5.51

நீள்வட்ட வளைவுகள் அவற்றின் நிலைத்தன்மைக்கும் அழகுக்கும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. தலைப்பு பாகம் நெட்டச்சும் குற்றச்சும் 2:1 என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு நீள்வட்ட வடிவில் அமைக்கப்பட்ட நீராவி கொதிகலன்கள் மிகவும் பலம் வாய்ந்ததாக இருக்கும் என நம்பப்படுகின்றது. ∴போர்–சோமர் பீல்டு (Bohr-Sommerfeld) அணுக்கோட்பாட்டில் எலக்ட்ரானின் சுற்றுப்பாதை வட்டம் அல்லது நீள்வட்டமாக இருக்கும். சில நேரங்களில் (குறிப்பிட்ட தேவைக்காக) பற்சக்கரங்களும் நீள்வட்ட வடிவில் செய்யப்படுகின்றன. (படம் 5.52)



படம் 5.52

நாம் வாழும் கோளாகிய பூமி சாய்ந்த கோளமாகும். அதாவது நீள்வட்டம் தனது குற்றச்சைப் பற்றிச் சுற்றுவதால் உருவாகும் திண்மம். இந்த சாய்வுக் கோளமானது நிலநடுக்கோட்டுப் பகுதியில் புடைத்தும், துருவப்பகுதியில் தட்டையாகவும் இருக்கும்.

நீள்வட்டத்தின் ஒரு குவியத்திலிருந்து வெளியாகும் ஒளி அல்லது ஒளிக்கற்றை நீள்வட்டத்தில் பட்டுப் பிரதிபலித்து மற்றொரு குவியத்தை (படம் 5.62) அடைகின்றது. இது நீள்வட்டத்தின் பிரதிபலிப்பு

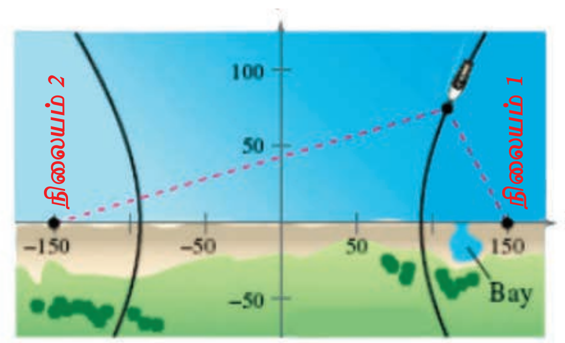
பண்பு ஆகும். இதை இயற்பியலின் படுகதிர் மற்றும் பிரதிபலிப்புக் கதிர் என்ற கருத்துக்களைப் பயன்படுத்தி நிறுவலாம்.

ஓர் ஆச்சரியமூட்டும் நீள்வட்ட எதிரொளிப்பான் பயன்படுத்தும் மருத்துவக் கருவி லித்தோரிப்டர் (படம் 5.4 மற்றும் 5.63) . இது சிறுநீரகக் கற்களைக் கரைப்பதற்கு மின்காந்த தொழில்நுட்பம் அல்லது அல்ட்ராசவுண்டை பயன்படுத்தி மின் அதிர்வு அலைகளை உருவாக்குகின்றது. அந்த அலைகள் நீள்வட்டத்தின் குறுக்குவெட்டில் ஒரு குவியத்தில் தோன்றி மற்றொரு குவியப்புள்ளியில் சிறுநீரகக் கல்லில் பிரதிபலிக்கின்றது. இந்த முறையில் குணமாவதற்கான காலம் வழக்கமான அறுவைச் சிகிச்சைக்கு ஆவதைவிட குறைவாக இருக்கும். மேலும் அறுவைச் சிகிச்சை இல்லாதது மற்றும் இறப்பு விகிதம் குறைவானது இதன் சிறப்பம்சம்.

5.7.3 அதிபரவளையம் (Hyperbola)

சில வால் நட்சத்திரங்கள் சூரியனை ஒரு குவியத்தில் கொண்ட அதிபரவளையப் பாதையில் பயணிக்கின்றன. இவ்வகை வால் நட்சத்திரங்கள், நீள் வட்டப்பாதையில் வரும் வால் நட்சத்திரங்கள் குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் வருவதுபோல் அல்லாமல் ஒரே ஒரு முறை மட்டும் சூரியனின் அருகில் வரும். மேலும் மும்பை விமான நிலையக் கட்டிடக்கலை (படம் 5.53), கோளரங்கத்தின் குறுக்குவெட்டு, கப்பல்களின் இருப்பிடம் காணல் (படம் 5.54) அணுமின் நிலைய அல்லது அனல்மின் நிலையக் குளிரவைக்கும் கோபுரங்கள் (படம் 5.5).

படம் 5.53



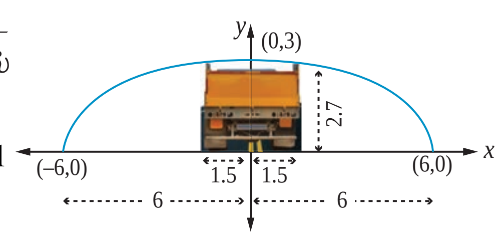
படம் 5.54

எடுத்துக்காட்டு 5.31

ஒருவழிப்பாதையில் உள்ள அரை நீள்வட்ட வளைவின் உயரம் 3 மீ மற்றும் அகலம் 12 மீ. ஒரு சரக்கு வாகனத்தின் அகலம் 3 மீ மற்றும் உயரம் 2.7 மீ எனில் இந்த வாகனம் வளைவின் வழி செல்ல முடியுமா? (படம் 5.6)

தீர்வு

சரக்கு வாகனத்தின் அகலம் 3மீ என்பதால் அது வளைவு வழிச் செல்ல சாலையின் மையத்திலிருந்து 1.5மீ தூரத்தில் வளைவின் உயரம் கணக்கிட வேண்டும். இந்த உயரம் 2.7மீ அல்லது குறைவாக இருந்தால் சரக்கு வாகனம் வளைவு வழிச் செல்லாது. (படம் 5.6)



படம் 5.55

படத்திலிருந்து $a = 6$ மற்றும் $b = 3$ என்பது $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ என்ற நீள்வட்டச் சமன்பாட்டை அளிக்கின்றது.

3மீ அகல வாகனத்தின் விளிம்பு மையத்திலிருந்து $x = 1.5$ மீ–இல் இருக்கும். மையத்திலிருந்து 1.5மீ தூரத்தில் வளைவின் உயரம் காண $x = 1.5$ எனச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு y –இன் தீர்வு காண

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{36}+\frac{y^2}{9} = 1$$

$$y^2 = 9\left(1-\frac{9}{144}\right)$$

$$= \frac{9(135)}{144} = \frac{135}{16}$$

$$y = \frac{\sqrt{135}}{4}$$

$$= \frac{11.62}{4}$$

$$= 2.90$$

இதனால் வளைவின் மையத்திலிருந்து 1.5மீ தூரத்தில் வளைவின் உயரம் 2.90மீ, சரக்கு வாகனத்தின் உயரம் 2.7மீ என்பதால் அது நீள்வட்ட வளைவு வழியேச் செல்லும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.32

சூரியனிலிருந்து பூமியின் அதிகபட்சம் மற்றும் குறைந்தபட்ச தூரங்கள் முறையே 152×10^6 கி.மீ மற்றும் 94.5×10^6 கி.மீ. நீள்வட்டப் பாதையின் ஒரு குவியத்தில் சூரியன் உள்ளது. சூரியனுக்கும் மற்றொரு குவியத்திற்குமான தூரம் காண்க.

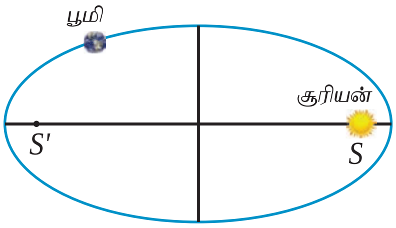
தீர்வு

$$AS = 94.5\times10^6 \text{ கி.மீ}, \; SA' = 152\times10^6 \text{ கி.மீ.}$$

$$a+c = 152\times10^6$$

$$a-c = 94.5\times10^6$$

கழிக்க $2c = 57.5\times10^6 = 575\times10^5$ கி.மீ.



படம் 5.56

மற்றொரு குவியத்திலிருந்து சூரியனுக்கு உள்ள தூரம் $SS' = 575\times10^5$ கி.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 5.33

ஒரு கான்கிரீட் பாலம் பரவளைய வடிவில் உள்ளது. சாலையின்மேல் உள்ள பாலத்தின் நீளம் 40மீ மற்றும் அதன் அதிகபட்ச உயரம் 15மீ எனில் அந்தப் பரவளைய வளைவின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

படத்திலிருந்து முனை $(0,0)$ மற்றும் பரவளையம் கீழ்நோக்கித் திறப்புடையது எனலாம்.

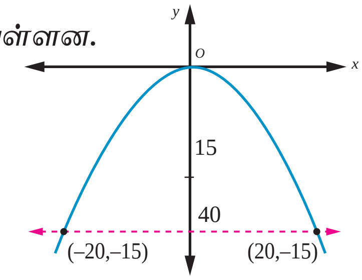
பரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay$

$(-20,-15)$ மற்றும் $(20,-15)$ என்ற புள்ளிகள் பரவளையத்தின் மீதுள்ளன.

$$20^2 = -4a(-15)$$

$$4a = \frac{400}{15}$$

$$x^2 = \frac{-80}{3}\times y$$



படம் 5.57

எனவே சமன்பாடு $3x^2 = -80y$

எடுத்துக்காட்டு 5.34

ஒரு பரவளையத் தொலைத்தொடர்பு அலைவாங்கியின் குவியம் அதன் முனையிலிருந்து 2மீ தூரத்தில் உள்ளது. முனையிலிருந்து 3மீ தூரத்தில் அலைவாங்கியின் அகலம் காண்க.

தீர்வு

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$.

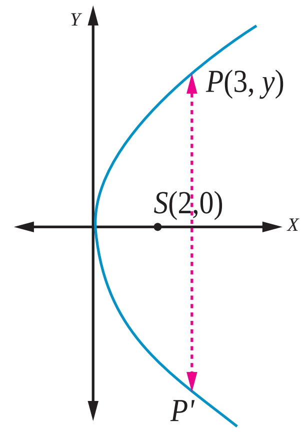
குவியம் முனையிலிருந்து 2மீ என்பதால் $a = 2$

எனவே பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 8x$

முனையிலிருந்து 3மீ தூரத்தில் பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி P எனில் P என்பது $(3, y)$ ஆக இருக்கும்

$$y^2 = 8\times 3$$
$$y = \sqrt{8\times 3}$$
$$= 2\sqrt{6}$$

முனையிலிருந்து 3மீ தூரத்தில் அலைவாங்கியின் அகலம் $4\sqrt{6}$ மீ ஆகும்.



படம் 5.58

5.7.4 பரவளையத்தின் பிரதிபலிப்பு பண்பு (Reflective property of parabola)

பரவளையத்தின் குவியத்திலிருந்து தோன்றும் ஒளி அல்லது, ஒலி அல்லது, வானொலி அலைகள் பிரதிபலிப்புக்குப் பின்பு பரவளையத்தின் அச்சுக்கு இணையாகச் செல்கின்றன (படம் 5.60). மறுதலையாக பரவளையத்தின் அச்சுக்கு இணையாக வரும் கதிர்கள் பிரதிபலிக்கப்பட்டு பரவளையத்தின் குவியத்தில் குவிகின்றது (படம் 5.59).

எடுத்துக்காட்டு 5.35

$y = \frac{1}{32}x^2$ என்ற சமன்பாடு சூரிய ஆற்றலுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் பரவளைய கண்ணாடிகளின் மாதிரியைக் குறிக்கின்றது. பரவளையத்தின் குவியத்தில் வெப்பமூட்டும் குழாய் உள்ளது. இந்தக் குழாய் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது?

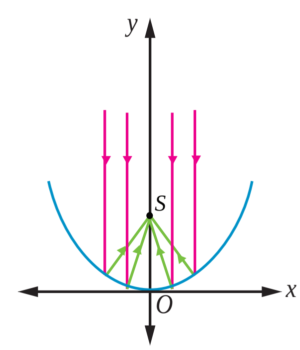
தீர்வு

பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{32}x^2$$

அதாவது $x^2 = 32y$; முனை $(0,0)$

$$= 4(8)y$$
$$\Rightarrow a = 8$$



படம் 5.59

வெப்பமூட்டும் குழாய் குவியம் $(a,0)$-இல் பொருத்தப்பட வேண்டும். எனவே வெப்பமூட்டும் குழாய் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து 8 அலகுகள் உயரத்தில் பொருத்தப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.36

ஒரு தேடும் விளக்கு பரவளைய பிரதிபலிப்பான் கொண்டது. (குறுக்கு வெட்டு ஒரு கிண்ண வடிவம்). பரவளைய கிண்ணத்தின் விளிம்புகளுக்கு இடையே உள்ள அகலம் 40 செ.மீ மற்றும் ஆழம் 30 செ.மீ. குமிழ் குவியத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது.

(1) பிரதிபலிப்புக்குப் பயன்படுத்தப்படும் பரவளையத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(2) ஒளி அதிகபட்சம் தூரம் தெரிவதற்கு குமிழ் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் பொருத்தப்பட வேண்டும்.

தீர்வு

முனை $(0,0)$ என்க.

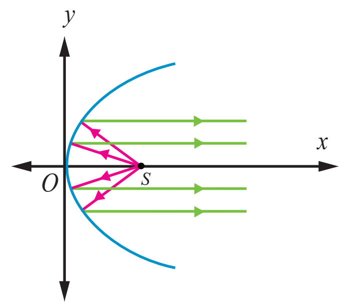
பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$

(1) விட்டம் 40 செ.மீ மற்றும் உயரம் 30 செ.மீ. என உள்ளதால் பரவளையத்தின் விளிம்பில் உள்ள ஒரு புள்ளி $(30,20)$ ஆகும்.

$$20^2 = 4a \times 30$$

$$4a = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}.$$

$$\text{சமன்பாடு } y^2 = \frac{40}{3}x.$$



படம் 5.60

(2) குமிழ் குவியத்தில் $(0,a)$ ஆக இருக்க வேண்டும். எனவே குமிழ் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து $\frac{10}{3}$ செ.மீ. தூரத்தில் பொருத்தப்பட வேண்டும். ■

எடுத்துக்காட்டு 5.37

ஓர் ஒளியியல் கண்ணாடி அமைப்பின் நீள்வட்டப் பகுதிச் சமன்பாடு $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. அந்த அமைப்பின் பரவளையப் பகுதியின் குவியம் நீள்வட்டப்பகுதியின் வலப்பக்க குவியத்தில் உள்ளது. பரவளையத்தின் முனை ஆதிப்புள்ளியிலும், பரவளையம் வலப்பக்கம் திறப்புடையதாகவும் உள்ளது. இந்த பரவளையத்தின் சமன்பாட்டைத் தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நீள்வட்டத்தில்

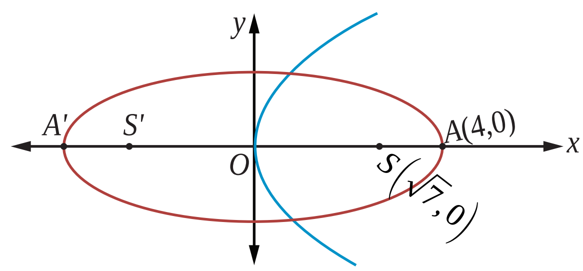
$$a^2 = 16,\ b^2 = 9$$

$$\text{மற்றும் } c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 16 - 9$$

$$= 7$$

$$c = \pm\sqrt{7}$$



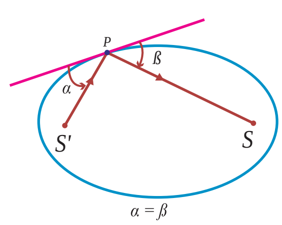
படம் 5.61

எனவே குவியங்கள் $F\left(\sqrt{7},0\right)$ மற்றும் $F'\left(-\sqrt{7},0\right)$ பரவளையத்தின் குவியம் $\left(\sqrt{7},0\right) \Rightarrow a=\sqrt{7}$.

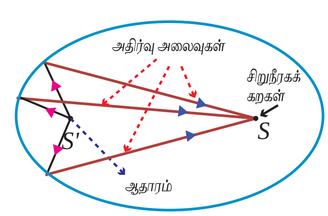
பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4\sqrt{7}x$. ■

5.7.5 நீள்வட்டத்தின் பிரதிபலிப்பு பண்பு (Reflective Property of an Ellipse)

குவியங்களிலிருந்து நீள்வட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கான கோடுகள் அந்தப் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டுடன் சமமான கோணங்களை ஏற்படுத்துகின்றன (படம் 5.62).



படம் 5.62



படம் 5.63

ஒரு குவியத்திலிருந்து உமிழப்படும் ஒளி அல்லது ஒலி அல்லது வானொலி அலைகள் நீள்வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் பட்டு மற்றொரு குவியத்தில் பெறப்படுகின்றது (படம் 5.63).

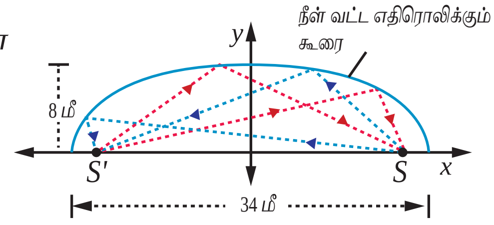
எடுத்துக்காட்டு 5.38

34மீ நீளமுள்ள ஓர் அறை பிரதிபலிப்புக் கூரையாக கட்டப்படவுள்ளது. அந்த அறையின் கூறை நீள்வட்ட வடிவமாக படம் 5.64-ல் இருப்பது போல் உள்ளது. அந்தக் கூரையின் அதிகபட்ச உயரம் 8 மீ எனில், அதன் குவியங்கள் எங்கே அமையும் என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு

நீள்வட்ட வடிவக் கூரையின் அரை நெட்டச்சு 17மீ, அதன் உயரம் அரை குற்றச்சு 8மீ. இதனால்

$$c^2 = a^2 - b^2 = 17^2 - 8^2$$
$$c = \sqrt{289-64} = \sqrt{225}$$
$$= 15$$



படம் 5.64

நீள்வட்டக் கூரையின் குவியங்கள் நெட்டச்சின் மீது மையத்திலிருந்து 15மீ தூரத்தில் இருக்கும்.

துளையில்லாத மருத்துவ அதிசயம் (A non-invasive medical miracle)

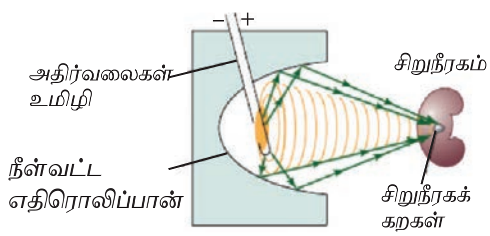
லித்தோடிரிப்டரில், நீள்வட்டத்தின் ஒரு குவியத்தில் இருந்து அதிக அதிர்வெண் கொண்ட ஒலி அலைகள் உமிழப்படுகின்றன. நீள்வட்டத்தில் மற்றொரு குவியத்தில் நோயாளியின் சிறுநீரகக்கல் இருக்குமாறு அமைக்கப்படுகின்றது. நீள்வட்டப் பிரதிபலிப்புப் பண்பின்படி ஒரு குவியத்தில் புறப்பட்ட ஒலி அலைகள் அடுத்தக் குவியத்தில் இருக்கும் சிறுநீரகக் கற்களைத் தூளாக்குகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 5.39

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{(x-11)^2}{484}+\frac{y^2}{64}=1$ (x மற்றும் y-ன் மதிப்புகள் செ.மீ-இல் அளக்கப்படுகின்றது) நோயாளியின் சிறுநீரகக் கல் மீது அதிர்வலைகள் படுமாறு நோயாளி எந்த இடத்தில் இருக்க வேண்டும் எனக் காண்க.

தீர்வு

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{(x-11)^2}{484}+\frac{y^2}{64}=1$. சிறுநீரகக் கற்களைக் கரைக்க ஒலி அலைகள் தோன்றும் இடமும் நோயாளியின் சிறுநீரகக் கல்லும் குவியங்களில் உள்ளவாறு அமைய வேண்டும்.



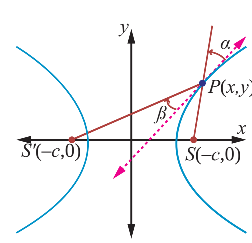
படம் 5.65

$$a^2 = 484 \text{ மற்றும் } b^2 = 64$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$= 484 - 64$$
$$= 420$$
$$c \simeq 20.5$$

நோயாளியின் சிறுநீரகக்கல் நீள்வட்டத்தின் நெட்டச்சில் மையத்திலிருந்து 20.5 செ.மீ தூரத்தில் இருக்க வேண்டும்.

5.7.6 அதிபரவளையத்தின் பிரதிபலிப்புப் பண்பு (Reflective Property of a Hyperbola)

அதிபரவளையத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து குவியங்களுக்கு வரையப்படும் கோடுகள் அந்தப் புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டுடன் சமமான கோணங்களை உருவாக்குகின்றன. (படம் 5.66).



படம் 5.66

அதிபரவளையத்தின் ஒரு குவியத்திலிருந்து புறப்படும் ஒளி அல்லது ஒலி அல்லது வானொலி அலைகள் நீள்வட்டத்தைப் போல் மற்றொரு குவியத்தில் பெறப்படுகின்றன. இது ஆழ்கடலில் பயணிக்கும் கப்பல்கள் இருக்கும் இடங்களை அறியப் பயன்படுகிறது. (படம் 5.54).

எடுத்துக்காட்டு 5.40

இரு கடலோர காவல்படைத் தளங்கள் 600 கி.மீ. தொலைவில் $A(0,0)$ மற்றும் $B(0,600)$ என்ற புள்ளிகளில் அமைந்துள்ளன. P என்ற புள்ளியில் உள்ள கப்பலிலிருந்து ஆபத்திற்கான சமிக்ஞைகள் இரு தளங்களிலும் சிறிதளவு மாறுபட்ட நேரங்களில் பெறப்படுகின்றன. அவற்றிலிருந்து கப்பல், தளம் B யை விட தளம் A-க்கு 200 கி.மீ. அதிக தூரத்தில் உள்ளதாக தீர்மானிக்கப்படுகின்றது. எனவே அந்தக் கப்பல் இருக்கும் இடம் வழியாகச் செல்லும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

இரு கடலோர காவல்படைத் தளங்கள் குவியலங்களாதலால் அவற்றின் மையம் $(0,300)$ அதிபரவளையத்தின் மையமாகும். எனவே சமன்பாடு $\frac{(y-300)^2}{a^2}-\frac{(x-0)^2}{b^2}=1$ . ... (1)

a மற்றும் b-ன் மதிப்பு காண அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள இருபுள்ளிகளை எடுத்துப் பிரதியிடலாம்.

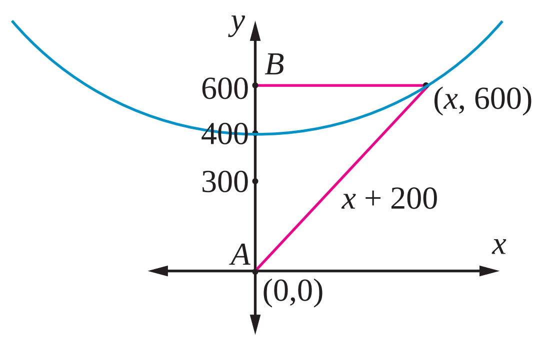
A ஆனது B-ஐ விட 200 கி.மீ. அதிக தூரத்தில் உள்ளதால் $(0,400)$ அதிபரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி $\frac{(400-300)^2}{a^2}-\frac{0}{b^2}=1$ $\frac{100^2}{a^2}=1$, $a^2=10000$ மற்றொரு புள்ளி $(x,600)$-ம் அதிபரவளையத்தின் மீது $600^2+x^2=(x+200)^2$ எனுமாறு உள்ளது.

$$\begin{aligned}360000+x^2 &= x^2+400x+40000\\ x &= 800\end{aligned}$$

(1)–இல் பிரதியிட, $\frac{(600-300)^2}{10000}-\frac{(800-0)^2}{b^2} = 1$

$$\begin{aligned}9-\frac{640000}{b^2} &= 1\\ b^2 &= 80000\end{aligned}$$

தேவையான சமன்பாடு $\frac{(y-300)^2}{10000}-\frac{x^2}{80000}=1$



படம் 5.67

இந்த அதிபரவைளயத்தின் ஏதோ ஒரு புள்ளியில்தான் அந்த கப்பல் உள்ளது.மூன்றாவது ஒரு காவல்படைத் தளத்தைப் பயன்படுத்தி அதன் சரியான இருப்பிடத்தைக் காண முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.41

ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைநோக்கியில் பரவளைய பிரதிபலிப்பான் மற்றும் அதிபரவளைய பிரதிபலிப்பான் இரண்டும் உள்ளது. படம் 5.68–இல் உள்ள தொலைநோக்கியில் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து 14மீ உயரத்தில் உள்ள F_1 என்ற அதிபரவளையத்தின் ஒரு குவியம் பரவளையத்தின் குவியமாகவும் உள்ளது. அதிபரவளையத்தின் இரண்டாவது குவியம் F_2 பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து 2மீ உயரத்தில் உள்ளது. அதிபரவளையத்தின் முனை F_1-க்கு 1மீ கீழே உள்ளது. அதிபரவளையத்தின் மையத்தை ஆதியாகவும் குவியங்களை y-அச்சிலும் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

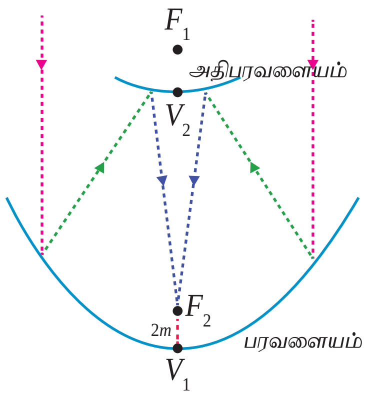
பரவளையத்தின் முனை V_1 மற்றும் அதிபரவளையத்தின் முனை V_2 என்க.

$$\overline{F_1F_2} = 14-2=12 \text{ மீ}, \; 2c=12, \; c=6$$

மையத்திலிருந்து அதிபரவளையத்தின் முனைக்கு உள்ள தூரம்
$a = 6 - 1 = 5$

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$= 36 - 25 = 11.$$

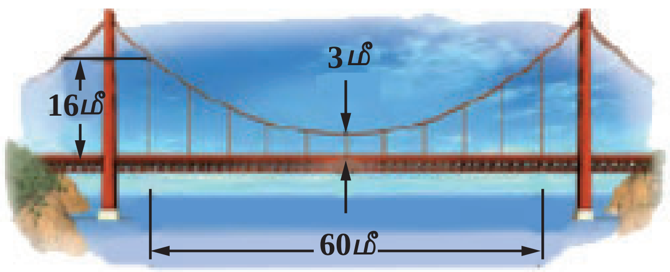
எனவே அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1.$



படம் 5.68

பயிற்சி 5.5

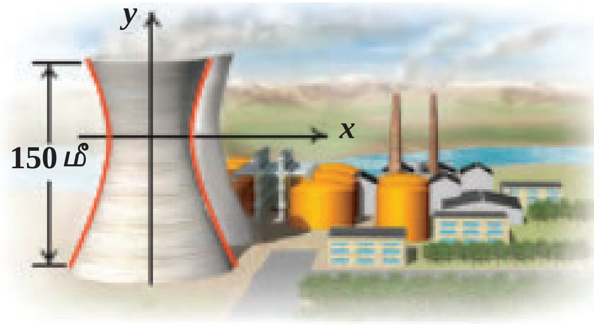
1. ஒரு பாலம் பரவளைய வளைவில் உள்ளது. மையத்தில் 10மீ உயரமும், அடிப்பகுதியில் 30மீ அகலமும் உள்ளது. மையத்திலிருந்து இருபுறமும் 6 மீ தூரத்தில் பாலத்தின் உயரத்தைக் காண்க.
2. ஒரு நான்கு வழிச்சாலைக்கான மலைவழியே செல்லும் சுரங்கப்பாதையின் முகப்பு ஒரு நீள்வட்ட வடிவமாக உள்ளது. நெடுஞ்சாலையின் மொத்த அகலம் (முகப்பு அல்ல) 16மீ. சாலையின் விளிம்பில் சுரங்கப்பாதையின் உயரம், 4மீ உயரமுள்ள சரக்கு வாகனம் செல்வதற்குத் தேவையான அளவிற்கும் முகப்பின் அதிகபட்ச உயரம் 5மீ ஆகவும் இருக்க வேண்டுமெனில் சுரங்கப்பாதையின் திறப்பின் அகலம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?
3. ஒரு நீரூற்றில், ஆதியிலிருந்து 0.5மீ கிடைமட்டத் தூரத்தில் நீரின் அதிகபட்ச உயரம் 4மீ, நீரின் பாதை ஒரு பரவளையம் எனில் ஆதியிலிருந்து 0.75மீ கிடைமட்டத் தூரத்தில் நீரின் உயரத்தைக் காண்க.
4. பொறியாளர் ஒருவர் குறுக்கு வெட்டு பரவளையமாக உள்ள ஒரு துணைக்கோள் ஏற்பியை வடிவமைக்கின்றார். ஏற்பி அதன் மேல்பக்கத்தில் 5மீ அகலமும், முனையிலிருந்து குவியம் 1.2 மீ தூரத்திலும் உள்ளது.
   (a) முனையை ஆதியாகவும், x–அச்சு பரவளையத்தின் சமச்சீர் அச்சாகவும் கொண்டு ஆய அச்சுகளைப் பொருத்தி பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.
   (b) முனையிலிருந்து செயற்கைக்கோள் ஏற்பியின் ஆழம் காண்க.
5. ஒரு தொங்கு பாலத்தின் 60மீ சாலைப்பகுதிக்கு பரவளைய கம்பி வடம் படத்தில் உள்ளவாறு பொறுத்தப்பட்டுள்ளது. செங்குத்துக் கம்பி வடங்கள் சாலைப்பகுதியில் ஒவ்வொன்றுக்கும் 6மீ இடைவெளி இருக்குமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. முனையிலிருந்து முதல் இரண்டு செங்குத்து கம்பி வடங்களுக்கான நீளத்தைக் காண்க.



படம் 5.69

6. ஒரு அணு உலை குளிரூட்டும் தூணின் குறுக்கு வெட்டு அதிபரவளைய வடிவில் உள்ளது.

மேலும் அதன் சமன்பாடு $\frac{x^2}{30^2}-\frac{y^2}{44^2}=1$. தூண் 150மீ உயரமுடையது. மேலும் அதிபரவளையத்தின் மையத்திலிருந்து தூணின் மேல்பகுதிக்கான தூரம் மையத்திலிருந்து அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தூரத்தில் பாதியாக உள்ளது. தூணின் மேற்பகுதி மற்றும் அடிப்பகுதியின் விட்டங்களைக் காண்க.



படம் 5.70

7. 1.2 மீ நீளமுள்ள தடி அதன் முனைகள் எப்போதும் ஆய அச்சுகளைத் தொட்டுச் செல்லுமாறு நகருகின்றது. தடியின் x-அச்சு முனையிலிருந்து 0.3மீ தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி P-ன் நியமப்பாதை ஒரு நீள்வட்டம் என நிறுவுக, மேலும் அதன் மையத்தொலைத்தகவும் காண்க.

8. தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் தரைக்கு இணையாகப் பொருத்தப்பட்ட ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர் தரையைத் தொடும் பாதை ஒரு பரவளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மேலும் இந்தப் பரவளையப் பாதையின் முனை குழாயின் வாயில் அமைகிறது. குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5மீ கீழே நீரின் பாய்வானது குழாயின் முனை வழியாகச் செல்லும் நிலை குத்துக் கோட்டிற்கு 3மீ தூரத்தில் உள்ளது. எனில் குத்துக் கோட்டிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும் என்பதைக் காண்க.

9. ஒரு ராக்கெட் வெடியானது கொளுத்தும்போது அது ஒரு பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது. அதன் உச்ச உயரம் 4மீ–ஐ எட்டும்போது அது கொளுத்தப்பட்ட இடத்திலிருந்து கிடைமட்டத் தூரம் 6மீ தொலைவிலுள்ளது. இறுதியாக கிடைமட்டமாக 12மீ தொலைவில் தரையை வந்தடைகிறது. எனில் புறப்பட்ட இடத்தில் தரையுடன் ஏற்படுத்தப்படும் எறிகோணம் காண்க.

10. A, B என்ற இரு புள்ளிகள் 10கி.மீ இடைவெளியில் உள்ளன. இந்தப் புள்ளிகளில் வெவ்வேறு நேரங்களில் கேட்கப்பட்ட வெடிச்சத்தத்திலிருந்து வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் A என்ற புள்ளி B என்ற புள்ளியைவிட 6 கி.மீ அருகாமையில் உள்ளது என நிர்ணயிக்கப்பட்டது. வெடிச்சத்தம் உண்டான இடம் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவரைக்கு உட்பட்டது என நிரூபித்து அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

பயிற்சி 5.6

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகப் பொருத்தமான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்க.

1. $(1,5)$ மற்றும் $(4,1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதும் y-அச்சைத் தொட்டுச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-5x-6y+9+\lambda(4x+3y-19)=0$ எனில் λ-ன் மதிப்பு

(1) $0,-\frac{40}{9}$ (2) 0 (3) $\frac{40}{9}$ (4) $\frac{-40}{9}$

2. செவ்வகல நீளம் 8 அலகுகள் மற்றும் துணையச்சின் நீளம் குவியங்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தில் பாதி உள்ள அதிபரவளையத்தின் மையத்தொலைத் தகவு

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{3}{2}$

3. வட்டம் $x^2+y^2=4x+8y+5$ நேர்க்கோடு $3x-4y=m$ -ஐ இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது எனில்

(1) $15<m<65$ (2) $35<m<85$ (3) $-85<m<-35$ (4) $-35<m<15$

4. x-அச்சை $(1,0)$ என்ற புள்ளியில் தொட்டுச் செல்வதும் $(2,3)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் விட்டம்

(1) $\frac{6}{5}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{10}{3}$ (4) $\frac{3}{5}$

YI16D

5. $3x^2+by^2+4bx-6by+b^2=0$ என்ற வட்டத்தின் ஆரம்

(1) 1 (2) 3 (3) $\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{11}$

6. $x^2-8x-12=0$ மற்றும் $y^2-14y+45=0$ என்ற கோடுகளால் அடைபடும் சதுரத்தின் உள்ளே வரையப்படும் மிகப்பெரிய வட்டத்தின் ஆரம்

(1) $(4,7)$ (2) $(7,4)$ (3) $(9,4)$ (4) $(4,9)$

7. நேர்க்கோடு $2x+4y=3$-க்கு இணையாக $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ என்ற வட்டத்தின் செங்கோட்டுச் சமன்பாடு

(1) $x+2y=3$ (2) $x+2y+3=0$ (3) $2x+4y+3=0$ (4) $x-2y+3=0$

8. $P(x,y)$ என்ற புள்ளி குவியங்கள் $F_1(3,0)$ மற்றும் $F_2(-3,0)$ கொண்ட கூம்பு வளைவு $16x^2+25y^2=400$-ன் மீதுள்ள புள்ளி எனில் PF_1+PF_2-ன் மதிப்பு

(1) 8 (2) 6 (3) 10 (4) 12

9. $x+y=6$ மற்றும் $x+2y=4$ என்ற நேர்க்கோடுகளை விட்டங்களாகக் கொண்டு $(6,2)$ புள்ளிவழிச் செல்லும் வட்டத்தின் ஆரம்

(1) 10 (2) $2\sqrt{5}$ (3) 6 (4) 4

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ மற்றும் $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ என்ற அதிபரவளையங்களின் குவியங்கள் ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகள் எனில் அந்த நாற்கரத்தின் பரப்பு

(1) $4(a^2+b^2)$ (2) $2(a^2+b^2)$ (3) a^2+b^2 (4) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

11. $y^2=4x$ என்ற பரவளையத்தின் செவ்வகல முனைகளில் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள் $(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் எனில் r^2 -ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

12. $x+y=k$ என்ற நேர்க்கோடு பரவளையம் $y^2=12x$-இன் செங்கோட்டுச் சமன்பாடாக உள்ளது எனில் k-ன் மதிப்பு

(1) 3 (2) -1 (3) 1 (4) 9

13. நீள்வட்டம் $E_1 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ செவ்வகம் R –க்குள் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் நீள்வட்டத்தின் அச்சுகளுக்கு இணையாக இருக்குமாறு அமைந்துள்ளன. அந்த செவ்வகத்தின் சுற்றுவட்டமாக அமைந்த மற்றொரு நீள்வட்டம் E_2, $(0,4)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனில் அந்த நீள்வட்டத்தின் மையத்தொலைத் தகவு

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{4}$

14. $2x-y=1$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டால் தொடுபுள்ளிகளில் ஒன்று

(1) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) $\left(\frac{-9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (3) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (4) $\left(3\sqrt{3},-2\sqrt{2}\right)$

15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள் வழியாகவும் $(0,3)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

(1) $x^2+y^2-6y-7=0$ (2) $x^2+y^2-6y+7=0$

(3) $x^2+y^2-6y-5=0$ (4) $x^2+y^2-6y+5=0$

16. C என்ற வட்டத்தின் மையம் $(1,1)$ மற்றும் ஆரம் 1 அலகு என்க. T என்ற வட்டத்தின் மையம் $(0, y)$ ஆகவும் ஆதிப்புள்ளி வழியாகவும் உள்ளது. மேலும் C என்ற வட்டத்தை வெளிப்புறமாகத் தொட்டுச் செல்கிறது எனில் வட்டம் T –ன் ஆரம்

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

17. மையம் ஆதிப்புள்ளியாகவும் நெட்டச்சு x-அச்சாகவும் உள்ள நீள்வட்டத்தைக் கருத்தில் கொள்க. அதன் மையத்தொலைத் தகவு $\frac{3}{5}$ மற்றும் குவியங்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் 6 எனில் அந்த நீள்வட்டத்தின் உள்ளே நெட்டச்சு மற்றும் குற்றச்சுகளை மூலைவிட்டங்களாக் கொண்டு வரையப்படும் நாற்கரத்தின் பரப்பு

(1) 8 (2) 32 (3) 80 (4) 40

18. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தினுள் வரையப்படும் மிகப்பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பு

(1) $2ab$ (2) ab (3) $\sqrt{ab}$ (4) $\frac{a}{b}$

19. நீள்வட்டத்தின் அரைக்குற்றச்சு OB, F மற்றும் F' குவியங்கள் மற்றும் FBF' ஒரு செங்கோணம் எனில் அந்த நீள்வட்டத்தின் மையத்தொலைத் தகவு காண்க.

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

20. $(x-3)^2+(y-4)^2=\frac{y^2}{9}$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையத்தொலைத் தகவு

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

21. P என்ற புள்ளியிலிருந்து $y^2=4x$ என்ற பரவளையத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகளுக்கிடையேயான கோணம் செங்கோணம் எனில் P –ன் நியமப்பாதை

(1) $2x+1=0$ (2) $x=-1$ (3) $2x-1=0$ (4) $x=1$

22. $(1,-2)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் $(3,0)$ என்ற புள்ளியில் x –அச்சைத் தொட்டுச் செல்வதுமான வட்டம் பின்வரும் புள்ளிகளில் எந்தப் புள்ளி வழியாகச் செல்லும்?

(1) $(-5,2)$ (2) $(2,-5)$ (3) $(5,-2)$ (4) $(-2,5)$

23. $(-2,0)$ –இலிருந்து ஒரு நகரும் புள்ளிக்கான தூரம் அந்தப் புள்ளிக்கும் நேர்க்கோடு $x=\frac{-9}{2}$ –க்கும் இடையேயான தூரத்தைப் போல் $\frac{2}{3}$ மடங்கு உள்ளது எனில் அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை

(1) பரவளையம் (2) அதிபரவளையம் (3) நீள்வட்டம் (4) வட்டம்

24. $x^2-(a+b)x-4=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் மதிப்புகள் m –ன் மதிப்புகளாக இருக்கும்போது $y=mx+2\sqrt{5}$ என்றநேர்க்கோடு $16x^2-9y^2=144$ என்றஅதிபரவளையத்தைத் தொட்டுச் செல்கின்றது எனில் $(a+b)$ –ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 4 (3) 0 (4) -2

25. $x^2+y^2-8x-4y+c=0$ என்ற வட்டத்தின் விட்டத்தின் ஒரு முனை $(11,2)$ எனில் அதன் மறுமுனை

(1) $(-5,2)$ (2) $(-3, 2)$ (3) $(5,-2)$ (4) $(-2,5)$

பாடச்சுருக்கம்

(1) வட்டச் சமன்பாட்டின் திட்டவடிவம் $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

(i) மையம் (h,k) (ii) ஆரம் 'r'

(2) வட்டச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

(i) மையம் $(-g,-f)$ (ii) ஆரம் $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

(3) $lx+my+n=0$ என்ற நேர்க்கோடும் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

என்ற வட்டமும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0, \lambda\in\mathbb{R}^1$.

(4) ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைப்புள்ளிகள் (x_1,y_1) மற்றும் (x_2,y_2) எனில் அந்த வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ஆகும்.

(5) (x_1,y_1) என்ற புள்ளியில் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடுச் சமன்பாடு $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

(6) (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தின் செங்கோட்டுச் சமன்பாடு $yx_1 - xy_1 + g(y - y_1) - f(x - x_1) = 0$.

அட்டவணை 1

தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடு

வளைவரை	சமன்பாடு	தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு	செங்கோட்டுச் சமன்பாடு
வட்டம்	$x^2 + y^2 = a^2$	(i) கார்ட்டீசியன் வடிவம் $xx_1 + yy_1 = a^2$ (ii) துணையலகு வடிவம் $x\cos\theta + y\sin\theta = a$	(i) கார்ட்டீசியன் வடிவம் $xy_1 - yx_1 = 0$ (ii) துணையலகு வடிவம் $x\sin\theta - y\cos\theta = 0$
பரவளையம்	$y^2 = 4ax$	(i) $yy_1 = 2a(x + x_1)$ (ii) $yt = x + at^2$	(i) $xy_1 + 2y = 2ay_1 + x_1y_1$ (ii) $y + xt = at^3 + 2at$
நீள்வட்டம்	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	(i) $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (ii) $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$	(i) $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$ (ii) $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$
அதி பரவளையம்	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	(i) $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (ii) $\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$	(i) $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$ (ii) $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$

அட்டவணை 2

$y = mx + c$ என்ற நேர்க்கோடு கூம்பு வளைகளின் தொடுகோடாக இருக்க நிபந்தனை

கூம்பு வளைவு	சமன்பாடு	தொடுகோடாக இருக்க நிபந்தனை	தொடுபுள்ளி	தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு
வட்டம்	$x^2 + y^2 = a^2$	$c^2 = a^2(1 + m^2)$	$\left(\frac{\mp am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{\pm a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{1+m^2}$
பரவளையம்	$y^2 = 4ax$	$c = \frac{a}{m}$	$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$	$y = mx + \frac{a}{m}$
நீள்வட்டம்	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2m^2 + b^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$
அதி பரவளையம்	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2m^2 - b^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{-b^2}{c}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

அட்டவணை 3

துணையலகு வடிவங்கள்

கூம்பு வளைவு	துணையலகுச் சமன்பாடுகள்	துணையலகு	துணையலகு வீச்சு	கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள ஏதெனுமொரு புள்ளி
வட்டம்	$x = a\cos\theta$ $y = a\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' or $(a\cos\theta, a\sin\theta)$
பரவளையம்	$x = at^2$ $y = 2at$	t	$-\infty < t < \infty$	't' or $(at^2, 2at)$
நீள்வட்டம்	$x = a\cos\theta$ $y = b\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' or $(a\cos\theta, b\sin\theta)$
அதி பரவளையம்	$x = a\sec\theta$ $y = b\tan\theta$	θ	$-\pi \le \theta \le \pi$ except $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$	'θ' or $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

5.4.3 கூம்பு வளைவின் பொதுச் சமன்பாடு $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ -லிருந்து கூம்புவளைவின் வடிவங்களை அடையாளம் காணல்

(Identifying the conics from the general equation of the conic $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$)

இரண்டாம்படி சமன்பாட்டின் வரைபடம் பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்ப வட்டம், பரவளையம், நீள்வட்டம், அதிபரவளையம், ஒரு புள்ளி, வெற்றுக்கணம், ஒரு நேர்க்கோடு அல்லது ஒரு இரட்டை நேர்க்கோடாக இருக்கும்.

(1) $A = C = 1,\ B = 0, D = -2h,\ E = -2k,\ F = h^2 + k^2 - r^2$ எனில் பொதுச்சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ எனக்கிடைக்கும். இது ஒரு வட்டம் ஆகும்.

(2) $B = 0$ மற்றும் A அல்லது $C = 0$ எனில், பொதுச்சமன்பாடு நாம் படித்த ஏதேனும் ஒரு பரவளையம் ஆகும்.

(3) $A \ne C$ மற்றும் A மற்றும் C இரண்டும் ஒரே குறியாக இருப்பின் பொதுச் சமன்பாடு நீள்வட்டத்தைத் தரும்.

(4) $A \ne C$ மற்றும் A மற்றும் C இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்குறியாக இருக்குமானால் பொதுச் சமன்பாடு அதிபரவளையத்தைத் தரும்.

(5) $A=C$ மற்றும் $B=D=E=F=0$, எனில் பொதுச் சமன்பாடு $x^2+y^2=0$ என்ற புள்ளியாக மாறும்.

(6) $A=C=F$ மற்றும் $B=D=E=0$, எனில் பொதுச் சமன்பாடு $x^2+y^2+1=0$ என்ற வெற்றுக் கணத்தைத் தரும்.

(7) $A\neq 0$ அல்லது $C\neq 0$ மற்றும் மற்ற கெழுக்கள் பூச்சியம் எனில் பொதுச் சமன்பாடு ஆய அச்சுகளின் சமன்பாட்டைத் தரும்.

(8) $A=-C$ மற்றும் மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் பொதுச் சமன்பாடு $x^2-y^2=0$ என்ற இரட்டை நேர்க்கோட்டைத் தரும்.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும். GeoGebra–வின் "12th Standard Mathematics" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடது பக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "Two Dimensional Analytical Geometry-II" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க. இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். "Conic Tracing" பயிற்சித்தாளை தேர்வு செய்க.

அத்தியாயம்

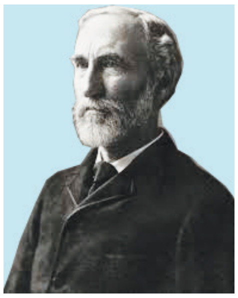
6

வெக்டர் இயற்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

அளவுகளின் இணைப்பே கணிதமாகும்.
எதனையும் சமமாகவோ சமமற்றதாகவோ ஒப்பிடுவது அளவாகும்.
வலியுறுத்தும் எக்கருத்தையும் மற்றொரு கருத்தாக மாற்ற இயலுமெனில் அவை சமம்.

– ஹெர்மன் குன்தர் கிராஸ்மன்

6.1 அறிமுகம் (Introduction)



ஜோசையா வில்லியர்டு கிப்ஸ் (1839 – 1903)

வெக்டர்கள் மற்றும் வெக்டர்களின் மீதான செயல்பாடுகள் பற்றிய கருத்தாக்கத்தை முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். வெக்டர்கள் பற்றிய நவீன கருத்தாக்கம் வெஸல் (1745-1818) மற்றும் ஆர்கண்ட் (1768-1822) ஆகியோரால் வடிவக்கணித முறையில் கலப்பெண்களை ஆய அச்சு தளத்தில் திசையிட்ட நேர்க்கோட்டுத் துண்டாக விவரிக்க முற்படும் போது தோன்றியது எனலாம். எண்ணளவு மற்றும் திசையைப் பெற்றுள்ள கணியம் வெக்டர் எனவும், தொடக்கப்புள்ளிகளின் நிலைகளை கருத்தில் கொள்ளாமல், **சம எண்ணளவையும் ஒரே திசையையும் கொண்டுள்ள இரு வெக்டர்கள் எப்பொழுதும் சமமானவை எனவும் கற்றுள்ளோம்.**

மேலும், $\vec{a}$ அல்லது $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ என எடுத்துக்கொண்டு இரு வெக்டர்களின் கூடுதல், வெக்டர்களின் திசையிலி பெருக்கல், புள்ளிப் பெருக்கல் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல் ஆகியவற்றை கற்றறிந்துள்ளோம். நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் மற்றும் தளங்கள் பற்றி விவாதிக்கவும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டரின் எண்ணளவு, திசை மற்றும் வெக்டர் பற்றிய கருத்தாக்கங்களை மேலும் தெளிவாக அறிந்துகொள்ளவும், வெக்டர்களின் வடிவக்கணித அறிமுகத்தை நினைவு கூர்வோம். புகழ் பெற்ற கணிதவியலாளர்கள் கிராஸ்மன், ஹாமில்டன், கிளிஃபர்ட் மற்றும் கிப்ஸ் ஆகியோர் புள்ளிப் பெருக்கல் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல் ஆகியவற்றை அறிமுகப்படுத்திய முன்னோடிகள் ஆவர்.

இயற்பியலில் நேரிடையாகவும், பொறியியல் மற்றும் மருத்துவம் சார்ந்த படிப்புகளில் நுண்கணிதத்துடனும் அதிக அளவில் வெக்டர் இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது. அவற்றில் ஒரு சிலவற்றை காண்போம்.

- இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவு, திசையிலி முப்பெருக்கல் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடப் வெக்டர் இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது.
- இயந்திரவியலில், விசை மற்றும் திருப்புத்திறன் காண திசையிலி பெருக்கல் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல் ஆகியவை பயன்படுகின்றன.
- வெக்டர்களின் சுழல் மற்றும் பாய்வு ஆகியவற்றை அறிமுகப்படுத்த நுண்கணிதத்துடன் வெக்டர் இயற்கணிதம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மின்காந்தவியல், நீரியக்கவியல், இரத்த ஓட்டம், ராக்கெட் ஏவுதல் மற்றும் செயற்கைக்கோளின் பாதை ஆகியவற்றை கற்றறிய சுழல் மற்றும் பாய்வு மிகவும் பயன்படுகிறது.
- விண்வெளியில் இரண்டு விமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு காணவும் அவற்றின் பாதைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் காணவும் புள்ளிப் பெருக்கல் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல் பயன்படுகிறது.

- சூரிய சக்தியை கூடுதலாக பெறுவதற்கு சோலார் பேனல்களின் சாய்வை சூரியனின் திசையில் பொருத்தமாக நிறுவ, வெக்டர்களின் புள்ளிப்பெருக்கலின் எளிய பயன்பாடு பயன்படுகிறது.
- செயற்கைக்கோள்களில் பேனல்களுக்கு இடையில் உள்ள கோணங்கள் மற்றும் தொலைவுகளை அளக்க, பல்வேறு துறைகளில் குழாய்களை கட்டமைக்க, கட்டுமான துறையில் கட்டமைப்புகளுக்கு இடையேயான தூரம் மற்றும் கோணங்களை கணக்கிட வெக்டர் இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது.

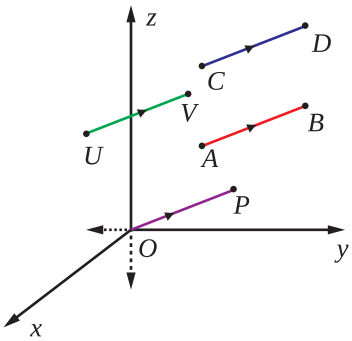
கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும் போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவை :

- இரண்டு மற்றும் மூன்று வெக்டர்களின் திசையிலி மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல்களை பயன்படுத்துதல்
- வடிவியல், முக்கோணவியல் மற்றும் இயற்பியல் கணக்குகளின் தீர்வு காணல்
- கோட்டின் துணையலகு, துணையலகு அல்லாத மற்றும் கார்டீசியன் வடிவ சமன்பாடுகளைக் காணல்
- தளத்தின் துணையலகு, துணையலகு அல்லாத மற்றும் கார்டீசியன் வடிவ சமன்பாடுகளைக் காணல்
- கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் மற்றும் ஒரு தள அமையாக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் காணல்
- ஒரு புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்களைக் காணல்

6.2 வெக்டர்களின் வடிவக்கணித அறிமுகம் (Geometric introduction to vectors)

முப்பரிமாண வெளி $\mathbb{R}^3$–ல் $\vec{v}$ என்ற வெக்டர், $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ என்ற புள்ளியை ஒரு தொடக்கப் புள்ளியாகவும் $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ என்ற முடிவுப் புள்ளியாகவும் கொண்ட ஒரு திசையிடப்பட்ட கோட்டுத்துண்டால் குறிப்பிடப்படுகிறது. இதனை $\overrightarrow{AB}$ எனக் குறிக்கிறோம். AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் நீளம் $\vec{v}$ என்ற வெக்டரின் எண்ணளவாகும், மற்றும் A–இல் இருந்து B–ன் திசையானது $\vec{v}$ என்ற வெக்டரின் திசையாகும். எனவே, ஒரு வெக்டரை $\vec{v}$ அல்லது $\overrightarrow{AB}$ எனக் குறிப்பிடலாம். $\mathbb{R}^3$–ல் $\overrightarrow{AB}$ –ன் நீளம் $\overrightarrow{CD}$ –ன் நீளத்திற்குச் சமமாகவும், A–இல் இருந்து B–ன் திசையும் C–இல் இருந்து D–இன் திசையும் ஒரே திசையாகவும் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\overrightarrow{CD}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் **சமவெக்டர்கள்** எனப்படும். இதனை $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ என எழுதுவோம். இங்கு $\overrightarrow{CD}$ என்பது $\overrightarrow{AB}$ –ன் **நகர்வு** எனப்படும்.



படம் 6.1

$\mathbb{R}^3$ -ல் உள்ள எந்தவொரு வெக்டர் $\overrightarrow{AB}$ -யையும் $\mathbb{R}^3$–ல் எங்கு வேண்டுமானாலும் நகர்த்தி, $U \in \mathbb{R}^3$ என்ற புள்ளியை தொடக்கப்புள்ளியாகவும் $V \in \mathbb{R}^3$ என்ற புள்ளியை முடிவுப் புள்ளியாகவும் கொண்ட ஒரு வெக்டருக்குச் சமமாக $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{UV}$ எனுமாறு எழுத முடியும் எனக் காண்கிறோம். குறிப்பாக, $\mathbb{R}^3$–ன் ஆதிப்புள்ளி O எனில், $P \in \mathbb{R}^3$ என்ற புள்ளியை $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ எனுமாறு காணலாம். $\overrightarrow{OP}$ என்ற வெக்டர் P என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் எனப்படும். மேலும், கொடுக்கப்பட்ட

ஏதேனுமொரு வெக்டர் $\vec{v}$ -க்கு, $P \in \mathbb{R}^3$ என்ற தனித்த புள்ளியை $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$ எனுமாறு காணலாம். $\overrightarrow{AB}$ என்ற வெக்டரின் தொடக்கப்புள்ளி A -யும் முடிவுப்புள்ளி B -யும் ஒன்றாக அமைந்தால், அவ்வெக்டர் பூச்சிய வெக்டர் எனப்படும். $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, மற்றும் $(0,0,0)$ என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்களை முறையே $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ மற்றும் $\vec{0}$ ஆகிய வழக்கமான குறியீடுகளால் குறிப்பிடுகிறோம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ -ன் நிலைவெக்டர் $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ எனப்படும். இது $(0,0,0)$ என்றபுள்ளியை தொடக்கப்புள்ளியாகவும், (a_1, a_2, a_3) என்றபுள்ளியை முடிவுப்புள்ளியாகவும் கொண்ட கோட்டுத்துண்டாகும். அனைத்து மெய்யெண்களும் திசையிலிகள் எனப்படும்.

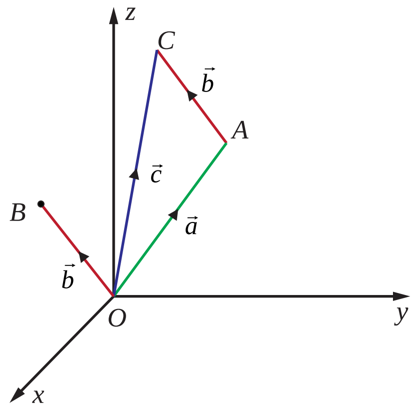
A என்பது (a_1, a_2, a_3) மற்றும் B என்பது (b_1, b_2, b_3) எனில் $\overrightarrow{AB}$ வெக்டரின் நீளம் $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ ஆகும். குறிப்பாக (b_1, b_2, b_3) -ன் நிலைவெக்டர் $\vec{b}$ எனில், இதன் நீளம் $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ ஆகும். நீளம் 1 உடைய வெக்டரை **அலகு வெக்டர்** என்கிறோம். அலகு வெக்டரைக் குறிப்பிட்ட $\hat{u}$ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம். $\hat{i}, \hat{j}$, மற்றும் $\hat{k}$ ஆகியவை அலகு வெக்டர்கள் என்பதையும், நீளம் 0 கொண்ட ஒரேயொரு வெக்டர் $\vec{0}$ என்பதையும் நினைவில் கொள்க.

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} \in \mathbb{R}^3$ மற்றும் $\alpha \in \mathbb{R}$ எனில், முப்பரிமாண வெளியில் வெக்டர்களின் கூட்டல் மற்றும் திசையிலிப் பெருக்கல் ஆகியவற்றை பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

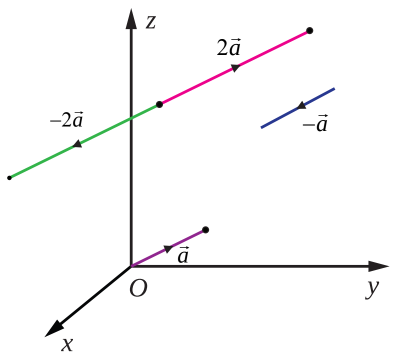
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}.$$
$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1)\hat{i} + (\alpha a_2)\hat{j} + (\alpha a_3)\hat{k};$$

$\vec{a} + \vec{b}$ -ன் வடிவக்கணித விளக்கம் காண, $A = (a_1, a_2, a_3)$ மற்றும் $B = (b_1, b_2, b_3)$ என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்க. A என்ற புள்ளியை தொடக்கப் புள்ளியாகவும், பொருத்தமான ஒரு புள்ளி $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ யை முடிவுப்புள்ளியாகவும் கொண்ட வெக்டருக்கு நிலைவெக்டர் $\vec{b}$ யை நகர்த்தினால் படம் (6.2), (c_1, c_2, c_3) புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\vec{c}$ ஆனது $\vec{a} + \vec{b}$ யைக் குறிக்கும்.

$\alpha\vec{a}$ எனும் வெக்டர் $\vec{a}$ எனும் வெக்டருக்கு இணையாக உள்ள வெக்டராகும். $a > 1$ எனில் $\vec{a}$ -ன் நீளம் α மடங்கு பெரிதாக்கப்படுகிறது. $0 < \alpha < 1$ எனில் $\vec{a}$ -ன் நீளம் α மடங்கு குறுக்கப்படுகிறது. $\alpha < 0$ எனில் $\alpha\vec{a}$ -ன் எண்ணளவு $\vec{a}$ -ன் எண்ணளவைப் போல் $|\alpha|$ மடங்காகவும் $\alpha\vec{a}$ -ன் திசை $\vec{a}$ -ன் திசைக்கு எதிர்த்திசையிலும் இருக்கும். குறிப்பாக $\alpha = -1$ எனில் $\alpha\vec{a} = -\vec{a}$ என்ற வெக்டரின் நீளமானது $\vec{a}$ -ன் நீளத்திற்குச் சமமாகவும் $\vec{a}$ -ன் திசைக்கு எதிர்திசையிலும் அமையும். படம். 6.3



படம் 6.2



படம் 6.3

6.3 திசையிலிப் பெருக்கல் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல் (Scalar Product and Vector Product)

முன் வகுப்பில் கற்ற திசையிலிப் பெருக்கல் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல் ஆகியவற்றை நினைவு கூர்வோம்.

வரையறை 6.1

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ என்ற இரு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் (அல்லது புள்ளிப் பெருக்கல்) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

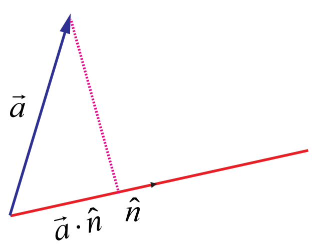
மேலும், $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ என்ற இரு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் அல்லது குறுக்குப் பெருக்கல் $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ ஒரு திசையிலியாகும், மற்றும் $\vec{a}\times\vec{b}$ ஒரு வெக்டராகும்.

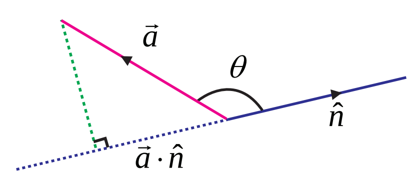
6.3.1 வடிவக்கணித விளக்கம் (Geometrical interpretation)

$\vec{a}$ என்பது ஏதேனுமொரு வெக்டர் மற்றும் $\hat{n}$ ஒரு அலகு வெக்டர் எனில் $\hat{n}$–ன் மீதான $\vec{a}$–ன் வீழல் $\vec{a}\cdot\hat{n}$ ஆகும். $\vec{a}$ மற்றும் $\hat{n}$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் குறுங்கோணம் (படம் 6.4). எனில், $\vec{a}\cdot\hat{n}$–ன் மதிப்பு மிகை மதிப்பாகும். $\vec{a}$ மற்றும் $\hat{n}$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் விரிகோணம் எனில், $\vec{a}\cdot\hat{n}$–ன் மதிப்பு குறை மதிப்பாகும். (படம் 6.5).



மிகை புள்ளிப் பெருக்கல்

படம் 6.4



குறை புள்ளிப் பெருக்கல்

படம் 6.5

$\vec{a}$, $\vec{b}$, என்பன ஏதேனுமிரு பூச்சியமற்ற வெக்டர்கள் எனில், $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \left| |\vec{b}|\,\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right| = \left| |\vec{a}|\,\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right|$ என எழுதலாம். எனவே, $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$ என்பது $\vec{b}$ – ன் திசையில் $|\vec{b}|\vec{a}$ –ன் வீழலைக் காணும் போது கிடைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நீளம் அல்லது $\vec{a}$ – ன் திசையில் $|\vec{a}|\vec{b}$ –ன் வீழலைக் காணும் போது கிடைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நீளம் ஆகும். மேலும், $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, இங்கு θ என்பது $\vec{a}$, $\vec{b}$ எனும் வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும்.

$\vec{a}\times\vec{b}$ என்பது, $\vec{0}$ ஆகவோ அல்லது $\vec{a}$, $\vec{b}$, என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையாக உள்ள தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், $\vec{a}$, $\vec{b}$, என்றவெக்டர்களை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவினை எண்ணளவாகவும் கொண்ட வெக்டராகும். $\vec{a}$, $\vec{b}$, எனும் பூச்சியமற்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\vec{a}\times\vec{b}$ –ன் எண்ணளவினை $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

ஒரே தொடக்கப்புள்ளியைப் பெற்றுள்ள இரண்டு வெக்டர்கள் ஒரே தொடக்கப்புள்ளி வெக்டர்கள் அல்லது ஒரு முனையில் சந்திக்கும் வெக்டர்கள் எனப்படும்.

குறிப்புரை

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ எனும் இரண்டு பூச்சியமற்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$.

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ எனும் இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 0 அல்லது π எனில், அவ்வெக்டர்கள் இணையானவை.

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ எனும் இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\dfrac{\pi}{2}$ அல்லது $\dfrac{3\pi}{2}$ எனில், அவ்வெக்டர்கள் செங்குத்தானவை.

பண்பு

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பன ஏதேனுமிரு வெக்டர்கள் என்க. பின்னர்,

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $\vec{a}$, $\vec{b}$, என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை ஆகும்.
- $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை ஆகும்.

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் மற்றும் α ஒரு திசையிலி எனில்,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c},\ (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b});$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}),\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\ (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\alpha\vec{b}).$$

6.3.2 முக்கோணவியலில் புள்ளி மற்றும் குறுக்குப் பெருக்கல்களின் பயன்பாடு (Application of dot and cross products in plane Trigonometry)

எடுத்துக்காட்டு 6.1 (கொசைன் சூத்திரம்) (Cosine formulae)

வழக்கமான குறியீடுகளுடன், முக்கோணம் ABC–ல், வெக்டர்களைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (ii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

(iii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

தீர்வு

வழக்கமான குறியீடுகளுடன் முக்கோணம் ABC–ல் ABC, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$ மற்றும் $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ என்க.

எனவே, $|\overrightarrow{BC}| = a, |\overrightarrow{CA}| = b, |\overrightarrow{AB}| = c$ மற்றும் $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

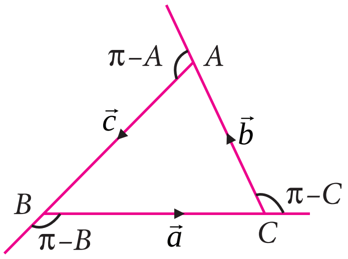
எனவே, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB})$$

$$\Rightarrow\ |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow\ a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - A)$$

$$\Rightarrow\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$



படம் 6.6

முடிவுகள் (ii) மற்றும் (iii) ஆகியவற்றை இதேபோல் நிறுவலாம். ∎

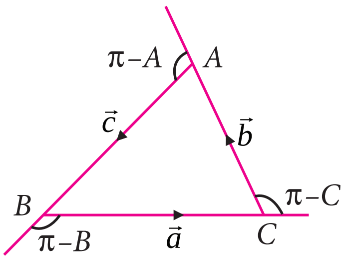
எடுத்துக்காட்டு 6.2

வழக்கமான குறியீடுகளுடன், முக்கோணம் ABC–ல், வெக்டர்களைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$

(iii) $c = a\cos B + b\cos A$

தீர்வு



படம் 6.7

வழக்கமான குறியீடுகளுடன் முக்கோணம் ABC–ல், $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, மற்றும் $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ என்க.

எனவே, $|\overrightarrow{BC}|=a$, $|\overrightarrow{CA}|=b$, $|\overrightarrow{AB}|=c$ மற்றும் $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

எனவே, $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC}$ –ஆல் இருபுறமும் புள்ளிப்பெருக்கல் காண. நாம் பெறுவது

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow\quad |\overrightarrow{BC}|^2 = -|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos(\pi-C)-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-B)$$

$$\Rightarrow\quad a^2 = ab\cos C+ac\cos B$$

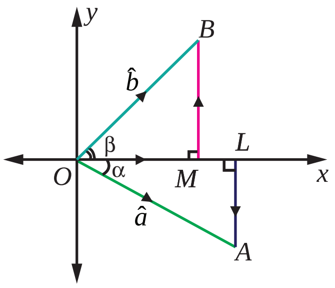
எனவே $a=b\cos C+c\cos B$. முடிவுகள் (ii) மற்றும் (iii) ஆகியவற்றை இதேபோல் நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.3

வெக்டர் முறையில், $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\hat{a}=\overrightarrow{OA}$ மற்றும் $\hat{b}=\overrightarrow{OB}$ என்ற அலகு வெக்டர்கள் x-அச்சின் மிகை திசையுடன் முறையே α,β என்ற கோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது என்க. இங்கு A, B என்பன படம் 6.8–ல் காட்டப்பட்டுள்ளன. AL மற்றும் BM என்பவற்றை x-அச்சுக்கு செங்குத்தாக வரைக.



படம் 6.8

ஆகவே, $|\overrightarrow{OL}|=|\overrightarrow{OA}|\cos\alpha=\cos\alpha$, $|\overrightarrow{LA}|=|\overrightarrow{OA}|\sin\alpha=\sin\alpha$.

$$\overrightarrow{OL}=|\overrightarrow{OL}|\hat{i} = \cos\alpha\hat{i},\ \overrightarrow{LA}=\sin\alpha(-\hat{j}).$$

எனவே, $\hat{a} = \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LA}=\cos\alpha\hat{i}-\sin\alpha\hat{j}$. ... (1)

இதேபோல், $\hat{b} = \cos\beta\hat{i}+\sin\beta\hat{j}$ ... (2)

$\hat{a}$, $\hat{b}$ வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்டக் கோணம் $\alpha+\beta$ என்பதால்,

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = |\hat{a}||\hat{b}|\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta) \quad ... (3)$$

மாறாக, சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2)–லிருந்து

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = (\cos\alpha\hat{i}-\sin\alpha\hat{j})\cdot(\cos\beta\hat{i}+\sin\beta\hat{j})=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \quad ... (4)$$

சமன்பாடுகள் (3) மற்றும் (4)லிருந்து, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

எடுத்துக்காட்டு 6.4

வழக்கமான குறியீடுகளுடன், முக்கோணம் ABC–ல் வெக்டர்களைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ என நிறுவுக.

தீர்வு

வழக்கமான குறியீடுகளுடன், முக்கோணம் ABC –ல், $\overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}$, மற்றும் $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ என்க.

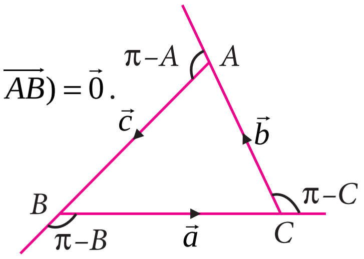
$|\overrightarrow{BC}|=a$, $|\overrightarrow{CA}|=b$, மற்றும் $|\overrightarrow{AB}|=c$ என்க.

எனவே, ΔABC –ல், $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0$ என்பதால் $\overrightarrow{BC}\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$.

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}. \quad ... (1)$$

இதேபோல் $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ என்பதால்,

$$\overrightarrow{CA}\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}) = \vec{0}.$$



படம் 6.9

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB} \quad \ldots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2)–லிருந்து

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}.$$

ஆகவே, $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|$.

$$ca\sin(\pi - B) = bc\sin(\pi - A) = ab\sin(\pi - C).$$

அதாவது, $ca\sin B = bc\sin A = ab\sin C$. இதனை abc –ஆல் வகுத்தால்,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ or } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ எனக் கிடைக்கிறது.

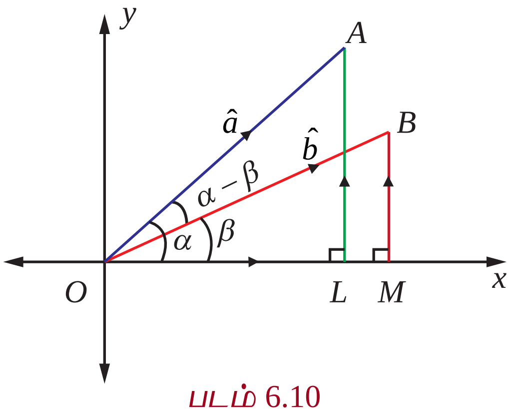
எடுத்துக்காட்டு 6.5

வெக்டர் முறையில் $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.

தீர்வு

x -அச்சின் மிகை திசையுடன் $\hat{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ என்ற அலகு வெக்டர்கள் முறையே α, β என்ற கோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது என்க. இங்கு A, B என்பன படம் 6.10–ல் காட்டப்பட்டுள்ளன. ஆகவே $\hat{a} = \cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}$ மற்றும் $\hat{b} = \cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j}$.

$\hat{a}$, $\hat{b}$ வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்டக் கோணம் $\alpha-\beta$ மற்றும் $\hat{b}, \hat{a}, \hat{k}$ என்ற வெக்டர்கள் வலக்கை முறையில் அமைந்துள்ளதால்,



படம் 6.10

$$\hat{b}\times\hat{a} = |\hat{b}||\hat{a}|\sin(\alpha-\beta)\hat{k} = \sin(\alpha-\beta)\hat{k}. \quad \ldots (1)$$

மாறாக,

$$\hat{b}\times\hat{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\hat{k} \quad \ldots (2)$$

ஆகவே, சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2)–லிருந்து

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

6.3.3 வடிவக் கணிதத்தில் புள்ளி மற்றும் குறுக்குப் பெருக்கல்களின் பயன்பாடு (Application of dot and cross products in Geometry)

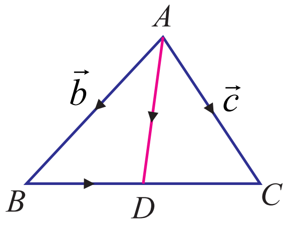
எடுத்துக்காட்டு 6.6 (அபோலோனியஸ் தேற்றம்) (Apollonius's theorem)

முக்கோணம் ABC–ல், BC என்ற பக்கத்தின் நடுப்புள்ளி D எனில்,

$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$ என வெக்டர் முறையில் நிரூபிக்க.

தீர்வு

ஆதிப்புள்ளி A என்க. B -யின் நிலைவெக்டர் $\vec{b}$ மற்றும் C -ன் நிலைவெக்டர் $\vec{c}$ என்க. BC -ன் நடுப்புள்ளி D என்பதால் D -ன் நிலை வெக்டர் $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ ஆகும். எனவே, $\overrightarrow{AD} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ ஆகும்.



படம் 6.11

12th_Maths_TM_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 247 09-12-2021 13:40:02

இப்பொழுது, $|\overrightarrow{AD}|^2 = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c})$. ... (1)

மேலும், $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{b} = \dfrac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$.

எனவே, $|\overrightarrow{BD}|^2 = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\dfrac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c})$ ... (2)

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றின் கூடுதல் காண, நாம் பெறுவது,

$$|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c}) + \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot c) = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2).$$

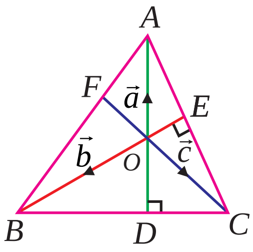
எனவே, $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$ ■

எடுத்துக்காட்டு 6.7

ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு

முக்கோணம் ABC–ல், $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி O என்க. AB–ஐ F–ல் சந்திக்குமாறு COவை நீட்டுக. ஆதிப்புள்ளி O என்க. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ மற்றும் $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ என்க.



படம் 6.12

$\overrightarrow{AD}$ என்பது $\overrightarrow{BC}$ க்குச் செங்குத்து என்பதால், $\overrightarrow{OA}$ என்பது $\overrightarrow{BC}$ –க்குச் செங்குத்தாகும். எனவே, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

அதாவது, $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0$,

$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. ... (1)

இதேபோன்று, $\overrightarrow{BE}$ என்பது $\overrightarrow{CA}$ –க்குச் செங்குத்து என்பதால், $\overrightarrow{OB}$ என்பது $\overrightarrow{CA}$ க்குச் செங்குத்தாகும். எனவே, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$.

அதாவது, $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = 0$,

$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$. ... (2)

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றின் கூடுதல் காண, நாம் பெறுவது

$$\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0.$$

அதாவது, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$. ஆகவே, $\overrightarrow{OC}$ என்பது $\overrightarrow{BA}$ –க்குச் செங்குத்து என்பதால், $\overrightarrow{CF}$ என்பது $\overrightarrow{AB}$ க்குச் செங்குத்தாகும். அதாவது, C –யிலிருந்து பக்கம் AB –க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு O வழியாகச் செல்கிறது. எனவே, ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகளாகும். ■

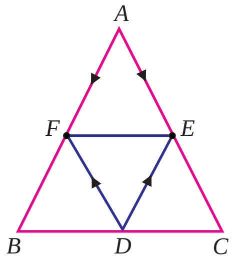
12th_Maths_TM_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 248 09-12-2021 13:40:05

எடுத்துக்காட்டு 6.8

முக்கோணம் ABC -ல், BC, CA மற்றும் AB என்ற பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F எனில், ΔDEF -ன் பரப்பு $= \frac{1}{4}$ (ΔABC -ன் பரப்பு) என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு

முக்கோணம் ABC -ல் ஆதிப்புள்ளி A என்க. எனவே, D, E, F என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}, \frac{\overrightarrow{AC}}{2}, \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$. ஆகும். $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ என்ற வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ என்பதால், முக்கோணம் ΔABC -ன் பரப்பு $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ஆகும். இதேபோன்று, ΔDEF -ஐக் கருதுக.



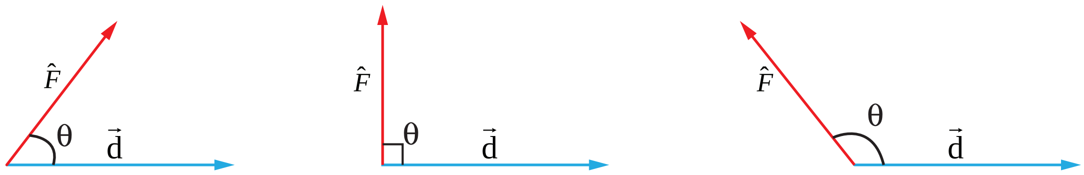
படம் 6.13

$$\Delta DEF \text{ -ன் பரப்பு } = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}|$$
$$= \frac{1}{2}|(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\times(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD})|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\times\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\right)$$
$$= \frac{1}{4} (\Delta ABC \text{ -ன் பரப்பு}).$$

6.3.4 இயற்பியலில் புள்ளி மற்றும் குறுக்குப் பெருக்கல்களின் பயன்பாடு (Application of dot and cross product in Physics)

வரையறை 6.2

விசை $\vec{F}$ -ன் செயல்பாட்டினால் ஒரு துகளானது ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு நகரும்போது அதன் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் $\vec{d}$ எனில், அவ்விசை செய்த வேலை $w = \vec{F}\cdot\vec{d}$ ஆகும்.



படம் 6.14

ஒரு விசை ஏற்படுத்தும் கோணம் குறுங்கோணம், செங்கோணம் மற்றும் விரிகோணம் எனில், அவ்விசை செய்யும் வேலை முறையே மிகை, பூச்சியம், மற்றும் குறை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.9

ஒரு துகள் $(4,-3,-2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(6,1,-3)$ என்ற புள்ளிக்கு $2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}$ மற்றும் $-\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ என்ற மாறாத விசைகளின் செயல்பாட்டினால் நகர்த்தப்பட்டால், அவ்விசைகள் செய்த மொத்த வேலையைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{F}=(2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+(-\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})=\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$.

A, B என்பவை குறிக்கும் புள்ளிகள் முறையே $(4,-3,-2)$, $(6,1,-3)$ என்க. துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் $\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(6\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})-(4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$.

எனவே, விசைகள் செய்த மொத்த வேலை $w=\vec{F}\cdot\vec{d}=(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})=9$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 6.10

ஒரு துகள் $(1,3,-1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(4,-1,\lambda)$ என்ற புள்ளிக்கு $3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ மற்றும் $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ என்ற விசைகளின் செயல்பாட்டினால் நகர்த்தப்படுகிறது. அவ்விசைகள் செய்த வேலை 16 அலகுகள் எனில், λ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட விசைகளின் விளைவு விசை $\vec{F}=(3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$.

துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர்

$$\vec{d}=(4\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k})-(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=(3\hat{i}-4\hat{j}+(\lambda+1)\hat{k}).$$

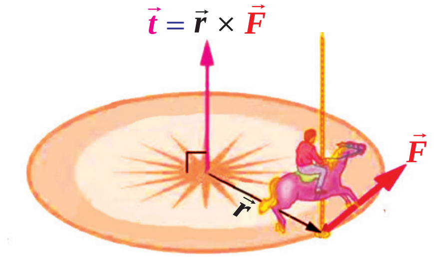
அவ்விசைகள் செய்த வேலை 16 அலகுகள் என்பதால், $\vec{F}\cdot\vec{d}=16$.

அதாவது, $(5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}+(\lambda+1)\hat{k}=16\Rightarrow\lambda+20=16$.

எனவே, $\lambda=-4$ எனப் பெறுகிறோம்

வரையறை 6.3

$\vec{F}$ என்ற விசையை, $\vec{r}$ -ஐ நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளியில் உள்ள துகளின் மீது செயல்படுத்துவதால், அத்துகளின் மீதான முறுக்குத்திறன் அல்லது திருப்புத்திறன் $\vec{t}=\vec{r}\times\vec{F}$ ஆகும். திருப்புவிசை என்பது சுழல் விசை எனவும் அழைக்கப்படும்.



குடை இராட்டினம்

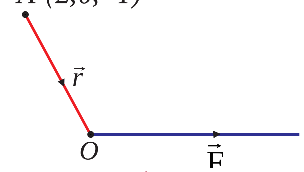
படம் 6.15

எடுத்துக்காட்டு 6.11

$2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ என்னும் விசை ஆதிப்புள்ளி வழியாகச் செயல்படுகிறது எனில், $(2,0,-1)$ என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து அவ்விசையின் திருப்புவிசையின் எண்ணளவு மற்றும் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

தீர்வு

$(2,0,-1)$ என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}-\hat{k}$ எனில், $\vec{r}=\overrightarrow{AO}=-2\hat{i}+\hat{k}$.



படம் 6.16

கொடுக்கப்பட்ட விசை $\vec{F}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$. எனவே, திருப்புவிசை

$$\vec{t}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\hat{i}-2\hat{k}.$$

ஆகவே, திருப்புவிசையின் எண்ணளவு $=|-\hat{i}-2\hat{k}|\ =\sqrt{5}$ மற்றும் திசைக்கொசைன்கள் $-\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ஆகும்.

பயிற்சி 6.1

1. ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து அவ்வட்டத்தின் ஒரு நாணின் மையப்புள்ளிக்கு வரையப்படும் கோடு அந்நாணிற்கு செங்குத்தாகும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.
2. ஓர் இருசமப்பக்கமுக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் நடுக்கோடு, அப்பக்கத்திற்கு செங்குத்தாகும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.
3. வெக்டர் முறையில், ஓர் அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.
4. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக இருசமக்கூறிடும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.
5. ஓர் இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் சமம் எனில், அந்த இணைகரம் ஒரு செவ்வகமாகும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.
6. வெக்டர் முறையில், AC மற்றும் BD ஆகியவற்றை மூலைவிட்டங்களாகக் கொண்ட நாற்கரம் $ABCD$-ன் பரப்பு $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$ என நிறுவுக.
7. ஒரே அடிப்பக்கத்தின் மீதமைந்த இரு இணைகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமமானவை என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.
8. ΔABC –ன் நடுக்கோட்டு மையம் G எனில், வெக்டர் முறையில், (ΔGAB –ன் பரப்பு) = (ΔGBC –ன் பரப்பு) = (ΔGCA –ன் பரப்பு)$=\frac{1}{3}$ (ΔABC –ன் பரப்பு) என நிறுவுக.
9. வெக்டர் முறையில் $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.
10. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.
11. ஒரு துகள் $(1,2,3)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $(5,4,1)$ எனும் புள்ளிக்கு $8\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ என்ற மாறாத விசைகளின் செயல்பாட்டினால் நகர்த்தப்பட்டால், அவ்விசைகள் செய்த மொத்த வேலையைக் காண்க.
12. முறையே $5\sqrt{2}$ மற்றும் $10\sqrt{2}$ அலகுகள் எண்ணளவு கொண்ட $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ மற்றும் $10\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களின் திசைகளில் அமைந்த விசைகள், ஒரு துகளை $4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ என்ற வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளியிலிருந்து $6\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ என்ற வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளிக்கு நகர்த்துகிறது எனில், அவ்விசைகள் செய்த வேலையைக் காண்க.

13. $3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ என்னும் விசை $4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ என்ற வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி வழியாகச் செயல்படுகிறது எனில், $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ என்ற வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளியைப் பொறுத்து அவ்விசையின் திருப்புவிசையின் எண்ணளவு மற்றும் திசைக்கொசைன்களைக் காண்க.

14. $8\hat{i}-6\hat{j}-4\hat{k}$ என்ற வெக்டரை நிலை வெக்டராகக் கொண்ட புள்ளியில் செயல்படும் $-3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$, $4\hat{i}-10\hat{j}+12\hat{k}$ மற்றும் $4\hat{i}+7\hat{j}$ விசைகளின் திருப்புத்திறனை $18\hat{i}+3\hat{j}-9\hat{k}$ என்ற வெக்டரை நிலை வெக்டராகக் கொண்ட புள்ளியைப் பொறுத்துக் காண்க.

6.4 திசையிலி முப்பெருக்கல் (Scalar triple product)

வரையறை 6.4

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட மூன்று வெக்டர்கள் எனில், $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ என்பது அவ்வெக்டர்களின் *திசையிலி முப்பெருக்கல்* எனப்படும். $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ஒரு திசையிலியாகும்.

குறிப்புரை

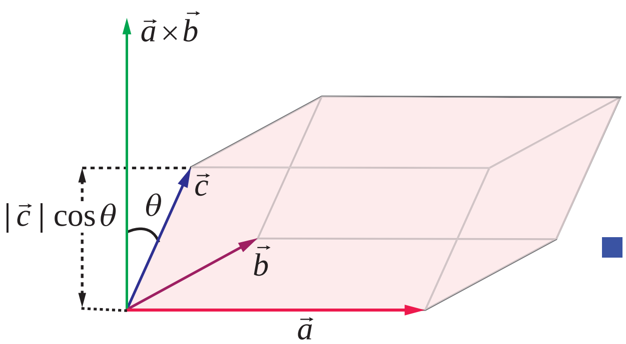
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ என்பது ஒரு திசையிலியாதலால் $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$ ஆனது பொருளற்றது.

(2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட மூன்று வெக்டர்கள் எனில், பின்வருவன அவற்றின் திசையிலி முப்பெருக்கல்கள் ஆகும்:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},\ (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a},\ (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b},\ \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}),\ \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}),\ \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$
$$(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c},\ (\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a},\ (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b},\ \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}),\ \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}),\ \vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$$

திசையிலி முப்பெருக்கலின் வடிவக்கணித விளக்கம் (Geometrical interpretation of scalar triple product)

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ என்ற திசையிலி முப்பெருக்கலானது, $\vec{a},\vec{b}$, மற்றும் $\vec{c}$ எனும் மூன்று வெக்டர்களை ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவின் எண்ணளவாகும். $(\vec{a}\times\vec{b})$ என்பது $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களால் உருவாக்கப்படும் இணைகரத்தின் பரப்பளவின் எண்ணளவாகும். மேலும், $(\vec{a}\times\vec{b})$ என்ற வெக்டரின் திசையானது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையாக அமைந்துள்ள தளத்திற்குச் செங்குத்தானதாகும்.



படம் 6.17

எனவே, $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$ ஆகும். இங்கு, θ என்பது $\vec{a}\times\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் ஆகும். படம் 6.17-ல் இருந்து , $\vec{a}$, $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ எனும் மூன்று வெக்டர்களை ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்டு அமைக்கப்படும் இணைகரத்திண்மத்தின் உயரம் $|\vec{c}|\,|\cos\theta|$ எனக்காண்கிறோம். ஆகவே, $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ என்பது இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவாகும்.

திசையிலி முப்பெருக்கல்களைக் காண்பதற்கு பின்வரும் தேற்றம் பயன்படுகிறது.

தேற்றம் 6.1

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$, எனில்

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

நிரூபணம்

திசையிலி முப்பெருக்கலின் வரையறைப்படி

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{c} \\ &= \left[(a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}\right]\cdot(c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

எனவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது. ■

6.4.1 திசையிலி முப்பெருக்கலின் பண்புகள் (Properties of the scalar triple product)

தேற்றம் 6.2

$\vec{a}, \vec{b}$, மற்றும் $\vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில், $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

நிரூபணம்

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ என்க.

எனவே,
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \ R_1 \leftrightarrow R_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ &= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

எனவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது. ■

குறிப்பு

தேற்றம் 6.2–ல் இருந்து, திசையிலிப் பெருக்கலில் வெக்டர் மற்றும் புள்ளிப் பெருக்கல் குறிகளை அடைப்புக் குறிகளுக்குள் உள்ள வெக்டர்களுக்கு இடையில் வெக்டர் பெருக்கல் குறியும் அடைப்புக் குறிக்கு வெளியே புள்ளிப் பெருக்கல் குறியும் இருக்குமாறு வெக்டர்கள் அமைந்துள்ள வரிசையை மாற்றாமல் இடமாற்றம் செய்யலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$, ஏனெனில் '.' மற்றும் $\times$ குறிகளை இடமாற்றம் செய்யலாம்

$$= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$, திசையிலி பெருக்கலின் பரிமாற்றுப் பண்பு

$$= \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$, ஏனெனில் '.' மற்றும் $\times$ குறிகளை இடமாற்றம் செய்யலாம்

$$= (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$, திசையிலி பெருக்கலின் பரிமாற்றுப் பண்பு

$$= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$, ஏனெனில் '.' மற்றும் $\times$ குறிகளை இடமாற்றம் செய்யலாம்

குறியீடு

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில், திசையிலி முப்பெருக்கல் $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ என்பதை $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ எனக்குறிக்கிறோம்.

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ என்பதை **பெட்டி $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$** எனப்படிக்கிறோம். திசையிலி முப்பெருக்கல் மதிப்பின் எண்ணளவு ஒரு பெட்டியின் (செவ்வக வடிவ இணைகரத்திண்மம்) கன அளவைக் குறிப்பதால், இப்பெருக்கல் **பெட்டிப் பெருக்கல்** எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

(1) $$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}]$$

$$[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}].$$

அதாவது, திசையிலி முப்பெருக்கலில் உள்ள வெக்டர்களை அதே வரிசையில் வட்டச் சுழற்சி முறையில் மாற்றம் செய்வதால், திசையிலி முப்பெருக்கலின் மதிப்பு மாறாது.

ஆகவே $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$;

(2) திசையிலி முப்பெருக்கலில் உள்ள ஏதேனும் இரு வெக்டர்களை இடமாற்றம் செய்வதால், திசையிலி பெருக்கலின் மதிப்பானது (-1) –ஆல் பெருக்கப்படும். அதாவது,

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}].$$

(3) (i) ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் சமம் எனில், திசையிலி முப்பெருக்கம் பூச்சியம் ஆகும். அதாவது, $[\vec{a},\vec{a},\vec{b}] = 0$ அல்லது $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ ஆகும்.

(ii) ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள் இணை எனில், திசையிலி முப்பெருக்கம் பூச்சியம் ஆகும்.

தேற்றம் 6.3

திசையிலி முப்பெருக்கல், வெக்டர் கூட்டல் மற்றும் திசையிலிப் பெருக்கல் ஆகியவற்றின் பண்புகளை நிறைவு செய்கிறது. அதாவது,

$$\begin{aligned}
[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c},\vec{d}] &= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{d}];\\
[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] &= \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}\\
[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d}] &= [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{d}];\\
[\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] &= \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$[\vec{a},\vec{b},(\vec{c}+\vec{d})] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{d}];$$
$$[\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

நிரூபணம்

திசையிலிப் பெருக்கல் மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல் பண்புகளைப் பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned}[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c},\vec{d}] &= ((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= (\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{d}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\\ [\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] &= ((\lambda\vec{a})\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\lambda(\vec{a}\times\vec{b}))\cdot\vec{c} = \lambda((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}) = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].\end{aligned}$$

இத்தேற்றத்தின் முதல் முடிவினைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் முடிவுகளைப் பெறுகிறோம்

$$\begin{aligned}[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d}] &= [(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d},\vec{a}] = [\vec{b},\vec{d},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{d},\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\\ [\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] &= [\lambda\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \lambda[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].\end{aligned}$$

இதேபோல், மற்ற சமன்பாடுகளையும் நிரூபிக்கலாம். ■

பூச்சியமற்ற மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனில், அவற்றில் ஏதேனும் ஒரு வெக்டரை மற்ற இரண்டு வெக்டர்களின் நேரியல் சேர்வாக எழுத முடியும் என பதினோராம் வகுப்பில் கற்றுள்ளோம். இப்பொழுது, ஒரு தள வெக்டர்களின் பண்புகளை திசையிலி முப்பெருக்கலைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

தேற்றம் 6.4

பூச்சியமற்ற மூன்று வெக்டர்களின் திசையிலி முப்பெருக்கல் பூச்சியம் என இருந்தால், மற்றும் இருந்தால் மட்டுமே அம்மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு தள வெக்டர்களாகும்.

நிரூபணம்

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன பூச்சியமற்ற மூன்று வெக்டர்கள் என்க.

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow$ $\vec{c}$ ஆனது $\vec{a}\times\vec{b}$ –க்கு செங்குத்தாக இருக்கும்

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய இரண்டு வெக்டர்களுக்கும்

இணையாக உள்ள தளத்தில் $\vec{c}$ இருக்கும்.

$\Leftrightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ஒரு தள வெக்டர்களாகும். ■

12th_Maths_TM_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 255 09-12-2021 13:40:16

தேற்றம் 6.5

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்களாக இருக்கத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாகவும் மற்றும் $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ என்றிருக்குமாறும் $r,s,t\in\mathbb{R}$ என்ற திசையிலிகளைக் காணமுடியும் என்பதாகும்.

நிரூபணம்

$\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k},\ \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k},\ \vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ என்க.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow$ $a_1r+a_2s+a_3t=0,\ \ b_1r+b_2s+b_3t=0,\ c_1r+c_2s+c_3t=0$ என்றிருக்குமாறு குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாக உள்ள $r,s,t\in\mathbb{R}$ என்ற திசையிலிகளைக் காண முடியும்.

$\Leftrightarrow$ $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ என்றிருக்குமாறு குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாக உள்ள $r,s,t\in\mathbb{R}$ என்ற திசையிலிகளை காணலாம்.

தேற்றம் 6.6

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ மற்றும் $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ என்பன மூன்று வெக்டர்களைக் கொண்ட ஏதேனும் இரண்டு தொகுப்புகள் மற்றும் $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c},\ \ \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c},\ \ \vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$, எனில்

$$\left[\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு

தேற்றம் 6.6ன்படி, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன ஒரு தளம் அமையா வெக்டர்கள் மற்றும்

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\neq 0 \text{ எனில்,}$$

$\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c},\ \ \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c},$ மற்றும் $\vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$ எனும் மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு தளம் அமையா வெக்டர்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

$\vec{a}=-3\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k},\ \vec{c}=4\hat{j}-5\hat{k}$, எனில், $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு

மூன்று வெக்டர்களின் திசையிலி முப்பெருக்கலின் வரையறைப்படி,

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -5\end{vmatrix}=-3.$$

எடுத்துக்காட்டு 6.13

$2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ மற்றும் $3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களை ஒரு முனையில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கனஅளவினைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற வெக்டர்களை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு $|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$ ஆகும். இங்கு, $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$.

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-7$ என்பதால், இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு $|-7|=7$ கன அலகுகளாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.14

$\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ மற்றும் $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்களாகும் என நிரூபிக்க.

தீர்வு

இங்கு , $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்களாகத் தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$ ஆகும். இங்கு, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு தள வெக்டர்களாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.15

$2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+m\hat{j}+4\hat{k}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனில், m -ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் என்பதால், $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & m & 4\end{vmatrix}=0 \Rightarrow m=-3$. ■

எடுத்துக்காட்டு 6.16

$(6,-7,0)$, $(16,-19,-4)$, $(0,3,-6)$, $(2,-5,10)$ என்ற நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே தளத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு

$A=(6,-7,0)$, $B=(16,-19,-4)$, $C=(0,3,-6)$, $D=(2,-5,10)$ என்க. A,B,C,D என்ற நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே தளத்தில் அமையும் என நிரூபிக்க, $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்களாகும் என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(16\hat{i}-19\hat{j}-4\hat{k})-(6\hat{i}-7\hat{j})=10\hat{i}-12\hat{j}-4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-6\hat{i}+10\hat{j}-6\hat{k} \text{ மற்றும் } \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-4\hat{i}+2\hat{j}+10\hat{k}.$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 10 & -12 & -4 \\ -6 & 10 & -6 \\ -4 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

எனவே, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்களாகும். ஆகவே, $A, B, C,$ மற்றும் D என்ற நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன. ■

எடுத்துக்காட்டு 6.17

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனில், $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}$ என்ற வெக்டர்களும் ஒரு தள வெக்டர்களாகும் என நிறுவுக.

தீர்வு

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் $\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0.$ திசையிலி முப்பெருக்கலின் பண்புகளைப் பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned}
[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] &= [\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] \\
&= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{a}] + [\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{a}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] \\
&= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] \\
&= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0.
\end{aligned}$$

எனவே, $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்களாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.18

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன மூன்று வெக்டர்கள் எனில் $[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு

தேற்றம் 6.6-ஐ பயன்படுத்தி இக்கணக்கினை நிரூபிக்கலாம்.

$$[\vec{a}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$ ■

பயிற்சி 6.2

1. $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k},\ \vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, எனில் $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ காண்க.
2. $-6\hat{i} + 14\hat{j} + 10\hat{k},\ 14\hat{i} - 10\hat{j} - 6\hat{k}$ மற்றும் $2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிப்பிடப்படும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளைக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கனஅளவைக் காண்க.
3. $7\hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k},\ \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k},\ -3\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு 90 கன அலகுகள் எனில், λ-ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற ஒரு தளம் அமையா மூன்று வெக்டர்களை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவு 4 கன அலகுகள் எனில் $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+(\vec{c}+\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

5. $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்றவெக்டர்களால்உருவாக்கப்படும்இணைகரத்தைஅடிப்பக்கமாகஎடுத்துக்கொண்டு $\vec{a}=-2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ மற்றும் $\vec{c}=-3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ என்ற வெக்டர்களால் உருவாக்கப்படும் இணைகரத் திண்மத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

6. $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ மற்றும் $3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்களாகுமா எனக் காண்க.

7. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}$ மற்றும் $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ என்க. $c_1=1$ மற்றும் $c_2=2$ எனில், $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்களாக இருக்குமாறு c_3 –ன் மதிப்பினைக் காண்க.

8. $\vec{a}=\hat{i}-\hat{k}$, $\vec{b}=x\hat{i}+\hat{j}+(1-x)\hat{k}$, $\vec{c}=y\hat{i}+x\hat{j}+(1+x-y)\hat{k}$, எனில், $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ என்பது x -யையும் y –யையும் பொறுத்து அமையாது என நிரூபிக்க.

9. $a\hat{i}+a\hat{j}+c\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{k}$ மற்றும் $c\hat{i}+c\hat{j}+b\hat{k}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரி c ஆகும் என நிரூபிக்க.

10. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற பூச்சியமற்ற மூன்று வெக்டர்களில் $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு செங்குத்தான அலகு வெக்டர் $\vec{c}$ என்க. $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{6}$ எனில், $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2$ என நிறுவுக.

6.5 வெக்டர் முப்பெருக்கல் (Vector triple product)

வரையறை 6.5

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில், $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ என்பது இம்மூன்று வெக்டர்களின் வெக்டர் முப்பெருக்கல் என அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

$\vec{a},\vec{b},c$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில்,

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}$, $(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}$, $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$

என்பனவும் வெக்டர் முப்பெருக்கல்கள் ஆகும்.

வெக்டர் பெருக்கலில் நன்கறியப்பட்ட பண்புகளின் விளைவாக பின்வரும் தேற்றத்தைப் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 6.7

வெக்டர் முப்பெருக்கல் பின்வரும் பண்புகளை நிறைவு செய்கிறது.

(1) $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}_1\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}_2\times(\vec{b}\times\vec{c}),\ (\lambda\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

(2) $\vec{a}\times((\vec{b}_1+\vec{b}_2)\times\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}_1\times\vec{c})+\vec{a}\times(\vec{b}_2\times\vec{c}),\ \vec{a}\times((\lambda\vec{b})\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

(3) $\vec{a}\times(\vec{b}\times(\vec{c}_1+\vec{c}_2)) = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}_1)+\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}_2),\ \vec{a}\times(\vec{b}\times(\lambda\vec{c}))=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

குறிப்புரை

வெக்டர் பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது. அதாவது $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

நியாயப்படுத்துதல்

$\vec{a}=\hat{i},\ \vec{b}=\hat{i},\ \vec{c}=\hat{j}$ என்க. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\hat{i}\times(\hat{i}\times\hat{j})=\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$. ஆனால், $(\hat{i}\times\hat{i})\times\hat{j}=\vec{0}\times\hat{j}=\vec{0}$.

எனவே , $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

வெக்டர் முப்பெருக்கலை, திசையிலிப் பெருக்கல் வாயிலாக விளக்க ஒரு எளிய சூத்திரத்தைப் பின்வரும் தேற்றம் வழங்குகிறது.

தேற்றம் 6.8 (வெக்டர் முப்பெருக்கல் விரிவாக்கம்) (Vector Triple product expansion)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில், $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ ஆகும்.

நிரூபணம்

ஆய அச்சுக்களைப் பின்வருமாறு தேர்வு செய்வோம் :

$\vec{a}$ செயல்படும் நேர்க்கோட்டுத் திசையில் x -அச்சையும், $\vec{a}$ வழியாக செல்வதும் $\vec{b}$ வெக்டருக்கு இணையானதுமான தளத்தில் உள்ளவாறு y -அச்சையும், மற்றும் $\vec{a}$, $\vec{b}$ ஆகியவற்றை உள்ளடக்கிய தளத்திற்கு செங்குத்தாக z -அச்சையும் தேர்வு செய்க.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\hat{i}\\ \vec{b} &= b_1\hat{i}+b_2\hat{j}\\ \vec{c} &= c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=a_1\hat{i}\times\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ b_1 & b_2 & 0\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=a_1\hat{i}\times\left(b_2c_3\hat{i}-b_1c_3\hat{j}+\left(b_1c_2-b_2c_1\right)\hat{k}\right)$$

$$=-a_1b_1c_3\hat{k}+a_1\left(b_2c_1-b_1c_2\right)\hat{j} \qquad ..(1)$$

$$\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}=a_1c_1\times\left(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}\right)-a_1b_1\left(c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}\right)$$

$$=a_1\left(b_2c_1-b_1c_2\right)\hat{j}-a_1b_1c_3\hat{k} \qquad ...(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றில் இருந்து

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(a\cdot\vec{b})\vec{c}$ எனக்கிடைக்கிறது. ■

குறிப்பு

(1) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$, இங்கு $\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$ மற்றும் $\beta=-(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ஆகும். ஆகவே, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ என்பது $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையான தளத்தில் இருக்கும்.

(2) மேலும்,

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})\\ &= -[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]\end{aligned}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

எனவே, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையாக உள்ள தளத்தில் இருக்கும்.

(3) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ என்ற வெக்டரில், அடைப்புக் குறிக்குள் உள்ள $\vec{b}$ என்ற வெக்டரை நடுவில் உள்ள வெக்டர் எனவும், $\vec{a}$ என்ற வெக்டரை நடுவில் இல்லாத வெக்டர் எனவும் கருதுக. இதேபோல், $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$-ல் $\vec{b}$ என்று வெக்டரை நடுவில் உள்ள வெக்டராகவும் $\vec{c}$ என்ற வெக்டரை நடுவில் இல்லாத வெக்டராகவும் கருதுக. இப்பொழுது, இவ்வெக்டர்களின் வெக்டர் முப்பெருக்கல்

λ (நடுவில் உள்ள வெக்டர்) $-\mu$ (நடுவில் இல்லாத வெக்டர்)

என்றமைவதைக் காணலாம். இங்கு λ என்பது நடுவில் இல்லாத வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கலாகும் மற்றும் μ என்பது நடுவில் இல்லாத வெக்டரைத் தவிர மற்ற வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கலாகும் என்பதை அறிக.

6.6 ஜக்கோபியின் முற்றொருமை மற்றும் லாக்ராஞ்சியின் முற்றொருமை (Jacobi's Identity and Lagrange's Identity)

தேற்றம் 6.9 (ஜக்கோபியின் முற்றொருமை) (Jacobi's identity)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில், $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$ ஆகும்.

நிரூபணம்

வெக்டர் முப்பெருக்கலின் விரிவாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைப் பெறுகிறோம்.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$
$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}.$$

இச்சமன்பாடுகளின் கூடுதலைக் கண்டுபிடித்து இரு வெக்டர்களுக்கான திசையிலிப் பெருக்கலின் பரிமாற்று விதியைப் பயன்படுத்தினால், $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$ எனப் பெறுகிறோம். ■

தேற்றம் 6.10 (லாக்ராஞ்சியின் முற்றொருமை) (Lagrange's identity)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ என்பன ஏதேனும் நான்கு வெக்டர்கள் எனில், $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$.

நிரூபணம்

திசையிலி முப்பெருக்கலில் புள்ளி மற்றும் வெக்டர் குறிகளை இடமாற்றம் செய்யலாம் என்பதால்,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))$$

$$= \vec{a}\cdot((\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}) \quad (\because \text{வெக்டர் முப்பெருக்கலின் விரிவாக்கம்})$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

■

எடுத்துக்காட்டு 6.19

$[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு

திசையிலி முப்பெருக்கலின் வரையறையைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது

$[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})]$. ... (1)

$(\vec{b}\times\vec{c})$ -ஐ வெக்டர் முப்பெருக்கலின் முதல் வெக்டராக எடுத்துக்கொண்டு

$(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})$ -ன் விரிவாக்கம் காண்போம். எனவே,

$(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})=((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a})\vec{c}-((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c})\vec{a}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{c}$

இம்மதிப்பினை (1)–ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது,

$$[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot([\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{c})=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}](\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2.$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 6.20

$(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$ என நிறுவுக.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் வலதுபுறம் உள்ள வெக்டரில் $(\vec{a}\times\vec{b})$ -ஐ வெக்டர் முப்பெருக்கலின் முதல் வெக்டராக எடுத்துக்கொண்டு $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$ -ன் விரிவாக்கம் காண்போம். எனவே,

$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})=((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{a}-((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a})\vec{c}=(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a}$ ■

எடுத்துக்காட்டு 6.21

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ என்பன ஏதேனும் நான்கு வெக்டர்கள் எனில்,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}=[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}.$$

தீர்வு

$\vec{p}=(\vec{a}\times\vec{b})$ என எடுத்துக்கொண்டு $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ -ன் விரிவாக்கம் காண்போம்.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= \vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{d})\\ &= (\vec{p}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{p}\cdot\vec{c})\vec{d}\\ &= ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d})\vec{c}-((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{d}=[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}\end{aligned}$$

இவ்வாறே, $\vec{q}=\vec{c}\times\vec{d}$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{q}\\ &= (\vec{a}\cdot\vec{q})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{q})\vec{a}\\ &= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 6.22

$\vec{a}=-2\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{c}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}$ எனில், $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ மற்றும் $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும், அவை சமமாகுமா எனக் காண்க.

தீர்வு

வரையறைப்படி, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-2&3&-2\\3&-1&3\end{vmatrix}=7\hat{i}-7\hat{k}$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & 0 & -7 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -35\hat{i} - 21\hat{j} - 35\hat{k}. \qquad \ldots (1)$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 14\hat{i} + 3\hat{j} - 13\hat{k}.$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 14 & 3 & -13 \end{vmatrix} = -33\hat{i} - 54\hat{j} - 48\hat{k}. \qquad \ldots (2)$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ எனக் காண்கிறோம். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.23

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}, \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{d} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ எனில்

(i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$

தீர்வு (i)

வரையறைப்படி,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 4\hat{j}, \ \vec{c}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

பின்னர், $$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -24\hat{i} + 24\hat{j} - 40\hat{k} \qquad \ldots (1)$$

இப்பொழுது, $$[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = 28(3\hat{j} - \hat{k}) - 12(2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) = -24\hat{i} + 24\hat{j} - 40\hat{k} \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, முற்றொருமை (i) நிறுவப்பட்டது.
முற்றொருமை (ii)–ன் சரிபார்த்தல் மாணவர்களின் பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளது. ■

பயிற்சி 6.3

1. $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ எனில் (i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
2. ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் $\vec{a}$ -க்கு, $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i}) + \hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j}) + \hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k}) = 2\vec{a}$ என நிறுவுக.
3. $[\vec{a}-\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}] = 0$ என நிறுவுக.

4. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}, \vec{c}=-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ எனில்

   (i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

   என்பவற்றைச் சரிபார்க்க.

5. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k},\ \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k},\ \vec{c}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ எனில் $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ –ன் மதிப்புக் காண்க.
6. $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ என்பன ஒரு தள வெக்டர்கள் எனில், $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$ என நிரூபிக்க.
7. $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ எனில், l,m,n –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
8. $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ என்ற மூன்று அலகு வெக்டர்களில் $\hat{b}$, $\hat{c}$ என்பன இணை அல்லாத வெக்டர்கள் மற்றும் $\hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c})=\frac{1}{2}\hat{b}$ எனில், $\hat{a}$ மற்றும் $\hat{c}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

6.7 முப்பரிமாண வடிவக் கணிதத்தில் வெக்டர்களின் பயன்பாடு (Application of Vectors to 3-Dimensional Geometry)

முப்பரிமாண வெளியில் நேர்க்கோடுகள் மற்றும் தளங்களைப் பற்றி கற்றறிவதில் வெக்டர்கள் ஒரு நேர்த்தியான அணுகுமுறையை வழங்குகின்றன. எல்லா நேர்க்கோடுகளும் தளங்களும் $\mathbb{R}^3$ ன் உட்கணங்களாகும். ஒரு நேர்க்கோட்டினை சுருக்கமாகக் கோடு என்றே அழைக்கிறோம்.

$\mathbb{R}^3$ –ல் உள்ள புள்ளிகளின் தொகுப்பு P –ல் உள்ள ஒரே கோட்டிலமையாத A, B, C எனும் ஏதேனும் மூன்று புள்ளிகளில், எவையேனும் இரு புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோடு P–ன் உட்கணமாக அமையுமாறு உள்ள புள்ளிகள் அமைந்துள்ள பரப்பு ஒரு தளமாகும்.

குறைந்தது ஒரு பொதுப்புள்ளியையும் மற்றும் ஒரு தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி மற்றொரு தளத்தின் மீது அமையாது என்றவாறு குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளியையாவதுப் பெற்றுள்ள இரு தளங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் தளங்கள் எனப்படும். மிகச்சரியாக அதே புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ள இரு தளங்கள் ஒன்றிணைந்த (ஒன்றிய) தளங்கள் எனப்படும். பொதுவான புள்ளியைப் பெறாத இரு தளங்கள் இணையான தளங்களாகும். ஆனால், அவை ஒன்றிணைந்த தளங்களாக இருக்காது. இதேபோல், வெட்டிக்கொள்ளும் இரண்டு தளங்களின் பொதுப் புள்ளிகளின் தொகுப்பு ஒரு நேர்க்கோடாகும் என அறியப்படுகிறது. இப்பாடப்பகுதியில். வெக்டர்களைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோடு மற்றும் தளங்களின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

ஒரு வடிவியல் உருவின் சமன்பாட்டை அவ்வுருவின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் நிலை வெக்டரும் நிறைவு செய்யுமானால், அச்சமன்பாடு அவ்வடிவியல் உருவின் வெக்டர் சமன்பாடு எனப்படும். ஒரு சமன்பாடு வெக்டர் சமன்பாடாகவோ அல்லது கார்டீசியன் சமன்பாடாகவோ இருக்கலாம்.

6.7.1 ஒரு நேர்க்கோட்டின் பல்வேறு வடிவச் சமன்பாடுகள் (Different forms of equation of a straight line)

ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைத் தனித்ததாக பின்வரும் இரு முறைகளில் காணலாம்.

- கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியும், நேர்க்கோட்டின் திசையும் கொடுக்கப்படும்போது
- கோட்டின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகள் கொடுக்கப்படும்போது

ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டை வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் வடிவங்களில் காணலாம். ஒரு கோட்டின் மீது $\vec{r}$ என்ற நிலைவெக்டரைக் கொண்ட ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P ஆனது எடுத்துக்

கொள்ளப்பட்டு, கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளை $\vec{r}$ என்ற வெக்டர் நிறைவு செய்யுமாறு ஒரு தொடர்பானது பெறப்படுகிறது. இத்தகைய தொடர்பானது கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு எனப்படுகிறது. ஒரு நேர்க்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாட்டில் துணையலகுகள் இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம். ஒரு வெக்டர் சமன்பாடு, துணையலகுகளைப் பெற்றிருந்தால், **துணையலகு வடிவ** அல்லது **துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு** எனவும் துணையலகுகள் இல்லையென்றால் **துணையலகு அல்லாத வடிவ** அல்லது **துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு** எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

6.7.2 நேர்க்கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி மற்றும் நேர்க்கோட்டின் திசை கொடுக்கப்படும்போது கோட்டின் சமன்பாடு

(A point on the straight line and the direction of the straight line are given)

(a) துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு (Parametric form of vector equation)

தேற்றம் 6.11

நிலை வெக்டர் $\vec{a}$ எனக்கொண்ட நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்வதும், கொடுக்கப்பட்ட $\vec{b}$ –க்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$, இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

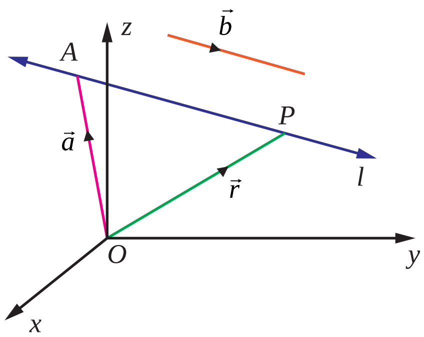
நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட நிலைவெக்டர் $\vec{a}$ எனக் கொண்ட புள்ளி A மற்றும் $\vec{r}$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P –ன் நிலைவெக்டர் எனில், $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$.

$\overrightarrow{AP}$ ஆனது $\vec{b}$ –க்கு இணை என்பதால்,

$$\vec{r} - \vec{a} = t\vec{b},\ t \in \mathbb{R} \qquad \ldots (1)$$

அல்லது $$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b},\ t \in \mathbb{R} \qquad \ldots (2)$$



படம் 6.18

இது கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

குறிப்புரை

இக்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\vec{a} + t\vec{b}$ ஆகும்.

(b) துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (Non-parametric form of vector equation)

$\overrightarrow{AP}$ என்பது $\vec{b}$ –க்கு இணை என்பதால், $\overrightarrow{AP} \times \vec{b} = \vec{0}$ ஆகும்.

அதாவது, $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$.

இது **கோட்டின் துணையலகு அல்லாத வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு** எனப்படும்.

(c) கார்டீசியன் சமன்பாடு (Cartesian equation)

A என்ற புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் (x_1, y_1, z_1), P என்ற புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் (x, y, z) மற்றும் $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ என்க. பின்னர், $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ எனச் சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட்டு, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ஆகியவற்றின் கெழுக்களை ஒப்பிட, நாம் பெறுவது

$$x - x_1 = tb_1,\ y - y_1 = tb_2,\ z - z_1 = tb_3 \qquad \ldots (4)$$

சமன்பாடு (4)–ஐ, வழக்கமாக

$$\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3} \qquad \ldots (5)$$

என எழுதுவோம்.

இச்சமன்பாடுகள் (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் b_1, b_2, b_3 என்ற திசை விகிதங்களைக் கொண்ட வெக்டருக்கு இணையானதுமான கோட்டின் **கார்டீசியன் சமன்பாடுகள்** அல்லது **சமச்சீர் சமன்பாடுகள்** என அழைக்கப்படுகின்றன.

குறிப்புரை

(i) நேர்க்கோடு (5)-ன் மீது உள்ள எந்தவொரு புள்ளியும் $(x_1 + tb_1, y_1 + tb_2, z_1 + tb_3)$, என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு $t \in \mathbb{R}$

(ii) ஒரு கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் அக்கோட்டின் திசை விகிதங்களின் விகிதச் சமமாகும் என்பதால், கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n எனில், நேர்க்கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ ஆகும்.}$$

(iii) சமன்பாடு (5)–ல், b_1, b_2, b_3 இவற்றில் ஒன்று அல்லது இரண்டின் மதிப்புகள் பூச்சியமாக இருந்தால், சமன்பாடுகளை நாம் பூச்சியத்தால் வகுப்பதாக பொருள்படாது (அர்த்தமாகாது). மாறாக, பகுதியில் பூச்சியத்தைக் கொண்டுள்ள சமன்பாட்டின் தொகுதியின் மதிப்பு பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும் எனப் பொருள்படும். உதாரணமாக, $b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$ மற்றும் $b_3 = 0$ எனில், $\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{0}$ என்பதை $\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2}, z - z_1 = 0$ என எழுதலாம்.

(iv) x - அச்சின் திசைக் கொசைன்கள் $1, 0, 0$ ஆகும். எனவே, x -அச்சின் சமன்பாடுகள் $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$ அல்லது $x = t, y = 0, z = 0$, இங்கு $t \in \mathbb{R}$ ஆகும். இதேபோன்று, y -அச்சு மற்றும் z -அச்சின் சமன்பாடுகள் முறையே $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$ மற்றும் $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1}$ ஆகும்.

6.7.3 கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (Straight Line passing through two given points)

(a) துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு (Parametric form of vector equation)

தேற்றம் 6.12

கொடுக்கப்பட்ட நிலைவெக்டர்கள் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ கொண்ட இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), t \in \mathbb{R}$.

(b) துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (Non-parametric form of vector equation)

மேற்கண்ட சமன்பாட்டினை துணை அல்லாத வடிவ வெக்டர் சமன்பாடாக

$$(\vec{r} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0} \text{ என எழுதலாம்.}$$

(c) கார்டீசியன் சமன்பாடு (Cartesian form of equation)

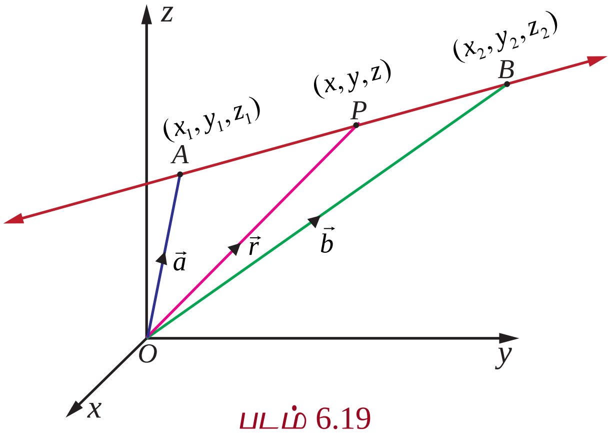
A, B என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள் முறையே (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) என்க. P -ன் அச்சுத்தூரங்கள் (x, y, z) என்க. பின்னர் $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ மற்றும்

$\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ எனத் தேற்றம் 6.12–ல் உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ஆகியவற்றின் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$x - x_1 = t(x_2 - x_1), y - y_1 = t(y_2 - y_1), z - z_1 = t(z_2 - z_1)$

எனப் பெறுகிறோம். ஆகவே, (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) என்ற இருபுள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ எனக்கிடைக்கிறது.



படம் 6.19

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ ஆகும் எனக் காண்கிறோம். மேலும் இவற்றுக்கு விகிதச் சமமமாக உள்ள ஏதேனும் மூன்று எண்கள், குறிப்பாக $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ என்பவை இக்கோட்டின் திசை விகிதங்களாக அமைவதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.24

ஒரு நேர்க்கோடு $(1, 2, -3)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது மற்றும் $4\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக உள்ளது எனில், அக்கோட்டின் (i) துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு (ii) துணை அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (iii) கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

தேவையான கோடு $(1, 2, -3)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது. ஆகவே, இப்புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ஆகும்.

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$ என்க. பின்னர்

(i) தேவையான கோட்டின் துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$, இங்கு $t \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

எனவே, $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + t(4\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}), t \in \mathbb{R}$.

(ii) தேவையான கோட்டின் துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ ஆகும்.

எனவே, $(\vec{r} - (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})) \times (4\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}) = \vec{0}$.

(iii) தேவையான கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் $\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3}$.

இங்கு, $(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, -3)$ மற்றும் தேவையான கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $4, 5, -7$ என்பவற்றுக்கு விகிதச் சமமானவையாகும். எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் $\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{5} = \frac{z + 3}{-7}$.

எடுத்துக்காட்டு 6.25

ஒரு நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + t(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ எனில், அக்கோட்டின் (i) திசைக்கொசைன்கள் (ii) துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (iii) கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் சமன்பாட்டையும் $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ என்ற கோட்டின் சமன்பாட்டையும் ஒப்பிட நமக்குக் கிடைப்பது $\vec{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$. எனவே,

(i) $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ எனில், கோட்டின் திசைவிகிதங்கள் b_1,b_2,b_3 ஆகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $2,-1,3$ என்பவற்றுக்கு விகிதச் சமமானவையாகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$ ஆகும்.

(ii) கோட்டின் துணை அலகு அல்லாத வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}$.
எனவே, $(\vec{r}-(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}))\times(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})=\vec{0}$.

(iii) இங்கு $(x_1,y_1,z_1)=(3,-2,6)$ மற்றும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $2,-1,3$ என்பவற்றுக்கு விகிதச் சமமானவை.

எனவே, கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-6}{3}$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.26

$(-4,2,-3)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\frac{-x-2}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{2z-6}{3}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதுமான கோட்டின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை $\frac{x+2}{-4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{3/2}$ என எழுதி, $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$, உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பது, $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=-4\hat{i}-2\hat{j}+\frac{3}{2}\hat{k}=-\frac{1}{2}(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})$. இதிலிருந்து $\vec{b}$ ஆனது $8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையானது எனத் தெளிவாகக் காணலாம்.

எனவே, தேவையான நேர்க்கோடு $(-4,2,-3)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுடன் $8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும் உள்ளது. ஆதலால், தேவையான கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = (-4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}),\ t\in\mathbb{R}.$$

மேலும், தேவையான கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+4}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{-3} \text{ ஆகும்.}$$ ■

எடுத்துக்காட்டு 6.27

$(-5,7,-4)$ மற்றும் $(13,-5,2)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க. மேலும், இந்த நேர்க்கோடு xy-தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

தேவையான நேர்க்கோடு $(-5,7,-4)$ மற்றும் $(13,-5,2)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கிறது. எனவே, இப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $18,-12,6$ ஆகும். அதாவது $3,-2,1$ ஆகும்.

ஆதலால், தேவையான நேர்க்கோடு $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக இருக்கும். எனவே,

- தேவையான நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு

  $\vec{r}=(-5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k})+t(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ அல்லது $\vec{r}=(13\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})+s(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ இங்கு $s,t\in\mathbb{R}$ ஆகும்.

- தேவையான கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடுகள் $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$ அல்லது

  $\dfrac{x-13}{3}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ ஆகும்.

- இந்நேர்க்கோட்டில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு

  $(3t-5,-2t+7,\ t-4)$ அல்லது $(3s+13,-2s-5,\ s+2)$

  நேர்க்கோடு xy -தளத்தை சந்திப்பதால், வெட்டும் புள்ளியின் z -அச்சுத் தொலைவு பூச்சியமாகும்.

  எனவே, $t-4=0$, அதாவது, $t=4$ ஆகும். ஆகையால், நேர்க்கோடு xy -தளத்தை வெட்டும் புள்ளி $(7,-1,0)$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.28

$\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=-z$ என்ற நேர்க்கோடு ஆய அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்களைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டுக்கு இணையாக உள்ள ஓரலகு வெக்டர் $\hat{b}$ என்க. பின்னர், $\hat{b}=\dfrac{2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{|2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}|}=\dfrac{1}{3}(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$. ஆகவே, $\hat{b}$ -ன் திசைக் கொசைன்களின் வரையறைப்படி, நாம் பெறுவது

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=-\frac{1}{3},$$

இங்கு α,β,γ என்பன முறையே மிகை x -அச்சு, மிகை y -அச்சு மற்றும் மிகை z -அச்சுக்களுடன் $\hat{b}$ ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடு ஆய அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்களும், $\hat{b}$ முறையே ஆய அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்களும் சமம் என்பதால்

$\alpha=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right),\ \beta=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right),\ \gamma=\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)$ எனப் பெறுகிறோம். ■

ML80Q

6.7.4 இரண்டு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between two straight lines)

(a) வெக்டர் வடிவம் (Vector form)

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணமும் $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{d}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணமும் ஒன்றேயாகும். ஆகையால்,

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}$ அல்லது $\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right)$.

குறிப்புரை

(i) $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ என்ற இரு கோடுகளும் இணை

$\Leftrightarrow \theta=0 \Leftrightarrow \cos\theta=1 \Leftrightarrow |\vec{b}\cdot\vec{d}|=|\vec{b}|\,|\vec{d}|$.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ என்ற இரு கோடுகளும் இணையாக இருக்கத் தேவையானதும், மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\vec{b}=\lambda\vec{d}$, λ ஒரு திசையிலி என்பதாகும்.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ என்ற இரு கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாக இருக்கத் தேவையானதும், மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ என்பதாகும்.

(b) கார்டீசியன் வடிவம் (Cartesian form)

இரு நேர்க்கோடுகளின் கார்டீசியன் வடிவச் சமன்பாடுகள் $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ மற்றும் $\dfrac{x-x_2}{d_1}=\dfrac{y-y_2}{d_2}=\dfrac{z-z_2}{d_3}$ எனில், இவ்விரு கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ என்பது

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right) \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்புரை

(i) b_1,b_2,b_3 மற்றும் d_1,d_2,d_3 என்ற திசை விகிதங்களைக் கொண்ட கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகள் இணையாக இருக்கத் தேவையானதும், மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $\dfrac{b_1}{d_1}=\dfrac{b_2}{d_2}=\dfrac{b_3}{d_3}$ என்பதாகும்.

(ii) b_1,b_2,b_3 மற்றும் d_1,d_2,d_3 என்ற திசை விகிதங்களைக் கொண்ட கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கத் தேவையானதும் மற்றும், போதுமானதுமான நிபந்தனை $b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3=0$ என்பதாகும்.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்க்கோடுகளின் திசைக்கொசைன்கள் l_1,m_1,n_1 மற்றும் l_2,m_2,n_2 எனில், கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\cos\theta=|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.29

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})+t(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$ என்ற கோட்டிற்கும் $(5,1,4)$ மற்றும் $(9,2,12)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})+t(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$ என்ற கோடு $2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக இருக்கும்.

$(5,1,4)$ மற்றும் $(9,2,12)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $4,1,8$ என்பதால், இக்கோடு $4\hat{i}+\hat{j}+8\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக இருக்கும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட இவ்விரு கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம்

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right), \text{ இங்கு } \vec{b} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k} \text{ மற்றும் } \vec{d} = 4\hat{i}+\hat{j}+8\hat{k}.$$

எனவே, $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\cdot(4\hat{i}+\hat{j}+8\hat{k})|}{|2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}||4\hat{i}+\hat{j}+8\hat{k}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right).$$

எடுத்துக்காட்டு 6.30

$\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ மற்றும் $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-2}{2}$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் காண்க. இவ்விரு கோடுகளும் இணையானவையா அல்லது செங்குத்தானவையா எனக்காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை

$\dfrac{x-x_1}{b_1} = \dfrac{y-y_1}{b_2} = \dfrac{z-z_1}{b_3}$ மற்றும் $\dfrac{x-x_2}{d_1} = \dfrac{y-y_2}{d_2} = \dfrac{z-z_2}{d_3}$ ஆகியவற்றுடன் ஒப்பிட, நாம் பெறுவது

$(b_1,b_2,b_3) = (2,1,-2)$ மற்றும் $(d_1,d_2,d_3) = (4,-4,2)$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம்

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|(2)(4)+(1)(-4)+(-2)(2)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்க்கோடுகளும் செங்குத்தானவை.

எடுத்துக்காட்டு 6.31

$A(6,7,5)$ மற்றும் $B(8,10,6)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடானது $C(10,2,-5)$ மற்றும் $D(8,3,-4)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானது என நிறுவுக.

தீர்வு

$A(6,7,5)$ மற்றும் $B(8,10,6)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக அமையும். மேலும் $C(10,2,-5)$ மற்றும் $D(8,3,-4)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு $\vec{d} = \overrightarrow{CD} = -2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக இருக்கும். எனவே, இவ்விரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணமானது $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{d}$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

$\vec{b}\cdot\vec{d} = (2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})\cdot(-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 0$ என்பதால், $\vec{b}$, $\vec{d}$ என்ற வெக்டர்கள் செங்குத்தானவையாகும். எனவே, இரு நேர்க்கோடுகளும் செங்குத்தானவையாகும்.

மாற்று முறை

$A(6,7,5)$ மற்றும் $B(8,10,6)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $(b_1,b_2,b_3) = (2,3,1)$ ஆகும். மேலும், $C(10,2,-5)$ மற்றும் $D(8,3,-4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $(d_1,d_2,d_3) = (-2,1,1)$ ஆகும்.

$b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3 = (2)(-2)+(3)(1)+(1)(1) = 0$ என்பதால், இவ்விரு கோடுகளும் செங்குத்தானவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.32

$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{2-y}{6}=\dfrac{z-4}{12}$ மற்றும் $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{5-z}{6}$ என்ற கோடுகள் இணையானவை என நிறுவுக.

தீர்வு

$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{2-y}{6}=\dfrac{z-4}{12}$ என்ற கோடு $4\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக இருக்கும் மற்றும் $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{5-z}{6}$ என்ற கோடு $-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக இருக்கும்.

$4\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}=-2(-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})$ என்பதால், இரு வெக்டர்களும் இணையாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்க்கோடுகளும் இணையாகும்.

பயிற்சி 6.4

1. $4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ என்ற வெக்டரை நிலை வெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி வழிச் செல்வதும் $2\hat{i}-6\hat{j}+7\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு, மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
2. $(-2,3,4)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{8-z}{6}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் துணை அலகு வெக்டர், சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
3. $(6,7,4)$ மற்றும் $(8,4,9)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு xz மற்றும் yz தளங்களை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.
4. $(5,6,7)$ மற்றும் $(7,9,13)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க. மேலும், கொடுக்கப்பட்ட இவ்விரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு, மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
5. பின்வரும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் காண்க.
   (i) $\vec{r}=(4\hat{i}-\hat{j})+t(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$, $\vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})+s(-\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$
   (ii) $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-7}{4}=\dfrac{z+5}{5}$, $\vec{r}=4\hat{k}+t(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$.
   (iii) $2x=3y=-z$ மற்றும் $6x=-y=-4z$.
6. $A(7,2,1), B(6,0,3)$, மற்றும் $C(4,2,4)$ என்பன ΔABC -ன் உச்சிகள் எனில், $\angle ABC$ -ஐக் காண்க.
7. $(2,1,4)$ மற்றும் $(a-1,4,-1)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடு $(0,2,b-1)$ மற்றும் $(5,3,-2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுக்கு இணை எனில், a மற்றும் b -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
8. $\dfrac{x-5}{5m+2}=\dfrac{2-y}{5}=\dfrac{1-z}{-1}$ மற்றும் $x=\dfrac{2y+1}{4m}=\dfrac{1-z}{-3}$ என்ற நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனில், m -ன் மதிப்பைக் காண்க.
9. $(2,3,4),(-1,4,5)$ மற்றும் $(8,1,2)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

6.7.5 இரு நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (Point of intersection of two straight lines)

$\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{a_2}=\dfrac{z-z_1}{a_3}$ மற்றும் $\dfrac{x-x_2}{b_1}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{b_3}$ என்பன இரு நேர்க்கோடுகள் எனில், இக்கோடுகளின் மீது உள்ள புள்ளிகளின் அமைப்பு முறையே $(x_1+sa_1, y_1+sa_2, z_1+sa_3)$ மற்றும் $(x_2+tb_1, y_2+tb_2, z_2+tb_3)$ ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளுமானால், ஒரு பொதுவான புள்ளி இருக்க வேண்டும். ஆகையால், கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியில், ஒரு சில s, t மதிப்புகளுக்கு,

$$(x_1+sa_1, y_1+sa_2, z_1+sa_3) = (x_2+tb_1, y_2+tb_2, z_2+tb_3)$$

எனவே, $x_1+sa_1 = x_2+tb_1, y_1+sa_2 = y_2+tb_2, z_1+sa_3 = z_2+tb_3$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் இரு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பதால் பெறப்படும் s மற்றும் t -ன் மதிப்புகள் மீதமுள்ள சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானால், கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் வெட்டும் கோடுகளாகும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அவை வெட்டாக் கோடுகளாகும். s -ன் மதிப்பை, (அல்லது t -ன் மதிப்பை) பிரதியிட, இரு கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி கிடைக்கும்.

நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் வெக்டர் சமன்பாடுகளாக கொடுக்கப்பட்டால், அச்சமன்பாடுகளை கார்டீசியன் சமன்பாடுகளாக மாற்றி எழுதி மேற்கண்ட முறையில் வெட்டும் புள்ளியைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.33

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ மற்றும் $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-1}{2}=z$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}=s$ (என்க). இக்கோட்டில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் வடிவம் $(2s+1,\ 3s+2,\ 4s+3)$ ஆகும். $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-1}{2}=z=t$ (என்க). இக்கோட்டில் உள்ள ஏதேனும் புள்ளியின் வடிவம் $(5t+4,\ 2t+1,\ t)$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளுமானால், வெட்டும் புள்ளியில், ஒரு சில s, t -ன் மதிப்புகளுக்கு,

$$(2s+1,\ 3s+2,\ 4s+3) = (5t+4,\ 2t+1,\ t)$$

எனவே, $2s-5t=3$, $3s-2t=-1$ மற்றும் $4s-t=-3$. இம்மூன்று சமன்பாடுகளில், முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண $t=-1$, $s=-1$ எனக் கிடைக்கிறது. s மற்றும் t -ன் இம்மதிப்புகள் மூன்றாவது சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் வெட்டும் கோடுகளாகும். t அல்லது s -ன் மதிப்பினை உரிய புள்ளிகளில் பிரதியிட, கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $(-1,-1,-1)$ எனக் கிடைக்கிறது.

6.7.6 இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் (Shortest distance between two straight lines)

இரு நேர்க்கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியை எவ்வாறு காண்பது எனவும் மற்றும் இரு கோடுகள் இணையானவையா இல்லையா என்பதை எவ்வாறு தீர்மானிப்பது எனவும் கற்றறிந்துள்ளோம்.

வரையறை 6.6

இரு நேர்க்கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைந்தால், அவை **ஒரு தளம் அமையும் கோடுகள்** எனப்படும்.

குறிப்பு

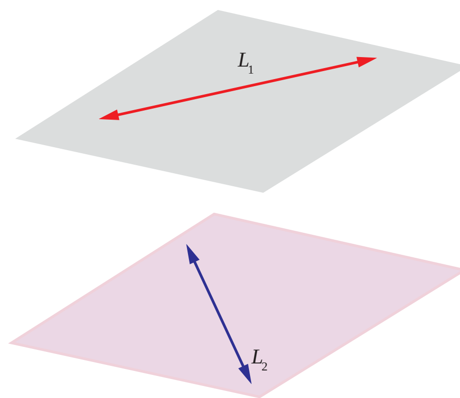
இரு நேர்க்கோடுகள் இணைகோடுகளாகவோ அல்லது வெட்டும் கோடுகளாகவோ இருப்பின், அவை ஒரு தளம் அமையும் கோடுகளாகும்.

வரையறை 6.7

புறவெளியில் இணையாக இல்லாமலும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமலும் உள்ள இரு கோடுகளை **ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகள்** என அழைக்கிறோம்.

குறிப்பு

இரு நேர்க்கோடுகள் ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகள் எனில், அக்கோடுகள் ஒரே தளத்தில் இருக்காது.



படம் 6.20

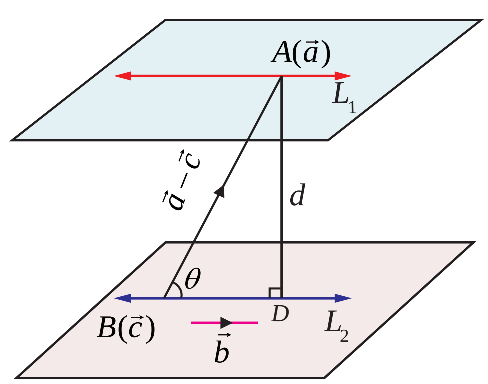
இணையாக இல்லாத இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால், அக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் பூச்சியம் ஆகும். ஒன்றையொன்று வெட்டாமலும் இணையாகவும் உள்ள இரண்டு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரமானது, இவ்விரு இணைக்கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாக உள்ள கோட்டுத்துண்டின் நீளமாகும். இதேபோன்று, ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரமானது, ஒரு தளம் அமையாத இரு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தான கோட்டுத்துண்டின் நீளம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. இரண்டு நேர்க்கோடுகள் இணைக்கோடுகளாகவோ அல்லது ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகளாகவோ இருக்கும்.

தேற்றம் 6.13

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{b}$ என்ற இரண்டு இணைகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் $d = \dfrac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$, இங்கு $|\vec{b}| \neq 0$.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{b}$ என்ற இரண்டு இணைக்கோடுகளை முறையே L_1 மற்றும் L_2 எனக்குறிப்போம். L_1 மற்றும் L_2 –களின் மீதுள்ள A மற்றும் B என்ற இரு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்க. கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளும் $\vec{b}$ –க்கு இணையானவை.



படம் 6.21

AD என்பது கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளுக்கும்

செங்குத்து என்க. $\overrightarrow{AB}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில்,

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{b}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\vec{b}|} = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{c}-\vec{a}|\,|\vec{b}|} \qquad \ldots (1)$$

ஆனால், செங்கோண முக்கோணம் ABD -ல் இருந்து,

$$\sin\theta = \frac{d}{AB} = \frac{d}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{d}{|\vec{c}-\vec{a}|} \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2)–லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$d = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}, \text{ இங்கு } |\vec{b}| \neq 0.$$

தேற்றம் 6.14

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ என்ற ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம்

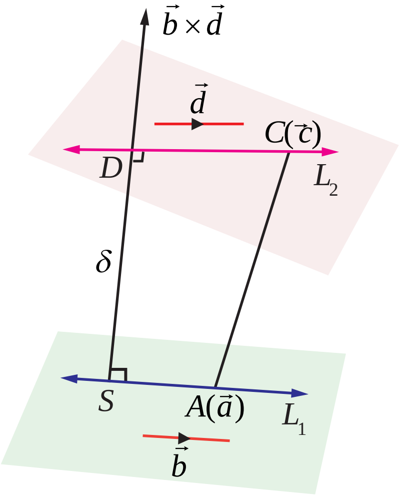
$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}, \text{ இங்கு } |\vec{b}\times\vec{d}| \neq 0$$

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ என்ற ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகளை முறையே L_1 மற்றும் L_2 எனக் குறிப்போம்.

L_1 மற்றும் L_2 என்ற கோடுகளின் மீதுள்ள A மற்றும் C என்ற இரு புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளிலிருந்து, L_1 என்ற கோடு $\vec{b}$ -க்கு இணையாகவும், L_2 என்ற கோடு $\vec{d}$ -க்கு இணையாகவும் இருப்பதைக் காண்கிறோம். ஆகையால், $\vec{b}\times\vec{d}$ என்பது L_1 மற்றும் L_2 என்ற இரண்டு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாகும்.



படம் 6.22

SD என்பது L_1 மற்றும் L_2 என்ற இரண்டு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாக உள்ள கோட்டுத்துண்டு என்க. ஆகவே $\overrightarrow{SD}$ ஆனது $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{d}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தான வெக்டராகும். ஆதலால், $\overrightarrow{SD}$ ஆனது $\vec{b}\times\vec{d}$ -க்கு இணையான வெக்டராகும்.

எனவே, $\dfrac{\vec{b}\times\vec{d}}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$ என்பது $\overrightarrow{SD}$ -ன் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டராகும். மேலும், மீச்சிறு தூரம்

$|\overrightarrow{SD}|$ என்பது, $\overrightarrow{SD}$ -ன் மீதான $\overrightarrow{AC}$ -ன் வீழலின் எண்ணளவாகும். அதாவது,

$$\delta = |\overrightarrow{SD}| = |\overrightarrow{AC}\,.\,(\overrightarrow{SD} \text{ -ன் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டர்})| = \left|(\vec{c}-\vec{a})\cdot\frac{\vec{b}\times\vec{d}}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\right|$$

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}, \text{ இங்கு } |\vec{b}\times\vec{d}| \neq 0.$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 275 09-12-2021 13:40:48

குறிப்புரை

(i) தேற்றம் 6.14–லிருந்து, $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகள் (அதாவது, ஒரு தளம் அமையும் கோடுகள்) எனில், $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$ ஆகும் எனக் காண்கிறோம்.

(2) $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ மற்றும் $\dfrac{x-x_2}{d_1}=\dfrac{y-y_2}{d_2}=\dfrac{z-z_2}{d_3}$ என்ற கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் (அதாவது, ஒரு தளம் அமையும் கோடுகள்) எனில்,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0$$

எடுத்துக்காட்டு 6.34

$\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$ மற்றும் $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி வழியாகச் செல்வதும், மற்றும் இவ்விருகோடுகளுக்கும் செங்குத்தானதுமான நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$ என்ற கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}=s \text{ (என்க)}$$

இக்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியின் அமைப்பு $(2s+1,\ 3s+3,\ 2s-1)$ ... (1)

இரண்டாவது கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}=t$ (என்க)

இக்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியின் அமைப்பு $(t+2,\ 2t+4, 4t-3)$ ... (2)

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளுமானால், ஒரு பொதுவான புள்ளி இருக்க வேண்டும். எனவே, ஒரு சில $s,t\in\mathbb{R}$ களுக்கு,

$(2s+1,\ 3s+3,\ 2s-1)=(t+2,\ 2t+4, 4t-3)$.

x, y மற்றும் z –ன் அச்சுத்தூரங்களை சமப்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$2s-t=1,\ 3s-2t=1 \text{ மற்றும் } s-2t=-1.$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளில் முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பதால் $s=1$ மற்றும் $t=1$ எனக்கிடைக்கிறது. s மற்றும் t –ன் இம்மதிப்புகள் மூன்றாவது சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் வெட்டும் கோடுகளாகும். இப்பொழுது, s –ன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)–ல் அல்லது t –ன் மதிப்பை சமன்பாடு (2)–ல் பிரதியிட, இவ்விரு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி $(3,6,1)$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ மற்றும் $\vec{d}=\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\vec{b}\times\vec{d}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k} \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

இவ்வெக்டர் கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தான வெக்டராகும்.

எனவே, தேவையான நேர்க்கோடு $(3,6,1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதுடன் இரு நேர்க்கோடுகளுக்கும் செங்குத்தானதும் ஆகும். ஆகவே, தேவையான நேர்க்கோடு $(3,6,1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதுடன் $8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும் இருக்கும். எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=(3\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k})+m(8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}),\ m\in\mathbb{R}\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 6.35

$\vec{r}=(2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$, $\vec{r}=(2\hat{j}-3\hat{k})+s(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ என்ற ஒரு ஜோடி நேர்க்கோடுகள் இணைக்கோடுகளாகுமா எனக்காண்க. மேலும், அக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரு சமன்பாடுகளையும் $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+s\vec{d}$ உடன் ஒப்பிட்டு, நாம் பெறுவது $\vec{a}=2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k},\ \vec{c}=2\hat{j}-3\hat{k},\ \vec{d}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ஆகும்.

$\vec{b}$ -ஐ $\vec{d}$ -ன் திசையிலிப் பெருக்கலாக எழுத முடியாது என்பதை தெளிவாகக் காண்கிறோம். ஆகவே, இவ்விரு வெக்டர்கள் இணையான வெக்டர்கள் அல்ல. ஆதலால், இரு கோடுகளும் இணையான கோடுகள் அல்ல.

இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம்

$$\delta=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$$

இப்பொழுது, $$\vec{b}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&3&4\\1&2&3\end{vmatrix}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

மேலும், $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=(-2\hat{i}-4\hat{j}-6\hat{k})\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})=0\,.$

எனவே, இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் பூச்சியம் ஆகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.36

$\vec{r}=(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})+t(-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ மற்றும் $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடுகள் முறையே

$$\vec{r}=(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})+t(-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})\ \text{மற்றும்}$$

$$\vec{r}=(3\hat{i}-2\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})\ \text{ஆகும்.}$$

இச்சமன்பாடுகளை $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{r}=\vec{c}+s\vec{d}$ உடன் ஒப்பிட்டு, நாம் பெறுவது

$\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k},\ \vec{b}=-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k},\ \vec{c}=3\hat{i}-2\hat{k},\ \vec{d}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ஆகும்.

இங்கு $\vec{b}$ என்பது $\vec{d}$ -ன் திசையிலிப் பெருக்கலாக அமைந்துள்ளதைக் காண்கிறோம். ஆகவே, இவ்விரு கோடுகளும் இணையான கோடுகளாகும். இரண்டு இணையான நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் $d = \dfrac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ ஆகும்.

$$(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12\hat{i}+14\hat{j}-5\hat{k}$$

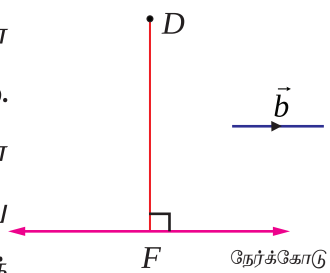
$$\text{எனவே, } d = \frac{|12\hat{i}+14\hat{j}-5\hat{k}|}{|-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}|} = \frac{\sqrt{365}}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 6.37

$(-1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\vec{r} = (\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடியின் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க. மேலும், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து நேர்க்கோட்டிற்கு உள்ள மீச்சிறு தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{r} = (\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ என்ற சமன்பாட்டை $\vec{r} = \vec{a}+t\vec{b}$ உடன் ஒப்பிட்டு நாம் பெறுவது $\vec{a} = \hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$, மற்றும் $\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட $(-1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியை D எனவும், கோட்டின் மீதுள்ள $(1, -4, 3)$ என்ற புள்ளியை F எனவும் குறிக்கலாம். F என்பது D -யிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி எனில், F என்ற புள்ளியின் அமைப்பு $(2t+1, 3t-4, t+3)$ ஆகும். மேலும், $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD} = (2t+2)\hat{i}+(3t-6)\hat{j}+t\hat{k}$.



படம் 6.23

$\vec{b}$ என்ற வெக்டர் $\overrightarrow{DF}$ -க்கு செங்குத்து என்பதால்,

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{DF} = 0 \Rightarrow 2(2t+2)+3(3t-6)+1(t) = 0 \Rightarrow t = 1$$

எனவே, F-ன் அச்சுத்தூரம் $(3, -1, 4)$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் (மீச்சிறு தூரம்)

$$DF = |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{4^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{26} \text{ அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 6.5

1. $(5, 2, 8)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\vec{r} = (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+s(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ மற்றும் $\vec{r} = (2\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+t(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$ ஆகிய கோடுகளுக்குச் செங்குத்தானதுமான நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
2. $\vec{r} = (6\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})+s(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$ மற்றும் $\vec{r} = (3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})+t(2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$ என்பன ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகள் எனக்காட்டுக. மேலும், அக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தைக் காண்க.

3. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ மற்றும் $\frac{x-3}{1}=\frac{y-m}{2}=z$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும் எனில், m -ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}, z-1=0$ மற்றும் $\frac{x-6}{2}=\frac{z-1}{3}, y-2=0$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் எனக்காட்டுக. மேலும், அவை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

5. $x+1=2y=-12z$ மற்றும் $x=y+2=6z-6$ என்ற கோடுகள் ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகள் எனக் காட்டி, அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தையும் காண்க.

6. $(-1,2,1)$ என்றபுள்ளிவழிச்செல்வதும் $\vec{r}=(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ என்றநேர்க்கோட்டிற்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும், இக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தையும் காண்க.

7. $(5,4,2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியைக் காண்க. மேலும், இச்செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6.8 ஒரு தளத்தின் பல்வேறு வகைச் சமன்பாடுகள்
(Different forms of Equation of a plane)

தளம் என்பதன் கருத்தாக்கத்தை நாம் ஏற்கனவே கற்றறிந்துள்ளோம்.

வரையறை 6.8

ஒரு தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள வெக்டர் அத்தளத்தின் **செங்குத்து** அல்லது **செங்கோடு** என்கிறோம்.

குறிப்பு

ஒரு தளத்தின் செங்கோடானது, அத்தளத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு நேர்க்கோட்டிற்கும் செங்குத்தாகும்.

பின்வருவனவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று கொடுக்கப்பட்டால், ஒரு தளத்தை தனித்ததாக தீர்மானிக்கலாம் :

- தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் மற்றும் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து அத்தளத்திற்கு உள்ள தூரம்.
- தளத்தின் மீதான ஒரு புள்ளி மற்றும் தளத்தின் ஒரு செங்கோடு.
- ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள்.
- தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி மற்றும் தளத்திற்கு இணையாக உள்ள இரண்டு இணை அல்லாத கோடுகள் அல்லது வெக்டர்கள்.
- தளத்தின் மீதுள்ள இரு தனித்த புள்ளிகள் மற்றும் தளத்திற்கு இணையாக உள்ள ஆனால் இவ்விரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு இணையாக இல்லாத ஒரு நேர்க்கோடு அல்லது ஒரு பூச்சியமற்ற வெக்டர்.

தளங்களின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளை மேற்கண்ட நிலைகளைப் பயன்படுத்திக் காண்போம்.

6.8.1 தளத்தின் ஒரு செங்கோடு மற்றும் ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து தளத்திற்கு உள்ள தூரம் கொடுக்கப்பட்டால் தளத்தின் சமன்பாடு (Equation of a plane when a normal to the plane and the distance of the plane from the origin are given)

(a) செங்கோட்டு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு (Vector equation of a plane in normal form)

தேற்றம் 6.15

ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து தளத்திற்கு உள்ள தூரம் p மற்றும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{d}$ எனில், தளத்தின் சமன்பாடு $\vec{r}\cdot\hat{d} = p$ ஆகும்.

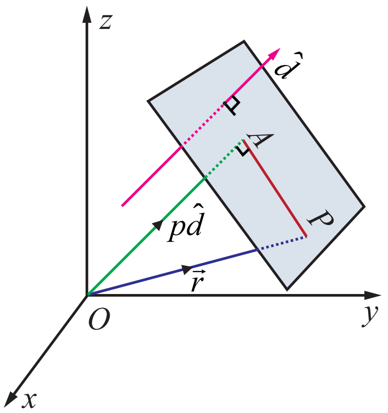
நிரூபணம்

ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து p தொலைவில் உள்ள தளத்தினை கருதுக. ஆதிப்புள்ளி O -விலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் அடி A எனக.

$\overrightarrow{OA}$ –ன் திசையில் உள்ள ஓரலகு செங்குத்து வெக்டர் $\hat{d}$ எனக.

பின்னர், $\overrightarrow{OA} = p\hat{d}$ ஆகும்.

$\vec{r}$ என்பது தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P–ன் நிலைவெக்டர் எனில், $\overrightarrow{AP}$ என்பது $\overrightarrow{OA}$ வுக்குச் செங்குத்தாகும்.



படம் 6.24

எனவே, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow (\vec{r} - p\hat{d})\cdot p\hat{d} = 0$

$$\Rightarrow (\vec{r} - p\hat{d})\cdot\hat{d} = 0$$

$$\vec{r}\cdot\hat{d} = p. \qquad \text{... (1)}$$

இச்சமன்பாடு, தளத்தின் **செங்கோட்டு வடிவ வெக்டர்** சமன்பாடு எனப்படும். ■

(b) செங்கோட்டு வடிவ கார்டீசியன் சமன்பாடு (Cartesian equation of a plane in normal form)

$\hat{d}$ –ன் திசைக்கொசைன்கள் l, m, n எனக. எனவே, $\hat{d} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ ஆகும்.

இதனைச் சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட,

$$\vec{r}\cdot(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$$

P என்பது (x,y,z) எனில், $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ஆகும்.

எனவே, $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$ or $lx + my + nz = p$ ... (2)

சமன்பாடு (2) ஆனது தளத்தின் **செங்கோட்டு வடிவ கார்டீசியன்** சமன்பாடு எனப்படும்.

குறிப்புரை

(i) ஆதிப்புள்ளி வழியாக தளம் செல்லுமெனில், $p = 0$ ஆகும். எனவே, தளத்தின் சமன்பாடு $lx + my + nz = 0$.

(ii) $\vec{d}$ என்பது தளத்திற்கு செங்குத்தான வெக்டர் எனில், $\hat{d} = \dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$ என்பது தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டராகும். எனவே, தளத்தின் சமன்பாடு $\vec{r}\cdot\dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = p$ அல்லது $\vec{r}\cdot\vec{d} = q$, இங்கு $q = p|\vec{d}|$ என்றாகும். $\vec{r}\cdot\vec{d} = q$ என்ற சமன்பாடு தளத்தின் **திட்ட வடிவ** வெக்டர் சமன்பாடு எனப்படும்.

குறிப்பு

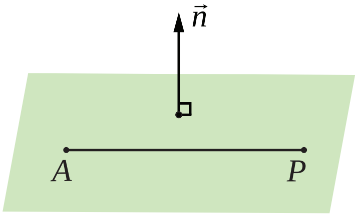
$\vec{r}\cdot\vec{d}=q$ என்ற திட்ட வடிவச் சமன்பாட்டில், $\vec{d}$ என்பது ஓரலகு செங்குத்து வெக்டராகவோ, q என்பது செங்குத்துத் தொலைவாகவோ இருக்கத் தேவையில்லை.

6.8.2 ஒரு வெக்டருக்கு செங்குத்தாக கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு (Equation of a plane perpendicular to a vector and passing through a given point)

(a) வெக்டர் சமன்பாடு (Vector form of equation)

$\vec{a}$ என்ற வெக்டரை நிலை வெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி A வழியாகச் செல்வதும் $\vec{n}$ –க்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தைக் கருதுக.

தளத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P–ன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ என்க.



படம் 6.25

எனவே $\overrightarrow{AP}$ என்பது $\vec{n}$ –க்கு செங்குத்தாகும்.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0\,. \qquad \ldots (1)$$

இச்சமன்பாடு $\vec{a}$ என்ற வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் $\vec{n}$ –க்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \;\Rightarrow\; \vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n} \;\Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=q\,,\ \text{இங்கு}\ q=\vec{a}\cdot\vec{n}\,.$$

(b) கார்டீசியன் சமன்பாடு (Cartesian form of equation)

a,b,c என்பன $\vec{n}$ –ன் திசை விகிதங்கள் எனில், $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ஆகும். A–ன் அச்சுத்தூரங்கள் (x_1,y_1,z_1) என்க. எனவே, சமன்பாடு (1)லிருந்து,

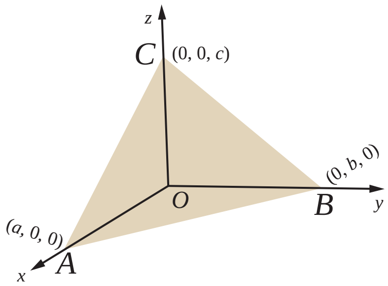
$$((x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k})\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=0\,.$$

$$\Rightarrow\; a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)\;=\;0$$

இது (x_1,y_1,z_1) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் a,b,c என்பவற்றை திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட வெக்டருக்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும்.

6.8.3 தளத்தின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு (Intercept form of the equation of a plane)

$\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ என்ற தளம் $OA=a,\ OB=b,\ OC=c$ என்ற வெட்டுத் துண்டுகளை ஏற்படுத்துமாறு ஆய அச்சுக்களை A,B,C என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது என்க. எனவே, A–ன் நிலை வெக்டர் $a\hat{i}$ ஆகும்.



படம் 6.26

A என்ற இப்புள்ளி கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் மீது உள்ளதால், $a\hat{i}\cdot\vec{n}=q$ ஆகும். இதிலிருந்து $\hat{i}\cdot\vec{n}=\dfrac{q}{a}$ ஆகும்.

இவ்வாறே, $b\hat{j}$ மற்றும் $c\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களும் கொடுக்கப்பட்ட தளத்தில் உள்ளதால், $\hat{j}\cdot\vec{n}=\dfrac{q}{b}$ மற்றும் $\hat{k}\cdot\vec{n}=\dfrac{q}{c}$ எனக்கிடைக்கிறது.

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என $\vec{r}\cdot\vec{n} = q$ -ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $x\hat{i}\cdot\vec{n} + y\hat{j}\cdot\vec{n} + z\hat{k}\cdot\vec{n} = q.$

எனவே, $x\left(\dfrac{q}{a}\right) + y\left(\dfrac{q}{b}\right) + z\left(\dfrac{q}{c}\right) = q$.

$\Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ ·

இது a,b,c என்ற வெட்டுத் துண்டுகளை முறையே x,y,z அச்சுக்களில் ஏற்படுத்தும் தளத்தின் **வெட்டுத் துண்டு வடிவச்** சமன்பாடாகும்.

தேற்றம் 6.16

x,y,z –ல் உள்ள $ax + by + cz + d = 0$ என்ற நேரியச் சமன்பாடு ஒரு தளத்தைக் குறிக்கும்.

நிரூபணம்

$ax + by + cz + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டை வெக்டர் சமன்பாடாக

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) = -d$ அல்லது $\vec{r}\cdot\vec{n} = -d$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாடு ஒரு தளத்தின் திட்ட வடிவ வெக்டர் சமன்பாடாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $ax + by + cz + d = 0$ என்பது ஒருதளத்தைக் குறிக்கிறது. இங்கு $\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ என்ற வெக்டர் தளத்திற்குச் செங்குத்தான வெக்டராகும். ■

குறிப்பு

ஒரு தளத்தின் பொது வடிவச் சமன்பாடு $ax + by + cz + d = 0$ -ல் உள்ள a,b,c என்பன தளத்தின் செங்குத்தின் அல்லது செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.38

ஆதியில் இருந்து 12 அலகுகள் தூரத்தில் இருப்பதும் $6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்தானதாகவும் உள்ள தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு, $\vec{d} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ மற்றும் $p = 12$ என்க.

$6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ என்ற வெக்டரின் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர் $\hat{d}$ எனில்,

$$\hat{d} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}).$$

$\vec{r}$ என்பது தளத்தில் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி (x,y,z) -ன் நிலைவெக்டர் எனில், தளத்தின் செங்கோட்டு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}\cdot\hat{d} = p$ -ஐப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$$\vec{r}\cdot\frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 12.$$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என இச்சமன்பாட்டில் பிரதியிடக் கிடைப்பது $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot\dfrac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 12$

புள்ளிப் பெருக்கலைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கினால் கிடைக்கும் $6x + 2y - 3z = 84$ என்ற சமன்பாடு தேவையான தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.39

ஒரு தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $3x - 4y + 3z = -8$ எனில், தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாட்டை திட்ட வடிவில் காண்க.

தீர்வு

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ என்பது தளத்தில் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி (x, y, z) –ன் நிலைவெக்டர் என்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) = -8$ அல்லது

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) = 8$ என எழுதலாம். அதாவது, $\vec{r} \cdot (-3\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) = 8$

இது கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் திட்ட வடிவ வெக்டர் சமன்பாடாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.40

$\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}) = 5$ என்ற தளத்தின் செங்குத்தின் திசைக் கொசைன்கள் மற்றும் ஆதியிலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{d} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ மற்றும் $q = 5$ என்க.

$3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ –ன் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர் $\hat{d}$ எனில் $\hat{d} = \frac{1}{13}(3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k})$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை 13 –ஆல் வகுக்க, நாம் பெறுவது

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{3}{13}\hat{i} - \frac{4}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k}\right) = \frac{5}{13}$$

இது $\vec{r} \cdot \hat{d} = p$ எனும் தளத்தின் செங்கோட்டு வடிவச் சமன்பாடாகும்.

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து $\hat{d} = \frac{1}{13}(3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k})$ என்பது ஆதியிலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்பட்ட ஓரலகு செங்குத்து வெக்டராகும் என அறிகிறோம். எனவே, $\hat{d}$ –ன் திசைக்கொசைன்கள் $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ மற்றும் ஆதியில் இருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் $\frac{5}{13}$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.41

$4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ என்ற வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி வழிச் செல்வதும் $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ என்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{n} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வழியாகச் செல்வதும், தளத்திற்குச் செங்குத்தான வெக்டரைக் கொண்டதுமான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ அல்லது $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$.

எனவே, தேவையான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு காண இச்சமன்பாட்டில்

$\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{n} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ எனப்பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = (4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \Rightarrow \vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 3$$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ எனப்பிரதியிடக் கிடைப்பது $2x - y + z = 3$ ஆகும். இதுவே தேவையான தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.42

ஒரு நகரும் தளம் ஆய அச்சுக்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகளின் தலைகீழிகளின் கூடுதல் ஒரு மாறிலியாக இருக்குமாறு நகர்கிறது எனில், அத்தளமானது ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனக்காட்டுக.

தீர்வு

x, y, z அச்சுக்களில் முறையே a, b, c என்ற வெட்டுத் துண்டுகளை ஏற்படுத்தும் தளத்தின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ஆகும். ஆய அச்சுக்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளின் தலைகீழிகளின் கூடுதல் ஒருமாறிலி என்பதால் $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k$ ஆகும். இங்கு, k ஒரு மாறிலி. இதனை $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{k}\right)=1$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாடு, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ என்ற தளமானது $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ என்ற நிலைத்தப் புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனக்காட்டுகிறது. ■

பயிற்சி 6.6

1. ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து 7 அலகுகள் தொலைவில் உள்ளதும், செங்குத்தின் திசை விகிதங்கள் $3, -4, 5$ கொண்டதுமான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு காண்க.

2. $12x+3y-4z=65$ என்ற தளத்தின் செங்குத்தின் திசைக்கொசைன்களைக் காண்க. மேலும், தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் ஆதியில் இருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் காண்க.
3. $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ என்ற நிலை வெக்டரை கொண்ட புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் $\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
4. $(-1,1,2)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் ஆய அச்சுகளுடன் சமகோணத்தை ஏற்படுத்தும் எண்ணளவு $3\sqrt{3}$ கொண்ட செங்கோட்டைக் கொண்டதுமான தளத்தின் வெக்டர் மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
5. $\vec{r}\cdot(6\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})=12$ என்ற தளம் ஆய அச்சுகளுடன் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க.
6. ஒரு தளம் ஆய அச்சுக்களை முறையே A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுவதால் உருவாகும் முக்கோணம் ABC -ன் மையக்கோட்டுச் சந்தி (u, v, w) எனில், தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6.8.4 கொடுக்கப்பட்ட ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு (Equation of a plane passing through three given non-collinear points)

(a) துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு (Parametric form of vector equation)

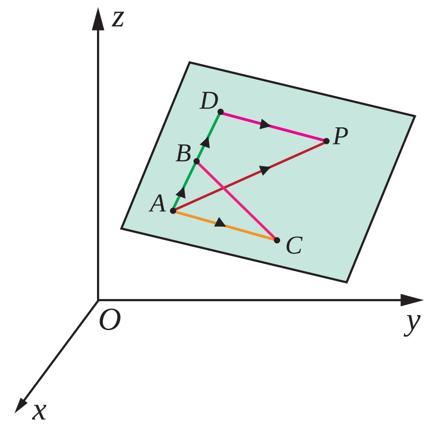
தேற்றம் 6.17

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் எனில், கொடுக்கப்பட்ட இம்மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a}),\ \text{இங்கு } \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0} \text{ மற்றும் } s, t\in\mathbb{R} \text{ ஆகும்.}$$

நிரூபணம்

ஒரே கோட்டிலமையாத முறையே $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட A, B, C என்ற புள்ளிகள் வழியாக தேவையான தளம் செல்கிறது என்க. ஆகவே, இவற்றில் குறைந்தது இரு வெக்டர்கள் பூச்சியமற்ற வெக்டர்களாக இருக்கும். நாம் $\vec{b} \neq \vec{0}$ மற்றும் $\vec{c} \neq \vec{0}$ எனக் கொள்வோம். தளத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P –ன் நிலைவெக்டர் $\vec{r}$ என்க. $\overrightarrow{AD}$ என்பது $\overrightarrow{AB}$ –க்கு இணையாக இருக்குமாறும் மற்றும் $\overrightarrow{DP}$ என்பது $\overrightarrow{AC}$ –க்கு இணையாக இருக்குமாறும் AB –ஐ நீட்டித்து அதன் மேல் D என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. எனவே,



படம் 6.27

$$\overrightarrow{AD} = s(\vec{b}-\vec{a}),\ \overrightarrow{DP} = t(\vec{c}-\vec{a}).$$

முக்கோணம் ADP –ல்,

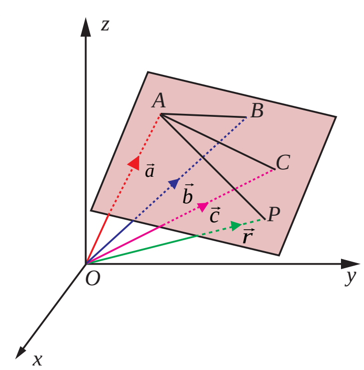
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP} \text{ or } \vec{r}-\vec{a} = s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a}),$$

இங்கு $\vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{c} \neq \vec{0}$ மற்றும் $s, t \in \mathbb{R}$. அதாவது, $\vec{r} = \vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$.

இது கொடுக்கப்பட்ட ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

(b) துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (Non-parametric form of vector equation)

ஒரே கோட்டிலமையாத முறையே $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற வெக்டர்களை நிலைவெக்டர்களாகக் கொண்ட A, B, C என்ற புள்ளிகள் வழியாகத் தேவையான தளம் செல்கிறது என்க. ஆகவே இவற்றில் குறைந்தது இரு வெக்டர்களாவது பூச்சியமற்றதாக இருக்கும். நாம் $\vec{b} \neq \vec{0}$ மற்றும் $\vec{c} \neq \vec{0}$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 6.28

எனவே, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{AC} = \vec{c}-\vec{a}$ ஆகும். $(\vec{b}-\vec{a})$ மற்றும் $(\vec{c}-\vec{a})$ என்ற வெக்டர்கள் தேவையான தளத்தில் உள்ளன. மேலும், $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன ஒரே கோட்டிலமையாத வெக்டர்கள் என்பதால், $\overrightarrow{AB}$ என்பது $\overrightarrow{AC}$ –க்கு இணையாக இருக்காது.எனவே, $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})$ என்பது தளத்திற்கு செங்குத்தாகும்.

தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y, z)$ –ன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ எனில், $\vec{a}$ என்ற வெக்டரை நிலை வெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி A வழியாகச் செல்வதும் $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})$ என்ற வெக்டருக்கு செங்குத்தானதுமான தளத்தின் சமன்பாடு

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})) = 0 \text{ அல்லது } [\vec{r}-\vec{a},\ \vec{b}-\vec{a},\ \vec{c}-\vec{a}] = 0$$

இது ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

(c) கார்டீசியன் சமன்பாடு (Cartesian form of equation)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்ற நிலைவெக்டர்களைக் கொண்ட ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் A, B, C என்பவற்றின் அச்சுத்தூரங்கள் முறையே $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ மற்றும் $\vec{r}$ என்ற வெக்டரை நிலை வெக்டராகக் கொண்ட P என்ற புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் (x, y, z) எனில்,

$$\vec{a} = x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k},\ \vec{b} = x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k},\ \vec{c} = x_3\hat{i}+y_3\hat{j}+z_3\hat{k} \text{ மற்றும் } \vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}.$$

இவ்வெக்டர்களைப் பயன்படுத்தி, ஒரே கோட்டிலமையாத கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாட்டினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும்.

6.8.5 கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதும் இணை அல்லாத இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இணையாகவும் உள்ள தளத்தின் சமன்பாடு (Equation of a plane passing through a given point and parallel to two given non-parallel vectors)

(a) துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு (Parametric form of vector equation)

$\vec{a}$ என்ற நிலை வெக்டரைக் கொண்ட கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி A வழிச் செல்வதும் கொடுக்கப்பட்ட இணை அல்லாத $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கு இணையாகவும் ஒரு தளம் உள்ளது என்க.

தளத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P –ன் நிலை வெக்டர் $\vec{r}$ எனில், $(\vec{r}-\vec{a}), \vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்பன ஒரு தள வெக்டர்களாகும்.

எனவே, $(\vec{r}-\vec{a})$ என்ற வெக்டர் $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் அமைக்கும் தளத்தில் இருக்கும். ஆகவே, $\vec{r}-\vec{a} = s\vec{b}+t\vec{c}$ எனுமாறு $s, t \in \mathbb{R}$ என்ற திசையிலிகளைக் காணமுடியும். இதிலிருந்து

$$\vec{r} = \vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\text{, இங்கு } s, t \in \mathbb{R} \qquad \ldots (1)$$

எனப்பெறலாம்.

இது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதும் இணை அல்லாத இரு வெக்டர்களுக்கு இணையானதுமான தளத்தின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

(b) துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (Non-parametric form of vector equation)

சமன்பாடு (1)–ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \qquad \ldots (2)$$

இது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதும் கொடுக்கப்பட்ட இணை அல்லாத இரு வெக்டர்களுக்கு இணையானதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

(c) கார்டீசியன் சமன்பாடு (Cartesian form of equation)

$\vec{a} = x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k},\ \vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k},\ \vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ எனில், சமன்பாடு (2)–ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

இது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழிச் செல்வதும் கொடுக்கப்பட்ட இணை அல்லாத இரு வெக்டர்களுக்கு இணையானதுமான தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும்.

6.8.6 கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு தனித்த புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதும் ஒரு பூச்சியமற்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும் உள்ள தளத்தின் சமன்பாடு (Equation of a plane passing through two given distinct points and is parallel to a non-zero vector)

(a) துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு (Parametric form of vector equation)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ என்ற நிலை வெக்டர்களைக் கொண்ட இரு தனித்த புள்ளிகள் A மற்றும் B வழியாகச் செல்வதும் $\vec{c}$ என்ற பூச்சியமற்ற வெக்டருக்கு இணையானதுமான தளத்தின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு

$$\vec{r} = \vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t\vec{c} \quad \text{or} \quad \vec{r}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c} \qquad \text{... (1)}$$

இங்கு $s, t \in \mathbb{R}, (\vec{b}-\vec{a})$, $\vec{c}$ என்பன இணையான வெக்டர்கள் அல்ல.

(b) துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (Non-parametric form of vector equation)

சமன்பாடு (1)–ஐ துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடாக பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}) = 0 \qquad \text{... (2)}$$

இங்கு, $(\vec{b}-\vec{a})$ மற்றும் $\vec{c}$ என்பன இணை வெக்டர்கள் அல்ல.

(c) கார்டீசியன் சமன்பாடு (Cartesian form of equation)

$\vec{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}, \ \vec{b}=x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k}, \ \vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}\neq\vec{0}$ மற்றும் $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ எனில் சமன்பாடு (2) –ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே, தேவையான தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.43

$(0,1,-5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+s(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ மற்றும் $\vec{r}=(\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})+t(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$ என்ற கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

தேவையான தளம் $\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}, \ \vec{c}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையாகவும், $\vec{a}$ –ஐ நிலை வெக்டராகக் கொண்ட $(0,1,-5)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்வதைக் காண்கிறோம். மேலும், $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்பன இணை வெக்டர்கள் அல்ல எனவும் காண்கிறோம்.

தேவையான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு $(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$. …(1)

இப்பொழுது $\vec{a}=\hat{j}-5\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9\hat{i}+8\hat{j}-\hat{k}$ என சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$(\vec{r}-(\hat{j}-5\hat{k}))\cdot(-9\hat{i}+8\hat{j}-\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}\cdot(-9\hat{i}+8\hat{j}-\hat{k}) = 13.$$

$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ என்பது தளத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் எனில், மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாட்டை $-9x+8y-z=13$ அல்லது $9x-8y+z+13=0$ எனப்பெறுகிறோம். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.44

$(-1,2,0),\ (2,2-1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதும் $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{2y+1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு, துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு

தேவையான தளம் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணை என்பதால், அத்தளம் $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகும் மற்றும் $\vec{a}=-\hat{i}+2\hat{j},\ \vec{b}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும்.

- தளத்தின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t\vec{c}$, இங்கு $s,t\in\mathbb{R}$

  $\Rightarrow\ \vec{r}=\left(-\hat{i}+2\hat{j}\right)+s\left(3\hat{i}-\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$, இங்கு $s,t\in\mathbb{R}$.

- தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு $(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c})=0$.

  இங்கு, $(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&0&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$,

  எனவே, $(\vec{r}-(-\hat{i}+2\hat{j}))\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=0\Rightarrow\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=3$

- $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ என்பது தளத்தில் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் எனில், மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாட்டை $x+2y+3z=3$ எனப்பெறுகிறோம். ■

பயிற்சி 6.7

1. $(2,3,6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ மற்றும் $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z+1}{-3}$ என்ற கோடுகளுக்கு இணையானதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
2. $(2,2,1),\ (9,3,6)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லக்கூடியதும் $2x+6y+6z=9$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைவதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
3. $(2,2,1),(1,-2,3)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதும் $(2,1,-3)$ மற்றும் $(-1,5,-8)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு, மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

4. $(1,-2,4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x+2y-3z=11$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் $\frac{x+7}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

5. $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})=8$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் துணையலகு வடிவ வெக்டர், மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6. $(3,6,-2),(-1,-2,6)$, மற்றும் $(6,4,-2)$ ஆகிய ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் துணையலகு, துணையலகு அல்லாத வெக்டர், மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

7. $\vec{r}=\left(6\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(-5\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}\right)$ என்ற தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர், மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6.8.7 ஒரு கோடு ஒரு தளத்தின் மீது அமைவதற்கான கட்டுப்பாடு (Condition for a line to lie in a plane)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும், தளத்தின் மீது இருக்கும் எனவும், தளத்தின் செங்கோடு கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்தாக அமையும் எனவும் இருப்பின், அந்நேர்க்கோடு தளத்தின் மீது அமையும். அதாவது,

(i) $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ என்ற கோடு $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ என்ற தளத்தின் மீது இருந்தால் $\vec{a}\cdot\vec{n}=d$ மற்றும் $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ ஆகும்.

(ii) $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ என்ற கோடு $Ax+By+Cz+D=0$ என்ற தளத்தின் மீது இருந்தால், $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ மற்றும் $aA+bB+cC=0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.45

$\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z+3}{12}$ என்ற கோடு $5x-y+z=8$ என்ற தளத்தில் அமையுமா எனச்சரிபார்க்க.

தீர்வு

இங்கு, $\left(x_1,y_1,z_1\right)=\left(3,4,-3\right)$ மற்றும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $\left(a,b,c\right)=\left(-4,-7,12\right)$ ஆகும். தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $\left(A,B,C\right)=\left(5,-1,1\right)$ ஆகும்.

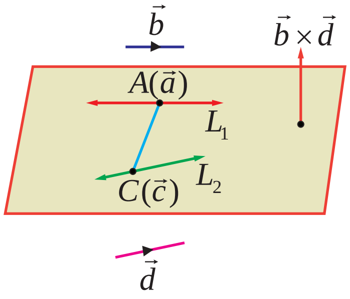
கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $\left(x_1,y_1,z_1\right)=\left(3,4,-3\right)$ ஆனது $5x-y+z=8$ என்ற தளத்தை நிறைவு செய்வதைக் காண்கிறோம். ஆனால், $aA+bB+cC=(-4)(5)+(-7)(-1)+(12)(1)=-1\neq 0$ என்பதால் தளத்தின் செங்கோடு கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு செங்குத்தானது அல்ல. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடானது கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் மீது அமையாது.

6.8.8 இரண்டு கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைவதற்கான நிபந்தனை (Condition for coplanarity of two lines)

(a) வெக்டர் வடிவக் கட்டுப்பாடு (Condition in vector form)

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு இணை அல்லாத ஒரு தளம் அமையும் கோடுகள் என்க.

ஆகவே, அவை ஒரே தளத்தில் இருக்கும். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஆகியவற்றை நிலைவெக்டர்களாகக் கொண்ட இரு புள்ளிகள் A மற்றும் C என்க. எனவே, A மற்றும் C என்ற இவ்விரு புள்ளிகளும் தளத்தின் மீது அமையும். $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{d}$ என்ற வெக்டர்கள் தளத்திற்கு இணையாக உள்ள வெக்டர்கள் என்பதால், $\vec{b}\times\vec{d}$ என்பது தளத்திற்கு செங்குத்தாக அமையும். எனவே, $\overrightarrow{AC}$ என்பது $\vec{b}\times\vec{d}$ –க்கு செங்குத்தாகும். அதாவது,



படம் 6.29

$$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = 0$$

இதுவே இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைவதற்குத் தேவையான நிபந்தனையாகும்.

(b) கார்டீசியன் வடிவக் கட்டுப்பாடு (Condition in Cartesian form)

$\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ மற்றும் $\dfrac{x-x_2}{d_1}=\dfrac{y-y_2}{d_2}=\dfrac{z-z_2}{d_3}$ என்ற கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் எனில்,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே, கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைவதற்கான கார்டீசியன் வடிவக் கட்டுப்பாடு ஆகும்.

6.8.9 ஒரே தளத்தில் அமையும் இணை அல்லாத இரண்டு கோடுகளைக் கொண்டுள்ள தளத்தின் சமன்பாடு
(Equation of plane containing two non-parallel coplanar lines)

(a) துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு (Parametric form of vector equation)

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ என்பன ஒரே தளத்தில் அமையும் இணை அல்லாத இரண்டு கோடுகள் என்க. எனவே, $\vec{b}\times\vec{d}\neq\vec{0}$ ஆகும். $\vec{r_0}$ என்ற வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட தளத்தில் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி P என்க. ஆகவே, $\vec{r_0}-\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ மற்றும் $\vec{r_0}-\vec{c},\vec{b},\vec{d}$ என்பன ஒரு தள வெக்டர்களாகும். ஆகையால், $\vec{r_0}-\vec{a}=t\vec{b}+s\vec{d}$ அல்லது $\vec{r_0}-\vec{c}=t\vec{b}+s\vec{d}$ ஆகும். எனவே, தேவையான தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{d}$ or $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}+s\vec{d}$ ஆகும்.

(b) துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு (Non-parametric form of vector equation)

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ என்பன ஒரே தளத்தில் அமையும் இணை அல்லாத இரண்டு கோடுகள் என்க. எனவே, $\vec{b}\times\vec{d}\neq\vec{0}$ ஆகும். $\vec{r_0}$ என்ற வெக்டரை நிலை வெக்டராகக் கொண்ட தளத்தில் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி P என்க. ஆகவே, $\vec{r_0}-\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ மற்றும் $\vec{r_0}-\vec{c},\vec{b},\vec{d}$ என்பன ஒரு தள வெக்டர்களாகும். ஆகையால், $(\vec{r_0}-\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{d})=0$ அல்லது $(\vec{r_0}-\vec{c}).(\vec{b}\times\vec{d})=0$ ஆகும்.

எனவே, $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{d})=0$ அல்லது $(\vec{r}-\vec{c}).(\vec{b}\times\vec{d})=0$ என்பது தேவையான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

(C) கார்டீசியன் வடிவச் சமன்பாடு (Cartesian form of equation of plane)

$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ மற்றும் $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$ ஆகிய ஒரே தளத்தில் அமையும் இரண்டு கோடுகளைக் கொண்டுள்ள தளத்தின் கார்டீசியன் வடிவச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ அல்லது } \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 6.46

$\vec{r}=\left(-\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}\right)+s\left(3\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}\right)$ மற்றும் $\vec{r}=\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}\right)$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் எனக்காட்டுக. மேலும், இக்கோடுகளைத் தன்னகத்தே கொண்டுள்ள தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோடுகளின் சமன்பாட்டை

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+s\vec{d}$ உடன் ஒப்பிட நமக்குக் கிடைப்பது

$\vec{a} = -\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k},\ \vec{c}=2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ மற்றும் $\vec{d}=\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}$ ஆகும்.

இரண்டு கோடுகள் ஒரே தளம் அமையும் கோடுகளாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு $(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$

இங்கு, $\vec{b}\times\vec{d}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}$ மற்றும் $\vec{c}-\vec{a}=3\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}$

இப்பொழுது $(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) = \left(3\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}\right)\cdot\left(7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}\right)=0$ ஆகும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோடுகளும் ஒரே தளத்தில் அமையும். இப்பொழுது, இவ்விரு கோடுகளும் அமையும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்போம். ஒரே தளத்தில் அமையும் இரண்டு கோடுகளைக் கொண்ட தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) = 0$ ஆகும் என நாமறிவோம்.

இச்சமன்பாட்டில் $\vec{a} = -\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b}\times\vec{d}=7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}$ எனப்பிரதியிட, நாம் பெறுவது $\left(\vec{r}-\left(-\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}\right)\right)\cdot\left(7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}\right)=0$ என்றசமன்பாடாகும். அதாவது, $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right)=0$ ஆகும்.

இதுவே, தேவையான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடாகும். ■

பயிற்சி 6.8

1. $\vec{r}=(5\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k})+s(4\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$ மற்றும் $\vec{r}=\left(8\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}\right)+t\left(7\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}\right)$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் எனக் காண்பிக்க. மேலும், இக்கோடுகள் அமையும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ மற்றும் $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-5}{1}$ என்ற கோடுகள் ஒரு தளத்தில் அமையும் எனக்காட்டுக. மேலும், இக்கோடுகள் அமையும் தளத்தினைக் காண்க.

3. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{m^2}$ மற்றும் $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{m^2}=\dfrac{z-1}{2}$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன எனில், m-ன் வேறுபட்ட மெய்மதிப்புகளைக் காண்க.

4. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{\lambda}=\dfrac{z}{2}$ மற்றும் $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{\lambda}$ ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன எனில், λ –ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும், இவ்விரு கோடுகளைக் கொண்ட தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6.8.10 இரண்டு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between two planes)

இரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணமானது அத்தளங்களின் செங்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

தேற்றம் 6.18

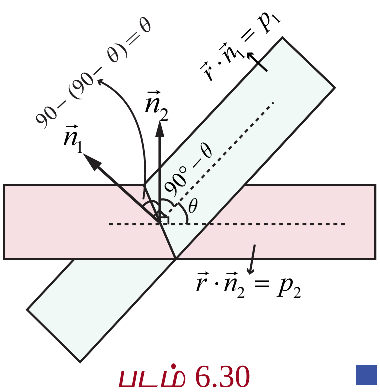
$\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ ஆகிய இரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில்

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

நிரூபணம்

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ ஆகிய இரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ என்பது அத்தளங்களின் செங்குத்து வெக்டர்கள் $\vec{n}_1$ மற்றும் $\vec{n}_2$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணமாகும். எனவே,

$$\cos\theta = \left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right) \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right) \quad \ldots (1)$$



படம் 6.30

குறிப்புரை

(i) $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ ஆகிய இரு தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனில், $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0$ ஆகும்.

(ii) $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ ஆகிய இரு தளங்கள் இணை எனில், $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$, இங்கு λ ஒரு திசையிலி ஆகும்.

(iii) $\vec{r}\cdot\vec{n} = p$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக உள்ள தளத்தின் சமன்பாடு $\vec{r}\cdot\vec{n} = k,\ k\in\mathbb{R}$ ஆகும்.

தேற்றம் 6.19

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ஆகிய தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில், $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$.

நிரூபணம்

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ஆகிய தளங்களின் செங்கோட்டு வெக்டர்கள் முறையே $\vec{n}_1$ மற்றும் $\vec{n}_2$ என்க. பின்னர், $\vec{n}_1=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ மற்றும் $\vec{n}_2=a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}$ ஆகும்.

எனவே தேற்றம் 6.18–ன் சமன்பாடு (1)–ஐப் பயன்படுத்தி, தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில்,

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$$ எனப் பெறுகிறோம் ■

குறிப்புரை

(i) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ என்ற தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ ஆகும்.

(ii) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ என்ற தளங்கள் இணையானவை எனில், $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ஆகும்.

(iii) $ax+by+cz=p$ என்ற தளத்திற்கு இணையான தளத்தின் சமன்பாடு $ax+by+cz=k$, $k\in\mathbb{R}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.47

$\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})=11$ மற்றும் $4x-2y+2z=15$ ஆகிய தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

$\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})=11$ மற்றும் $4x-2y+2z=15$ ஆகிய தளங்களின் செங்கோட்டு வெக்டர்கள் முறையே $\vec{n}_1=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ மற்றும் $\vec{n}_2=4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில்,

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\left|(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})\right|}{|2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}||4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$ ■

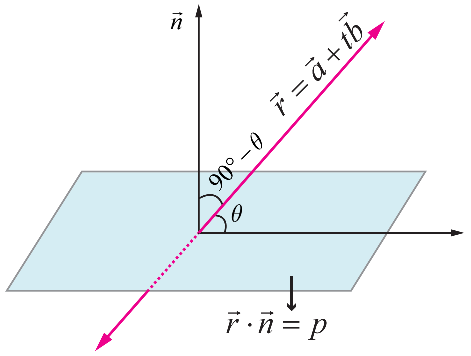
6.8.11 ஒரு கோட்டிற்கும் மற்றும் ஒரு தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் (Angle between a line and a plane)

ஒரு கோட்டிற்கும் மற்றும் ஒரு தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணமானது, தளத்தின் செங்கோட்டிற்கும் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தின் நிரப்புக் கோணமாகும்.

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ என்பது கோட்டின் சமன்பாடு மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்பது தளத்தின் சமன்பாடு என்க. எனவே, $\vec{b}$ ஆனது கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு இணையாகவும் $\vec{n}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கும் மற்றும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில், $\vec{n}$ -க்கும் $\vec{b}$ -க்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ ஆகும். எனவே,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$



படம் 6.31

ஆகவே, கோட்டிற்கும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right)$ ... (1)

$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ மற்றும் $ax+by+cz=p$ ஆகியன முறையே கோடு மற்றும் தளத்தின் சமன்பாடுகள் எனில், $\vec{b}=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ மற்றும் $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ஆகும். இம்மதிப்புகளை சமன்பாடு (1)–ல் பிரதியிட, கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ கிடைக்கிறது. எனவே,

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|aa_1+bb_1+cc_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\right)$$

குறிப்புரை

(i) நேர்க்கோடு தளத்திற்குச் செங்குத்து எனில், இந்நேர்க்கோடு தளத்தின் செங்கோட்டிற்கு இணையாகும். ஆகவே, $\vec{b}$ ஆனது $\vec{n}$ –க்கு இணையாகும். எனவே, $\vec{b}=\lambda\vec{n}$ இங்கு, $\lambda\in\mathbb{R}$ ஆகும். இதிலிருந்து $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$ எனப் பெறுகிறோம்.

(ii) ஒரு நேர்க்கோடு, தளத்திற்கு இணை எனில், இந்நேர்க்கோடு தளத்தின் செங்கோட்டிற்கு செங்குத்தாகும். எனவே, $\vec{b}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow aa_1+bb_1+cc_1=0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.48

$\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ என்ற கோட்டிற்கும் $2x-y+z=5$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

தீர்வு

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ என்ற கோட்டிற்கும், செங்கோட்டு வெக்டர் $\vec{n}$ கொண்ட தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)$ ஆகும்.

இங்கு, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ மற்றும் $\vec{n}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ஆகும்.

ஆகவே, $$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\left|\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)\right|}{\left|\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right|\left|2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

6.8.12 ஒரு புள்ளியிலிருந்து தளத்திற்குள்ள தொலைவு (Distance of a point from a plane)

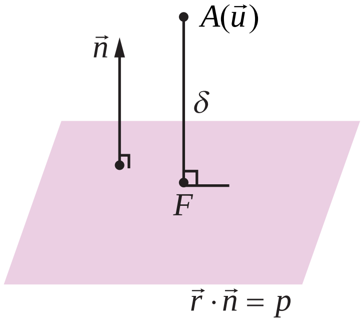
(a) தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு (Vector form of equation)

தேற்றம் 6.20

$\vec{u}$ என்ற நிலைவெக்டர் கொண்ட புள்ளியிலிருந்து $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்ற தளத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு
$$\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}.$$

நிரூபணம்

A என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{u}$ என்க.



படம் 6.32

$\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்ற தளத்திற்கு A என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி F என்க. F மற்றும் A ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோடானது தளத்தின் செங்கோடு $\vec{n}$ –க்கு இணையாகும். எனவே, FA–ன் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{u}+t\vec{n}$ ஆகும்.

ஆனால், F என்பது $\vec{r}=\vec{u}+t\vec{n}$ என்ற கோடும் $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்ற தளமும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியாகும். $\vec{r}_1$ என்பது F–ன் நிலைவெக்டர் எனில், $\vec{r}_1=\vec{u}+t_1\vec{n}$, $t_1\in\mathbb{R}$, மற்றும் $\vec{r}_1\cdot\vec{n}=p$ ஆகும். இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து $\vec{r}_1$ –ஐ நீக்க, நாம் பெறுவது

$$(\vec{u}+t_1\vec{n})\cdot\vec{n}=p \text{ ஆகும்.} \Rightarrow t_1=\frac{p-(\vec{u}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}.$$

இப்பொழுது, $$\overrightarrow{FA}=\vec{u}-(\vec{u}+t_1\vec{n}) = -t_1\vec{n}=\left(\frac{(\vec{u}\cdot\vec{n})-p}{|\vec{n}|^2}\right)\vec{n}$$

எனவே, A என்ற புள்ளியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்குள்ள செங்குத்துத் தொலைவு

$$\delta = |\overrightarrow{FA}|=\left|\left(\frac{(\vec{u}\cdot\vec{n})-p}{|\vec{n}|^2}\right)\vec{n}\right|=\left|\frac{(\vec{u}\cdot\vec{n})-p}{|\vec{n}|}\right|$$

AF என்ற செங்குத்தின் அடி F –ன் நிலைவெக்டர்

$$\vec{r}_1 = \vec{u}+t_1\vec{n} \text{ அல்லது}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{u}+\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}-p}{|\vec{n}|^2}\right)\vec{n}$$

■

(b) தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு (Cartesian form of equation)

$\vec{u}$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட நிலைவெக்டரைக் கொண்ட புள்ளி $A(x_1,y_1,z_1)$ மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $ax+by+cz=p$ எனில், $\vec{u}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$ மற்றும் $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ஆகும்.

இவ்வெக்டர்களை $\delta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}$ –ல் பிரதியிட, கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்குள்ள செங்குத்துத் தொலைவு

$$\delta = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1-p}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| = \frac{|ax_1+by_1+cz_1-p|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

குறிப்புரை

ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $ax+by+cz+d=0$ என்ற தளத்திற்குள்ள செங்குத்துத் தொலைவு

$$\delta = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.49

$(2,5,-3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)=5$ என்ற தளத்திற்குள்ள தொலைவுக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ உடன் ஒப்பிடும்போது நமக்கு $\vec{n}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\vec{u}$ என்ற நிலை வெக்டரைக் கொண்ட புள்ளியிலிருந்து $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்ற தளத்திற்குள்ள செங்குத்துத் தொலைவு $\delta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}$ ஆகும். எனவே, $\vec{u}=(2,5,-3)=2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{n}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ என δ –ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\delta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\left(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}\right)\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)-5\right|}{\left|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right|} = 2$$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 6.50

$A(4,1,2)$ மற்றும் $B(7,5,4)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடும் $x-y+z=5$ என்ற தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிக்கும் $(5,-5,-10)$ என்ற புள்ளிக்கும் உள்ள தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு

$A(4,1,2)$ மற்றும் $B(7,5,4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{2}=t \quad \text{(என்க).}$$

இக்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $(3t+4, 4t+1, 2t+2)$ ஆகும். கோடும் தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியைக் காண, $x=3t+4, y=4t+1, z=2t+2$ என $x-y+z=5$–ல் பிரதியிட்டு $t=0$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே, நேர்க்கோடும் தளமும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $(4, 1, 2)$ ஆகும். ஆகவே, $(4, 1, 2)$ மற்றும் $(5,-5,-10)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

$$\sqrt{(4-5)^2+(1+5)^2+(2+10)^2} = \sqrt{181}$$ அலகுகள்.

6.8.13 இணையான இரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு (Distance between two parallel planes)

தேற்றம் 6.21

$ax+by+cz+d_1=0$ மற்றும் $ax+by+cz+d_2=0$ ஆகிய இரு இணையான தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

நிரூபணம்

$ax+by+cz+d_2=0$ என்ற தளத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $A(x_1,y_1,z_1)$ என்க. பின்னர்,

$ax_1+by_1+cz_1+d_2=0 \Rightarrow ax_1+by_1+cz_1=-d_2$

$A(x_1,y_1,z_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax+by+cz+d_1=0$ என்ற தளத்திற்குள்ள தொலைவு

$$\delta = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

எனவே, $ax+by+cz+d_1=0$ மற்றும் $ax+by+cz+d_2=0$ என்ற இணையான இரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $\delta=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

எடுத்துக்காட்டு 6.51

$x+2y-2z+1=0$ மற்றும் $2x+4y-4z+5=0$ ஆகிய இரண்டு இணையான தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு காண்க.

தீர்வு

$ax+by+cz+d_1=0$ மற்றும் $ax+by+cz+d_2=0$ என்ற இரு இணையான தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $\delta=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. இரண்டாவது சமன்பாட்டை $x+2y-2z+\dfrac{5}{2}=0$ என எழுத, $a=1, b=2, c=-2, d_1=1, d_2=\dfrac{5}{2}$ எனப் பெறலாம். இம்மதிப்புகளை சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$\delta=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|1-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+2^2+\left(-2^2\right)}}=\frac{1}{2}$$ அலகுகள் எனத் தேவையானதொலைவு கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6.52

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}\right)=6$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}\right)=27$ என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு காண்க.

தீர்வு

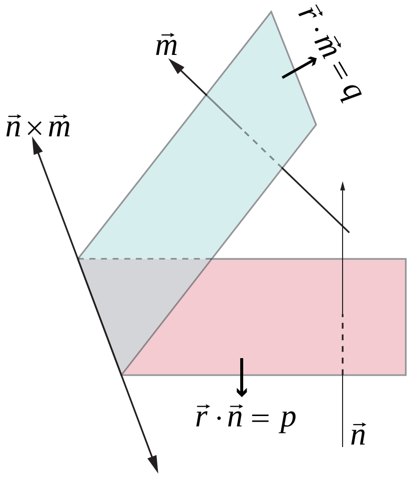
$\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=6$ என்ற தளத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\vec{u}$ என்க. பின்னர்,

$$\vec{u}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=6. \qquad \ldots (1)$$

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு δ எனில், δ என்பது $\vec{u}$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{i})=27$ என்ற தளத்திற்குள்ள செங்குத்துத் தொலைவாகும்.

எனவே, $\delta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}=\left|\dfrac{\vec{u}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k})-27}{\sqrt{6^2+(-3)^2+(-6)^2}}\right|=\left|\dfrac{3(\vec{u}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}))-27}{9}\right|=\left|\dfrac{(3(6)-27}{9}\right|=1$ அலகு.

6.8.14 இரு தளங்களின் வெட்டுக்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of line of intersection of two planes)



படம் 6.33

$\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{m}=q$ என்பன இணை அல்லாத இரு தளங்கள் என்க. $\vec{n}$ மற்றும் $\vec{m}$ ஆகிய வெக்டர்கள் முறையே கொடுக்கப்பட்ட தளங்களுக்குச் செங்குத்தாகும். மேலும், இத்தளங்களின் வெட்டுக்கோடானது $\vec{n}$ மற்றும் $\vec{m}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தாகும் என்பதால், $\vec{n}\times\vec{m}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகும். $\vec{n}\times\vec{m}=l_1\hat{i}+l_2\hat{j}+l_3\hat{k}$ என்க.

$a_1x+b_1y+c_1z=p$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2z=q$ என்ற இரு தளங்களின் சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்ட இவ்விரு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு குறைந்தபட்சம் ஒரு ஆய அச்சுத் தளத்தையாவது சந்திக்கும். நம் வசதிக்காக வெட்டுக்கோடு சந்திக்கும் ஆய அச்சுத் தளத்தை $z=0$ எனக்கொள்வோம். $z=0$ எனக்கொடுக்கப்பட்ட தளங்களின் சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டு $a_1x+b_1y-p=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y-q=0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளைப் பெறலாம். இவ்விரு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பதால், x மற்றும் y–ன் மதிப்புகளை முறையே x_1 மற்றும் y_1 எனப்பெறலாம். எனவே, $l_1\hat{i}+l_2\hat{j}+l_3\hat{k}$ வெக்டருக்கு இணையாக உள்ள கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி, $(x_1,y_1,0)$ ஆகும். ஆகவே, வெட்டுக்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{l_2}=\dfrac{z-0}{l_3}$ ஆகும்.

6.8.15 இரு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு (Equation of a plane passing through the line of intersection of two given planes)

தேற்றம் 6.22

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு $(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0$ ஆகும். இங்கு $\lambda\in\mathbb{R}$.

நிரூபணம்

பின்வரும் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

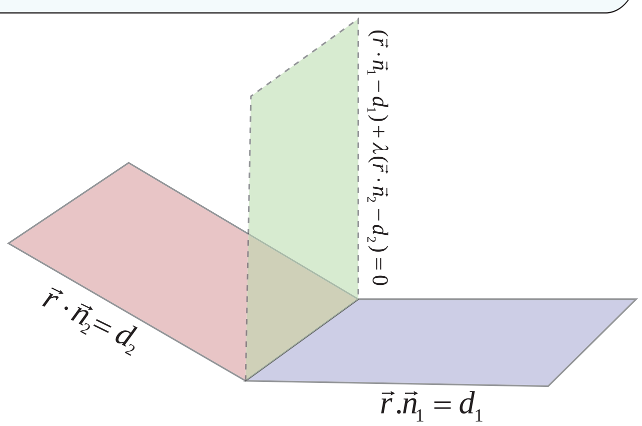
$$(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0 \qquad \dots (1)$$

இச்சமன்பாட்டினை

$$\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)-(d_1+\lambda d_2)=0 \qquad \dots (2)$$

என எழுதலாம்.

$\vec{n}=\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2$ மற்றும் $d=(d_1+\lambda d_2)$ என்க.



படம் 6.34

எனவே, சமன்பாடு (2) ஆனது

$\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ ... (3)

என்றாகும். சமன்பாடு (3) ஆனது ஒரு தளத்தைக் குறிக்கிறது. எனவே, சமன்பாடு (1)–ம் ஒரு தளத்தைக் குறிக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட தளங்களின் வெட்டுக்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\vec{r}_1$ என்க. பின்னர், $\vec{r}_1$ ஆனது $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ என்ற இரு தளங்களின் சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யும். எனவே,

$$\vec{r}_1\cdot\vec{n}_1 = d_1 \quad \text{... (4)}$$

மற்றும் $$\vec{r}_1\cdot\vec{n}_2 = d_2 \quad \text{... (5)}$$

சமன்பாடுகள் (4) மற்றும் (5)களிலிருந்து, $\vec{r}_1$ என்பது சமன்பாடு (1)–ஐ நிறைவு செய்வதைக் காணலாம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட தளங்களின் வெட்டுக்கோட்டின் மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியும் தளம் (1)–ன் மீது அமையும் எனக்காண்கிறோம். எனவே, தளம் (1) ஆனது கொடுக்கப்பட்ட தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும் என்பது நிரூபணமாகிறது.

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ ஆகிய இரு தளங்களின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் **கார்டீசியன் சமன்பாடு** $(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)=0$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.53

$\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+1=0$ மற்றும் $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=2$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகவும் $(-1,2,1)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0$ ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டில், $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\vec{n}_1=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{n}_2=2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $d_1=1$ மற்றும் $d_2=-2$ எனப்பிரதியிட, கொடுக்கப்பட்ட தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும்.

$(x+y+z+1)+\lambda(2x-3y+5z-2)=0$ என்ற தளத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இத்தளம் $(-1,2,1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால், $\lambda=\frac{3}{5}$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே, தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு $11x-4y+20z=1$ ஆகும். ■

எடுத்துக்காட்டு 6.54

$2x+3y-z+7=0$ மற்றும் $x+y-2z+5=0$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழிச்செல்வதும் $x+y-3z-5=0$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

$2x+3y-z+7=0$ மற்றும் $x+y-2z+5=0$ ஆகிய தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $(2x+3y-z+7)+\lambda(x+y-2z+5)=0$ அல்லது

$$(2+\lambda)x+(3+\lambda)y+(-1-2\lambda)z+(7+5\lambda)=0$$

இத்தளம், கொடுக்கப்பட்ட $x+y-3z-5=0$ தளத்திற்குச் செங்குத்தானது என்பதால், இவ்விரு தளங்களின் செங்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும். எனவே,

$$(1)(2+\lambda)+(1)(3+\lambda)+(-3)(-1-2\lambda)z=0$$

$\Rightarrow \lambda=-1$. எனவே, தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$$(2x+3y-z+7)-(x+y-2z+5)=0 \Rightarrow x+2y+z+2=0 \ .$$

6.9 தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் பிம்பம் (Image of a Point in a Plane)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி A–ன் நிலை வெக்டர் $\vec{u}$ என்க. தளத்தின் சமன்பாடு $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்க. ஒரு தளத்தில் பிம்பம் காணவேண்டிய A என்ற புள்ளியின் பிம்பப்புள்ளி A'–ன் நிலைவெக்டர் $\vec{v}$ என்க. பின்னர், $\overrightarrow{AA'}$ என்பது தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும். எனவே, $\overrightarrow{AA'}$ என்பது $\vec{n}$ க்கு இணையாகும். பின்னர்

$$\overrightarrow{AA'}=\lambda\vec{n} \text{ அல்லது } \vec{v}-\vec{u}=\lambda\vec{n} \ \Rightarrow \ \vec{v}=\vec{u}+\lambda\vec{n} \qquad \ldots (1)$$

AA' –ன் மையப்புள்ளி M என்க. ஆகவே, M –ன் நிலைவெக்டர் $\dfrac{\vec{u}+\vec{v}}{2}$ ஆகும். ஆனால், M ஆனது தளத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

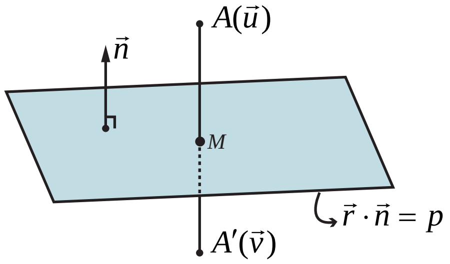
எனவே, $$\left(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)\cdot\vec{n}=p. \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (1)-ஐ (2)-ல் பிரதியிட,

$$\left(\frac{\vec{u}+\lambda\vec{n}+\vec{u}}{2}\right)\cdot\vec{n}=p \ \Rightarrow \ \lambda=\frac{2\left[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}$$

எனவே A' ன் நிலைவெக்டர்

$$\vec{v}=\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})]}{|\vec{n}|^2}\ \vec{n}$$



படம் 6.35

குறிப்பு

AA' –ன் மையப்புள்ளி M ஆனது A என்ற புள்ளியிலிருந்து $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்ற தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடியாகும். ஆகவே, செங்குத்தின் அடி M–ன் நிலைவெக்டர்

$$\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}=\frac{\vec{u}}{2}+\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})]}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right)$$

6.9.1 தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்கள் (The coordinates of the image of a point in a plane)

தளத்தில் பிம்பம் காண வேண்டிய புள்ளி (a_1,a_2,a_3)–ன் நிலைவெக்டர் $\vec{u}$ என்க. பின்னர், $\vec{u}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் சமன்பாடு $ax+by+cz=p$ என்க. இச்சமன்பாட்டை வெக்டர் சமன்பாடாக $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என எழுதலாம். இங்கு $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ஆகும். ஆகவே, பிம்பப் புள்ளியின் நிலைவெக்டர்

$$\vec{v}=\vec{u}+\frac{2\left[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n}.$$

$\vec{v}=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}$ எனில், $v_1=a_1+2a\alpha$, $v_2=a_2+2a\alpha$, $v_3=a_3+2a\alpha$ ஆகும்.

இங்கு, $\alpha = \dfrac{2\left[p-\left(aa_1+ba_2+ca_3\right)\right]}{a^2+b^2+c^2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.55

$\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ என்ற நிலை வெக்டரைக் கொண்ட புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளியை $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)=38$ என்ற தளத்தில் காண்க.

தீர்வு

இங்கு, $\vec{u}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{n}=\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$, $p=38$ ஆகும். $\vec{u}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ என்ற புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளி $\vec{v}$ -ன் நிலைவெக்டர்

$$\vec{v}=\vec{u}+\frac{2\left[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \text{ ஆகும்.}$$

$$\vec{v}=\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+\frac{2\left[38-\left(\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)\right)\right]}{\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)}\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right).$$

அதாவது, $\vec{v}=\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+2\left(\dfrac{38-17}{21}\right)\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)=3\hat{i}+6\hat{j}+11\hat{k}$.

எனவே, $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ என்ற நிலை வெக்டர் கொண்ட புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $3\hat{i}+6\hat{j}+11\hat{k}$ ஆகும்.

குறிப்பு

$\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ என்ற நிலைவெக்டரைக் கொண்ட புள்ளியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடியின் நிலைவெக்டர்

$$\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+(3\hat{i}+6\hat{j}+11\hat{k})}{2}=2\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}.$$

6.10 ஒரு கோடும் ஒரு தளமும் சந்திக்கும் புள்ளி

(Meeting Point of a Line and a Plane)

தேற்றம் 6.23

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ என்ற கோடும் $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்ற தளமும் சந்திக்கும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\vec{a}+\left(\dfrac{p-(\vec{a}\cdot\vec{n})}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b}$, இங்கு $\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$.

நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்ட $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக இல்லாத கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ என்க. ஆகவே, $\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$.

தளத்தை நேர்க்கோடு சந்திக்கும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\vec{u}$ என்க. எனவே, t -ன் ஒரு சில மதிப்புகளுக்கு, அதாவது t_1 என்ற மதிப்புக்கு $\vec{u}$ ஆனது $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ என்ற கோட்டின் சமன்பாடு மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ என்ற தளத்தின் சமன்பாடு இரண்டையும் நிறைவு செய்யும். ஆதலால்,

$\vec{u} = \vec{a} + t_1\vec{b}$ ... (1)

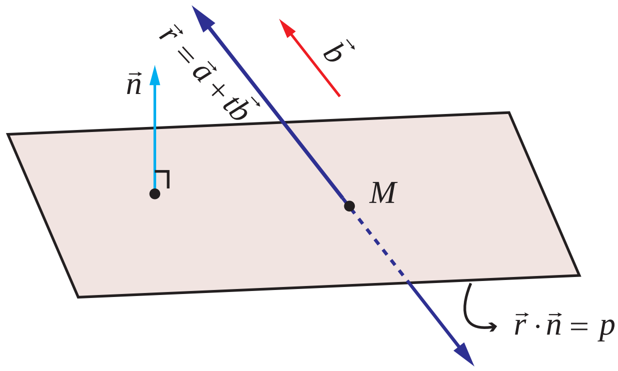
$\vec{u} \cdot \vec{n} = p$ ...(2)

சமன்பாடு (1)–ஐ (2)–ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\left(\vec{a} + t_1\vec{b}\right) \cdot \vec{n} = p$$

அல்லது $\vec{a} \cdot \vec{n} + t_1\left(\vec{b} \cdot \vec{n}\right) = p$

அல்லது $t_1 = \dfrac{p - (\vec{a} \cdot \vec{n})}{\vec{b} \cdot \vec{n}}$ ...(3)



படம் 6.36

சமன்பாடு (3)–ஐ (1)–ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\vec{u} = \vec{a} + \left(\frac{p - (\vec{a} \cdot \vec{n})}{\vec{b} \cdot \vec{n}}\right)\vec{b},\ \vec{b} \cdot \vec{n} \neq 0$$

எடுத்துக்காட்டு 6.56

$\vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right) + t\left(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}\right)$ என்ற கோடு $x - y + z - 5 = 0$ என்ற தளத்தை சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆய அச்சுத் தூரங்களைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு, $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$.

கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{r} \cdot \left(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) = 5$. எனவே, $\vec{n} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $p = 5$ ஆகும்.

$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ என்ற கோடும் $\vec{r} \cdot \vec{d} = p$ என்ற தளமும் சந்திக்கும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர்

$\vec{u} = \vec{a} + \left(\dfrac{p - (\vec{a} \cdot \vec{n})}{\vec{b} \cdot \vec{n}}\right)\vec{b}$, இங்கு $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq 0$.

மேலும். $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq 0$ என்பதை நாம் தெளிவாகக் காணலாம்.

இப்பொழுது, $\dfrac{p - \vec{a} \cdot \vec{n}}{\vec{b} \cdot \vec{n}} = \dfrac{5 - \left(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)}{\left(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)} = 0$.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடும் தளமும் சந்திக்கும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர்

$$\vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right) + (0)\left(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}\right) = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடு தளத்தை சந்திக்கும் புள்ளி $(2, -1, 2)$ ஆகும்.

மாற்று முறை

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-2}{2} = t$ (என்க)

இக்கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அமைப்பு $(3t+2, 4t-1, 2t+2)$ ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட கோடும் தளமும் வெட்டிக்கொள்ளும் எனில், இப்புள்ளி $x - y + z - 5 = 0$ என்ற தளத்தின் மீது அமையும்.

ஆதலால், $(3t+2) - (4t-1) + (2t+2) - 5 = 0 \Rightarrow t = 0$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடு, கொடுக்கப்பட்ட தளத்தை $(2, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது.

பயிற்சி 6.9

1. $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}\right)=3$ மற்றும் $3x-5y+4z+11=0$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகவும் $(-2,1,3)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

2. $x+2y+3z=2$ மற்றும் $x-y+z=3$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழிச்செல்வதும், $(3,1,-1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{2}{\sqrt{3}}$ தொலைவில் உள்ளதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$ என்ற கோட்டிற்கும் $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}\right)=8$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)=3$ மற்றும் $2x-2y+z=2$ என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

5. $(3,4,-1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $2x-3y+5z+7=0$ என்ற தளத்திற்கு இணையானதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. மேலும், இவ்விரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவினைக் காண்க.

6. $(1,-2,3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $x-y+z=5$ என்ற தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் நீளம் காண்க.

7. $x-1=\frac{y}{2}=z+1$ என்ற கோடும் $2x-y+2z=2$ என்ற தளமும் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க. மேலும், இக்கோட்டிற்கும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தையும் காண்க.

8. $(4,3,2)$ என்ற புள்ளியில் இருந்து $x+2y+3z=2$ என்ற தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடியின் அச்சுத்தூரங்களையும், செங்குத்தின் நீளத்தையும் காண்க.

பயிற்சி 6.10

V12HP

சரியான அல்லது மிகப்பொருத்தமான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

1. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இணை வெக்டர்கள் எனில், $[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]$-ன் மதிப்பு

   (1) 2 (2) -1 (3) 1 (4) 0

2. $\vec{\beta}$ மற்றும் $\vec{\gamma}$ ஆகியவை அமைக்கும் தளத்தில் $\vec{\alpha}$ அமைந்துள்ளது எனில்,

   (1) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=1$ (2) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=-1$ (3) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=0$ (4) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=2$

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ எனில், $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$-ன் மதிப்பு

   (1) $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$ (2) $\frac{1}{3}|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$ (3) 1 (4) -1

4. $\vec{b}$-க்கு செங்குத்தாகவும் $\vec{c}$-க்கு இணையாகவும் உள்ள வெக்டர் $\vec{a}$ என்றவாறுள்ள ஓரலகு வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ எனில், $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$-க்குச் சமமானது

   (1) $\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $\vec{c}$ (4) $\vec{0}$

5. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=1$ எனில், $\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}+\frac{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}+\frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}$-ன் மதிப்பு

   (1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) 3

6. $\hat{i}+\hat{j},\ \hat{i}+2\hat{j},\ \hat{i}+\hat{j}+\pi\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) π (4) $\frac{\pi}{4}$

7. $\vec{a}$, $\vec{b}$ என்பன $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}]=\frac{1}{4}$ எனுமாறுள்ள ஓரலகு வெக்டர்கள் எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

8. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+\hat{j},\ \vec{c}=\hat{i}$ மற்றும் $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ எனில், $\lambda+\mu$ –ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 6 (4) 3

9. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]=3$ எனுமாறுள்ள ஒரு தளம் அமையா மூன்று பூச்சியமற்ற வெக்டர்கள் எனில், $\{[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}]\}^2$ –ன் மதிப்பு

(1) 81 (2) 9 (3) 27 (4)18

10. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$ எனுமாறுள்ள ஒரு தளம் அமையா மூன்று ஓரலகு வெக்டர்கள் எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

11. $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$ ஆகியவற்றை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு 8 கன அலகுகள் எனில், $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c}),(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})$ மற்றும் $(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ ஆகியவற்றை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு

(1) 8 கன அலகுகள் (2) 512 கன அலகுகள்

(3) 64 கன அலகுகள் (4) 24 கன அலகுகள்

12. $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ என்பன $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$ எனுமாறுள்ள வெக்டர்கள் என்க. $\vec{a},\vec{b}$ என்ற ஒரு ஜோடி வெக்டர்களாலும் மற்றும் $\vec{c},\vec{d}$ என்ற ஒரு ஜோடி வெக்டர்களாலும் அமைக்கப்படும் தளங்கள் முறையே P_1 மற்றும் P_2 எனில், இத்தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) $0°$ (2) $45°$ (3) $60°$ (4) $90°$

13. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$ மற்றும் $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ எனுமாறுள்ள மூன்று வெக்டர்கள் என்க. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்பவை

(1) செங்குத்தானவை (2) இணையானவை

(3) $\frac{\pi}{3}$ என்ற கோணத்தை தாங்குபவை (4) $\frac{\pi}{6}$ என்ற கோணத்தை தாங்குபவை

14. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k},\ \vec{c}=3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ எனில், $\vec{a}$ -க்குச் செங்குத்தானதாகவும் $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் உருவாக்கும் தளத்தில் அமைவதுமான வெக்டர்

(1) $-17\hat{i}+21\hat{j}-97\hat{k}$ (2) $17\hat{i}+21\hat{j}-123\hat{k}$

(3) $-17\hat{i}-21\hat{j}+97\hat{k}$ (4) $-17\hat{i}-21\hat{j}-97\hat{k}$

15. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}, z=2$ மற்றும் $\frac{x-1}{1}=\frac{2y+3}{3}=\frac{z+5}{2}$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

16. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2}$ என்ற கோடு $x+3y-\alpha z+\beta=0$ என்ற தளத்தின் மீது இருந்தால், பின்னர் (α,β) என்பது

(1) $(-5,5)$ (2) $(-6,7)$ (3) $(5,-5)$ (4) $(6,-7)$

17. $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ என்ற கோட்டிற்கும் $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j})+4=0$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம்

(1) 0° (2) 30° (3) 45° (4) 90°

18. $\vec{r}=(6\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+t(-\hat{i}+4\hat{k})$ என்ற கோடு $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=3$ என்ற தளத்தை சந்திக்கும் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள்

(1) $(2,1,0)$ (2) $(7,-1,-7)$ (3) $(1,2,-6)$ (4) $(5,-1,1)$

19. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $3x-6y+2z+7=0$ என்ற தளத்திற்கு உள்ள தொலைவு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

20. $x+2y+3z+7=0$ மற்றும் $2x+4y+6z+7=0$ ஆகிய தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

(1) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (4) $\frac{7}{2\sqrt{2}}$

21. ஒரு கோட்டின் திசைக்கொசைன்கள் $\frac{1}{c},\frac{1}{c},\frac{1}{c}$ எனில்,

(1) $c=\pm 3$ (2) $c=\pm\sqrt{3}$ (3) $c>0$ (4) $0<c<1$

22. $\vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})+t(6\hat{j}-\hat{k})$ என்ற வெக்டர் சமன்பாடு குறிக்கும் நேர்க்கோட்டின் மீது உள்ள புள்ளிகள்

(1) $(0,6,-1)$ மற்றும் $(1,-2,-1)$ (2) $(0,6,-1)$ மற்றும் $(-1,-4,-2)$

(3) $(1,-2,-1)$ மற்றும் $(1,4,-2)$ (4) $(1,-2,-1)$ மற்றும் $(0,-6,1)$

23. ஆதியிலிருந்து $(1,1,1)$ என்ற புள்ளிக்கு உள்ள தொலைவானது $x+y+z+k=0$ என்ற தளத்திலிருந்து அப்புள்ளிக்கு உள்ள தொலைவில் பாதி எனில், k -ன் மதிப்புகள்

(1) ± 3 (2) ± 6 (3) $-3, 9$ (4) $3, -9$

24. $\vec{r}.(2\hat{i}-\lambda\hat{j}+\hat{k})=3$ மற்றும் $\vec{r}.(4\hat{i}+\hat{j}-\mu\hat{k})=5$ ஆகிய தளங்கள் இணை எனில், λ மற்றும் μ -ன் மதிப்புகள்

(1) $\frac{1}{2},-2$ (2) $-\frac{1}{2},2$ (3) $-\frac{1}{2},-2$ (4) $\frac{1}{2},2$

25. ஆதியிலிருந்து $2x+3y+\lambda z=1,\ \lambda>0$ என்ற தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் $\frac{1}{5}$, எனில், λ -ன் மதிப்பு

(1) $2\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$ (3) 0 (4) 1

பாடச்சுருக்கம்

1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பனகொடுக்கப்பட்ட மூன்றுவெக்டர்கள் எனில், $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ என்பதுஅவ்வெக்டர்களின் **திசையிலி முப்பெருக்கல்** எனப்படும். $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ஒரு திசையிலியாகும்.
2. $\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்ற மூன்று வெக்டர்களை ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் இணைகரத்திண்மத்தின் கனஅளவு $\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$ ஆகும்.
3. பூச்சியமற்ற மூன்று வெக்டர்களின் திசையிலி முப்பெருக்கல் பூச்சியம் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அம்மூன்று வெக்டர்களும் ஒருதள வெக்டர்களாகும்.
4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ எனும் ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் ஒருதள வெக்டர்களாக தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை, குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது பூச்சியமற்றதாகவும் மற்றும் $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ எனுமாறுள்ள $r,s,t\in\mathbb{R}$ என்ற திசையிலிகளைக் காணமுடியும்.
5. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ மற்றும் $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ என்பன மூன்று வெக்டர்களைக் கொண்ட ஏதேனும் இரண்டு தொகுப்புகள், மற்றும் $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c},\ \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c},\ \vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$ எனில்
$$\left[\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right].$$
6. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் எனில், $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ என்பது இம்மூன்று வெக்டர்களின் வெக்டர் முப்பெருக்கல் என அழைக்கப்படுகிறது.
7. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ என்பன ஏதேனும் மூன்று வெக்டர்கள்எனில், $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
8. $\vec{a}$ ஐ நிலைவெக்டராகக் கொண்ட நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்வதும் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் $\vec{b}$ க்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$, இங்கு $t\in\mathbb{R}$ ஆகும்.
9. (x_1,y_1,z_1) எனும் புள்ளி வழியாகச்செல்வதும் b_1,b_2,b_3 எனும்திசை விகிதங்களைக் கொண்ட வெக்டருக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு
$$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$$
10. $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ எனும் நேர்க்கோட்டின் மீது உள்ள எந்தவொரு புள்ளியும் $(x_1+tb_1,\ y_1+tb_2,\ z_1+tb_3),t\in\mathbb{R}$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

11. கொடுக்கப்பட்ட $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ எனும் நிலைவெக்டர்களைக் கொண்ட இருபுள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r} = \vec{a} + t\left(\vec{b} - \vec{a}\right), t \in \mathbb{R}$ ஆகும்.
12. (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) எனும் இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.
13. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ எனும் இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில், $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\left|\vec{b} \cdot \vec{d}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{d}\right|}\right)$.
14. இரு நேர்க்கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையுமானால், அவை ஒரு தளம் அமையும் கோடுகள் எனப்படும்.
15. புறவெளியில் இணையாக இல்லாமலும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாமலும் உள்ள இரு கோடுகளை ஒரு தளம் அமையாக் கோடுகள் என அழைக்கிறோம்.
16. ஒரு தளம் அமையா இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரமானது அவ்விரு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தான கோட்டுத்துண்டின் நீளமாகும்.
17. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ எனும் ஒருதளம் அமையாக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் $\delta = \dfrac{\left|(\vec{c} - \vec{a}) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right)\right|}{\left|\vec{b} \times \vec{d}\right|}$, இங்கு $|\vec{b} \times \vec{d}| \neq 0$ ஆகும்.
18. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ எனும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகள் எனில், $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$ ஆகும்.
19. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{b}$ எனும் இணைக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் $d = \dfrac{\left|(\vec{c} - \vec{a}) \times \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$, இங்கு $|\vec{b}| \neq 0$ ஆகும்.
20. $\dfrac{x - x_1}{b_1} = \dfrac{y - y_1}{b_2} = \dfrac{z - z_1}{b_3}$ மற்றும் $\dfrac{x - x_2}{d_1} = \dfrac{y - y_2}{d_2} = \dfrac{z - z_2}{d_3}$ ஒன்றையொன்று வெட்டும் எனில்,
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$
21. ஒரு தளத்திற்கு செங்குத்தான நேர்க்கோட்டை அத்தளத்தின் செங்குத்து அல்லது செங்கோடு என்கிறோம்..
22. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து தளத்திற்கு உள்ள தொலைவு p மற்றும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{d}$ எனில் தளத்தின் சமன்பாடு $\vec{r} \cdot \hat{d} = p$ ஆகும். (செங்கோட்டு வடிவம்)

23. செங்கோட்டு வடிவில் தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $lx+my+nz=p$ ஆகும்.

24. $\vec{a}$ எனும் வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் $\vec{n}$ க்குச் செங்குத்தாக உள்ளதுமான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு $\left(\vec{r}-\vec{a}\right)\cdot\vec{n}=0$ ஆகும்.

25. $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ எனும் புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் a,b,c ஆகியவற்றை திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட வெக்டருக்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $a\left(x-x_1\right)+b\left(y-y_1\right)+c\left(z-z_1\right)=0$ ஆகும்.

26. x, y, z அச்சுக்களில் முறையே a, b, c எனும் வெட்டுத்துண்டுகளை ஏற்படுத்தும் $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ எனும் தளத்தின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ஆகும்.

27. ஒரே கோட்டிலமையாத $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ எனும் மூன்று வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$ ஆகும்.

28. $\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\left(x_2, y_2, z_2\right)$, $\left(x_3, y_3, z_3\right)$ எனும் ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

29. ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் தளத்தின் மீது இருக்கிறது மற்றும் தளத்தின் செங்கோடு நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்தாக உள்ளது எனில், அந்நேர்க்கோடு தளத்தின் மீது இருக்கும்.

30. $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ எனும் இணை அல்லாத இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைவதற்கான நிபந்தனை $\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$ ஆகும்.

31. $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ மற்றும் $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$ எனும் கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைவதற்கான நிபந்தனை $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0$ ஆகும்.

32. $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ மற்றும் $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ எனும் ஒரே தளத்தில் அமையும் இணை அல்லாத இரண்டு நேர்க்கோடுகளை கொண்டுள்ள தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு $\left(\vec{r}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$ அல்லது $\left(\vec{r}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$.

33. $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=p_1$ மற்றும் $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=p_2$ எனும் தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}\right)$ ஆகும்

34. $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ எனும் கோட்டிற்கும் $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ எனும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட குறுங்கோணம் θ எனில், $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{\left|\vec{b} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{n}\right|}\right)$ ஆகும்.

35. $\vec{u}$ எனும் நிலைவெக்டரைக் கொண்ட புள்ளியிலிருந்து $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ எனும் தளத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு $\delta = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n} - p|}{|\vec{n}|}$ ஆகும்.

36. (x_1, y_1, z_1) எனும் புள்ளியிலிருந்து $ax + by + cz = p$ எனும் தளத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு $\delta = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - p|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ஆகும்.

37. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $ax + by + cz + d = 0$ எனும் தளத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு $\delta = \dfrac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ஆகும்.

38. $ax + by + cz + d_1 = 0$ மற்றும் $ax + by + cz + d_2 = 0$ எனும் இணையான இரு தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு $\dfrac{|d_1 - \mathrm{d}_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ஆகும்.

39. $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ மற்றும் $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ எனும் தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $(\vec{r} \cdot \vec{n}_1 - d_1) + \lambda(\vec{r} \cdot \vec{n}_2 - d_2) = 0$, இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

40. $ax_1 + by_1 + cz_1 = d_1$ மற்றும் $ax_2 + by_2 + cz_2 = d_2$ எனும் தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $(ax_1 + by_1 + cz_1 - d_1) + \lambda(ax_2 + by_2 + cz_2 - d_2) = 0$

41. $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ எனும் கோடும் $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ எனும் தளமும் சந்திக்கும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\vec{u} = \vec{a} + \left(\dfrac{p - (\vec{a} \cdot \vec{n})}{\vec{b} \cdot \vec{n}}\right)\vec{b}$, இங்கு $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq \vec{0}$ ஆகும்.

42. $\vec{u}$ எனும் வெக்டரை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளிக்கு $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ எனும் தளத்தில் பிம்பப் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\vec{v}$ எனில், $\vec{v} = \vec{u} + \dfrac{2\left[p - (\vec{u} \cdot \vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும். GeoGebra–வின் "12th Standard Mathematics" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடது பக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "Applications of Vector Algebra" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க. இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். "Scalar Triple Product" பயிற்சித்தாளை தேர்வு செய்க.

D4HY3

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

1. (i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & +2 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ 4. $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

8. $\pm\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 9. $\pm\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 15. HELP

பயிற்சி 1.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3
2. (i) 2 (ii) 3 (iii) 3

3. (i) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 1.3

1. (i) $x = -11, y = 4$ (ii) $x = 2, y = -4$
   (iii) $x = 2, y = 3, z = 4$ (iv) $x = 3, y = -2, z = 1$
2. $x = 2, y = 1, z = -1$ 3. ₹ 18000, ₹ 600
4. 18 நாட்கள், 36 நாட்கள் 5. ₹ 2000, ₹ 1000, ₹ 3000

பயிற்சி 1.4

1. (i) $x = -2, y = 3$ (ii) $x = \frac{1}{2}, y = 3$
   (iii) $x = 2, y = 3, z = 4$ (iv) $x = 1, y = 3, z = 3$
2. 84 3. 50% அமிலத் தன்மை : 6 லிட்டர்கள், 25% அமிலத் தன்மை : 4 லிட்டர்கள்
4. பம்பு A : 15 நிமிடங்கள், பம்பு B : 30 நிமிடங்கள்
5. ₹ 30/-, ₹ 10/-, ₹ 30/-, ஆம்

பயிற்சி 1.5

1. (i) $x = -1, y = 4, z = 4$ (ii) $x = 3, y = 1, z = 2$
2. $a = 2, b = 1, c = 6$ 3. ₹ 30000, ₹ 15000, ₹ 20000
4. $a = 1, b = 3, c = -10$, ஆம்

பயிற்சி 1.6

1. (i) $x = y = z = 1$ (ii) $x = \frac{1}{10}(7 - 5t), y = \frac{1}{10}(5t - 1), z = t, t \in \mathbb{R}$

(iii) தீர்வு இல்லை (iv) $x=\frac{1}{2}(s-t+2), y=s, z=t$ மற்றும் $s,t\in\mathbb{R}$

2. (i) $k=1$ (ii) $k\neq 1, k\neq -2$ (iii) $k=-2$

3. (i) $\lambda=5$ மற்றும் $\mu\neq 9$ (ii) $\lambda\neq 5,\ \mu\in\mathbb{R}$ (iii) $\lambda=5, \mu=9$

பயிற்சி 1.7

1. (i) $x=-t, y=-2t, z=t, t\in\mathbb{R}$ (ii) வெளிப்படைத் தீர்வுகள் மட்டும்

2. (i) $\lambda\neq 8$ (ii) $\lambda=8$

3. $2C_2H_6+7O_2\rightarrow 6H_2O+4CO_2$

பயிற்சி 1.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(3)	(2)	(3)	(4)	(2)	(4)	(4)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(4)	(1)	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)	(4)	(4)
21	22	23	24	25					
(2)	(4)	(4)	(4)	(1)					

பயிற்சி 2.1

1. $-1-i$ 2. $1+i$ 3. 0 4. 0

5. 1 6. $1-i$

பயிற்சி 2.2

1. (i) $4+i$ (ii) $8-i$ (iii) $7+5i$ (iv) $1+17i$

   (v) $15+8i$ (vi) $15+8i$

3. $x=-1,\ y=1$

பயிற்சி 2.3

3. $-z_1=-2-5i$, $z_1^{-1}=\frac{1}{29}(2-5i)$

   $-z_2=3+4i$, $z_2^{-1}=\frac{1}{25}(-3+4i)$

   $-z_3=-1-i$, $z_3^{-1}=\frac{1}{2}(1-i)$

பயிற்சி 2.4

1. (i) $7-5i$ (ii) $\frac{5}{4}(1-i)$ (iii) $\frac{2}{5}-\frac{14i}{5}$

2. (i) $\frac{x}{x^2+y^2}$ (ii) y (iii) $-y-4$

3. $\frac{1}{25}(-1-2i)$, $\frac{1}{5}(-11+2i)$ (4) $\frac{1}{2}(7-i)$

6. (i) 6 (ii) 3

பயிற்சி 2.5

1. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $2\sqrt{2}$ (iii) 32 (iv) 50
3. $11+6i$
8. 10 10. (i) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\pm\left(\sqrt{2}+i2\sqrt{2}\right)$ (iii) $\pm(2-3i)$

பயிற்சி 2.6

3. (i) $y^2=3$ (ii) $x-y=0$ (iii) $x+y=0$ (iv) $x^2+y^2=1$
4. (i) $2+i,3$ (ii) $-1+2i,1$ (iii) $2-4i,\frac{8}{3}$
5. (i) $x^2+y^2-8x-240=0$ (ii) $6x+1=0$

பயிற்சி 2.7

1. (i) $4\left(\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(ii) $2\sqrt{3}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(iii) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(iv) $\sqrt{2}\left(\cos\left(2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (ii) $\frac{-i}{2}$

பயிற்சி 2.8

3. 1 5. $3\,\text{cis}\frac{\pi}{3}, -3, 3\,\text{cis}\frac{5\pi}{3}$ 7. -1

9. (i) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}$ (ii) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i5\pi}{12}}$ (iii) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i5\pi}{4}}$

பயிற்சி 2.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(1)	(1)	(2)	(3)	(1)	(4)	(1)	(1)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(2)	(4)	(2)	(2)	(3)	(1)	(3)	(4)	(4)
21	22	23	24	25					
(2)	(3)	(4)	(1)	(1)					

பயிற்சி 3.1

1. 60
2. (i) $x^3-6x^2+11x-6=0$ (ii) $x^3-3x+2=0$ (iii) $x^3-4x^2-4x+16=0$
3. (i) $x^3+4x^2+12x+32=0$ (ii) $4x^3+3x^2+2x+1=0$ (ii) $x^3-2x^2+3x-4=0$

4. $2, 3, \frac{1}{3}$ 5. 10 6. $6, 4, -1$ 7. $\sum \frac{\alpha}{\beta\gamma} = \frac{2ac - b^2}{ad}$

8. $2x^2 - 3x - 20 = 0$ 11. $x^3 + x - 12 = 0$

பயிற்சி 3.2

1. $k < 0$ எனும்போது, பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு மெய்யெண் மூலங்களாக இருக்கும்.
   $k = 0$ அல்லது $k = 8$ எனும்போது மூலங்கள் சமமான மெய்யெண் மூலங்களாக இருக்கும்.
   $0 < k < 8$ எனும்போது மூலங்கள் கலப்பெண் மூலங்களாக இருக்கும்.
   $k > 8$ எனும்போது மூலங்கள் வெவ்வேறான மெய்யெண் மூலங்களாக இருக்கும்.

2. $x^2 - 4x + 7 = 0$ 3. $x^2 - 6x + 13 = 0$ 4. $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$

பயிற்சி 3.3

1. $-3, 3, \frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2$ 3. $\frac{2}{3}, 2, 6$ 4. $k = 2,\ 2, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

5. $1 - 2i, 1 + 2i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{37}}{2}, \frac{1-\sqrt{37}}{2}$ 6. (i) $1, \frac{1}{2}, 3$ (ii) $-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 7. $\pm 3, \pm\sqrt{5}$

பயிற்சி 3.4

1. (i) $\{-2, 3, -7, 8\}$ (ii) $3, 3, 3+\sqrt{17}, 3-\sqrt{17}$ 2. $\left\{1, -2, \frac{-1+2\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-2\sqrt{5}}{2}\right\}$

பயிற்சி 3.5

1. (i) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$, $\sin x = 4$ -க்குத் தீர்வு இல்லை. (ii) $2, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$

2. (i) $x = 1$ (ii) விகிதமுறு மூலங்கள் இல்லை 3. 4^n 4. $\frac{b^2}{4a}, \frac{9a^3}{b^2}$

5. (i) $2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ii) $+1, -1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

6. $2, 3$ 7. $\frac{1}{3}, 3, -\frac{1}{2}$ மற்றும் -2

பயிற்சி 3.6

1. அதிகபட்சம் நான்கு மிகையெண் மூலங்களும் அதிகபட்சம் மூன்று குறையெண் மூலங்களும் இருக்கும்.
2. அதிகபட்சம் இருமிகையெண் மூலங்களும் மற்றும் குறையெண் மூலங்கள் இல்லாமலும் இருக்கும்.
4. அதிகபட்சம் ஒரு மிகையெண் மூலமும் அதிகபட்சம் ஒரு குறையெண் மூலமும் இருக்கும்.
5. மிகையெண் மூலம் மற்றும் குறையெண் மூலம் இராது.

பயிற்சி 3.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(1)	(3)	(1)	(3)	(4)	(1)	(3)	(1)	(2)

பயிற்சி 4.1

1. (i) $x = n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm10$ (ii) $x = (4n-1)\dfrac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1$

2. (i) $1, \dfrac{2\pi}{7}$ (ii) $1,\ 6\pi$ (iii) $4,\ \pi$ 4. (i) $\dfrac{\pi}{3}$ (ii) $-\dfrac{\pi}{4}$

5. $x = 0$ 6. (i) $\{-1,\ 1\}$ (ii) $[0,\ 1]$ 7. $\dfrac{\pi}{3}$

பயிற்சி 4.2

1. (i) $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, -6$ (ii) $x = (2n+1)\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, -3$

2. $-\dfrac{\pi}{6} \notin [0,\ \pi]$ 3. மெய் 4. $\dfrac{\pi}{3}$

5. (i) $\dfrac{5\pi}{6}$ (ii) $-\dfrac{\pi}{6}$ (iii) $\dfrac{24\pi}{119}$ 6. (i) $[-5,\ 5]$ (ii) $[-1,\ 1]$

7. $0 < x < \dfrac{1}{3}$ 8. (i) 0 (ii) $\dfrac{17\pi}{12}$

பயிற்சி 4.3

1. (i) $[-3,\ 3]$ (ii) $\mathbb{R}$ 2. (i) $\dfrac{\pi}{4}$ (ii) $-\dfrac{\pi}{6}$

3. (i) $\dfrac{7\pi}{4}$ (ii) 1947 (iii) -0.2021 4. (i) ∞ (ii) $-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$ (iii) $\dfrac{24}{25}$

பயிற்சி 4.4

1. (i) $\dfrac{\pi}{6}$ (ii) $\dfrac{\pi}{6}$ (iii) $-\dfrac{\pi}{4}$ 2. (i) $-\dfrac{\pi}{3}$ (ii) $\cot^{-1}(2) - \dfrac{\pi}{6}$ (iii) $-\dfrac{5\pi}{6}$

பயிற்சி 4.5

1. (i) $-\dfrac{\pi}{2}$ (ii) $-\dfrac{\pi}{4}$ (iii) $5 - 2\pi$

2. (i) $\sqrt{2x - x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$ (iii) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{3 - 4x - 4x^2}}$

3. (i) $\dfrac{\pi}{6}$ (ii) 0 (iii) $\dfrac{17}{6}$ 8. $\dfrac{\pi}{4}$

9. (i) $x = 13$ (ii) $x = \dfrac{a-b}{1+ab}$ (iii) $x = 2n\pi,\ x = n\pi + \dfrac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$

(iv) $x = \sqrt{3}$

10. மூன்று

பயிற்சி 4.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(3)	(2)	(3)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(4)	(4)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(2)	(2)	(1)	(3)	(3)	(2)	(2)	(4)	(4)

பயிற்சி 5.1

1. $x^2+y^2 \pm 10y=0$ 2. $(x-2)^2+(y+1)^2=50$

3. $x^2+y^2+4x+4y+4=0$ or $x^2+y^2+20x+20y+100=0$ 4. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

5. $x^2+y^2-5x+3y-22=0$ 6. $x^2+y^2=1$

7. $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 8. ± 12

9. $x-5y+8=0,\ 5x+y-12=0$ 10. வெளியே, உள்ளே, வெளியே

11. (i) $(0,-2), 0$ (ii) $(-3,2), 3$ (iii) $\left(\frac{1}{2},-1\right), \frac{\sqrt{17}}{2}$ (iv) $\left(\frac{3}{2},-1\right), \frac{3}{2}$

12. $p=q=3,\ (1,0), 5$

பயிற்சி 5.2

1. (i) $y^2=16x$ (ii) $3x^2=-4y$ (iii) $(y+2)^2=12(x-1)$ (iv) $y^2=16x$

2. (i) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ (ii) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ (iii) $\frac{16x^2}{625}+\frac{y^2}{25}=1$ (iii) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=1$

3. (i) $\frac{9x^2}{16}-\frac{9y^2}{20}=1$ (ii) $\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$ (iii) $\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{64}=1$

4.

	முனை	குவியம்	இயக்குவரையின் சமன்பாடு	செவ்வகலத்தின் நீளம்
i.	$(0,0)$	$(4,0)$	$x=-4$	16
ii.	$(0,0)$	$(0,6)$	$y=-6$	24
iii.	$(0,0)$	$(-2,0)$	$x=2$	8
iv.	$(1,-2)$	$(1,-4)$	$y=0$	8
v.	$(1,2)$	$(3,2)$	$x=-1$	8

	கூம்பு வளைவின் வகை	மையம்	முனைகள்	குவியங்கள்	இயக்குவரைகள்
i.	நீள்வட்டம்	$(0,0)$	$(\pm 5,0)$	$(\pm 4,0)$	$x=\pm\frac{25}{4}$
ii.	நீள்வட்டம்	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{10})$	$(0,\pm\sqrt{7})$	$y=\pm\frac{10}{\sqrt{7}}$
iii.	அதிபரவளையம்	$(0,0)$	$(\pm 5,0)$	$(\pm 13,0)$	$x=\pm\frac{25}{13}$
iv.	அதிபரவளையம்	$(0,0)$	$(0,\pm 4)$	$(0,\pm 5)$	$y=\pm\frac{16}{5}$

8.	கூம்பு வளைவின் வகை	மையம்	முனைகள்	குவியங்கள்	இயக்குவரைகள்
i.	நீள்வட்டம்	$(3,4)$	(üüüü) (−)	$(3,12),(3,-4)$	$y=\frac{321}{8}$, $y=\frac{-257}{8}$
ii.	நீள்வட்டம்	$(-1,2)$	$(-11,2),(9,2)$	$(-7,2),(5,2)$	$x=\frac{47}{3}$, $x=\frac{-53}{3}$
iii.	அதிபரவளையம்	$(-3,4)$	$(-18,4),(12,4)$	$(-20,4),(14,4)$	$x=\frac{174}{17}$, $x=\frac{-276}{17}$
iv.	அதிபரவளையம்	$(-1,2)$	$(-1,7),(-1,-3)$	$(-1,2+\sqrt{41})$ $(-1,2-\sqrt{41})$	$y=\frac{25}{\sqrt{41}}+2$, $y=\frac{-25}{\sqrt{41}}+2$
v.	நீள்வட்டம்	$(4,-2)$	$(4,-2+3\sqrt{2})$, $(4,-2-3\sqrt{2})$	$(4,-2+\sqrt{6})$, $(4,-2-\sqrt{6})$	$y=-2+3\sqrt{6}$, $y=-2-3\sqrt{6}$

vi.	அதிபரவளையம்	$(2,-3)$	$(3,-3),(1,-3)$	$(2+\sqrt{10}-3),$ $(2-\sqrt{10},-3)$	$x=\frac{1}{\sqrt{10}}+2,$ $x=\frac{-1}{\sqrt{10}}+2$

பயிற்சி 5.3

1. அதிபரவளையம் 2 வட்டம் 3. நீள்வட்டம்
4. வட்டம் 5. அதிபரவளையம் 6. பரவளையம்

பயிற்சி 5.4

1. $x-y-3=0, x-9y+13=0$ 2. $10x-3y+32=0,\ 10x-3y-32=0$
3. $(-3,1)$ 4. $x-y+4=0$
5. $x-2y+8=0$ 6. $4x-3y-6=0, 3x+4y-42=0$

பயிற்சி 5.5

1. 8.4 மீ 2. 26.6 மீ 3. 3 மீ
4. $y^2=4.8x$, 1.3 மீ 5. 3.53 மீ, 5.08 மீ 6. 90.82மீ, 148.91மீ
7. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 8. $3\sqrt{3}$ மீ 9. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ 10. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

பயிற்சி 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(1)	(3)	(4)	(3)	(3)	(1)	(1)	(3)	(2)	(2)	(1)	(4)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	---
(3)	(1)	(4)	(4)	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(3)	(3)	(2)	---

பயிற்சி 6.1

11. 80 அலகுகள் 12. 69 அலகுகள்

13. $\sqrt{179},\ \frac{3}{\sqrt{179}},\ \frac{-11}{\sqrt{179}},\ \frac{-7}{\sqrt{179}}$ 14. $-96\hat{i}+115\hat{j}+15\hat{k}$

பயிற்சி 6.2

1. 24 2. 720 கன அலகுகள் 3. -5
4. ± 12 5. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 6. ஒரு தளத்தில் அமைந்தவை 7. 2

பயிற்சி 6.3

1. (i) $-2\hat{i}+14\hat{j}-22\hat{k}$ (ii) $22\hat{i}+14\hat{j}+2\hat{k}$ 5. -74
7. $l=0,\ m=10,\ n=-3$ 8. $\theta=\frac{\pi}{3}$

பயிற்சி 6.4

1. $\left(\vec{r}-\left(4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}\right)\right)\times\left(2\hat{i}-6\hat{j}+7\hat{k}\right)=\vec{0}$, $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z+7}{7}$

2. $\vec{r}=\left(-2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+t\left(-4\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}\right)$, $\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-4}{-6}$

3. $\left(\dfrac{32}{3},0,\dfrac{47}{3}\right)$, $(0,16,-11)$

4. $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7}\right)$, $\vec{r}=\left(5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ or

$\vec{r}=\left(7\hat{i}+9\hat{j}+13\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$,

$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z-7}{6}$ or $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-13}{6}$

5. (i) 0° (ii) $\dfrac{\pi}{6}$ (iii) $\dfrac{\pi}{2}$ 6. $\dfrac{\pi}{2}$ 7. $a=18,\ b=\dfrac{2}{3}$ 8. 1

பயிற்சி 6.5

1. $\vec{r}=\left(5\hat{i}+2\hat{j}+8\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right),t\in\mathbb{R}$, $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-8}{-2}$

2. $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$ அலகுகள் 3. $\dfrac{9}{2}$ 4. $(6,2,1)$ 5. 2 அலகுகள்

6. $\dfrac{\sqrt{83}}{\sqrt{6}}$ அலகுகள் 7. $(1,6,0)$, $\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$

பயிற்சி 6.6

1. $\vec{r}\cdot\left(\dfrac{3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}}{5\sqrt{2}}\right)=7$ 2. $\dfrac{12}{13},\dfrac{3}{13},\dfrac{-4}{13}$; $\vec{r}\cdot\left(\dfrac{12\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}}{13}\right)=5$; 5

3. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}\right)=35$; $x+3y+5z=35$ 4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)=2$; $x+y+z=2$

5. x -வெட்டுத்துண்டு $=2$, y- வெட்டுத்துண்டு $=3$, z- வெட்டுத்துண்டு $=-4$

6. $\dfrac{x}{u}+\dfrac{y}{v}+\dfrac{z}{w}=3$

பயிற்சி 6.7

1. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}\right)=20$; $x-2y+4z-20=0$

2. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right)=9$; $3x+4y-5z-9=0$

3. $\vec{r}=\left(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}\right)s,t\in\mathbb{R}$;

$12x-11y-16z+14=0$

4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+10\hat{j}+7\hat{k}\right)=9$; $x+10y+7z-9=0$

5. $\vec{r}=\left(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)+s\left(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)s,t\in\mathbb{R}$; $9x-2y-5z+4=0$

6. $\vec{r} = \left(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}\right)+s\left(-4\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}-2\hat{j}\right) s,t \in \mathbb{R}$; $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)=16$;
$2x+3y+4z-16=0$
7. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}\right)=6$; $3x+5y-7z-6=0$

பயிற்சி 6.8

1. $\vec{r}\cdot\left(17\hat{i}-47\hat{j}-24\hat{k}\right)=-172$
2. $x+2y-z-4=0$
3. $m=\pm\sqrt{2}$
4. $-2, 2,\ y+z+1=0,\ y-z+1=0$

பயிற்சி 6.9

1. $15x-47y+28z-7=0$
2. $5x-11y+z-17=0$
3. $\sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$
4. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$
5. $2x-3y+5z+11=0, \frac{4}{\sqrt{38}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ அலகுகள்
7. $(2,2,0)$, $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$
8. $(3,1,-1)$; $\sqrt{14}$ அலகுகள்.

பயிற்சி 6.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(3)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(1)	(1)	(2)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(1)	(2)	(4)	(4)	(2)	(3)	(4)	(2)	(1)
21	22	23	24	25					
(2)	(3)	(4)	(3)	(1)					

கலைச்சொற்கள்

அத்தியாயம் 1

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

சேர்ப்பு அணி	Adjoint matrix
நேர்மாறு அணி	Inverse matrix
தரம்	Rank
தொடக்க நிலை உருமாற்றங்கள்	Elementary transformation
ஏறுபடி வடிவம்	Echelon form
வெளிப்படைத் தீர்வு	Trivial solution
வெளிப்படையற்ற தீர்வு	Non-trivial solution
விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி	Augmented matrix
ஒருங்கமைவு உடையது	Consistent
சுழுமுனை	Pivot

அத்தியாயம் 2

கலப்பு எண்கள்

கலப்பு எண்கள்	Complex numbers
கற்பனை அலகு	Imaginary unit
செவ்வக வடிவம்	Rectangular form
ஆர்கன்ட் தளம்	Argand Plane
ஒரு கலப்பெண்ணின் இணைக் கலப்பெண்	Conjugate of a complex number
மேல் எல்லை	Upper bound
கீழ் எல்லை	Lower bound

துருவ வடிவம்	Polar form
அடுக்குக்குறி வடிவம்	Exponential form
முக்கோணவியல் வடிவம்	Trigonometric form
எண்ணளவு	Absolute value
மட்டு மதிப்பு	Modulus
வீச்சு	Argument or amplitude
முதன்மை வீச்சு	Principal argument
ஆய்லர் வடிவம்	Euler's form

அத்தியாயம் 3

சமன்பாட்டியல்

இணைக்கலப்பெண் மூலத்தேற்றம்	Complex conjugate root theorem
முதன்மைக் கெழு	Leading coefficient
முதன்மை உறுப்பு	Leading term
தலைஒற்றை பல்லுறுப்புக் கோவை	Monic polynomial
பல்லுறுப்புக் கோவையற்ற சமன்பாடு	Non-polynomial equation
மெய்யற்ற கலப்பெண்	Non real complex number
நாற்படி பல்லுறுப்புக் கோவை	Quartic polynomial
அடிப்படைத்தீர்வு	Radical solution
விகிதமுறு மூலத்தேற்றம்	Rational root Theorem

தலைகீழ் சமன்பாடு	Reciprocal equation
தலைகீழ் பல்லுறுப்புக் கோவை	Reciprocal polynomial
எளிய மூலம்	Simple root
பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவை	Zero polynomial

அத்தியாயம் 4

நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள்

நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள்	Inverse trigonometric functions
முதன்மை மதிப்பு	Principal value
வீச்சு	Amplitude
காலம்	Period
முதன்மை சார்பகம்	Principal domain
காலமுறைச் சார்பு	Periodic function
நேர்மாறு தலைகீழி முற்றொருமைகள்	Reciprocal inverse identities
பிரதிபலிப்பு முற்றொருமைகள்	Reflection identities
நேர்மாறு துணைச் சார்பு முற்றொருமைகள்	Cofunction inverse identities

அத்தியாயம் 5

இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல்-II

வட்டம்	Circle
பரவளையம்	Parabola
நீள்வட்டம்	Ellipse
அதிபரவளையம்	Hyperbola
இயற்கணித நுட்பங்கள்	Algebraic techniques
வடிவியல் கணக்குகள்	Geometrical problems
வானியல்	Astronomy
கூம்பு வளைவுகள்	Conics
குவியம்	Focus
இயக்குவரை	Directrix
மையத்தொலைத் தகவு	Eccentricity
குவி நாண்	Focal chord
முனை	Vertex
செவ்வகலம்	Latus rectum
நெட்டச்சு	Major axis
குற்றச்சு	Minor axis
துணையச்சு	Transverse axis
குறுக்கச்சு	Conjugate axis
துணை வட்டம்	Auxiliary circle
உள் வட்டம்	Incircle
தொலைத் தொடுகோடுகள்	Asymptotes

சிதைந்த வடிவங்கள்	Degenerate forms
இரட்டைக் கூம்பு	Double napped cone
துணையலகுச் சமன்பாடுகள்	Parametric equation
இயக்கு வட்டம்	Director circle
நீள்வட்ட சுற்றுப்பாதை	Elliptic orbit
பிரதிபலிப்பு பண்புகள்	Reflective property

அத்தியாயம் 6

வெக்டர் இயற்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

பெட்டிப் பெருக்கல்	Box product
வெட்டுக்கோடு	Line of intersection
திருப்புத்திறன்	Moment
செங்குத்து	Normal
இணைகர த் திண்மம்	Parallelepiped
துணையலகு	Parameter
தளம்	Plane
சுழல் விசை	Rotaional force
ஒரு தள அமையாக் கோடுகள்	Skew lines
திருப்பு விசை	Torque
முப்பெருக்கல்	Triple product

மேற்கோள் நூல்கள்

(1) Higher Algebra - S. Barnard, and J. M. Child, Macmillan & Co Ltd, New York.

(2) A First Course in Complex Analysis with Applications - Dennis D. Zill, and Patrik D. Shanahan, Jones and Bartlett Publishers, London.

(3) Complex Variables and Applications - James ward Brown, and Ruel V.Churchill, McGraw-Hill Higher education, New Delhi.

(4) Elementary Theory of Equations - Dickson, L. E., New York: Wiley, pp. 36-37, 1914.

(5) Polynomials and Polynomial Inequalities.Borwein, P. and Erdélyi, New York: Springer, Verlag, p. 4, 1995.

(6) Beyond the Quartic Equation - King, R. B.,Boston, MA: Birkhäuser, 1996.

(7) Fundamentals of College Algebra - Charles D. Miller, Margaret L. Lial, David I. Schneider: Scott & Foresman/Little & Brown Higher Education, 3rd edition 1990,

(8) College Algebra – Robert Blitzer

(9) College Algebra – Ron Larson

(10) A text book two dimensional Geometry - (i) Satpal (ii) Harbans Lal

(11) Vector Calculus - Jerrold E. Marsden, Anthony Tromba

(12) Vector Algebra - Schaum's Outline Series

(13) Analytical Geometry and Calculus, with vectors - McGraw-Hill Book Company, Inc.

பாடநூல் உருவாக்கக் குழு - வகுப்பு 12
கணிதவியல் – தொகுதி 1

பாட வல்லுநர்கள்

முனைவர் S. உதயபாஸ்கரன்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
வேல் டெக் ரங்கராஜன் முனைவர் சகுந்தலா அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப ஆராய்ச்சி மற்றும் மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
(நிகர்நிலை பல்கலைக் கழகம்)
ஆவடி, சென்னை.

முனைவர் R. மூர்த்தி,
முதல்வர் (ஓய்வு)
அரசு கலை மற்றும் அறிவியல் கல்லூரி,
உத்திரமேரூர், காஞ்சிபுரம்.

முனைவர் E. சந்திரசேகரன்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
வேல் டெக் ரங்கராஜன் முனைவர் சகுந்தலா அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப ஆராய்ச்சி மற்றும் மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
(நிகர்நிலை பல்கலைக் கழகம்)
ஆவடி, சென்னை.

முனைவர் R. வேம்பு,
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
S.B.K. கல்லூரி,
அருப்புக்கோட்டை.

முனைவர் ஃபெல்பின் C. கென்னடி,
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்,
கணிதத்துறை, ஸ்டெல்லா மேரிஸ் கல்லூரி,
சென்னை.

முனைவர் R. ரூப்குமார்,
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
தமிழ்நாடு மத்திய பல்கலைக் கழகம்,
திருவாரூர்.

முனைவர் G. பழனி,
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
டாக்டர் அம்பேத்கார் அரசு கலைக் கல்லூரி,
வியாசர்பாடி, சென்னை.

ஆலோசகர்கள்

முனைவர் V. தங்கராஜ்,
முன்னாள் இயக்குநர்,
RIASM, சென்னை பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் E.S. ஜம்புலிங்கம்,
முதல்வர் (ஓய்வு),
அரசு கலைக் கல்லூரி,
திருத்தணி.

முனைவர் P.R. விட்டல்,
முதல்வர் மற்றும் துறைத்தலைவர் (ஓய்வு),
கணிதத்துறை,
R.K.M, விவேகானந்தா கல்லூரி,
மயிலாப்பூர், சென்னை.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

B. தமிழ்செல்வி,
துணை இயக்குநர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

நிவேதா செல்வராஜ்,
உதவிப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை.

பாடநூலாசிரியர்கள்

M. மதிவாணன்,
தலைமையாசிரியர்,
அரசு மாதிரி மேல்நிலைப் பள்ளி,
காரிமங்கலம், தருமபுரி.

N. கலைச்செல்வம்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
சென்னை பெண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி,
நுங்கம்பாக்கம். சென்னை,

A. பாலமுருகன்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
அதியமான் அரசினர்
ஆண்கள் மேல்நிலைப்பள்ளி,
தருமபுரி.

S. பன்னீர்செல்வம்,
முதுகலை ஆசிரியர் (ஓய்வு)
அரசினர் மேல்நிலைப்பள்ளி,
G.K.M. காலனி, சென்னை.

C.S. வீரராகவன்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
ஸ்ரீகிருஷ்ணா மெட்ரிக் மேல்நிலைப்பள்ளி,
T.V.S. நகர், கோயம்புத்தூர்.

இணையச் செயல்பாடு ஒருங்கிணைப்பாளர்

D. வாசுசுராஜ்,
முதுகலை கணித ஆசிரியர்
மற்றும் துறைத்தலைவர்
K.R.M. பொதுப்பள்ளி, செம்பியம்,
சென்னை.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக் குழு

தட்டச்சு, கலை மற்றும் வடிவமைப்பு

S. மனோகரன்,
V.V. கிராபிக்ஸ்
பழவந்தாங்கல்,
சென்னை-114.

அட்டை வடிவமைப்பு

கதிர் ஆறுமுகம்

தரக் கட்டுப்பாடு

ஜெரால்டு வில்சன்,
யோகேஷ்
ராஜேஷ் தங்கப்பன்,

ஒருங்கிணைப்பு

ரமேஷ் முனிசாமி

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

குறிப்பு

குறிப்பு